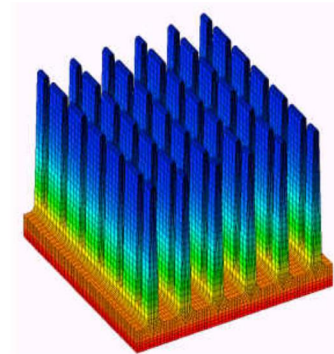
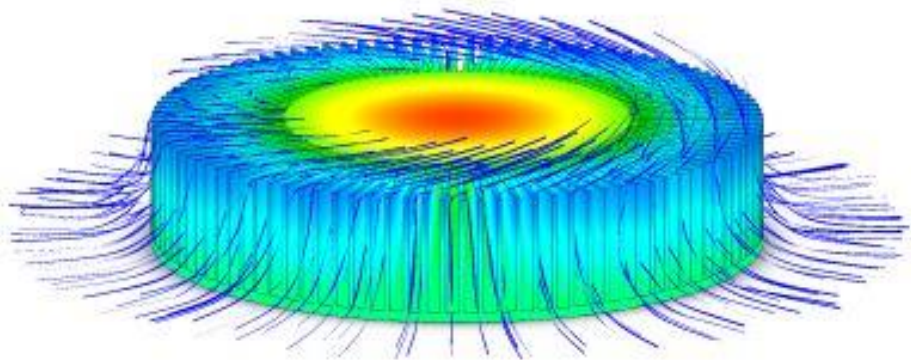


III. Ecuații cu derivate parțiale

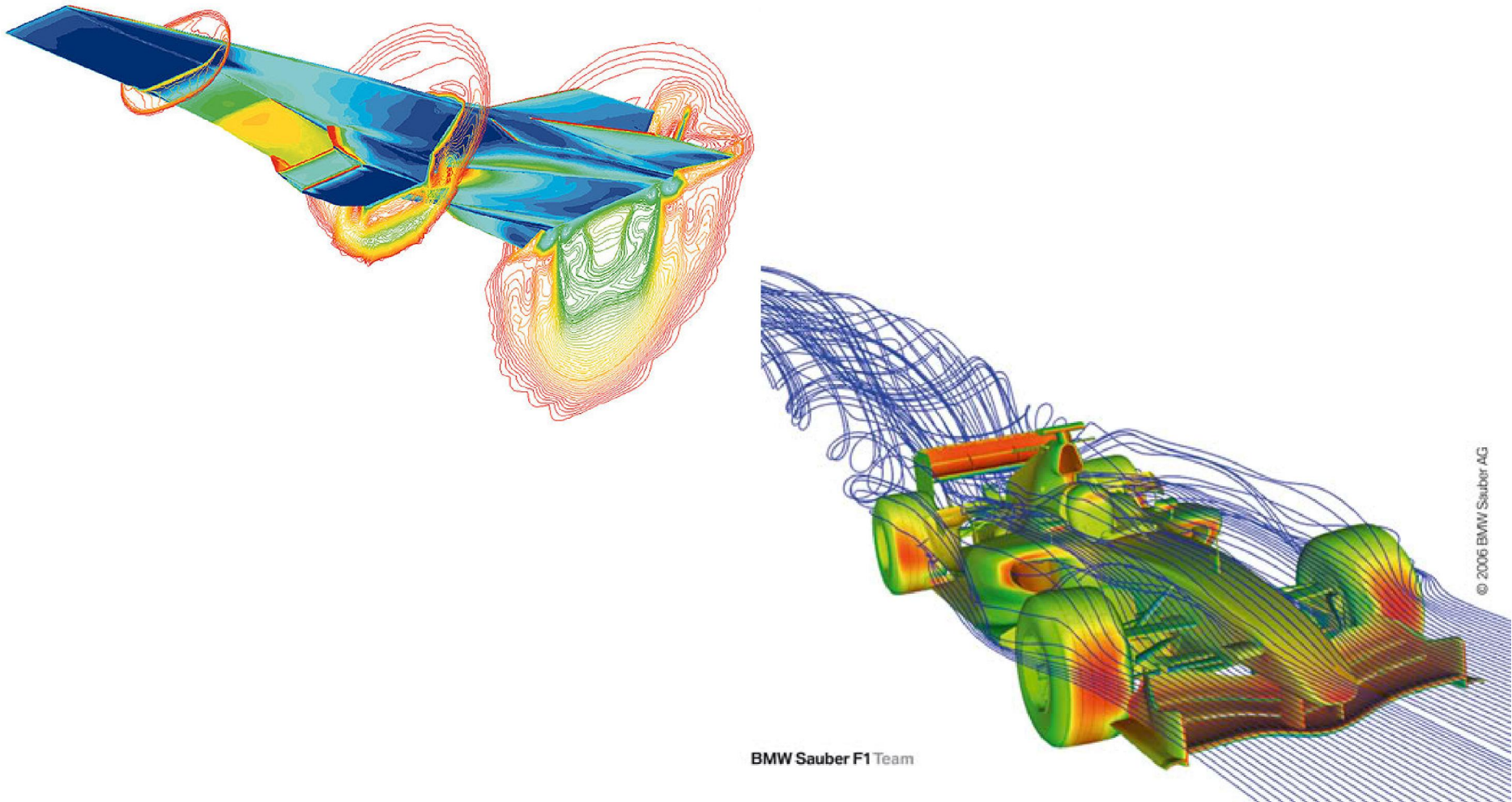
III.1. Noțiuni teoretice introductive

Cele mai multe aplicații tehnice sunt modelate cu ajutorul ecuațiilor cu derivate parțiale. Amintim aici domenii precum mecanica fluidelor, transfer de căldură, masă și radiație. Dam în continuare câteva exemple de simulare:

- radiatorul unui procesor :



- curgerea aerului în jurul unui avion sau a unei mașini



Cea mai generală formă a unei ecuații cu derivate parțiale liniară de ordinul doi este:

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + fu = g(x, y), \quad (x, y) \in D \subset \mathbf{R}^2 \quad (\text{III.1})$$

unde $a, b, c, \dots$ sunt constante, iar g este o funcție cunoscută. În funcție de coeficienții părții principale a operatorului (III.1):

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

putem clasifica ecuațiile de tipul (III.1) în eliptice, parabolice și hiperbolice și se pot reduce întotdeauna la o formă canonică specifică fiecărui caz. Deci avem ecuații de tip:

Eliptic: Acestea sunt ecuațiile pentru care $b^2 - 4ac < 0$ și se pot reduce la forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + Au = g(x, y) \quad (\text{III.2})$$

unde $A = 0, \pm 1$. Ecuația (III.2) este cunoscută sub numele de ecuația lui Laplace, dacă $A = 0$ și $g = 0$, ecuația lui Poisson dacă $A = 0$ și $g \neq 0$ și ecuația lui Helmholtz dacă $A = \pm 1$ și $g \neq 0$.

Parabolic: Acestea sunt ecuațiile pentru care $b^2 - 4ac = 0$ și se pot reduce la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = g(x, y) \quad (\text{III.3})$$

Ecuația (III.3) este cunoscută și sub numele de ecuația căldurii sau a difuziei.

Hieprbolic: Acestea sunt ecuațiile pentru care $b^2 - 4ac < 0$ și se pot reduce la forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + Bu = g(x, y) \quad (\text{III.4})$$

unde $B = 0$ sau 1 . Dacă $B = 0$ atunci se obține ecuația undelor, iar dacă $B = 1$ obținem ecuația liniară Klein-Gordon.

Trebuie remarcat faptul că pentru a caracteriza ecuațiile diferențiale de ordin superior este necesară o abordare diferită. În general operatorii eliptici și hiperbolici nu depind de dimensiunea spațiului, iar operatorul parabolic este o combinație dintre un operator eliptic și unul de evoluție de ordinul întâi.

III.2. Ecuații parabolice cu o variabilă spațială

Ecuația căldurii

Considerând că în ecuația (III.3) omogenă ($g=0$) variabila x reprezintă timpul atunci aceasta se reduce la o singură variabilă spațială pe care o vom nota cu x și putem obține printr-o transformare că $x \in [0,1]$. Presupunem de asemenea, fără a reduce generalitatea, că sunt date condiții Dirichlet omogene pe frontieră. Așadar, ecuația căldurii (III.3) devine:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (\text{III.5})$$

Pentru a rezolva ecuația ecuația (III.5) avem nevoie de o condiție inițială

$$u(0, x) = u^0(x), \quad x \in [0, 1] \quad (\text{III.6})$$

și de condiții pe frontieră:

$$u(t, 0) = u(t, 1), \quad t > 0 \quad (\text{III.7})$$

Se știe că pentru problema de tipul (III.5) – (III.7) se poate obține o soluție prin metoda separării variabilelor sub forma unei serii:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-(k\pi)^2 t} \sin k\pi x \quad (\text{III.8})$$

unde coeficienții a_k se determină prin dezvoltarea condiției inițiale în serie Fourier .

$$a_k = 2 \int_0^1 u^0(x) \sin k\pi x dx \quad (\text{III.9})$$

Se observă faptul că soluția prezintă câteva aspecte ce nu permit aplicarea ei în practică: trebuie limitată seria (III.8) la un număr finit de termeni, iar coeficienții a_k se pot determina efectiv doar pentru unele cazuri particulare de soluții inițiale.

Scheme explicite

Vom aproxima soluția problemei (III.5) – (III.7) folosind diferențe finite. Pentru aceasta este necesară o divizarea domeniului $[0, t_f] \times [0, 1]$ în subdomenii ce formează o rețea sau o grilă bidimensională (vezi Figura 20).

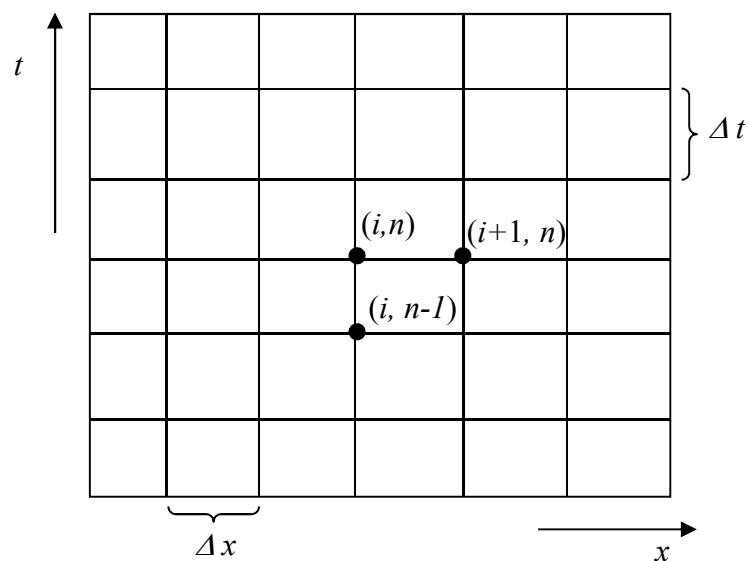


Figura 20. Reprezentare schematică a grilei bidimensionale.

Considerând o grilă echidistantă atunci nodurile sau punctele grilei se pot obține astfel:

$$(x_i = i\Delta x, t_n = n\Delta t), \quad i = 0, 1, \dots, N_x, \quad n = 0, 1, \dots, N_t \quad (\text{III.10})$$

Vom nota prin

$$U_i^n \approx u(x_i, t_n) \quad (\text{III.11})$$

valoarea aproximativă a soluției problemei (III.5) – (III.7) în nodul (i, n) . Aproximăm în continuare derivata temporală folosind diferențe finite progresive, iar derivata spațială folosind diferențe finite centrale

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_n) \approx \frac{u(x_i, t_{n+1}) - u(x_i, t_n)}{\Delta t} \quad (\text{III.12})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_n) \approx \frac{u(x_{i+1}, t_n) - 2u(x_i, t_n) + u(x_{i-1}, t_n)}{(\Delta x)^2} \quad (\text{III.13})$$

apoi înlocuind în (III.3) și ținând cont de notația (III.11) obținem:

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} = \frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \quad (\text{III.14})$$

de unde putem exprima:

$$U_i^{n+1} = U_i^n + \nu(U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n) \quad (\text{III.15})$$

unde

$$\nu = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \quad . \quad (\text{III.16})$$

Se observă că valoarea lui u de la pasul de timp t_{n+1} se calculează folosind doar valori de la pasul de timp t_n (vezi Figura 21). În acest caz vom spune că avem o metodă explicită cu **diferențe finite**. Folosind condiția inițială (III.6) și condițiile pe frontieră (III.7) care se vor scrie în cazul discret:

$$U_i^0 = u^0(x), \quad i = 1, 2, \dots, N_x - 1 \quad (\text{III.17})$$

$$U_0^n = U_{N_x}^n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{III.18})$$

putem calcula toate valorile interioare la pașii următori de timp (înaintând în timp).

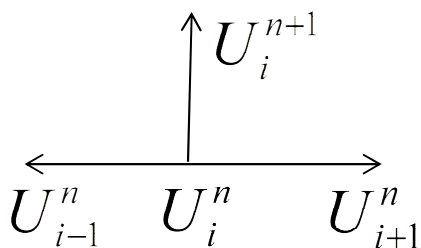


Figura 21. Reprezentare schematică a dependenței temporale în schemele explicite.

Vom aplica schema explicită pentru condiția inițială

$$u^0(x) = \begin{cases} x, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 1-x, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} \quad (\text{III.19})$$

și în acest caz particular soluția este

$$u(x, t) = \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin\left(\frac{1}{2}k\pi\right) \sin(k\pi x) e^{-(k\pi)^2 t} \quad (\text{III.20})$$

unde coeficienții a_k se pot calcula folosind Mathematica:

```
In[7]:= ak = FullSimplify[2 Integrate[x Sin[k Pi x], {x, 0, 1/2}] +  
2 Integrate[(1 - x) Sin[k Pi x], {x, 1/2, 1}], k ∈ Integers && k > 0]
```

```
Out[7]= 
$$\frac{4 \sin\left[\frac{k\pi}{2}\right]}{k^2 \pi^2}$$

```

Rezolvăm problema dată de ecuațiile (III.5), (III.19) și (III.7) analitic folosind 100 de termeni în seria (III.20) și numeric pentru $\Delta t = 0.0013$ și $\Delta x = 0.05$. În Figura 22 sunt reprezentate soluția analitică cu linie continuă și soluția numerică cu marker „•”. Se observă că odată cu înaintarea în timp soluția devine instabilă.

Programul Matlab este:

```
dt=0.0013; dx=0.05;
Nx=1/(dx)+1;
x=0:dx:1;
tf=0.1;
Nt=tf/dt;
Uo=zeros(Nx,1);
Un=zeros(Nx,1);

%initializare
for i=1:round(Nx/2)
    Uo(i)=(i-1)*dx;
end
for i=round(Nx/2):Nx
```

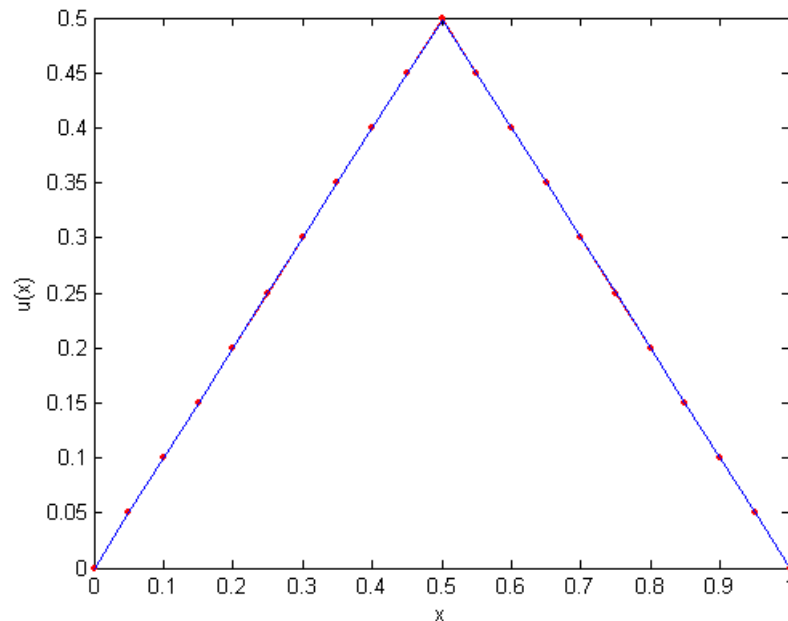
```
    Uo(i)=1-(i-1)*dx;
end

n=0;
while (n<Nt)
    n=n+1;
    for i=2:Nx-1
        Un(i)=Uo(i)+dt/(dx*dx)*
            (Uo(i-1)-2*Uo(i)+Uo(i+1));
    end
    Uo=Un;
end
```

```

plot(x,Uo, '.-r')
hold on
%solutia analitica
U=HeatAnalytic(x,tf);
plot(x,U, 'b')

```



```

function rez=HeatAnalytic(x,t)
rez=0;
for k=1:100

rez=rez+4/(k*pi)^2*sin(k*pi/2)*
sin(k*pi*x)*exp(-k^2*pi^2*t);
end

```

Figura 22a. Soluția analitică și soluția numerică la $t = 0$

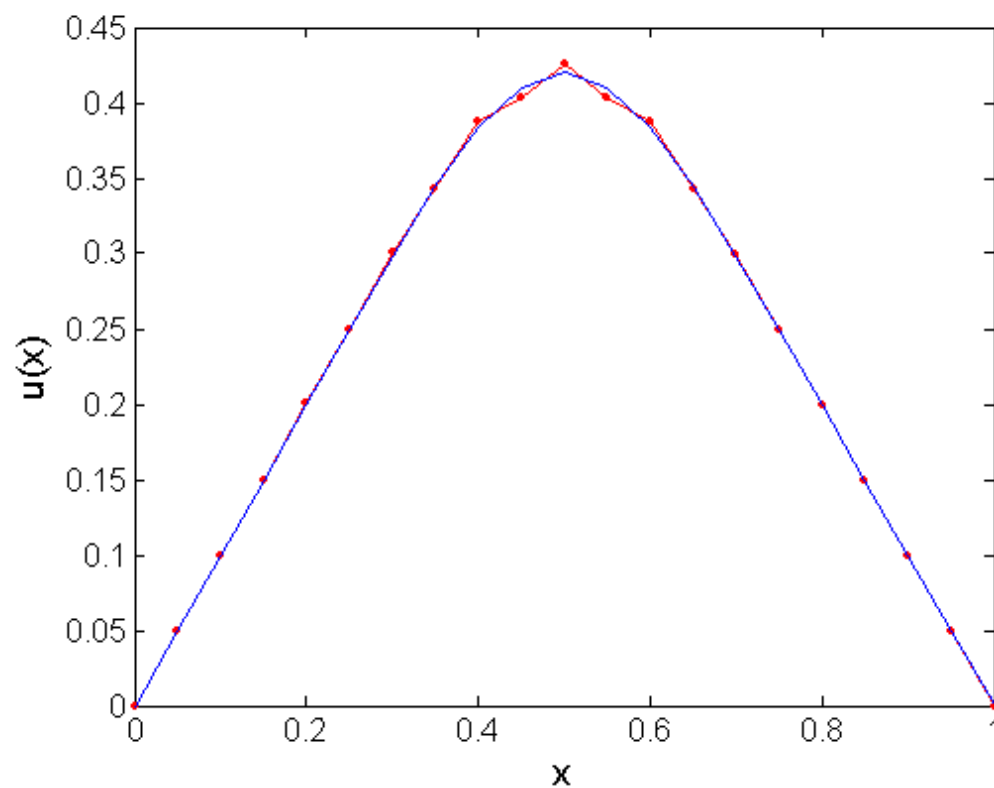


Figura 22b. Soluția analitică și soluția numerică la $t = 0.005$

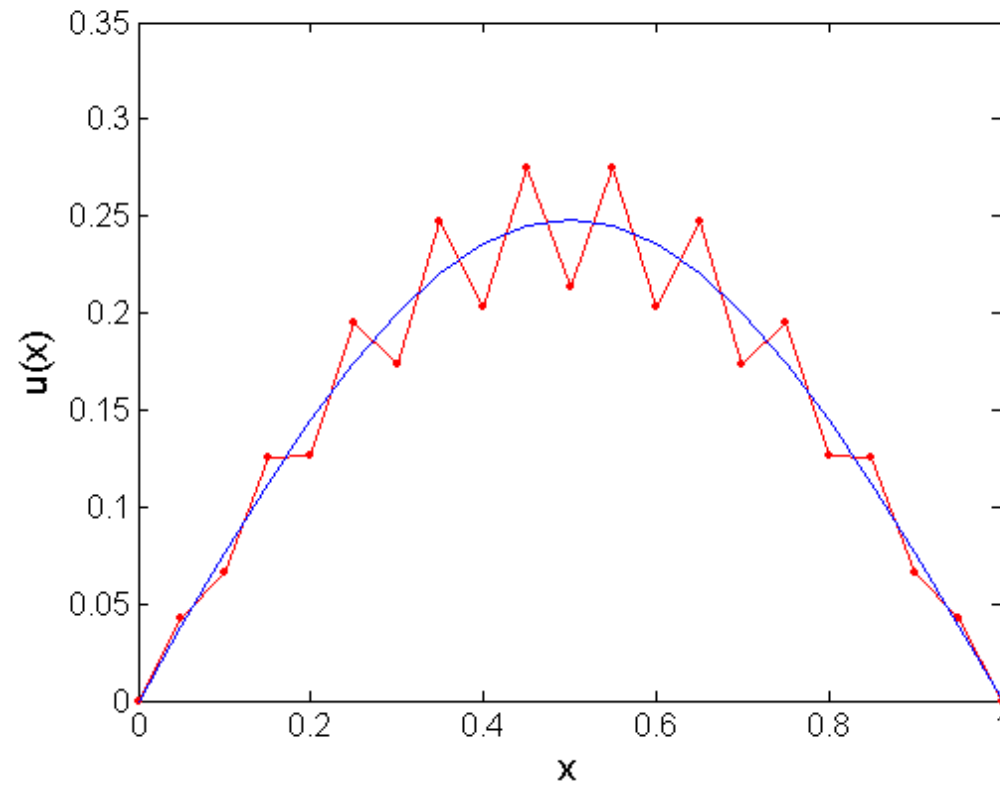


Figura 22c. Soluția analitică și soluția numerică la $t = 0.05$

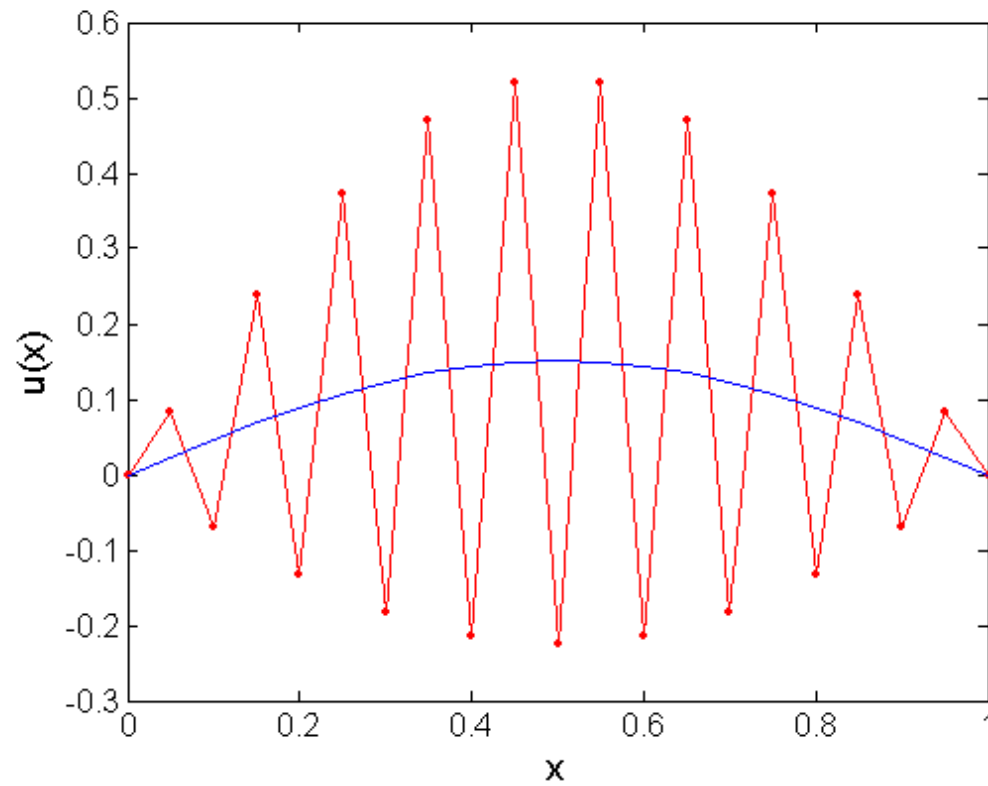


Figura 22c. Soluția analitică și soluția numerică la $t = 0.1$

Eroarea de trunchiere

Facem următoarele notații pentru operatorii cu diferențe finite de ordinul întâi:

- diferențe finite progresive (forward differences):

$$\begin{aligned}\Delta_t u(x, t) &= u(x, t + \Delta t) - u(x, t) \\ \Delta_x u(x, t) &= u(x + \Delta x, t) - u(x, t)\end{aligned}\tag{III.21}$$

- diferențe finite regresive (backward differences):

$$\begin{aligned}\nabla_t u(x, t) &= u(x, t) - u(x, t - \Delta t) \\ \nabla_x u(x, t) &= u(x, t) - u(x - \Delta x, t)\end{aligned}\tag{III.22}$$

- diferențe finite centrale (central differences):

$$\begin{aligned}\delta_t u(x, t) &= u\left(x, t + \frac{1}{2} \Delta t\right) - u\left(x, t - \frac{1}{2} \Delta t\right) \\ \delta_x u(x, t) &= u\left(x + \frac{1}{2} \Delta x, t\right) - u\left(x - \frac{1}{2} \Delta x, t\right)\end{aligned}\tag{III.23}$$

Dacă aplicăm operatorul cu diferențe finite centrale de două ori se obține operatorul cu diferențe finite centrale de ordinul al doilea:

$$\delta_x^2 u(x, t) = u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t) \quad (\text{III.24})$$

Folosind dezvoltări în serie Taylor obținem:

$$\Delta_t u(x, t) = u_t \Delta t + \frac{1}{2} u_{tt} (\Delta t)^2 + \frac{1}{6} u_{ttt} (\Delta t)^3 + \dots \quad (\text{III.25})$$

$$\delta_x^2 u(x, t) = u_{xx} (\Delta x)^2 + \frac{1}{12} u_{xxxx} (\Delta x)^4 + \dots$$

Numim **eroare de trunchiere** pentru schema:

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} = \frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \quad (\text{III.14})$$

funcția

$$T(x, t) = \frac{\Delta_t u(x, t)}{\Delta t} - \frac{\delta_x u(x, t)}{(\Delta x)^2} \quad (\text{III.26})$$

Se observă că relația (III.26) se obține prin diferența celor doi membrii ai ecuației (III.14), înlocuirea lui U_i^n cu $u(x_i, t_n)$ și folosirea operatorilor (III.21) și (III.24). Introducând în (III.26) dezvoltările (III.25) se obține:

$$T(x, t) = (u_t - u_{xx}) + \left(\frac{1}{2} u_{tt} \Delta t - \frac{1}{12} u_{xxxx} (\Delta x)^2 \right) + \dots = \frac{1}{2} u_{tt} \Delta t - \frac{1}{12} u_{xxxx} (\Delta x)^2 + \dots \quad (\text{III.27})$$

Dacă introducem seria Taylor cu rest de forma:

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + u_t \Delta t + \frac{1}{2} u_{tt}(x, \eta) (\Delta t)^2, \quad t \leq \eta \leq t + \Delta t$$

Atunci ecuația (III.27) devine:

$$T(x, t) = \frac{1}{2} u_{tt}(x, \eta) \Delta t - \frac{1}{12} u_{xxxx}(\xi, t) (\Delta x)^2, \quad t \leq \eta \leq t + \Delta t, \quad x \leq \xi \leq x + \Delta x \quad (\text{III.28})$$

și dacă u și derivatele sale sunt mărginite ($|u_{tt}| < M_{tt}$, $|u_{xxxx}| \leq M_{xxxx}$) atunci folosind notația (III.16) obținem:

$$|T(x, t)| \leq \frac{1}{2} \Delta t \left(M_{tt} + \frac{1}{6\nu} M_{xxxx} \right) \quad (\text{III.29})$$

Din (III.29) rezultă că $T(x, t) \rightarrow 0$ când $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ pentru orice $(x, t) \in (0, 1) \times [\tau, t_F)$. Vom spune în acest caz că schema (III.14) este **consistentă necondiționat**. De asemenea, deoarece Δt apare în (III.29) la

puterea întâi vom spune că schema are ordinul de acuratețe $O(\Delta t)$ sau că are ordinul întâi de acuratețe.

Convergența schemei explicite

Presupunem că obținem aproximații ale soluției exacte pentru aceleași date inițiale folosind griduri de finețe diferită ($\Delta t \rightarrow 0$ și $\Delta x \rightarrow 0$) dar având aceeași valoare pentru $\nu = \Delta t / (\Delta x)^2$. Vom spune că schema (III.14) este **convergentă** dacă pentru fiecare punct $(x^*, t^*) \in (0, 1) \times (0, t_F)$

$$x_i \rightarrow x^*, \quad t_n \rightarrow t^* \quad \text{implică} \quad U_i^n \rightarrow u(x^*, t^*) \quad (\text{III.30})$$

Introducem o margine superioară a erorii de trunchiere

$$|T_i^n| \leq \bar{T} \quad (\text{III.31})$$

unde am notat $T_i^n = T(x_i, t_n)$ și eroarea

$$e_i^n = U_i^n - u(x_i, t_n) \quad (\text{III.32})$$

Deoarece U_i^n este soluția aproximativă, iar $u(x_i, t_n)$ este soluția exactă, folosind (III.26) obținem:

$$U_i^{n+1} = U_i^n + \nu(U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n)$$

$$u(x_i, t_{n+1}) = u(x_i, t_n) + \nu(u(x_{i+1}, t_n) - 2u(x_i, t_n) + u(x_{i-1}, t_n)) + T_i^n \Delta t$$

și scăzând relațiile de mai sus avem:

$$e_i^{n+1} = e_i^n + \nu(e_{i+1}^n - 2e_i^n + e_{i-1}^n) - T_i^n \Delta t$$

sau

$$e_i^{n+1} = (1 - 2\nu)e_i^n + \nu e_{i+1}^n + \nu e_{i-1}^n - T_i^n \Delta t \quad (\text{III.33})$$

Presupunem că $\nu \leq \frac{1}{2}$ și introducând eroarea maximă la un anumit pas de timp, $E^n = \max \{ |e_i^n|, i = 0, 1, \dots, N_x \}$, avem:

$$|e_i^{n+1}| = (1 - 2\nu)E^n + \nu E^n + \nu E^n + |T_i^n| \Delta t \leq E^n + \bar{T} \Delta t \quad (\text{III.34})$$

unde în inegalitatea triunghiului am eliminat modulul pentru termenii pozitivi. Deoarece inegalitatea (III.34) are loc pentru $i = 1, 2, \dots, N_x - 1$ avem:

$$E^{n+1} \leq E^n + \bar{T} \Delta t \quad (\text{III.35})$$

Deoarece folosim condiția inițială (III.6) avem $E^0 = 0$ și se poate demonstra prin inducție că $E^n \leq n\bar{T}\Delta t$. Atunci folosind (III.29) și ținând cont că timpul final satisface inegalitatea $t_F \leq n\Delta t$ obținem că:

$$E^n \leq \frac{1}{2}\Delta t \left(M_{tt} + \frac{1}{6\nu} M_{xxxx} \right) t_F \rightarrow 0 \text{ când } \Delta t \rightarrow 0 \quad (\text{III.36})$$

Pentru a defini noțiunea de convergență a unei scheme numerice ce implică o rețea bidimensională cu doi pași Δt și Δx vom defini o **metodă de rafinare** ca fiind o mulțime de perechi $(\Delta t, \Delta x)$ fiecare dintre ele tinzând la zero:

$$MR = \{((\Delta x)_j, (\Delta t)_j), j = 0, 1, \dots; (\Delta x)_j \rightarrow 0, (\Delta t)_j \rightarrow 0\} \quad (\text{III.37})$$

Atunci putem enunța teorema:

Teorema 14: Dacă o metodă de rafinare satisface condiția $\nu_j = \frac{(\Delta t)_j}{(\Delta x)_j^2} \leq \frac{1}{2}$

pentru valori suficient de mari ale lui j și există numerele n_j și i_j astfel încât:

$$n_j(\Delta t)_j \rightarrow t > 0 \quad \text{și} \quad i_j(\Delta t)_j \rightarrow x \in [0, 1]$$

și dacă $|u_{xxxx}| \leq M_{xxxx}$ uniform în $[0,1] \times [0, t_F]$ atunci aproximația $U_i^{n_j}$ generată de schema cu diferențe finite (III.14) pentru $j = 0, 1, 2, \dots$ converge uniform la soluția exactă $u(x, t)$.

Se observă că avem nevoie de o rețea din ce în ce mai fină pentru a obține convergența. Acest lucru implică însă mai multe iterații ce implică la rândul lor propagarea erorilor de rotunjire aceasta putând face metoda impracticabilă.

Analiza Fourier a erorii

Am arătat că ecuația (III.5) are o soluție analitică dată sub forma unei serii Fourier. Deoarece ecuația (III.5) este liniară vom studia comportamentul unui singur mod Fourier scris în formă complexă. Așadar, pentru a studia stabilitatea schemei (III.14) considerăm soluția numerică într-un punct $i\Delta x$ la pasul n de timp de forma:

$$U_i^n = \lambda^n e^{I k(i\Delta x)} \quad (\text{III.38})$$

unde $I = \sqrt{-1}$. Înlocuind (III.38) în ecuația cu diferențe finite (III.14) și simplificând cu $\lambda^n e^{I k(i\Delta x)}$ se obține:

$$\lambda = \lambda(k) = 1 + \nu(e^{I k\Delta x} - 2 + e^{-I k\Delta x}) = 1 - 2\nu(1 - \cos k\Delta x) = 1 - 4\nu \sin^2 \frac{1}{2} k\Delta x \quad (\text{III.39})$$

mărimea $\lambda(k)$ numindu-se factor de amplificare. Luând $k = m\pi$, similar cu cazul soluției exacte, putem scrie soluția numerică în forma:

$$U_i^n = \sum_{-\infty}^{\infty} A_m e^{I m\pi(i\Delta x)} [\lambda(m)]^n \quad (\text{III.40})$$

Seria (III.40) aproximează relativ bine soluția exactă dată de seria Fourier (III.8) pentru valori mici ale lui m .

Deoarece

$$U_i^{n+1} = \lambda U_i^n \quad (\text{III.41})$$

pentru a preveni proagarea erorilor de trunchiere este necesar ca factorul de amplificare să îndeplinească condiția:

$$|\lambda| \leq 1 \quad (\text{III.42})$$

și folosind (III.39) găsim condiția:

$$-1 \leq 1 - 4\nu \sin^2 \frac{1}{2} k\Delta x \leq 1 \text{ pentru orice punct } k\Delta x$$

de unde obținem

$$\nu = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2} \quad (\text{III.43}).$$

O schemă implicită

Restricția (III.43) este o restricție severă. Dacă dorim obținerea unei aproximări bune avem nevoie de pași mici în spațiu ceea ce conduce la folosirea unui număr foarte mare de pași în timp. Pentru a remedia acest impediment vom folosi în schema numerică diferențe regresive în timp păstrând aproximarea cu diferențe centrale a derivatei spațiale. Atunci pentru o grilă echidistantă de forma:

$$(x_i = i\Delta x, t_n = n\Delta t), \quad i = 0, 1, \dots, N_x, \quad n = 0, 1, \dots, N_t) \quad (\text{III.10})$$

avem

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} = \frac{U_{i+1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \quad (\text{III.44})$$

Se observă că pentru a calcula valoarea lui U de la pasul de timp t_{n+1} este necesar să înaintăm în timp pornind de la condiția inițială

$$U_i^0 = u^0(x), \quad i = 1, 2, \dots, N_x - 1 \quad (\text{III.17})$$

rezolvând un sistem de ecuații tridiagonal de forma:

$$-\nu U_{i-1}^{n+1} + (1 + 2\nu)U_i^{n+1} - \nu U_{i+1}^{n+1} = U_i^n \quad (\text{III.45})$$

completat cu condițiile la frontieră

$$U_0^n = U_{N_x}^n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{III.18})$$

În acest caz vom spune că metoda este **implicită**, iar sistemul scris pe componente are forma dată de (III.46) pentru rezolvarea lui putându-se folosi metoda lui Thomas.

Vom aplica schema implicită ecuației (III.5) cu condiția inițială (III.19) și vom compara soluția astfel obținută cu metoda explicită și cea analitică dată de ecuația (III.20). Pentru comparație vom folosi valorile $\Delta t = 0.0013$ și $\Delta x = 0.05$. În Figura 24 sunt reprezentate soluția analitică cu linie continuă, soluția explicită cu marker „•” și soluția implicită cu marker „o”. Se observă că soluția implicită este stabilă.

$$\begin{bmatrix}
 1 & & & & & \\
 -\nu & 1+2\nu & -\nu & & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & -\nu & 1+2\nu & -\nu & \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots \\
 & & & & -\nu & 1+2\nu & -\nu \\
 & & & & & & 1
 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \dots \\ U_i \\ \dots \\ U_{Nx-1} \\ U_{Nx} \end{bmatrix}^{(n+1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ U_1 \\ \dots \\ U_i \\ \dots \\ U_{Nx-1} \\ 0 \end{bmatrix}^{(n)} \quad (\text{III.46})$$

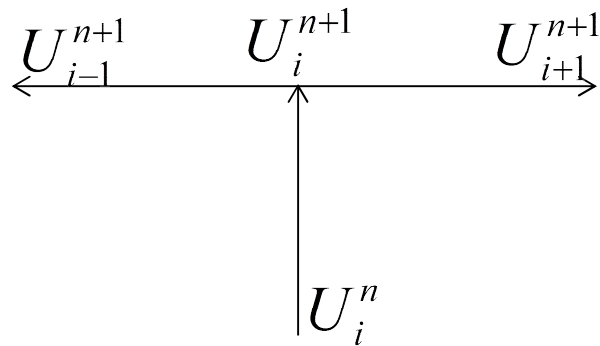


Figura 23. Reprezentare schematică a dependenței temporale în schema implicită.

Programul Matlab este:

```
dt=0.0013;dx=0.05;
niu=dt/(dx*dx);
Nx=1/(dx)+1;
x=0:dx:1;
```

```
tf=0.1;
Nt=tf/dt;
```

```
Uo=zeros(Nx,1); Un=zeros(Nx,1);
```

```

%initializare
for i=1:round(Nx/2)
    Uo(i)=(i-1)*dx;
end
for i=round(Nx/2):Nx
    Uo(i)=1-(i-1)*dx;
end
A=zeros(Nx,Nx);b=zeros(Nx,1);

n=0;
while (n<Nt)
    n=n+1;
    A(1,1)=1;b(1)=0;
    for i=2:Nx-1

```

```

        A(i,i-1)=-niu;
        A(i,i)=1+2*niu;
        A(i,i+1)=-niu;
        b(i)=Uo(i);
    end
    A(Nx,Nx)=1;b(Nx)=0;

    Un=A\b;
    Uo=Un;
end

plot(x,Uo,'o:k')
hold on

```

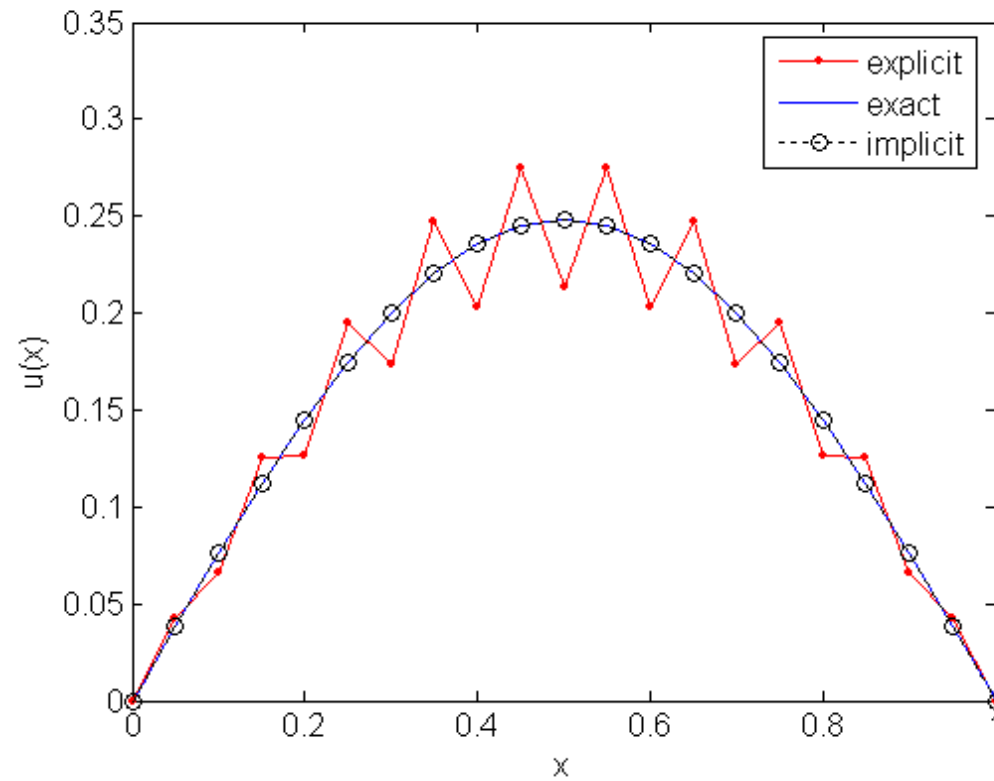


Figura 24a. Soluția analitică și soluțiile numerice la $t = 0.05$

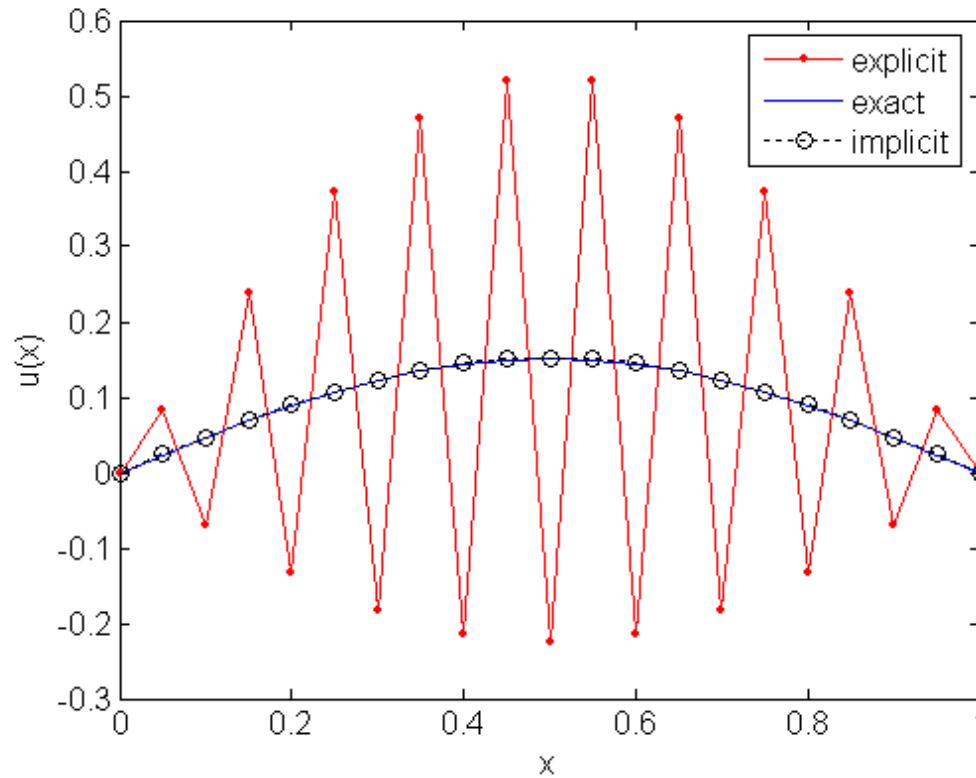


Figura 24b. Soluția analitică și soluțiile numerice la $t = 0.1$

Introducând din nou modul Fourier (III.38) în ecuația schemei implicite (III.45) avem

$$\lambda - 1 = \nu\lambda \left(e^{I k \Delta x} - 2 + e^{-I k \Delta x} \right) = -4\nu\lambda \sin^2 \frac{1}{2} k \Delta x \quad (\text{III.47})$$

de unde obținem:

$$\lambda = \frac{1}{1 + 4\nu \sin^2 \frac{1}{2} k \Delta x} \quad (\text{III.48})$$

Din (III.48) se obține că $0 < \lambda < 1$ deci metoda implicită este stabilă necondiționat.

Metoda Crank-Nicolson

O altă metodă implicită este cea propusă de Crank și Nicolson în 1947. Ei folosesc regula trapezului în timp și o discretizare cu diferențe centrale în spațiu ceea ce conduce la o schemă cu o acuratețe de ordinul doi:

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left(\frac{U_{i+1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \right) \quad (\text{III.49})$$

Schema (III.49) se reduce tot la rezolvarea unui sistem liniar tridiagonal de forma:

$$-\nu U_{i+1}^{n+1} + 2(1+\nu)U_i^{n+1} - \nu U_{i-1}^{n+1} = \nu U_{i+1}^n + 2(1-\nu)U_i^n + \nu U_{i-1}^n \quad (\text{III.50})$$

căruia i se adaugă condiția inițială (III.19) și condițiile pe frontieră (III.18).

Vom aplica schema Crank-Nicolson ecuației (III.5) cu condițiile pe frontieră (III.18) condiția inițială (III.19) și vom compara soluția astfel obținută cu metoda implicită și cea analitică dată de ecuația (III.20).

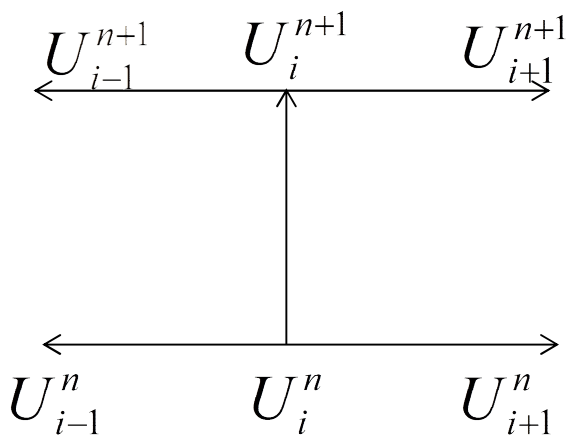


Figura 25. Reprezentare schematică a dependenței temporale în schema Crank-Nicolson.

Se observă din Tabelul 9 că soluția obținută cu metoda Crank-Nicolson este mai apropiată de soluția analitică decât soluția implicită.

Programul Matlab este:

```
dt=0.0013;dx=0.05;
niu=dt/(dx*dx);
Nx=1/(dx)+1;
x=0:dx:1;
tf=0.1;
Nt=tf/dt;

Uo=zeros(Nx,1); Un=zeros(Nx,1);
%initializare
for i=1:round(Nx/2)
    Uo(i)=(i-1)*dx;
end
for i=round(Nx/2):Nx
    Uo(i)=1-(i-1)*dx;
end
A=zeros(Nx,Nx);b=zeros(Nx,1);
```

```
n=0;
while (n<Nt)
    n=n+1;
    A(1,1)=1;b(1)=0;
    for i=2:Nx-1
        A(i,i-1)=-niu;
        A(i,i)=2+2*niu;
        A(i,i+1)=-niu;
        b(i)=niu*Uo(i-1)+
            (2-2*niu)*Uo(i)
            +niu*Uo(i+1);
    end
    A(Nx,Nx)=1;b(Nx)=0;

    Un=A\b;
    Uo=Un;
end

plot(x,Uo,'o:k')
hold on
```

Timp	$\ U_{exact} - U_{implicit}\ $	$\ U_{exact} - U_{Crank-Nicolson}\ $
0.00	0	0
0.05	0.000732	0.002992
0.10	0.004491	0.001476
0.20	0.002990	0.000734
0.30	0.001609	0.000342
0.40	0.000785	0.000153
0.50	0.000362	0.000066

Tabelul 9.Comparație între erorile metodei implicite și a metodei Crank-Nicolson.

Metoda θ sau metoda mediei ponderate

Metodele discutate anterior pot fi descrise de metoda generală:

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} = \theta \frac{U_{i+1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + (1 - \theta) \frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

(III.51)

unde în practică $0 \leq \theta \leq 1$. Se observă că pentru $\theta = 0$ se obține schema implicită, pentru $\theta = \frac{1}{2}$ se obține schema Crank-Nicolson, iar pentru $\theta = 1$ se obține schema implicită. Aplicarea schemei θ conduce ca și în cazul schemelor implicită și Crank-Nicolson la sisteme de ecuații liniare tridiagonale. În urma analizei Fourier pentru schema θ se obține:

$$\lambda - 1 = \nu [\theta \lambda + (1 - \theta)] (e^{I k \Delta x} - 2 + e^{-I k \Delta x}) = \nu [\theta \lambda + (1 - \theta)] \left(-4 \lambda \sin^2 \frac{1}{2} k \Delta x \right)$$

de unde avem:

$$\lambda = \frac{1 - 4(1 - \theta)\nu \sin^2 \frac{1}{2} k \Delta x}{1 + 4\theta\nu \sin^2 \frac{1}{2} k \Delta x} \quad (\text{III.52})$$

Deoarece $\nu > 0$ și $0 \leq \theta \leq 1$ avem că inegalitatea $\lambda < 1$ are loc întotdeauna. Așadar vom avea instabilitate dacă $\lambda < -1$, adică dacă

$$1 - 4(1 - \theta)\nu \sin^2 \frac{1}{2} k\Delta x < -\left(1 + 4\theta\nu \sin^2 \frac{1}{2} k\Delta x\right) \quad \text{sau} \quad \nu(1 - 2\theta)\sin^2 \frac{1}{2} k\Delta x > \frac{1}{2} \quad (\text{III.53})$$

Din (III.53) deducem condiția de stabilitate:

$$\nu(1 - 2\theta) < \frac{1}{2} \quad (\text{III.54})$$

adică metoda este stabilă

- când $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}$ și $\nu \leq \frac{1}{2(1 - 2\theta)}$
- când $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$ pentru orice ν .

Se poate arăta că eroarea de trunchiere în nodul $(i, n + 1/2)$ este dată de ecuația (vezi Morton și Meyers, 1984):

$$T_i^{n+1/2} = \left[\left(\frac{1}{2} - \theta \right) \Delta t u_{xxt} - \frac{1}{12} (\Delta x)^2 u_{xxxx} \right] + \left[\frac{1}{24} (\Delta t)^2 u_{ttt} - \frac{1}{8} (\Delta t)^2 u_{xxtt} \right] + \dots \quad (\text{III.55})$$

Pentru $\theta = \frac{1}{2}$ (cazul Crank-Nicolson) eroarea de trunchiere este de ordinul $O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2)$, deci schema are întotdeauna ordinul doi de acuratețe.

III.3. Ecuații parabolice cu două (sau trei) variabile spațiale

Metoda explicită

Considerăm ecuația căldurii într-un domeniu rectangular $D = [0, X] \times [0, Y]$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right], \quad \sigma > 0 \quad (\text{III.56})$$

cu condiții pe frontieră de tip Dirichlet, adică cunoaștem valorile $u(x, y, t)|_{\partial D}$ și $u(x, y, 0)|_D$ iar σ este un număr pozitiv constant. Considerăm rețeaua de puncte cu pasul Δx și Δy în direcțiile Ox și Oy :

$$\Delta x = \frac{X}{N_x}, \quad \Delta y = \frac{Y}{N_y}$$

unde N_x și N_y reprezintă numărul nodurilor în direcția Ox , respectiv Oy . Notăm aproximația soluției inițiale într-un punct (i, j) al rețelei la pasul de timp n cu

$$U_{i,j}^n \approx u(x_i, y_j, t_n), \quad i = 0, 1, \dots, N_x, \quad j = 0, 1, \dots, N_y.$$

Utilizând aproximarea cu diferențe finite progresive pentru derivata temporală și aproximarea cu diferențe centrale pentru derivatele spațiale, obținem următoare schemă explicită:

$$\frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{\Delta t} = \sigma \left[\frac{U_{i+1,j}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{U_{i,j+1}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right] \quad (\text{III.57})$$

Observăm că valoarea necunoscută $U_{i,j}^{n+1}$ se poate calcula printr-o simplă exprimare din ecuația (III.57) deoarece toate valorile $U_{i,j}^n$ ($i = 0, 1, \dots, N_x, \quad j = 0, 1, \dots, N_y$) sunt cunoscute, fapt ilustrat și în Figura 26a.

Scriem eroarea de trunchiere în mod similar cazului 1D:

$$T(x, t) = \frac{\Delta_t u(x, t)}{\Delta t} - \sigma \left[\frac{\delta_x u(x, t)}{(\Delta x)^2} + \frac{\delta_y u(x, t)}{(\Delta y)^2} \right] \quad (\text{III.58})$$

și folosind dezvoltările în serie Taylor (III.25) se obține:

$$T(x, t) = \frac{1}{2} \Delta t u_{tt} - \frac{1}{12} \sigma [(\Delta x)^2 u_{xxxx} + (\Delta y)^2 u_{yyyy}] + \dots \quad (\text{III.59})$$

iar pentru studiul convergenței eroarea maximă este:

$$E^n \leq \left[\frac{1}{2} \Delta t M_{tt} + \frac{1}{12} \sigma (\Delta x^2 M_{xxxx} + \Delta y^2 M_{yyyy}) \right] t_F \quad (\text{III.60})$$

ce se obține dacă rețeaua bidimensională satisface condiția severă:

$$\nu_x + \nu_y = \frac{\sigma \Delta t}{\Delta x^2} + \frac{\sigma \Delta t}{\Delta y^2} \leq \frac{1}{2} \quad (\text{III.61})$$

Pentru studiul stabilității se poate folosi din nou metoda von Neumann a analizei Fourier în care un mod Fourier va avea forma:

$$U^n \approx \lambda^n \text{Exp}[I(k_x x + k_y y)] \quad (\text{III.62})$$

Înlocuind relația (III.62) în schema numerică (III.57) obținem factorul de amplificare:

$$\lambda = \lambda(k_x, k_y) = 1 - 4 \left[\nu_x \sin^2 \left(\frac{1}{2} k_x \Delta x \right) + \nu_y \sin^2 \left(\frac{1}{2} k_y \Delta y \right) \right] \quad (\text{III.63})$$

de unde se obține condiția (III.61) pentru stabilitate.

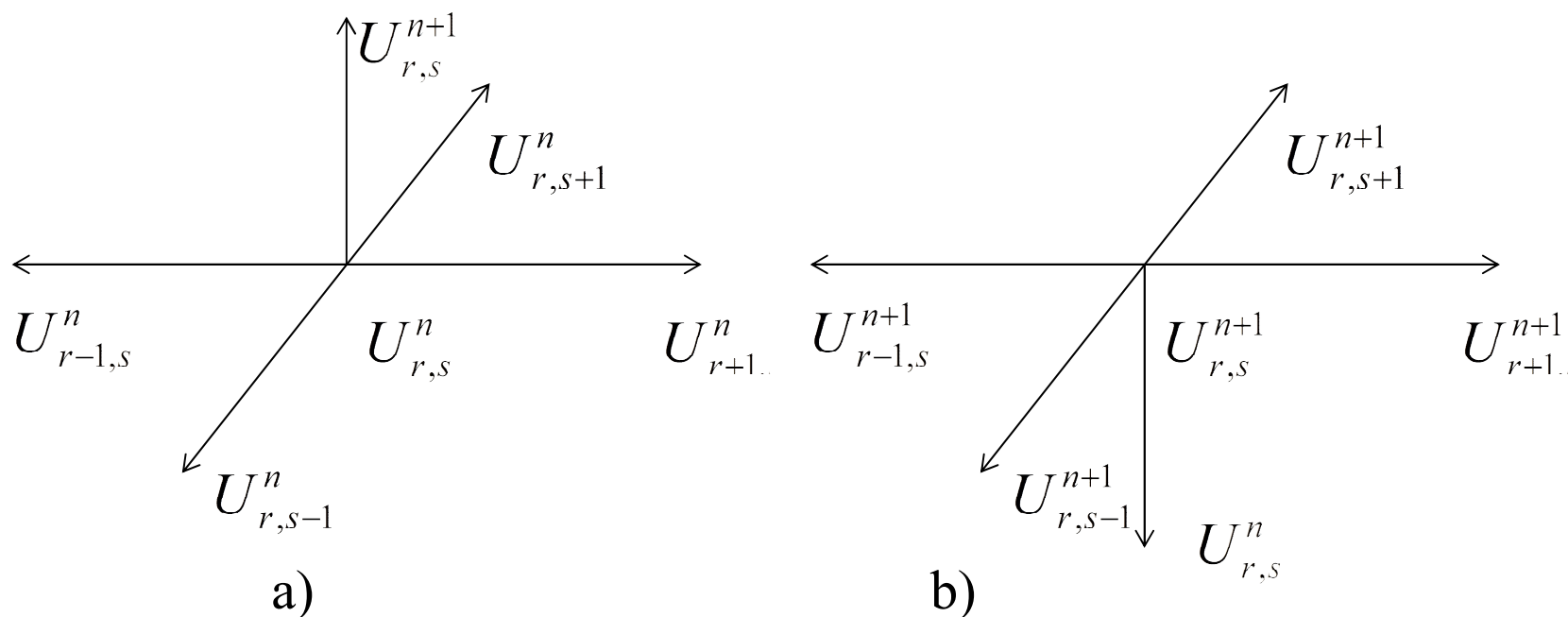


Figura 26. Dependența dintre valorile cunoscute și necunoscute a) în cazul schemei explicite și b) în cazul schemei implicite

Metoda implicită

Pentru obținerea unei scheme implicite aproximăm derivata temporală prin diferențe regresive, iar derivatele spațiale le aproximăm prin

diferențe centrale:

$$\frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{\Delta t} = \sigma \left[\frac{U_{i+1,j}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{U_{i,j+1}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} \right] \quad (\text{III.64})$$

de unde putem obține sistemul de ecuații liniare:

$$\nu_x U_{i+1,j}^{n+1} + \nu_x U_{i-1,j}^{n+1} - (2\nu_x + 2\nu_y + 1)U_{i,j}^{n+1} + \nu_y U_{i,j+1}^{n+1} + \nu_y U_{i,j-1}^{n+1} = -U_{i,j}^n \quad (\text{III.65})$$

Se observă că structura sistemului (III.65) nu permite o rezolvare simplă a sa chiar dacă se poate scrie într-o forma matricială convenabilă. Schema implicită dată de ecuația (III.64) este stabilă indiferent de dimensiunea pașilor spațiali și temporal. La pasul de timp $n+1$ avem 5 necunoscute legate de o singură valoare cunoscută, fapt ilustrat în Figura 26b. Pentru aflarea valorilor necunoscute $U_{i,j}^{n+1}$ este necesară rezolvarea unui sistem algebric linear de dimensiune $(N_x - 1) \times (N_y - 1)$, a cărei matrice este rară, iar reducerea unui astfel de sistem la un sistem cu o structură

tridiagonală, rezolvabil prin metode numerice cunoscute, este dificilă și uneori chiar imposibilă.

Trebuie remarcat faptul că putem obține o multitudine de scheme implicite în funcție de aproximările pe care le facem asupra derivatelor spațiale. Un exemplu este metoda Crank-Nicolson (vezi Morega, 1998):

$$\begin{aligned} \frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{\Delta t} = & \frac{\sigma}{2} \left(\frac{U_{i+1,j}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i-1,j}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{U_{i,j+1}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i,j-1}^{n+1}}{(\Delta y)^2} \right) + \\ & + \frac{\sigma}{2} \left(\frac{U_{i+1,j}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{U_{i,j+1}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.66})$$

III.4. Ecuații eliptice

Introducere

Exemple tipice de ecuații eliptice în două dimensiuni sunt ecuația lui Laplace (III.73a) și ecuația lui Poisson (III.73b).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in D \subset \mathbf{R}^2 \quad (\text{III.73a})$$

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] = f(x, y), \quad (x, y) \in D \subset \mathbf{R}^2 \quad (\text{III.73b})$$

cu condiții pe frontieră de tip Dirichlet, adică cunoaștem valorile $u(x, y)|_{\partial D}$ sau Neumann dacă cunoaștem $\frac{\partial u(x, y)}{\partial n} \Big|_{\partial D}$ unde $\mathbf{n}$ reprezintă normala exterioară la frontieră.

Schema cu diferențe finite

Considerăm rețeaua de puncte cu pasul Δx și Δy în direcțiile Ox și Oy , N_x și N_y fiind numărul nodurilor în cele două direcții. Notăm aproximația soluției inițiale într-un

punct (i, j) al rețelei cu

$$U_{i,j} \approx u(x_i, y_j), \quad i = 0, 1, \dots, N_x, \quad j = 0, 1, \dots, N_y.$$

Utilizând aproximarea cu diferențe finite centrale pentru derivatele spațiale obținem o schemă cu 5 noduri (vezi Fig. 29):

$$\frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{\Delta y^2} = 0, \quad (III.74a)$$

$$i = 2, 3, \dots, N_x - 1, \quad j = 2, 3, \dots, N_y - 1$$

$$\frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{\Delta y^2} = f(x_i, y_j), \quad (III.74b)$$

$$i = 2, 3, \dots, N_x - 1, \quad j = 2, 3, \dots, N_y - 1$$

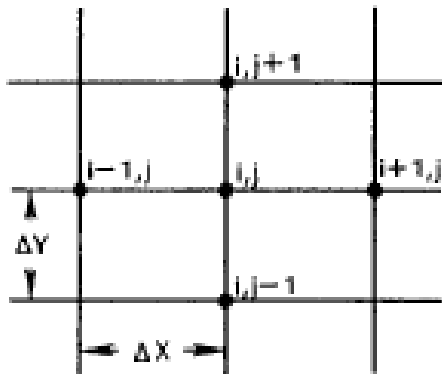


Figura 29. Nodurile implicate în schema (III.74)

Pentru a calcula eroarea de trunchiere introducem în schema (III.74b) valorile exacte ale soluției $u(x_r, y_s)$ și dezvoltând în serie Taylor se obține:

$$T_{r,s} = \frac{1}{12}(\Delta x)^2 (u_{xxxx} + u_{yyyy})_{r,s} + o((\Delta x)^2) .$$

eroare care este mărginită de:

$$|T_{r,s}| \leq T := \frac{1}{12}(\Delta x)^2 (M_{xxxx} + M_{yyyy})$$

Scriem în continuare sistemul (III.74a) într-o formă simplificată:

$$U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j} + \left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2 (U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}) = 0 ,$$

$$i = 2, 3, \dots, N_x - 1, \quad j = 2, 3, \dots, N_y - 1$$

sau

$$U_{i+1,j} + U_{i-1,j} + \beta^2 U_{i,j+1} + \beta^2 U_{i,j-1} - 2(1 + \beta^2) U_{i,j} = 0 , \quad (III.75)$$

$$i = 2, 3, \dots, N_x - 1, \quad j = 2, 3, \dots, N_y - 1$$

Metode iterative de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare

Metodele iterative de rezolvare a sistemelor de ecuații au la bază teoria punctului fix.

Astfel, se pornește de la o soluție inițială care este îmbunătățită în mai mulți pași (mai multe iterații). Cea mai simplă metodă de acest tip este metoda lui **Jacobi**, care aplicată sistemului (III.75) are forma:

$$u_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{2(1 + \beta^2)} [u_{i+1,j}^k + u_{i-1,j}^k + \beta^2(u_{i,j+1}^k + u_{i,j-1}^k)] \quad (\text{III.76})$$

Se pornește cu o aproximație inițială u^0 și se obține un șir de aproximații îmbunătățite: $u^1, u^2, \dots, u^n, u^{n+1}, \dots$

O îmbunătățire adusă metodei Jacobi este metoda **Gauss-Seidel** în care o valoare deja calculată este utilizată pentru calculul noilor valori (de exemplu $u_{i,j-1}^{k+1}$ se folosește în calculul lui $u_{i,j}^{k+1}$). Atunci metoda Gauss-Seidel devine:

$$u_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{2(1 + \beta^2)} [u_{i+1,j}^k + u_{i-1,j}^{k+1} + \beta^2(u_{i,j+1}^k + u_{i,j-1}^{k+1})] \quad (\text{III.77})$$

Convergența metodelor Jacobi și Gauss-Seidel este asigurată de faptul că matricele sistemelor (III.75) sunt diagonal dominante. Reamintim că o matrice pătratică $A = (a_{ij})$ este diagonal dominantă dacă:

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$$

Criteriul de oprire în cazul ambelor metode este

$$\|u^{k+1} - u^k\| < \varepsilon \quad \text{sau} \quad \frac{\|u^{k+1} - u^k\|}{\|u^k\|} < \varepsilon \quad (\text{III.78})$$

unde ε este o toleranță acceptată.

În multe cazuri convergența metodelor Jacobi și Gauss-Seidel poate fi accelerată prin introducerea unui parametru de relaxare, ω . Algoritmul este:

$$u_{i,j}^{k+1} = (1 - \omega)u_{i,j}^k + \frac{\omega}{2(1 + \beta^2)} [u_{i+1,j}^k + u_{i-1,j}^{k+1} + \beta^2(u_{i,j+1}^k + u_{i,j-1}^{k+1})] \quad (\text{III.79})$$

Condiția necesară convergenței este $0 < \omega < 2$. Dacă $\omega < 1$ atunci spunem că avem subrelaxare, dacă $\omega = 1$ se obține metoda Gauss-Seidel, iar altfel spunem că avem suprelaxare. În câteva cazuri particulare parametrul optim ω se poate calcula, dar în general el se determină prin experimentări numerice.

Exemple

Considerăm generarea de căldură într-un domeniu dreptunghiular:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + 1 = 0, \quad (x, y) \in D = [0,1] \times [0,1] \quad (\text{III.80})$$
$$T(x, y)|_{\partial D} = 0$$

care se discretizează în felul următor:

$$\frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{\Delta y^2} + 1 = 0, \quad i = 2, 3, \dots, N_x - 1, \quad j = 2, 3, \dots, N_y - 1$$

Vom aplica în continuare metoda Jacobi și metoda Gauss-Seidel. Programele Matlab sunt:

```
%metoda Jacobi
tic
N=101; %number of nodes in x- direction
h=1/(N-1); T=zeros(N,N); Tnew=T; nr_it=0; stop=0;
while (stop~=1)
    nr_it=nr_it+1; errT=0;
    for i=2:N-1
        for j=2:N-1
            Tnew(i,j)=0.25*(T(i+1,j)+T(i-1,j)+T(i,j+1)+T(i,j-1)+h*h);
            if abs(T(i,j)-Tnew(i,j))>errT
                errT=abs(T(i,j)-Tnew(i,j));
            end
        end
    end
end
```

```

        end
    end;
    if errT<1e-6
        stop=1;
    end

    if mod(nr_it,250)==0
        fprintf('nr_it=%g err=%g\n', nr_it,errT);
    end
T=Tnew;
end

x=0:h:(N-1)*h;y=x;
contour(x,y,T',20)
axis equal
axis([0,1,0,1])
T_max=max(max(T))
nr_it
toc

%metoda Gauss-Seidel
%discretization and initialization%%%%%%%%
tic
N=101; %number of nodes in x- direction
h=1/(N-1);T=zeros(N,N);Tnew=T;
nr_it=0; stop=0;
while (stop~=1)
    nr_it=nr_it+1; errT=0;
    errT=0;
    for i=2:N-1

```

```

    for j=2:N-1
        Tnew(i,j)=0.25*(T(i+1,j)+T(i-1,j)+T(i,j+1)+T(i,j-1)+h*h);
        if abs(T(i,j)-Tnew(i,j))>errT
            errT=abs(T(i,j)-Tnew(i,j));
        end
        T(i,j)=Tnew(i,j);
    end
end;
if errT<1e-6
    stop=1;
end
if mod(nr_it,250)==0
    fprintf('nr_it=%g err=%g\n', errT);
end
T=Tnew;
end

x=0:h:(N-1)*h;y=x;
contour(x,y,T',20)
axis equal
axis([0,1,0,1])
T_max=max(max(T))
nr_it
toc

```

Grid	Jacobi			Gauss-Seidel		
	$T_{\max}$	Numărul iterațiilor	Timp de calcul (secunde)	$T_{\max}$	Numărul iterațiilor	Timp de calcul (secunde)
51 x 51	0.073142	2577	0.625	0.073396	1465	0.422
101 x 101	0.071640	7502	6.969	0.0726535	4454	4.594

Tabel 10. Comparație între metodele Jacobi și Gauss-Seidel.

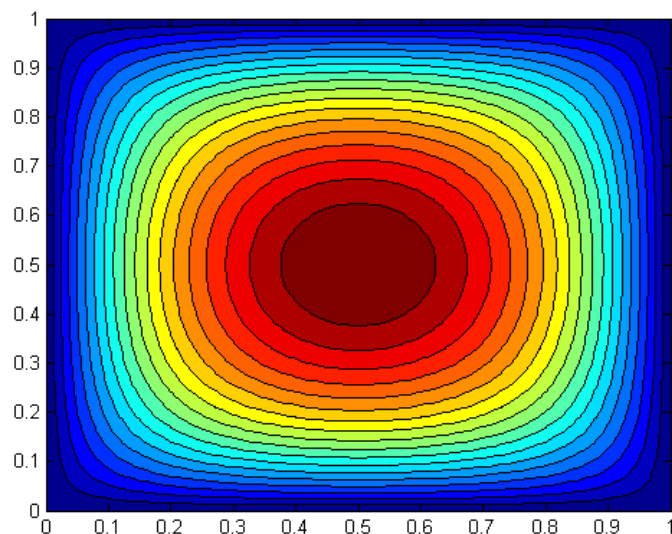


Figura 35. Distribuția temperaturii pentru exemplul (III.80)

III.5. Ecuații hiperbolice într-o variabilă spațială (Ecuația undelor)

Characteristic

Considerăm cea mai simplă ecuație de acest tip (vezi, Morton și Mayers, 2005)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in [a, b], \quad t \geq 0 \quad (\text{III.81})$$

$$u(x, 0) = u^0(x) \quad (\text{III.82})$$

O metodă de studiu a acestei ecuații este *metoda caracteristicilor*. Reamintim că pentru o ecuație de forma (vezi Smith, 1985):

$$a(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} + b(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} = c(x, t) \quad (\text{III.83})$$

caracteristicile sunt soluțiile ecuației

$$a \, dx - b \, dt = 0 \quad (\text{III.84})$$

iar $u(x, t)$ se află din

$$c \, dt - a \, du = 0. \quad (\text{III.85})$$

O formulare generală a metodei descrise mai sus se poate fi pusă într-o formă compactă astfel:

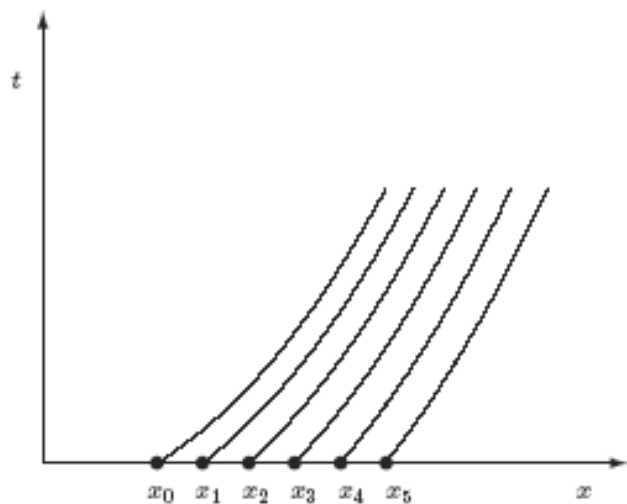


Figura 36. Caracteristici tipice pentru ecuația (III.83)

$$\frac{dt}{a} = \frac{dx}{b} = \frac{du}{c} \quad (\text{III.86})$$

În cazul ecuației (III.81) ($c = 0$), de-a lungul unei caracteristici soluția $u(x, t)$ satisface

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = 0$$

și atunci, din condiția inițială (III.82), avem că $u(x, t) = u^0(x_j)$ pentru o caracteristică ce trece prin punctul x_j (vezi Fig. 36)

Dacă $a(x,t) = a = \text{const.}$ atunci caracteristicile sunt $x - at = \text{const.}$, iar soluția ecuației (III.81) are forma:

$$u(x,t) = u^0(x - at) \quad (\text{III.87})$$

Examinând ecuația (III.87) observăm că soluția curentă este de fapt soluția inițială deplasată la stânga dacă $a < 0$ sau la dreapta dacă $a > 0$ (vezi, Strikwerda, 2004). Astfel, soluția ecuației undei (III.81) poate fi privită ca și o undă ce se propagă cu viteza a fără să-și schimbe forma (vezi Fig. 37)

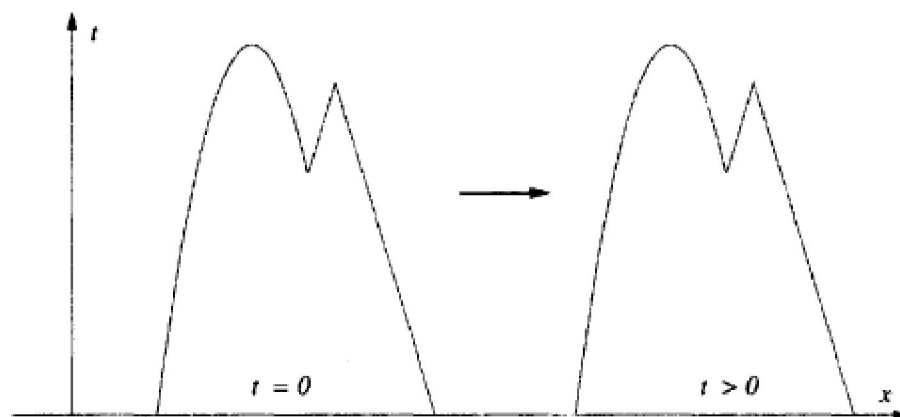


Figura 37. Deplasarea soluției pentru ecuația unidimensională a undelor.

Condiția lui Courant, Friedrichs și Lewy (CFL)

Pentru a rezolva numeric ecuația (III.81) putem utiliza o schemă explicită cu diferențe finite progresive în timp și regresive în spațiu:

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + a \frac{U_i^n - U_{i-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad (\text{III.88})$$

sau

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x} (U_i^n - U_{i-1}^n) = (1 - \nu)U_i^n + \nu U_{i-1}^n \quad (\text{III.89})$$

unde $\nu = \frac{a\Delta t}{\Delta x}$.

Se observă că valoarea U_j^{n+1} depinde de două valori calculate la pasul de timp n , iar acestea la rândul lor depind de câte două valori calculate la pasul de timp $n-1$. Astfel se poate construi un domeniu de dependență a datelor pentru schema numerică, de formă triunghiulară, similar cu cel din Fig. 38. Domeniul de dependență corespunzător ecuației cu derivate parțiale este chiar curba caracteristică ce trece prin punctul (x_i, t_n) .

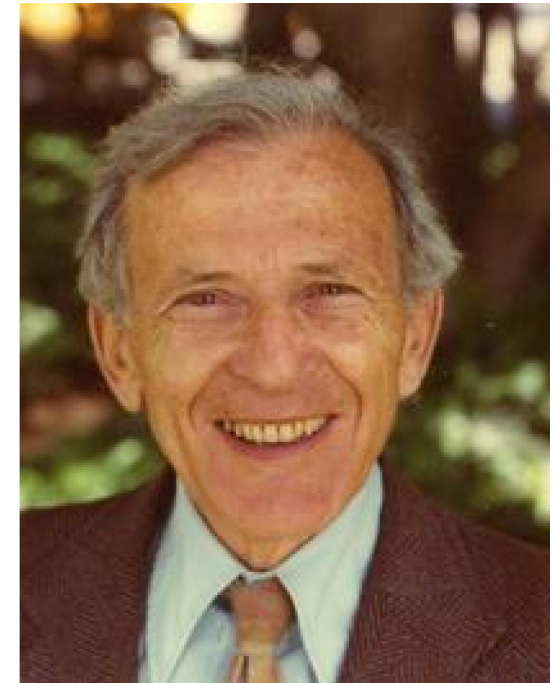
Condiția CFL spune că o schemă numerică este convergentă dacă domeniul de dependență a ecuației diferențiale (caracteristica) aparține domeniului de dependență al schemei numerice.



Richard Courant (1888 – 1972)



Kurt Otto Friedrichs (1901 – 1982)



Hans Lewy (1904 – 1988)

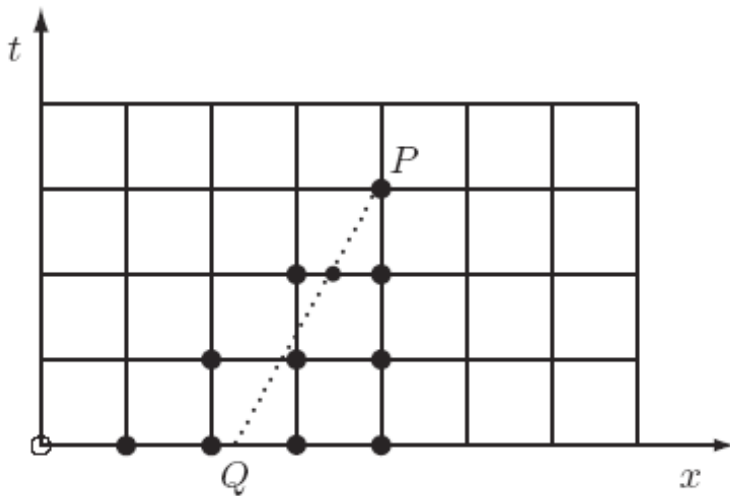


Figura 38. Dependența datelor în schema explicită

În Fig. 38 este prezentată schematic dependența de date pentru o schemă cu diferențe finite ce îndeplinește condiția CFL, caracteristica PQ situându-se în domeniul de dependență al schemei numerice. Figura 39 prezintă cazul în care condiția CFL este violată, ambele caracteristici PQ și PR situându-se în afara domeniului de dependență al schemei numerice, iar convergența în punctul P nu poate fi atinsă.

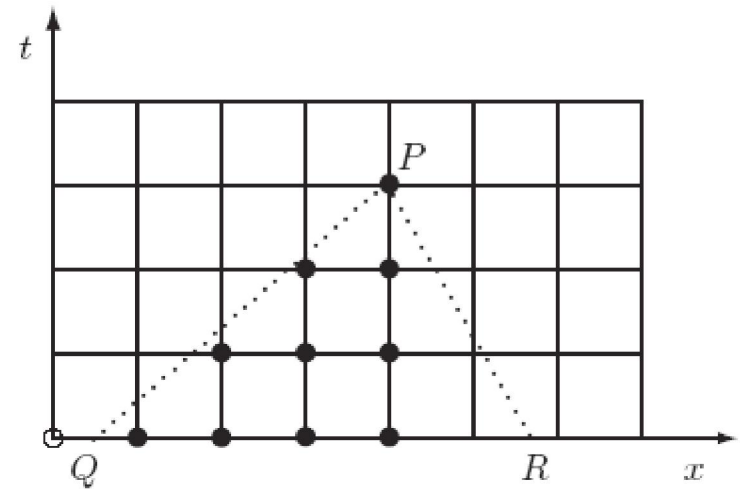


Figura 39. Violarea condiției CFL

În cazul schemei (III.88) se observă că nu avem convergență pentru $a < 0$ deoarece în acest caz caracteristicile sunt de forma PR . În cazul în care $a > 0$ pentru a avea asigurată convergența este necesar ca $a\Delta t / \Delta x \leq 1$.

Dacă vom folosi o discretizare cu diferențe centrale pentru derivata spațială a ecuației (III.88) obținem următoarea schemă cu diferențe finite:

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + a \frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad (\text{III.90})$$

$$c = |a| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \text{ (numărul lui Courant)} \quad (\text{III.91})$$

Pentru a studia stabilitatea schemei vom folosi din nou modurile normale din analiza Fourier:

și înlocuind în schema (III.90) obținem factorul de amplificare

pentru care putem avea $|\lambda| > 1$ și deci schema este instabilă. Așadar, schema respectă condiția CFL, dar nu este stabilă și deci putem deduce că impunerea condiției CFL este doar necesară și nu suficientă pentru obținerea convergenței.

Cea mai simplă schemă care elimină aceste neajunsuri poate fi formulată astfel(vezi Morton și Meyers 2005):

$$U_j^{n+1} = \begin{cases} U_j^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_{+x} U_j^n & \text{if } a < 0, \\ U_j^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_{-x} U_j^n & \text{if } a > 0. \end{cases} \quad (\text{III.93})$$

Remarcăm faptul că această schemă poate fi folosită și pentru $a = a(x, t)$. Schema (III.93) satisface condiția CFL și în plus este și stabilă. Într-adevăr pentru $a > 0$ (dacă $a < 0$ în relație se înlocuiește a cu $|a|$) avem:

$$\lambda \equiv \lambda(k) = 1 - (a\Delta t/\Delta x)(1 - e^{-ik\Delta x}) \equiv 1 - \nu(1 - e^{-ik\Delta x}).$$

de unde

$$\begin{aligned} |\lambda(k)|^2 &= [(1 - \nu) + \nu \cos k\Delta x]^2 + [\nu \sin k\Delta x]^2 \\ &= (1 - \nu)^2 + \nu^2 + 2\nu(1 - \nu) \cos k\Delta x \\ &= 1 - 2\nu(1 - \nu)(1 - \cos k\Delta x) \end{aligned}$$

sau

$$|\lambda|^2 = 1 - 4\nu(1 - \nu) \sin^2 \frac{1}{2} k\Delta x.$$

În mod evident avem $|\lambda| \leq 1$ pentru $0 \leq \nu \leq 1$.

Alte scheme explicite

Folosind diverse tipuri de discretizări se pot obține mai multe scheme cu diferențe finite. De exemplu, dacă considerăm valoarea medie a lui U_i^n din schema explicită (III.90) se obține **metoda lui Lax**:



Peter Lax (1926 -) și
Burton Wendroff (1930 -)

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) - \frac{a\Delta t}{2\Delta x}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) \quad (\text{III.94})$$

Dacă se utilizează pentru ambele derivate, atât cea în timp cât și cea în spațiu, discretizări cu diferențe centrale se obține **metoda leapfrog** (săritura broaștei), metodă care este de ordinul $O(\Delta t^2, \Delta x^2)$:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} = -a \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} \quad (\text{III.95})$$

Ambele scheme descrise mai sus sunt stabile pentru un număr Courant $c \leq 1$.

Trebuie făcută însă observația că pentru integrarea schemei (III.95) este nevoie de două seturi de date de start, iar alegerea datelor de start diminuează eficiența metodei chiar dacă este vorba de o metodă de ordinul doi.

Una dintre schemele explicite cele mai eficiente este **metoda Lax-Wendorff** care se poate obține prin dezvoltări în serie Taylor. Considerăm dezvoltarea:

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{(\Delta t)^2}{2!} + O(\Delta t)^3$$

sau

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{(\Delta t)^2}{2!} + O(\Delta t)^3 \quad (\text{III.96})$$

Ecuția (III.81) poate fi scrisă în forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{III.97})$$

și derivând (III.97) se obține:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -a \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = -a \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\text{III.98})$$

Înlocuind (III.97) și (III.98) în ecuația (III.94) avem:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \left(-a \frac{\partial u}{\partial x}\right) \Delta t + \frac{(\Delta t)^2}{2} \left(a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \quad (\text{III.99})$$

Prin discretizarea derivatelor spațiale cu ajutorul diferențelor finite centrale se obține schema Lax-Wendorff:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - a \Delta t \left[\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2 \Delta x} \right] + \frac{1}{2} a^2 (\Delta t)^2 \left[\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \right] \quad (\text{III.100})$$

Schema (III.100) are ordinul de exactitate doi și este stabilă pentru $c \leq 1$.

Exemplu

Considerăm ecuația:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in [-5, 5], \quad t \geq 0$$

$$u(x, 0) = \exp(1 - 5x^2)$$

care are soluția analitică $u(x, t) = \exp(1 - 5(x - t)^2)$. Vom rezolva ecuația numeric folosind schema Lax-Wendorff. Variația soluției în timp este redată în Fig. 41, iar programul Matlab este următorul:

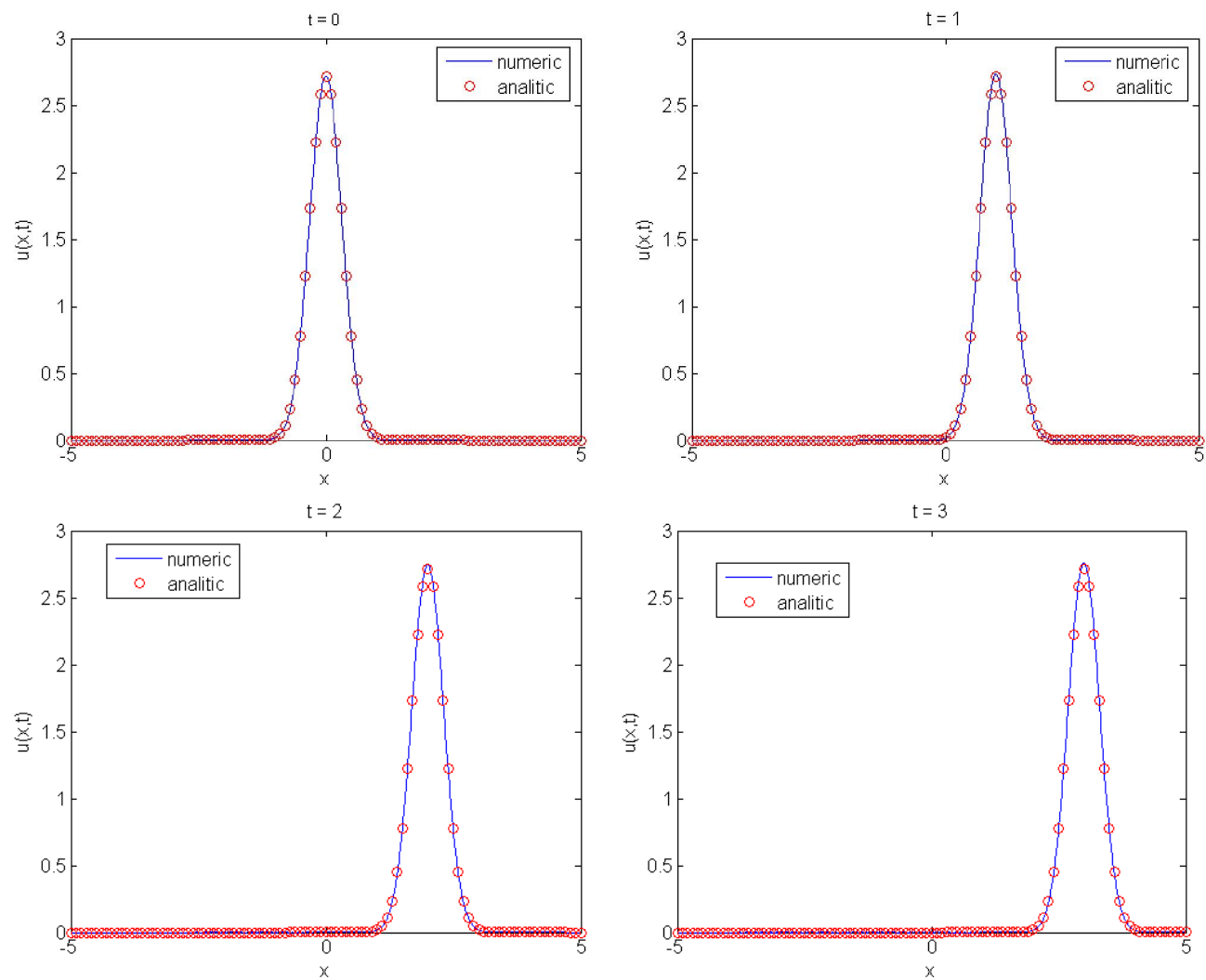


Figura 41. Variația soluției în timp.

```

a=-5;b=5;dt=0.001;dx=0.01;
x=a:dx:b;xa=a:10*dx:b;
N=length(x);
uo=exp(1-5*x.^2);%conditia initiala
tf=3;t=0;
uex=exp(1-5*(xa-t*ones(1,length(xa))).^2);%solutia exacta
nr_it=0;
plot(x,uo,'b',xa,uex,'or')
pause
k=1;
M(k)=getframe;
while t<tf
    t=t+dt;
    nr_it=nr_it+1;
    un(1)=uo(1)-dt/dx*(uo(2)-uo(1));
    for i=2:N-1
        un(i)=uo(i)-dt/dx/2*(uo(i+1)-uo(i-1))+0.5*dt*dt/dx/dx*(uo(i+1)
            -2*uo(i)+uo(i-1));
    end
    un(N)=uo(N)-dt/dx*(uo(N)-uo(N-1));

    if mod(nr_it,10)==0
        k=k+1;
        uex=exp(1-5*(xa-t*ones(1,length(xa))).^2);
        plot(x,un,'b',xa,uex,'or');
        M(k)=getframe;
    end
    uo=un;
end
movie(M)

```