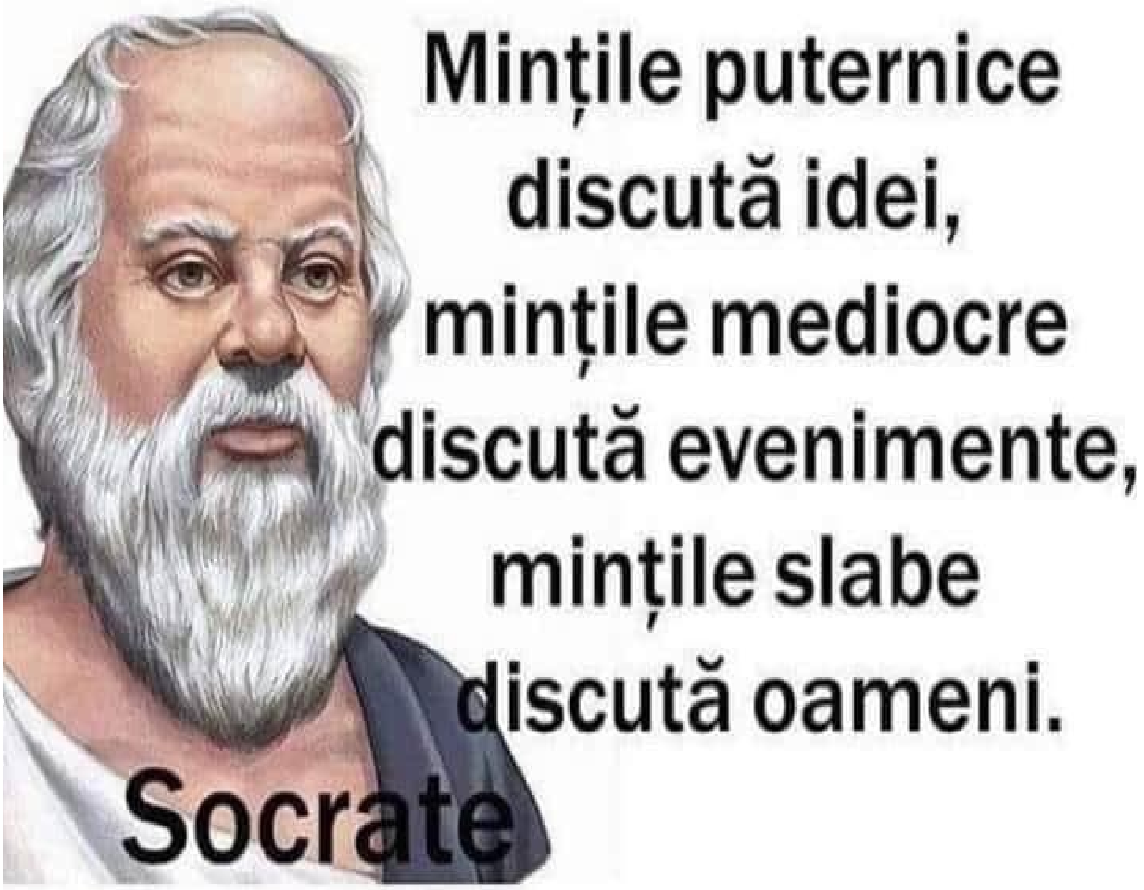
Adrian Petruşel

Ecuaţii Diferenţiale


Mințile puternice
discută idei,
mințile mediocre
discută evenimente,
mințile slabe
discută oameni.
Socrate

Cuprins

Introducere

Scopul acestui curs este de a prezenta principalele noţiuni şi rezultate din teoria ecuaţiilor diferenţiale şi a sistemelor dinamice generate de acestea. In plus, vom discuta tangenţial şi despre unele clase de ecuaţii integrale, ce se leagă în mod natural de unele probleme asociate ecuaţiilor diferenţiale de ordinul 1 sau ordinul 2. Principalele teme sunt: 1. Ecuaţii diferenţiale şi ecuaţii integrale rezolvabile efectiv; 2. Modele matematice guvernate de ecuaţii diferenţiale; 3. Teoreme de existenţă şi unicitate pentru problema lui Cauchy asociată unei ecuaţii diferenţiale via principiul contracţiei al lui Banach; 4. Sisteme de ecuaţii liniare de ordinul 1; 5. Sisteme dinamice generate de ecuaţii diferenţiale.

Materialul de faţă este împărţit pe capitole, fiecărui capitol corespunzând unui curs şi unui seminar. Cursul explică pe larg noţiunile şi rezultatele fundamentale mai sus enumerate, iar seminarul va considera exerciţii şi probleme aplicative (rezolvate şi propuse). Seminariile sunt susţinute de mine şi de colega mea conf.dr. Monica Bota. Cât priveşte laboratorul, doctoranda Cristina Gheorghe va fi cea care va gestiona activitatea de laborator. Tematica acestuia este următoarea:

1. Introducere în Maple/Sage; 2. Ecuaţii diferenţiale de ordinul 1; 3. Sisteme de ecuaţii diferenţiale de ordinul 1 4. Ecuaţii diferenţiale de ordinul 2; 5. Modele matematice guvernate de ecuaţii diferenţiale; 6. Metoda aproximaţiilor succesive şi noţiuni de stabilitate; 7. Evaluare.

Prezenţa este obligatorie la seminar şi laborator, absenţa la mai mult de un laborator sau mai mult de trei seminarii atrăgând după sine neprimirea în examenul din sesiunea şi, astfel, nepromovarea examenului. Temele rezolvate (12 exerciţii dintre cele propuse în primele 10 capitole, câte două din capitolele 2, 8 şi 9 şi câte unul din restul capitolelor, la alegerea studentului) se predau la ultimul curs din ianuarie 2025. In caz de similitudine între una sau mai multe teme, ambele/toate se anulează şi punctajul acordat va fi zero. De asemenea, în ceea ce priveşte conectarea la activitatea de seminar şi laborator, se va respecta componenţa anunţată a grupelor/subgrupelor.

Nota finală la disciplina *Ecuaţii diferenţiale* este compusă din: 10% - activitatea la curs şi seminar, 10% - realizarea temelor propuse, 10% - lucrarea de control de la seminar (săptămâna a şasea), 10% - realizarea proiectului de laborator (minim nota 5,00), 50% - nota de la examenul scris din sesiune (care trebuie să fie minim 5,00). Un punct se acordă din oficiu.

Alte informaţii: A. Petruşel (http://math.ubbcluj.ro/ petrusel/).

Adrian Petruşel Septembrie 2024

Capitolul 1

Noţiunea de ecuaţie diferenţială

1.1 Noţiunea de ecuaţie diferenţială. Tipuri de soluţii

O ecuaţie diferenţială este o ecuaţie în care necunoscuta este o funcţie de o variabilă reală (să zicem $x = x(t), t \in I$, cu I interval al axei reale) şi ea apare în ecuaţie împreună cu derivatele sale.

Comentariu istoric. Se pare că termenul de "equatio differentialis" a fost folosit pentru prima dată în 1676 de Gotfried Wilhelm von Leibnitz pentru a desemna problema determinării unei funcţii ce satisface o relaţie în care apare ea şi unele derivate ale ei.

O ecuaţie diferenţială ordinară este o ecuaţie diferenţială în care funcţia necunoscută şi derivatele sale apar pe aceeaşi argument notat, de exemplu, cu t. Un exemplu de ecuaţie diferenţială ordinară este ecuaţia

$$x''(t) - t^2x'(t) + 3tx^2(t) = \arctan t, t \in [0, \infty[.$$

Dacă în ecuaţia diferenţială există o modificare a argumentului, atunci ecuaţia respectivă se numeşte ecuaţie diferenţială cu argument modificat.

De exemplu, dacă $\tau > 0$ este o constantă reală dată, atunci ecuaţia

$$x''(t) + 2x'(t) - x(t-\tau) = t^2, \ t \in \mathbb{R}$$

este o ecuaţie cu argument modificat, mai exact cu argument întârziat. O ecuaţie diferenţială de ordinul $n \in \mathbb{N}^*$ este o ecuaţie în care funcţia necunoscută apare împreună cu derivatele sale, iar ordinul cel mai mare al derivatei este n. De exemplu, ecuaţia

$$x''(t) - tx(t) = \sin t, \ t \in \mathbb{R}$$

este o ecuaţie diferenţială ordinară de ordinul 2.

In ceea ce urmează, dacă I este un interval al axei reale, vom nota cu $C(I, \mathbb{R}^n)$ spaţiul funcţiilor continue pe I cu valori în $\mathbb{R}^n$, iar cu $C^m(I, \mathbb{R}^n)$ spaţiul funcţiilor continue pe I cu toate derivatele continue pe I până la ordinul m. Dacă $n = 1$ vom scrie pe scurt $C(I)$ sau $C^m(I)$.

Definiţie. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ o funcţie continuă pe D. Un sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul 1 în formă normală Cauchy este dat de

$$X'(t) = f(t, X(t)). \tag{1.1}$$

Printr-o soluţie a sistemului (1.1) pe intervalul I al axei reale înţelegem o funcţie $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ ce satisface:

(i) $Grafic(\varphi) := \{(t, \varphi(t)) : t \in I\} \subset D$;

(ii) φ este derivabilă pe I;

(iii) $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$, oricare ar fi $t \in I$.

Să remarcăm faptul că, din (ii) şi (iii), folosind faptul că f este continuă, avem că $\varphi \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$.

Observaţie. Dacă explicităm

$$X(t) := \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \cdots \\ x_n(t) \end{pmatrix},$$

respectiv

$$f := \begin{pmatrix} f_1 \\ \cdots \\ f_n \end{pmatrix},$$

atunci (1.1) se reprezintă desfăşurat ca un sistem de n ecuaţii diferenţiale de ordinul 1 de forma

$$\begin{cases} x_1'(t) = f_1(t, x_1(t), \cdots, x_n(t)), \\ \cdots \\ x_n'(t) = f_n(t, x_1(t), \cdots, x_n(t)), \end{cases} \tag{1.2}$$

unde $f_i : D \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue pentru $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

Corespunzător, soluţia sistemului (1.2) se reprezintă

$$\varphi(t) := \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \cdots \\ \varphi_n(t). \end{pmatrix}$$

Observaţie. In particular, $X'(t) = f(X(t))$ este un sistem autonom de ecuaţii diferenţiale de ordinul 1. Deseori, mai ales în procesul de modelare matematică, suntem interesaţi de găsirea soluţiilor sistemelor autonome ce sunt constante în timp. Acestea se numesc soluţii echilibru sau soluţii staţionare ale sistemului dat. Evident, în aceste cazuri avem că $X'(t) = 0, t \in I$ şi, în consecinţă, soluţiile echilibru ale sistemului $X' = f(X)$ se obţin rezolvând sistemul $f(X) = 0$.

Comentariu istoric. Notaţiile derivatei unei funcţii $x = x(t)$ date de-a lungul timpului:

$$\frac{dx}{dt} - \text{ a fost dată de Leibnitz,}$$

$$\dot{x}(t) - \text{ a fost dată de Newton,}$$

$$x'(t) - \text{ a fost dată de Lagrange.}$$

Definiţie. Fie $F : E \subseteq \mathbb{R}^{n+2} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe E. O ecuaţie diferenţială de ordinul n în formă implicită este dată de

$$F(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n)}(t)) = 0, \tag{1.3}$$

unde $x^{(n)}$ notează derivata de ordinul n a funcţiei x.

Printr-o soluţie a ecuaţiei (1.3) pe intervalul I al axei reale înţelegem o funcţie $\varphi : I \to \mathbb{R}$ ce satisface:

(i) $\varphi \in C^n(I, \mathbb{R})$;

(ii) $(t, \varphi(t), \varphi'(t), \cdots, \varphi^{(n)}(t)) \in E$, oricare ar fi $t \in I$;

(iii) $F(t, \varphi(t), \varphi'(t)(t), \ldots, \varphi^{(n)}(t)) = 0$, oricare ar fi $t \in I$.

Observaţie. In anumite condiţii, ecuaţia (1.3) poate fi rescrisă sub forma

$$x^{(n)}(t) = G(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)), \tag{1.4}$$

ceea ce reprezintă forma normală Cauchy a unei ecuaţii diferenţiale de ordinul n.

Exemplu. Fie ecuaţia diferenţială de ordinul 1 $x'(t) = x(t), t \in \mathbb{R}$. Funcţia $\varphi(t) = e^t, t \in \mathbb{R}$ este o soluţie explicită a ecuaţiei pe $\mathbb{R}$. Mulţimea tuturor soluţiilor ecuaţiei date este $S = \{\varphi(t) = ce^t, t \in \mathbb{R} : c \in \mathbb{R}\}$.

Definiţie. Fie J un interval al axei reale, $g : D := J \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi ecuaţia diferenţială de ordinul 1

$$g(t, x(t), x'(t)) = 0, t \in J. \tag{1.5}$$

Prin definiţie, relaţia

$$h(t, \varphi(t)) = 0, t \in I \tag{1.6}$$

este o soluţie în formă implicită a ecuaţiei (1.5) pe intervalul $I \subseteq J$ dacă orice funcţie $\varphi \in C^1(I, \mathbb{R})$ ce verifică (1.6) pe intervalul I este o soluţie a ecuaţiei (1.5) pe intervalul I.

Exemplu. Fie ecuaţia diferenţială de ordinul 1 $x'(t) = x(t), t \in \mathbb{R}$. Relaţia

$$\ln|\varphi(t)| = t, t \in \mathbb{R}$$

defineşte o soluţie în formă implicită a ecuaţiei date pe $\mathbb{R}$.

Exemplu. Asemănător, relaţia $5x - x^5 + t^5 - 1 = 0$ defineşte o soluţie $x = x(t)$ în formă implicită a ecuaţiei $x'(t) = \frac{t^4}{x^4(t)-1}$. Intr-adevăr, dacă derivăm relaţia $5x - x^5 + t^5 - 1 = 0$ în raport cu t avem: $5x'(t) - 5x^4(t)x'(t) + 5t^4 = 0$, ceea ce conduce exact la relaţia $x'(t) = \frac{t^4}{x^4(t)-1}$.

Definiţie. Fie J un interval al axei reale, $g : D := J \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi ecuaţia diferenţială de ordinul 1

$$g(t, x(t), x'(t)) = 0, t \in J. \tag{1.7}$$

Prin definiţie, relaţiile

$$\begin{cases} t = \psi(s), \\ x = \zeta(s), s \in I \end{cases} \tag{1.8}$$

(unde $\psi, \zeta \in C^1(I, \mathbb{R})$ sunt funcţii cunoscute) definesc o soluţie în formă parametrică a ecuaţiei (1.7) pe intervalul $I \subseteq J$ dacă:

(a) $\psi'(s) \neq 0$, oricare ar fi $s \in I$ şi $(\psi(s), \zeta(s), \frac{\zeta'(s)}{\psi'(s)}) \in D$ oricare ar fi $s \in I$;

(b) $g(\psi(s), \zeta(s), \frac{\zeta'(s)}{\psi'(s)}) = 0$, oricare ar fi $s \in I$.

Exemplu. Fie ecuaţia diferenţială de ordinul 1 $x'(t) = x(t), t \in \mathbb{R}$. Relaţiile

$$\begin{cases} t = s, \\ x = 2e^s, s \in \mathbb{R} \end{cases}$$

definesc o soluţie în formă parametrică a ecuaţiei date.

Definiţie. Prin definiţie, graficul unei soluţii de ecuaţie diferenţială se numeşte curbă integrală.

1.2 Probleme asociate unor ecuaţii diferenţiale

În teoria ecuaţiilor diferenţiale şi, mai ales, în aplicaţiile în lumea reală ale acestora, câteva probleme asociate ecuaţiilor se studiază.

A. Problema cu condiţii iniţiale (Problema lui Cauchy).

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ o funcţie continuă pe D şi sistemul de ecuaţii diferenţiale de ordinul 1 dat de

$$X'(t) = f(t, X(t)). \tag{1.9}$$

Problema cu condiţii iniţiale asociată sistemului (1.9) constă în determinarea soluţiilor sistemului de mai sus se satisfac suplimentar condiţia

$$X(t_0) = X^0, \tag{1.10}$$

unde valoarea $(t_0, X^0) \in D$ este cunoscută.

In acest caz, problema cu condiţii iniţiale este reprezentată prin

$$\begin{cases} X'(t) = f(t, X(t)) \\ X(t_0) = X^0. \end{cases}$$

Observaţie. Fie o ecuaţie diferenţială de ordinul n în forma normală Cauchy, de forma

$$x^{(n)}(t) = G(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t)), \tag{1.11}$$

unde $G : D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă dată.

Ecuaţia de mai sus este echivalentă cu un sistem de n ecuaţii diferenţiale de ordinul 1. Intr-adevăr, notăm: $x_1 := x, x_2 := x', x_n := x^{(n-1)}$. Atunci (1.11) este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = x_3(t) \\ \cdots \\ x_{n-1}'(t) = x_n(t) \\ x_n'(t) = G(t, x_1(t), \cdots, x_n(t)). \end{cases} \tag{1.12}$$

Astfel, dacă notăm

$$X(t) := \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \cdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \cdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

şi

$$X^0 := \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \cdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}$$

folosind observaţia de mai sus, problema cu valori iniţiale asociată ecuaţiei (1.11) este:

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) = G(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)) \\ x(t_0) = x_1^0 \\ x'(t_0) = x_2^0 \\ \cdots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_n^0, \end{cases} \tag{1.13}$$

unde valoarea $(t_0, X^0) \in D$ (cu $X^0 = (x_1^0, \cdots, x_n^0)$) este dată.

Cometariu istoric. Jean le Rond D'Alembert observă în 1770 că orice ecuaţie diferenţială de ordin superior se poate reduce în mod echivalent la un sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul 1.

B. Problema cu condiţii pe frontieră (Probleme de tip Dirichlet/Neumann).

Fie o ecuaţie diferenţială de ordinul 2 în forma normală Cauchy, de forma

$$x''(t) = g(t, x(t), x'(t)), \tag{1.14}$$

unde $g : [a, b] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă dată, iar $[a, b]$ este un interval nedegenarat al axei reale.

Printr-o problemă cu condiţii pe frontieră de tip Dirichlet asociată ecuaţiei (1.14) înţelegem următoarea problemă

$$\begin{cases} x''(t) = g(t, x(t), x'(t)), t \in [a, b] \\ x(a) = \alpha \\ x(b) = \beta, \end{cases} \tag{1.15}$$

unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sunt valori cunoscute.

Printr-o problemă cu condiţii pe frontieră de tip Neumann asociată ecuaţiei (1.14) înţelegem următoarea problemă

$$\begin{cases} x''(t) = g(t, x(t), x'(t)), t \in [a, b] \\ x'(a) = \alpha \\ x'(b) = \beta, \end{cases} \tag{1.16}$$

Dacă ecuaţiei (1.14) asociem condiţii pe frontieră de tipul

$$\begin{cases} a_1 x(a) + a_2 x'(a) = \alpha \\ b_1 x(b) + b_2 x'(b) = \beta, \end{cases} \tag{1.17}$$

unde $a_1, a_2, b_1, b_2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sunt valori date, avem o problemă cu condiţii pe frontieră de tip mixt.

1.3 Exerciţii rezolvate şi propuse

A. Exerciţii rezolvate.

1) Fie ecuaţia diferenţială $x'(t) = g(t), t \in I$ (unde $g \in C(I)$ iar $I \subset \mathbb{R}$ este un interval).

Se cere:

a) să se scrie mulţimea soluţiilor ei;

b) să se rezolve explicit în cazurile $g(t) = t \cos t, g(t) = t^2 \ln t, g(t) = \arcsin t, g(t) = \arctan t$, precizându-se de fiecare dată domeniul maxim.

c) să se rezolve problema

$$\begin{cases} x'(t) = g(t) \\ x(1) = 1, \end{cases}$$

unde $g : [0, 2] \to \mathbb{R}$ este dată de relaţia

$$g(t) = \begin{cases} 2t - 1, \ t \in [0, 1], \\ te^{t-1}, \ t \in]1, 2]. \end{cases}$$

Soluţie. a) $x(t) = \int_{t_0}^{t} g(s)ds + c$, unde $c \in \mathbb{R}$ iar $t_0 \in I$ poate fi ales arbitrar.

b) exerciţiu !

c) Deoarece g este continuă, ea admite primitive. Prin integrare pe ramuri, obţinem

$$x(t) = \int g(t)dt = \begin{cases} t^2 - t + c_1, \ t \in [0,1], \\ (t-1)e^{t-1} + c_2, \ t \in]1,2]. \end{cases}$$

Din condiţia de continuitatea asupra lui x rezultă $c_1 = c_2$. Deci soluţia ecuaţiei date este

$$x(t) = \begin{cases} t^2 - t + c, \ t \in [0,1], \\ (t-1)e^{t-1} + c, \ t \in]1,2], \end{cases}$$

unde $c \in \mathbb{R}$ este o constantă reală arbitrară. Se observă ca $x \in C^1([0,2])$. Din condiţia iniţială $x(1) = 1$ rezultă $c = 1$. Concluzie: unica soluţie pe intervalul $[0,2]$ a problemei date este

$$x(t) = \begin{cases} t^2 - t + 1, \ t \in [0,1], \\ (t-1)e^{t-1} + 1, \ t \in]1,2], \end{cases}$$

2) Fie ecuaţia diferenţială

$$x'(t) = 2x(t), t \in [0, \infty[.$$

a) Daţi exemple de soluţii ale ecuaţiei: soluţie în formă explicită, soluţie în formă implicită şi soluţie în formă parametrică.

b) Precizaţi o soluţie a problemei cu valori iniţiale formată din ecuaţia dată şi condiţia $x(0) = -1$.

Soluţie. a) Se observă că funcţia $x(t) = e^{2t}$ satisface ecuaţia dată. Mai mult, orice funcţie de forma $x(t) = ce^{2t}$ (unde $c \in \mathbb{R}$ este o constantă

arbitrară) satisface ecuaţia. Aceasta reprezintă soluţia explicită a ei.
O soluţie în formă implicită este, de exemplu,

$$\ln|x(t)| = 2t, t \in [0, \infty[.$$

De asemenea, pentru orice constantă arbitrară $c \in \mathbb{R}$, relaţiile

$$\begin{cases} t = s, \\ x = ce^{2s}, s \in [0, \infty[\end{cases}$$

definesc o soluţie în formă parametrică a ecuaţiei date.

b) Dacă $x(t) = ce^{2t}$ este soluţie a ecuaţiei (cu orice constantă reală c), atunci din condiţia $x(0) = -1$ deducem $c = -1$. Deci, soluţia problemei lui Cauchy este $x(t) = -e^{2t}$. Să observăm că este unica soluţie a problemei.

3) Fie problema cu valori iniţiale (problema lui Cauchy)

$$\begin{cases} x'(t) = -2t, t \in \mathbb{R} \\ x(1) = \eta, \end{cases} \tag{1.18}$$

unde $\eta \in \mathbb{R}$ este dată. Precizaţi o soluţie a acestei probleme.

Soluţie. Integrând ecuaţia dată avem

$$x(t) = -t^2 + c, t \in \mathbb{R} \text{ (unde } c \in \mathbb{R}).$$

Din condiţia iniţială avem $c = \eta + 1$, deci unica soluţie a problemei Cauchy date este $x(t) = -t^2 + \eta + 1, t \in \mathbb{R}$.

4) Fie ecuaţia diferenţială $x''(t) = g(t), t \in I$ (unde $g \in C(I)$, iar $I \subset \mathbb{R}$ este un interval). Se cere să se scrie mulţimea soluţiilor ei.

Soluţie. Integrând succesiv de două ori avem

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} (t - s)g(s)ds + c_1 t + c_2,$$

unde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ iar $t_0 \in I$ poate fi ales arbitrar.

Intr-adevăr, integrând o dată, avem

$$x'(t) = \int_{t_0}^{t} g(s)ds + c_1.$$

Notăm $h(t) := \int_{t_0}^{t} g(s)ds + c_1$. Integrând acum ecuaţia $x'(t) = h(t)$ avem

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} h(p)dp + c_2 = \int_{t_0}^{t} \left(\int_{t_0}^{p} g(s)ds + c_1 \right) dp + c_2 =$$

$$\int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{p} g(s)dsdp + c_1(t - t_0) + c_2 = \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{t} v(s,p)dsdp + c_1(t - t_0) + c_2,$$

unde am notat

$$v(s,p) = \begin{cases} g(s), \;\; s \leq p, \\ 0, \;\; s > p. \end{cases}$$

Schimbând ordinea de integrare, avem

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} \left[\int_{t_0}^{t} v(s,p)dp \right] ds + c_1(t - t_0) + c_2 =$$

$$\int_{t_0}^{t} \left[\int_{t_0}^{s} v(s,p)dp + \int_{s}^{t} v(s,p)dp \right] ds + c_1(t - t_0) + c_2 =$$

$$\int_{t_0}^{t} \left[\int_{t_0}^{s} 0dp + \int_{s}^{t} g(s)dp \right] ds + c_1(t - t_0) + c_2 =$$

$$\int_{t_0}^{t} \left(\int_{s}^{t} g(s)dp \right) ds + c_1(t - t_0) + c_2 =$$

$$\int_{t_0}^{t} g(s) \left(\int_{s}^{t} dp \right) ds + c_1(t - t_0) + c_2 = \int_{t_0}^{t} (t - s)g(s)ds + c_1(t - t_0) + c_2.$$

5) Fie problema Dirichlet

$$\begin{cases} x''(t) = x(t), t \in [0,1] \\ x(0) = 1, x(1) = \frac{2}{e} - e. \end{cases} \tag{1.19}$$

Precizaţi o soluţie a a acestei probleme.

Soluţie. Se observă că funcţia $x_1(t) = e^t, t \in [0,1]$ este soluţie a ecuaţiei. Mai mult, orice funcţie de forma $x(t) = c_1 e^t, t \in [0,1]$ (unde c_1 este o constantă reală arbitrară) este de asemenea soluţie a ecuaţiei. Ceea ce mai putem observa este că orice funcţie de forma $x_2(t) = e^{-t}, t \in [0,1]$ verifică ecuaţia, şi mai mult, orive funcţie de forma $x(t) = c_2 e^{-t}, t \in [0,1]$ (unde c_2 este o constantă reală arbitrară) este, de asemenea, soluţie a ecuaţiei. Interesant este şi faptul că şi combinaţia liniară a celor două funcţii x_1, x_2 este soluţie a ecuaţiei, i.e.

$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}, t \in [0,1]$ (c_1, c_2 sunt două constante reale arbitrare).

Impunând cele două condiţii pe frontiera domeniului problemei rezultă un sistem în necunoscutele c_1, c_2 care dă $c_1 = -1, c_2 = 2$. Deci, unica soluţie a problemei este

$$x(t) = -e^t + 2e^{-t}, t \in [0,1].$$

B. Exerciţii propuse.

1) Să se rezolve problema

$$\begin{cases} x'(t) = g(t) \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

unde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este dată de relaţia

$$g(t) = \begin{cases} \sqrt{t}, \ t \in [0, \infty[, \\ \ln(t^2 + 1), \ t \in] - \infty, 0[. \end{cases}$$

2) Fie ecuaţia diferenţială $x'(t) = -x(t), t \in \mathbb{R}$. Daţi exemple de soluţii ale ecuaţiei: soluţie în formă explicită, soluţie în formă implicită şi soluţie în formă parametrică.

3) Fie problema cu valori iniţiale (problema lui Cauchy)

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t), t \in [0, \infty[\\ x(0) = \eta, \end{cases} \tag{1.20}$$

unde $\eta \in \mathbb{R}$ este dată. Precizaţi o soluţie a acestei probleme.

4) Fie problema Dirichlet

$$\begin{cases} x''(t) = \cos t, t \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ x(0) = 0, x(\frac{\pi}{2}) = 2. \end{cases} \tag{1.21}$$

Precizaţi o soluţie a a acestei probleme.

1.4 Concluzii

In acest paragraf am prezentat câteva clase de ecuaţii şi sisteme de ecuaţii diferenţiale, precum şi cele mai importante tipuri de probleme asociate lor. A fost definită noţiunea de soluţie, în cele trei ipostaze în care ea poate să apară: soluţie în formă explicită, soluţie în formă implicită şi soluţie în formă parametrică. Prin exemple şi exerciţii, "am ghicit" expresii ale soluţiilor, fără să aven (deocamdată) o metodă riguroasă şi clară de rezolvare.

In ceea ce urmează ne va interesa:

1) metode de rezolvare efectivă a ecuaţiilor şi sistemelor de ecuaţii diferenţiale (până la ordinul 2);

2) studiul existenţei, unicităţii, aproximării şi a dependenţei continue de date pentru probleme asociate unor clase de ecuaţii diferenţiale;

3) aspecte dinamice în teoria ecuaţiilor diferenţiale.

Capitolul 2

Ecuaţii diferenţiale rezolvabile efectiv

Prezentăm în continuare, pe scurt, câteva clase de ecuaţii diferenţiale ordinare de ordinul 1 ce pot fi rezolvate efectiv. Vom indica metoda de rezolvare efectivă ce permite determinarea soluţiei într-una din formele deja prezentate: explicită, implicită sau parametrică. In fapt, rezolvarea efectivă a ecuaţiilor sau a sistemelor de ecuaţii diferenţiale este posibilă într-un număr relativ mic de cazuri.

La Congresul Internaţional al Matematicienilor din 1908 de la Roma (pentru o istorie a acestor congrese internaţionale se poate consulta https://www.mathunion.org/icm/past-icms), Henri Poincaré spunea că rezolvarea efectivă este posibilă "one time in one hundred" şi îndemna matematicienii la trecerea spre studiul calitativ al teoriei ecuaţiilor, ceea ce înseamnă: existenţa, unicitatea, aproximarea şi dependenţa de date a soluţiei. Prin studiile sale Henri Poincaré a dat un impuls major teoriei calitative a ecuaţiilor diferenţiale şi, mai mult, este considerat creatorul teoriei sistemelor dinamice, domeniu al matematicii intrat începând cu anul 2000 în clasificarea subiectelor matematice propusă de American Mathematical Society (https://www.ams.org/home/page) şi European Mathematical Society (https://euro-math-soc.eu/), cele mai importante două societăţi profesionale internaţionale ale matematicienilor, alături desigur de International Mathematical Union (https://www.mathunion.org/). Pentru clasificarea subiectelor matematice (Mathematics Subject Classification (pe scurt MSC)) a se vedea https://mathscinet.ams.org/mathscinet/msc/msc2020.html sau https://zbmath.org/classification/.

2.1 Ecuaţii cu variabile separabile

Forma generală a unei ecuaţii diferenţiale cu variabile separabile este

$$x'(t) = g(t)h(x). \tag{2.1}$$

Presupunem:
(i) g e o funcţie continuă pe intervalul $]t_1, t_2[$ (unde $t_1 = -\infty, t_2 = +\infty$ sunt acceptate);
(ii) h e o funcţie continuă pe intervalul $]x_1, x_2[$ (unde $x_1 = -\infty, x_2 = +\infty$ sunt acceptate).

Necunoscuta ecuaţiei este $x = x(t), t \in I$ (unde $I \subseteq]t_1, t_2[$ este un interval al axei reale) şi ea se caută în clasa de funcţii C^1.

Vom presupune, de asemenea, că $h(x) \neq 0$ oricare ar fi $x \in]x_1, x_2[$. In fapt, dacă $h(x) = 0$ pentru o funcţie constantă $x(t) = \tilde{c}$, $t \in I$, atunci această funcţie este soluţie a ecuaţiei (2.1).

$\Rightarrow$ Fie $x = x(t), t \in I$ o soluţie a ecuaţiei (2.1). Atunci putem scrie ecuaţia dată astfel:

$$\frac{x'(t)}{h(x(t))} = g(t)$$

Integrând în raport cu t de la un punct $t_0 \in I$ fixat avem

$$\int_{t_0}^{t} \frac{x'(s)}{h(x(s))} ds = \int_{t_0}^{t} g(s) ds + c, c \in \mathbb{R}.$$

Facem schimbarea de variabilă $u = x(s)$ şi atunci (deoarece $du = x'(s)ds$) avem

$$\int_{x_0(t)}^{x(t)} \frac{du}{h(u)} = \int_{t_0}^{t} g(s)ds + c, c \in \mathbb{R}$$

sau, utilizând notaţia $x_0 := x(t_0)$, putem scrie mai simplu

$$\int_{x_0}^{x} \frac{du}{h(u)} = \int_{t_0}^{t} g(s)ds + c, c \in \mathbb{R}.$$

Notăm cu $H(x) := \int_{x_0}^{x} \frac{du}{h(u)}, x \in]x_1, x_2[$ primitiva funcţiei $\frac{1}{h(u)}$ şi putem observa că, în ipotezele făcute asupra lui h, avem că h păstrează semn constant pe $]x_1, x_2[$. Să presupunem că $h(x) > 0,$ oricare ar fi $x \in]x_1, x_2[$. In mod evident, H este derivabilă cu derivata continuă şi strict crescătoare pe $]x_1, x_2[$. In consecinţă, H admite inversă pe mulţimea $H(]x_1, x_2[)$, iar inversa ei, notată cu H^{-1} are aceleaşi proprietăţi ca şi H. Din ecuaţie, folosind notaţia cu H avem

$$H(x) = \int_{t_0}^{t} g(s)ds + c, c \in \mathbb{R},$$

formulă care dă soluţia ecuaţiei date în formă implicită.

In situaţia în care, din relaţia precedentă, putem exprima pe x avem

$$x(t) = H^{-1}(\int_{t_0}^{t} g(s)ds + c), t \in I \text{ (unde } c \in \mathbb{R}),$$

soluţia explicită a ecuaţiei date.

2.2 Ecuaţii omogene în sens Euler

Forma generală a unei ecuaţii diferenţiale omogene în sensul lui Euler este

$$x'(t) = g(\frac{x}{t}), \tag{2.2}$$

unde g este o funcţie continuă pe un interval J, iar ecuaţia este considerată pe un interval ce nu include originea.

Pentru rezolvarea efectivă a ecuaţiei se face schimbarea de variabilă $y := \frac{x}{t}$, prin care variabila dependentă a ecuaţiei se schimbă din x în y.

Din schimbarea de variabilă $y := \frac{x}{t}$ deducem $x = ty$ şi $x' = y + ty'$. Inlocuind în ecuaţia dată avem

$$y + ty' = g(y) \;\Leftrightarrow\; ty' = g(y) - y.$$

S-a obţinut astfel o ecuaţie cu variabile separabile în $y = y(t)$. După rezolvarea ecuaţiei în necuoscuta $y = y(t)$ (prin metoda indicată în paragraful anterior) se determină soluţia ecuaţiei iniţiale sub forma $x(t) = ty(t)$.

2.3 Ecuaţii diferenţiale liniare

Forma generală a unei ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul 1 este

$$x'(t) - p(t)x(t) = q(t),\; t \in I \subseteq \mathbb{R}, \tag{2.3}$$

unde p, q sunt funcţii continue pe un interval I al axei reale.

Mulţimea tuturor soluţiilor ecuaţiei notată cu $\mathcal{S}$ are reprezentarea

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \{\tilde{x}\},$$

unde $\mathcal{S}_0$ este mulţimea soluţiilor ecuaţiei omogene asociate (i.e., $x'(t) = p(t)x(t),\; t \in I \subseteq \mathbb{R}$, în care recunoaştem o ecuaţie cu variabile separabile), iar $\tilde{x}$ este o soluţie (oarecare) a ecuaţiei neomogene (2.3). Aceasta din urmă se poate determina prin metoda variaţiei constantei, metodă cunoscută sub denumirea de metoda lui Lagrange. Astfel, dacă s-a determinat

$$\mathcal{S}_0 = \{x(t) = ce^{\int_{t_0}^{t} p(s)ds} : c \in \mathbb{R}\}$$

(unde $t_0 \in I$), atunci $\tilde{x}(t)$ se caută sub forma

$$\tilde{x}(t) = \varphi(t)e^{\int_{t_0}^{t} p(s)ds},$$

unde φ este o funcţie de clasă C^1 care se determină din condiţia ca $\tilde{x}(t)$ să verifice ecuaţia (2.3).

Cometariu istoric. Rezolvarea ecuaţiei diferenţiale liniare de ordinul 1 este prezentată pentru prima dată de Sir Isaac Newton în 1687. In 1778, Joseph Lagrange redescoperă metoda variaţiei constantei, iar în literatura de specialitate această metodă este deseori prezentată ca metoda lui Lagrange. Tot lui Lagrange i se atribuie următoarea afirmaţie (valabilă şi astăzi): "I have always observed that the pretensions of all people are in exact inverse ratio to their merits; this is one of the axioms of morals".

2.4 Ecuaţii cu diferenţială totală exactă

O ecuaţie diferenţială de ordinul 1 de forma

$$g(t,x)x'(t) + h(t,x) = 0,\ t \in I \subseteq \mathbb{R}, \tag{2.4}$$

unde g, h sunt funcţii continue pe un domeniu $D \subseteq I \times \mathbb{R}$ din $\mathbb{R}^2$ (cu $g \neq 0$ pe D) se numeşte ecuaţie cu diferenţială totală exactă dacă există o funcţie $F \in C^1(D)$ astfel ca următoarele relaţii să aibă loc pe D:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} = h \\ \frac{\partial F}{\partial x} = g. \end{cases} \tag{2.5}$$

Ca o consecinţă, ecuaţia (2.4) se poate rescrie

$$dF(t,x) = 0$$

şi astfel soluţia în formă implicită a ecuaţiei date este

$$F(t,x) = c, t \in I \text{ (unde } c \in \mathbb{R}).$$

Determinarea lui F se poate face prin integrarea sistemului (2.5).

Observaţie. Verificarea faptului că o ecuaţie este cu diferenţială totală exactă se poate face mai uşor folosind următoarea caraterizare.

Lemă. Fie g, h două funcţii de clasă C^1 pe un domeniu $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Atunci expresia $g(t,x)x'(t) + h(t,x)$ (sau echivalent $g(t,x)dx + h(t,x)dt$) este o diferenţială totală exactă pe D dacă şi numai dacă

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial h}{\partial x}(t,x), \text{ oricare ar fi } (t,x) \in D. \tag{2.6}$$

2.5 Ecuaţii Bernoulli

Forma generală a unei ecuaţii diferenţiale de tip Bernoulli este

$$x'(t) - p(t)x(t) = q(t)x^{\alpha}(t), \; t \in I \subseteq \mathbb{R}, \tag{2.7}$$

unde p, q sunt funcţii continue pe un interval I, iar $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Pentru rezolvarea ei efectivă se face schimbarea de variabilă

$$y = x^{1-\alpha}$$

prin care se obţine o ecuaţie diferenţială liniară de ordinul 1 în necunoscuta $y = y(t)$. După ce se rezolvă prin metoda indicată la secţiunea 2.3, se revine la determinarea expresiei lui $x = x(t)$ corespunzătoare din relaţia $y = x^{1-\alpha}$.

2.6 Ecuaţii Riccati

Forma generală a unei ecuaţii diferenţiale de tip Riccati este

$$x'(t) - p(t)x(t) = q(t)x^2(t) + r(t), \; t \in I \subseteq \mathbb{R}, \tag{2.8}$$

unde p, q, r sunt funcţii continue pe un interval I.

In general, ecuaţiile Riccati nu sunt rezolvabile efectiv. Totusi, dacă se ştie o soluţie (oarecare) a ecuaţiei (să zicem $\tilde{x}(t) = \rho(t), t \in I$, atunci prin schimbarea de variabilă

$$x = \rho + \frac{1}{y}$$

se obţine o ecuaţie diferenţială liniară de ordinul 1 în necunoscuta $y = y(t)$. După ce se rezolvă prin metoda indicată la secţiunea 2.3, se revine la determinarea expresiei lui $x = x(t)$ corespunzătoare.

2.7 Ecuaţii Clairaut. Metoda parametrului

O ecuaţie Clairaut pe un interval I al axei reale are forma

$$x(t) = tx'(t) + g(x'(t)), t \in I, \tag{2.9}$$

unde $g \in C^1(J), J \subseteq \mathbb{R}$.

Dacă $x = x(t)$ este soluţie a ecuaţiei, atunci prin derivarea membru cu membru a ecuaţiei deducem

$$x''(t + g'(x')) = 0,$$

ceea ce arată că avem două variante:

1) $x'' = 0$, ceea ce implică $x'(t) = c, c \in \mathbb{R}$ şi apoi, din ecuaţia Clairaut (2.9), deducem

$$x(t) = ct + g(c), c \in \mathbb{R}.$$

2) $t + g'(x') = 0$, caz în care, notând $x' = p, p \in \mathbb{R}$ şi folosind din nou forma ecuaţiei Clairaut (2.9), implică următoarea reprezentare a soluţiei (în formă parametrică, depinzând de parametrul real p)

$$\begin{cases} t = -g'(p), \\ x = -pg'(p) + g(p), p \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.10}$$

Reciproc, orice funcţie de forma $x(t) = ct + g(c), c \in \mathbb{R}$ şi funcţia dată de (2.10) sunt soluţiile ecuaţiei date. Prima familie se numeşte soluţia generală a ecuaţiei Clairaut, iar a doua este soluţia singulară ecuţiei (2.9). In general, funcţia (2.10) este înfăşurătoarea familiei de drepte definite relaţia $x(t) = ct + g(c), c \in \mathbb{R}$.

2.8 Exerciţii rezolvate şi propuse

A. Exerciţii rezolvate.

1) Să se rezolve ecuaţia $x'(t) = -2tx(t), t \in \mathbb{R}$.

Soluţie. Este o ecuaţie cu variabile separabile. Avem $g(t) = -2t, t \in \mathbb{R}$, $h(x) = x$.

Presupunând $h(x) = 0$ obţinem soluţia constantă $x = 0$. Atunci funcţia $x(t) = 0, t \in \mathbb{R}$ este o soluţie a ecuaţiei date.

Să presupunem acum că $x \neq 0$. Atunci ecuaţia dată (este o ecuaţie cu variabile separabile) poate fi scrisă, prin separarea variabilelor, astfel

$$\frac{1}{x}dx = -2tdt.$$

Integrând avem

$$\ln|x| = -t^2 + c, \text{ pentru } c \in \mathbb{R}.$$

Am obţinut astfel soluţia în formă implicită. De aici putem deduce imediat că

$$|x(t)| = e^{-t^2+c},$$

sau, după ce notăm $c_1 := e^c$, putem scrie

$$|x(t)| = c_1 e^{-t^2}, \ c_1 > 0.$$

Explicitând avem

$$x(t) = +/-c_1 e^{-t^2}, \ c_1 > 0.$$

Notând $c := +/-c_1$, obţinem

$$x(t) = ce^{-t^2}, c \in \mathbb{R}^*.$$

Putem include soluţia constantă $x(t) = 0, t \in \mathbb{R}$ în reprezentarea noastră dând voie constantei c să ia şi valoarea 0. In concluzie, funcţia

$$x(t) = ce^{-t^2}, t \in \mathbb{R} \text{ (pentru orice constantă } c \in \mathbb{R})$$

este soluţia generală a ecuaţiei date.

2) Să se rezolve problema cu valori iniţiale formată din ecuaţia diferenţială $x'(t) = 2t(1+x^2(t)), t \in \mathbb{R}$ şi condiţia de tip Cauchy $x(0) = 1$.

Soluţie. Este o ecuaţie cu variabile separabile. In acest caz $g(t) = 2t$ iar $h(x) = 1 + x^2$, ambele definite pe $\mathbb{R}$ şi cu proprietatea că $h(x) \neq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

După separarea variabilelor, avem

$$\frac{1}{1+x^2}dx = 2tdt.$$

Integrând avem

$$\arctan x = t^2 + c,$$

unde c este o constantă reală. Din condiţia Cauchy $x(0) = 1$ obţinem $c = \frac{\pi}{4}$. Soluţia în formă implicită este

$$\arctan x = t^2 + \frac{\pi}{4}, t \in I,$$

unde I este caracterizat de faptul că $t^2 + \frac{\pi}{4} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Rezolvând acest sistem de inecuaţii avem $t \in]-\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{\pi}}{2}[$. In final, conchidem că

$$x(t) = \text{tg } (t^2 + \frac{\pi}{4}), t \in]-\infty, \frac{\sqrt{\pi}}{2}[$$

este unica soluţie a ecuaţiei. Observaţi că soluţia ”explodează” în timp finit, căci

$$\lim_{t \nearrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}} x(t) = \infty.$$

3) Să se rezolve problema cu valori iniţiale formată din ecuaţia diferenţială

$$t^2x'(t) = tx(t) - 2x^2(t)), t \in]-\infty, 0[$$

şi condiţia de tip Cauchy $x(-1) = 1$.

Soluţie. Recunoaştem o ecuaţie omogenă în sensul lui Euler cu $g(\frac{x}{t}) = \frac{x}{t} - 2(\frac{x}{t})^2$. Facem schimbarea de variabilă $y := \frac{x}{t}$ şi deducem $x = ty$ şi $x' = y + ty'$. Inlocuind, avem

$$y + ty' = y - 2y^2 \text{ sau echivalent } ty' = -2y^2.$$

Să rezolvăm această ecuaţie cu variabile separabile. Observăm că funcţia $y(t) = 0, t \in]-\infty, 0[$ verifică ecuaţia. Aceasta generează soluţia ecuaţiei iniţiale $x(t) = 0, t \in]-\infty, 0[$. Având în vedere condiţia lui Cauchy $x(-1) = 1$, constatăm că această soluţie a ecuaţiei nu generează o soluţie a problemei cu valori iniţiale date. Căutăm soluţii nebanale ale ecuaţiei cu variabile separabile $ty' = -2y^2$. După separarea variabilelor obţinem

$$y^{-2}dy = -\frac{2}{t}dt$$

iar prin integrare avem

$$\frac{1}{y} = 2\ln(-t) + c, c \in \mathbb{R}.$$

Din $x(-1) = 1$ deducem $y(-1) = -1$, ceea ce permite determinarea constantei c de mai sus. Rezultă $c = -1$. Astfel, soluţia explicită a problemei în necunoscuta y este $y(t) = \frac{1}{2\ln(-t)-1}$ iar a problemei iniţiale

$$x(t) = \frac{t}{2\ln(-t) - 1}.$$

Deoarece expresia anterioară trebuie să fie bine definită, rezultă că soluţia problemei Cauchy date (ţinând cont că $\sqrt{e} = 1.6487212707...$) este

$$x(t) = \frac{t}{2\ln(-t) - 1}, \ t \in]-\sqrt{e}, 0[.$$

(De ce ? Căci $-1 \in]-\sqrt{e}, 0[$.)

4) Să se rezolve ecuaţia $x'(t)\cos t - x(t)\sin t = 2t, t \in I :=]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ cu condiţia adiţională $x(0) = 1$.

Soluţie. Avem de a face cu o ecuaţie liniară. Rezolvăm problema în 2 etape.

I. Găsim mulţimea $\mathcal{S}_0$ a soluţiilor ecuaţiei omogene asociate: $x'(t)\cos t - x(t)\sin t = 0$. Să notăm că $x(t) = 0, t \in I$ este soluţie. Pentru funcţii neidentic nule, separând variabilele avem

$$\frac{1}{x}dx = \tan t.$$

Integrând avem

$$\ln|x(t)| = -\ln(\cos t) + c_1, c_1 \in \mathbb{R}.$$

Explicitând obţinem soluţia generală $x(t) = \frac{c}{\cos t}, t \in I$ $(c \in \mathbb{R})$, familie de funcţii ce înglobează şi soluţia nulă pusă iniţial în evidenţă. Deci

$$\mathcal{S}_0 = \{\frac{c}{\cos t}, t \in I \ : \ c \in \mathbb{R}\}.$$

II. Găsim $\tilde{x}$, o soluţie oarecare a ecuaţiei neomogene $x'(t)\cos t - x(t)\sin t = 2t$. Caut $\tilde{x}(t) = \frac{\varphi(t)}{\cos t}$, unde φ este o funcţie de clasă C^1, deocamdată necunoscută. Cerem ca $\tilde{x}$ să verifice ecuaţia neomogenă şi avem

$$\frac{\varphi'(t)\cos t + \varphi(t)\sin t}{\cos^2 t}\cos t - \frac{\varphi(t)}{\cos t}\sin t = 2t \ \Leftrightarrow$$
$$\varphi'(t) = 2t \ \Leftrightarrow \ \varphi(t) = t^2.$$

In consecinţă, avem $\tilde{x}(t) = \frac{2t}{\cos t}$

Concluzia este că mulţimea tuturor soluţiilor ecuaţiei date este

$$\mathcal{S} = \{\frac{c}{\cos t} + \frac{2t}{\cos t}, t \in I \ : \ c \in \mathbb{R}\}.$$

Din condiţia iniţială $x(0) = 1$ găsim $c = 1$ şi astfel unica soluţie pentru problema Cauchy dată este

$$x^*(t) = \frac{1}{\cos t} + \frac{2t}{\cos t} = \frac{2t+1}{\cos t}, t \in I.$$

B. Exerciţii propuse.

1) Să se rezolve ecuaţia $x'(t) = 3t^2x^3(t), t \in \mathbb{R}$.

2) Să se rezolve ecuaţia diferenţială $t^2x'(t) = -2tx(t) + x^2(t), t \in]0, \infty[$.

3) Dintre soluţiile ecuaţiei

$$t^2x'(t)\cos(x(t)) = -2, t > 0$$

aflaţi-le pe acelea care au proprietatea $\lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{\pi}{6}$. Să se precizeze şi domeniul maxim de definiţie al soluţiei.

4) Să se rezolve problema cu valori iniţiale formată din ecuaţia diferenţială $x'(t) = (x(t)+t)^3 + 1, t \in \mathbb{R}$ şi condiţia de tip Cauchy $x(0) = -1$.

5) Să se rezolve ecuaţia $x'(t) - x(t)\sin t = -2\sin t, t \in \mathbb{R}$.

Capitolul 3

Modele guvernate de ecuaţii diferenţiale

3.1 Proces de modelare matematică

Câteva definiţii:

1) "Mathematical modeling is the art of translating problems from an application area into tractable mathematical formulations whose theoretical and numerical analysis provides insight, answers, and guidance useful for the originating application." *Arnold Neumaier*, http://www.mat.univie.ac.at/ neum/papers.html#model

2) "A mathematical model is a description of a system using mathematical concepts and language. The process of developing a mathematical model is termed mathematical modeling. Mathematical models are used in the natural sciences (such as physics, biology, earth science, chemistry) and engineering disciplines (such as computer science, electrical engineering), as well as in the social sciences (such as economics, psychology, sociology, political science). A model may help to explain a system and to study the effects of different components, and to make predictions about behaviour." *Wikipedia*

3) "What is mathematical modelling ?

Models describe our beliefs about how the world functions. In mathematical modelling, we translate those beliefs into the language of mathematics. This has many advantages:

1. Mathematics is a very precise language. This helps us to formulate ideas and identify underlying assumptions.

2. Mathematics is a concise language, with well-defined rules for manipulations.

3. All the results that mathematicians have proved over hundreds of years are at our disposal.

4. Computers can be used to perform numerical calculations.

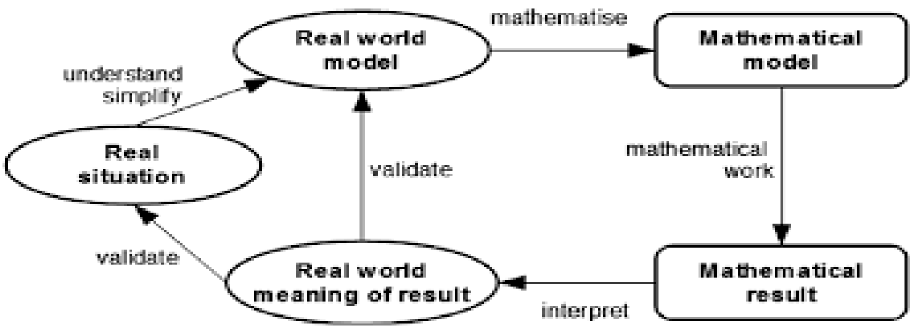
There is a large element of compromise in mathematical modelling. The majority of interacting systems in the real world are far too complicated to model in their entirety. Hence the first level of compromise is to identify the most important parts of the system. These will be included in the model, the rest will be excluded. The second level of compromise concerns the amount of mathematical manipulation which is worthwhile. Although mathematics has the potential to prove general results, these results depend critically on the form of equations used. Small changes in the structure of equations may require enormous changes in the mathematical methods. Using computers to handle the model equations may never lead to elegant results, but it is much more robust against alterations." *Glenn Marion*, An Introduction to Mathematical Modelling, https://people.maths.bris.ac.uk/ madjl/course_text.pdf

4) "Mathematical modelling is the activity by which a problem involving the real-world is translated into mathematics to form a model which can then be used to provide information about the original real problem." *Huw Fox, Bill Bolton*, https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780750655446500047

5) "... a model is a conceptual or mathematical representation

of a system that serves to understand and quantify it. The difference between conceptual and mathematical resides only on the way the representation is formulated. A model is always a simplified representation of the reference system, which the scientist wishes to understand and quantify." *Nestor V. Torres, Guido Santos*, https://www.frontiersin.org/articles/10.3389/fgene.2015.00354/full

O figură reprezentând etapele procesului de modelare matematică este



preluată din lucrarea: *G. Kaiser, P. Stender*, Complex modelling problems in co-operative, self-directed learning environments. In G. Stillman, G. Kaiser, W. Blum, J. Brown (Eds.), Teaching mathematical modelling: Connecting to research and practice (pp. 277-293), Springer, 2013.

A se vedea şi lucrarea: *K. Vorhölter, G. Greefrath, R. Borromeo Ferri, D. Leiss, S. Schukajlow*, Mathematical Modelling. In: Jahnke H., Hefendehl-Hebeker L. (eds), Traditions in German-Speaking Mathematics Education Research. ICME-13 Monographs. Springer, Cham, 2019, https://doi.org/10.1007/978-3-030-11069-7_4, pentru o sinteză privind învăţarea modelării matematice în sistemul german de educaţie.

In concluzie: "A theory has only the alternative of being right or wrong. A model has a third possibility: it may be right, but irrelevant." Manfred Eigen, The Origins of Biological Information, https://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-94-010-2602-4_30

3.2 Derivata

In modelarea matematică, derivata are un rol esenţial. Astfel:

1) In Fizică, dacă $x = x(t)$ reprezintă poziţia unui punct material la momentul t, atunci $x'(t)$ reprezintă viteza, iar $x''(t)$ acceleraţia acestuia la momentul t.

2) In Economie, dacă $c = c(x)$ reprezintă funcţia cost (costul necesar producerii a x itemi), atunci $c'(x)$ reprezintă costul marginal, adică cu cât creşte costul de producţie la creşterea cu o unitate a producţiei. La fel, dacă $p = p(x)$ reprezintă funcţia profit, atunci $p'(x)$ este profitul marginal.

3) In Biologie, dacă $p = p(t)$ reprezintă populaţia unei specii la momentul t, atunci $p'(t)$ este viteza (rata) de creşterea populaţiei.

4) In Inginerie, dacă $x = x(t)$ reprezintă sarcina electrică la momentul t, atunci $x'(t)$ este curentul electric corespunzător.

5) In Matematică, dacă $(t, x(t))$ reprezintă poziţia unui punct pe graficul funcţiei $x = x(t)$, atunci $x'(t)$ este panta tangentei la graficul funcţiei în acel punct.

3.3 Modele din chimie, biologie şi medicină

1. Dezintegrarea radioactivă.

Din experienţele efectuate se constată că radioactivitatea este direct proporţionlă cu cantitatea de substanţă radioactivă. Mai exact, la momentul de timp t, viteza de dezintegrare $x'(t)$ a unei substanţe radioactive este invers proporţională cu cantitatea de substanţă radioactivă $x(t)$. Modelul matematic al dezintegrării radioactive a unei substanţe radioactive date este dat de ecuaţia

$$x'(t) = -\alpha x(t), t \in [t_0, \infty[,$$

unde $\alpha > 0$ este factorul de proporţionalitate depinzând de natura materialului radioactiv, iar $t_0 \geq 0$ este momentul iniţial de la care se studiază (începe) procesul de dezintegrare. Cum, de regulă, se cunoaşte cantitatea iniţială de substanţă, mai avem informaţia că

$$x(t_0) = x^0,$$

unde x^0 este cantitatea de substanţă radioactivă ce se supune dezintegrării. Astfel, modelul matematic al procesului de dezintegrare radioactivă este definit de următoare problemă cu condiţie iniţială (problema lui Cauchy):

$$\begin{cases} x'(t) = -\alpha x(t), t \in [t_0, \infty[\\ x(t_0) = x^0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Soluţia problemei lui Cauchy de mai sus este

$$x(t) = x^0 e^{-\alpha(t-t_0)}, t \geq t_0,$$

soluţie care arată cantitatea de substanţă radioactivă existentă la fiecare moment at reacţiei.

Deseori, în chimie, este importantă determinarea, pentru o anumită substanţă, a factorului de proporţionalitate α, factor esenţial în rezolvarea modelului. Acest lucru se poate face, dacă se cunoaşte cantitatea de substanţă nedezintegrată la două momente de timp distincte. Să presupunem că la momentul t_0 avem cantitatea de substanţă radioactivă x^0 iar la momentul t_1 avem cantitatea x^1. Atunci, folosind expresia $x(t) = x^0 e^{-\alpha(t-t_0)}, t \geq t_0$ pentru $t = t_1$ găsim

$$x^1 = x(t_1) = x^0 e^{-\alpha(t_1-t_0)}$$

de unde prin logaritmare se obţine

$$\alpha = -\frac{1}{t_1 - t_0} \ln \frac{x^1}{x^0}.$$

Un alt element important în chimie este timpul de înjumătăţire al unei substanţe radioactive. Aceste este timpul în care cantitatea de substanţă radioactivă se reduce la jumătate. Să-l notăm pe acesta cu t_{jum}. Atunci avem condiţia

$$x(t_0 + t_{jum}) = \frac{x^0}{2}.$$

Folosind expresia $x(t) = x^0 e^{-\alpha(t-t_0)}, t \geq t_0$ obţinem

$$\frac{x^0}{2} = x(t_0 + t_{jum}) = x^0 e^{-\alpha t_{jum}},$$

relaţie care ne permite să deducem că, pentru o substanţă radioactivă dată, timpul de înjumătăţire este

$$t_{jum} = \frac{\ln 2}{\alpha}.$$

2. Modele de evoluţie a populaţiei/populaţiilor.

2A. Modele de evoluţie pentru o specie

Să considerăm o specie ce trăieşte izolată pe un teritoriu dat, fără imigrări sau emigrări. Fie $p(t)$ numărul de indivizi din această populaţie la momentul t. Atunci, viteza de creştere $p'(t)$ a acestei populaţii este egală cu $d(t,p)$, simbol ce notează diferenţa dintre rata natalităţii şi rata mortalităţii. Mai exact

$$d(t,p) = n(t,p) - m(t,p),$$

adică diferenţa dintre numărul de indivizi care se nasc şi numărul de indivizi care mor în intervalul de timp $[t, t+1]$. Deci, avem

$$p'(t) = d(t,p).$$

Cel mai simplu model de evoluţie al unei populaţii a fost propus de Mathus (1826 - "Essay on the Principles of Population") şi el presupune că naşterile şi decesele sunt direct proporţionale cu numărul de indivizi din specia respectivă, adică

$$n(t,p) = \alpha p(t),\ m(t,p) = \beta p(t),$$

unde $\alpha > 0$, respectiv $\beta > 0$ reprezintă rata naşterii per capita, respectiv rata mortalităţii per capita. Atunci avem

$$d(t,p) = (\alpha - \beta)p(t),$$

iar $k := \alpha - \beta$ este rata de creştere per capita. Presupunem $k > 0$. In concluzie, moldelul lui Malthus de creştere a populaţiei este

$$p'(t) = kp(t), t \in [t_0, \infty[.$$

Dacă este cunoscut numărul de indivizi din populaţie la momentul iniţial t_0 (să spunem că acesta este $p^0 > 0$), atunci avem o problemă cu condiţie iniţială, de forma

$$\begin{cases} p'(t) = kp(t), t \in [t_0, \infty[\\ p(t_0) = p^0, \end{cases} \tag{3.2}$$

cu soluţia unică dată de expresia

$$p(t) = p^0 e^{k(t-t_0)}, t \geq t_0.$$

Să observăm că din formula de mai sus rezultă că

$$\lim_{t \to \infty} p(t) = \infty,$$

ceea ce nu corespunde realităţii cunoscute. De fapt, din analiza datelor pentru diverse populaţii (sau ţări) se constată că modelul lui Malthus este rezonabil şi oferă o estimare corectă asupra evoluţiei unei specii pe un interval scurt (mărginit) de timp, dar nu şi pe termen lung.

Un model mai evoluat, modelând mai corect evoluţia unei specii este cel prezentat de Verhulst în 1838. Pornind de la observaţia anterioară (anume că modelul lui Malthus nu oferă o prognoză corectă pe termen lung), Verhulst a modificat ecuaţia lui Malthus, introducând un termen ce ia în considerare efectul inhibator al densităţii speciei respective în spaţiul pe care-l ocupă. Astfel, modelul lui Verhust este dat de problema lui Cauchy

$$\begin{cases} p'(t) = kp(t)\left(1 - \frac{p(t)}{L}\right), t \in [t_0, \infty[\\ p(t_0) = p^0, \end{cases} \tag{3.3}$$

unde $k > 0$ este (ca şi mai sus) rata de creştere per capita, $L > 0$ este constanta de suport relativ la mediul înconjurător (nr maxim de indivizi pe care mediul respectiv îi suportă), iar $p^0 > 0$ este numărul iniţial de indivizi din specie (la momentul iniţial t_0). Soluţia unică a acestei probleme este dată de expresia

$$p(t) = \frac{Lp^0}{p^0 + (L - p^0)e^{-k(t-t_0)}}, t \geq t_0.$$

Să notăm că termenul $\frac{kp^2(t)}{L}$ din ecuaţia de mai sus este cel care ţine cont de efectul inhibator al aglomerării. Observăm că

$$\lim_{t\to\infty} p(t) = L,$$

ceea ce justifică denumirea pentru L. Ecuaţia de mai sus (care modelează şi alte fenomene ale lumii reale) se mai numeşte ecuaţia logistică.

Să mai remarcăm că ecuaţia logistică are două soluţii echilibru, şi anume $x(t) = 0$ şi $x(t) = L$, $t \geq t_0$.

Observaţie. Verhust a prognozat, pe baza datelor din vremea sa, că populaţia Belgiei va fi in anul 2000 de 9,4 milioane locuitori. In realitate, populaţia Belgiei a fost de 11,3 milioane locuitori, dar să ne amintim despre restricţiile modelului, anume că avem o populaţie izolată pe un teritoriu fixat, ceea ce nu corespunde realităţilor ultimului secol.

In finalul acestei părţi, să amintim şi de modelul lui Verhulst cu recoltare, definit de ecuaţia

$$p'(t) = kp(t)\left(1 - \frac{p(t)}{L}\right) - h(p(t)), t \in [t_0, \infty[\tag{3.4}$$

unde $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ este o funcţie dată, indicând valoarea recoltării de indivizi din populaţie la momentul de timp t. In funcţie de expresia lui h se pot analiza diverse evoluţii.

2B. Modele de evoluţie pentru două specii

In cazul în care presupunem că avem două specii (pradă $p = p(t)$ şi răpitor $r = r(t)$) care împart acelaşi teritoriu şi în care nu există intrări sau ieşiri. Să mai presupunem că specia p se hrăneşte cu resursele mediului, iar indivizii din specia r se hrănesc cu indivizi ai speciei p. Atunci, evoluţia unui astfel de binom de specii se poate realiza după modelul Lotka-Volterra, definit astfel

$$\begin{cases} p'(t) = ap(t) - bp(t)r(t), \\ r'(t) = -cr(t) + dp(t)r(t), t \in [t_0, \infty[, \end{cases} \tag{3.5}$$

unde $a, b, c, d > 0$ sunt constante pozitive date, iar semnificaţia expresiei $p(t)r(t)$ este numărul de contacte dintre prada şi răpitor.

Recunoaştem mai sus un sistem de două ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi neliniare, având ca soluţii echilibru perechile de funcţii constante $(0, 0)$ şi $(\frac{a}{b}, \frac{c}{d})$. Sistemul de mai sus se mai numeşte şi sistemul pradă-răpitor şi el nu poate fi integrat (rezolvat) explicit.

3. Modele din medicină.

3A. Modelul lui Gompertz-Laird

In medicină este considerată următoarea ecuaţie diferenţială ce modelează creşterea tumorilor canceroase

$$x'(t) = ke^{-\alpha t}x(t), t \in [t_0, \infty[,$$

unde $k, \alpha > 0$. Acest model este construit pe ipoteza că există o autolimitare a dezvoltării tumorii (datorită condiţiilor în care aceasta se dezvoltă) şi că rata dezvoltării tumorii descreşte exponenţial în timp. In ecuaţia de mai sus $x(t)$ notează mărimea tumorii la momentul t. Dacă se cunoaşte mărimea tumorii la începutul studiului $x(0) = x^0$, atunci soluţia problemei Cauchy aferente este

$$x(t) = x^0 e^{\frac{k}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha t}\right)}.$$

Observăm că evoluţia mărimii tumorii este limitată, căci

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x^0 e^{\frac{k}{\alpha}},$$

expresie ce depinde nu numai de coeficienţii k şi α, dar şi de condiţia iniţială din model.

Un model mai evoluat a fost propus de Laird şi el este descris de ecuaţia diferenţială

$$x'(t) = \alpha \ln\left(\frac{K}{x(t)}\right) x(t), t \geq 0,$$

la care se adaugă condiţia iniţială $x(0) = x^0$. In acest model, $\alpha > 0$ este o constantă pozitivă determinată de capacitatea de proliferare a celulelor canceroase, iar $K > 0$ este mărimea maximă pe care tumoarea o poate atinge. Soluţia ecuaţiei este dată de expresia

$$x(t) = Ke^{\ln\left(\frac{x^0}{K}\right)e^{-\alpha t}},$$

pentru care observăm din nou fenomenul de autolimitare

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = K.$$

Comentariu istoric. Pentru alte realizări ale lui B. Gompertz şi dezvoltări ulterioare, precum şi informaţii istorice se poate vedea *https://royalsocietypublishing.org/doi/pdf/10.1098/rstb.2014.0379.*

3B. Modelul Kermac şi McKendric

Modelul Kermac-McKendric este un model clasic (1927) de propagare a epidemiilor, el fiind ulterior dezvoltat în variate direcţii de alţi matematicieni.

Să considerăm o populaţie izolată formată din T indivizi şi o infecţie care se răspândeşte prin contact direct (de exemplu SARS-COV-2,...).SE presupune că indivizii inferctaţi vor fi, fie izolaţi, fie devin imuni prin vindecare (model optimist: infecţia nu e letală ...). In consecinţă, populaţia este compusă la momentul t din trei categorii:

$N(t)$ - indivizi neinfectaţi (dar susceptibili la infectare);

$B(t)$ - indivizi infectaţi (bolnavi) care se mişcă liber;

$I(t)$ - indivizi izolaţi.

In cadrul modelului se presupune că viteza de infectare $-N'(t)$ este direct proporţională cu expresia $N(t) \cdot B(t)$, reprezentând numărul contactelor dintre indivizii neinfectaţi şi cei infectaţi şi că indivizii infectaţi devin izolaţi cu o viteză proporţională cu numărul $B(t)$ al lor. In aceste condiţii sistemul

$$\begin{cases} N'(t) = -\beta N(t)B(t) \\ B'(t) = \beta N(t)B(t) - \gamma B(t), t \in [t_0, \infty[\\ N(t) + B(t) + I(t) = T, \end{cases} \tag{3.6}$$

la care se aduagă condiţiile iniţiale $N(0) = N^0, B(0) = B^0$, modelează evoluţia infecţiei în cadrul acestei populaţii.

Un model mai complex este modelul SIR, în care se presupune, de asemenea, existenţa unei epidemii, în care populaţia este divizată în următoarele trei clase de indivizi:

$S = S(t)$- numărul de indivizi susceptibili a se înbolnăvi, dar care nu s-au înbolnăvit

$I = I(t)$- numărul de indivizi infectaţi

$R = R(t)$- numărul de indivizi vindecaţi şi care au căpătat astfel imunizare.

Modelul matematic este descris de sistemul

$$\begin{cases} S'(t) = -\frac{\beta}{N}S(t)I(t), \\ I'(t) = \frac{\beta}{N}S(t)I(t) - \gamma I(t), \\ R'(t) = \gamma I(t), \\ S(t) + I(t) + R(t) = N, t \in [t_0, \infty[. \end{cases} \tag{3.7}$$

In sistemul de mai sus, coeficienţii $\beta, \gamma > 0$ semnifică:

β este rata efectivă de contact a infecţiei: un individ infectat intră în contact cu βN alţi indivizi în unitatea de timp, dintre care fracţia de

indivizi susceptibili să contracteze boala este $\frac{S(t)}{N}$,
γ este rata medie de vindecare: $\frac{1}{\gamma}$ este media perioadelor de timp în care un individ infectat se vindecă.

3.4 Modele din fizică

A. Legea transferului termic a lui Isaac Newton.

Dacă considerăm un corp cu temperatura uniformă T_0 pe care îl aşezăm la momentul t_0 într-un mediu exterior de temperatură constantă T_e, atunci:
- dacă $T_e < T_0$, atunci corpul se răceşte
- dacă $T_e > T_0$, atunci corpul se încălzeşte.

Legea lui Newton a transferului termic, stabilită prin experimente, stipulează că rata schimbării de temperatură este proporţională cu diferenţa de temperatură dintre corp şi mediul în care acesta a fost plasat. Intr-adevăr, dacă $T(t)$ notează temperatura corpului la momentul t, avem:
- dacă $T - T_e > 0$, atunci $T \searrow T_e$ şi astfel trebuie ca $T' < 0$;
- dacă $T - T_e < 0$, atunci $T \nearrow T_e$ şi astfel trebuie ca $T' > 0$.

Această lege se scrie matematic în următoarea ecuaţie diferenţială de ordinul 1

$$T'(t) = -\alpha(T(t) - T_e), t \geq t_0$$

unde $\alpha > 0$ este coeficientul de transfer termic. Acest coeficient depinde de proprietăţile termice ale corpului şi se determină experimental. Cum se cunoaşte temperatura corpului la momentul iniţial (căci $x(t_0) = T_0$), rezolvarea problemei lui Cauchy astfel obţinute conduce la soluţia unică

$$T(t) = T_e + (T_0 - T_e)e^{-\alpha(t-t_0)}, t \geq t_0.$$

Observăm că $\lim_{t\to\infty} T(t) = T_e$, ceea ce înseamnă că pe perioada mai lungi de timp temperatura corpului se apropie de temperatura mediului în care a fost plasat.

B. Legea a doua a mişcării a lui Isaac Newton.

Se consideră un punct material de masă $m > 0$ ce se mişcă rectiliniu sub acţiunea unei forţe F ce depinde de timp, poziţia punctului material şi viteza acestuia. Modelul matematic al deplasării acestuia este dat de legea a doua a lui I. Newton: "variaţia cantităţii de mişcare este proporţională cu forţa activă aplicată şi are loc în direcţia dreptei de-a lungul căreia actţionează forţa". Adică avem $m\ \vec{a}=\vec{F}$ sau echivalent, dacă notăm cu $\vec{r}=\vec{r}\ (t)$ vectorul de poziţie al punctului material, avem $m\ \vec{r}''=\vec{F}$. Proiectând pe axa Ox, obţinem $mx''(t) = F(t, x(t), x'(t))$ cu condiţiile iniţiale $x(t_0) = x^0, x'(t_0) = v^0$. Avem astfel de-a face cu o problemă Cauchy pentru o ecuaţie diferenţială de ordinul doi:

$$\begin{cases} mx''(t) = F(t, x(t), x'(t)), t \in I \\ x(t_0) = x^0, x'(t_0) = v^0, t_0 \in I. \end{cases} \tag{3.8}$$

Dacă, de exemplu, F este forţa gravitaţională (adică $F = -mg$, unde g este acceleraţia gravitaţională), atunci problema de mai sus, considerată de la momentul iniţial $t_0 = 0$, se scrie

$$\begin{cases} mx''(t) = -mg, t \geq 0 \\ x(0) = x^0, x'(0) = v^0, t_0 \in [0, \infty[. \end{cases} \tag{3.9}$$

Soluţia ecuaţiei este $x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + c_1 t + c_2, t \geq 0$ iar soluţia problemei lui Cauchy de mai sus este $x^*(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v^0 t + x^0$.

Un alt caz particular interesant apare dacă considerăm modelul oscilaţiilor libere ale pendulului matematic. Să notăm cu $\theta = \theta(t)$ unghiul făcut de pendul cu axa vericală $O'O$ la momentul t. Atunci modelul presupune că avem un pendul de masă $m > 0$ cu braţul rigid de lungime $l > 0$ ce se mişcă în plan vertical. Ecuaţia mişcării (dedusă de mai sus, ţinând cont că pentru componenta activă a forţei gravitaţionale ($\vec{G_t}$ în figura de mai jos, vezi https://math.wikia.org/ro/wiki/Pendul) ce acţionează asupra pendulului este $mg \sin\theta(t)$ (g este acceleraţia gravitaţională), iar lungimea arcului de cerc corespunzător poziţiei $\theta(t)$

a braţului pendulului este $s(t) = l\theta(t)$, obţinem ecuaţia diferenţială $m\,(l\theta(t))'' = -mgsin\theta(t), t \in I = [0,\infty[$, la care se adaugă condiţiile iniţiale $\theta(0) = \theta^0, \theta'(0) = v^0$. Astferl, am obţinut problema lui Cauchy

$$\begin{cases} \theta''(t) + \frac{g}{l} sin\theta(t) = 0, t \in I \\ \theta(0) = \theta^0, \theta'(0) = v^0. \end{cases} \tag{3.10}$$

Este interesant de observat că în cazul amplitudinilor mici ale pendulului, putem aproxima $\sin\theta(t) \approx \theta(t)$, ceea ce conduce la problema lui Cauchy rezolvabilă efectiv

$$\begin{cases} \theta''(t) + \frac{g}{l}\theta(t) = 0, t \in I \\ \theta(0) = \theta^0, \theta'(0) = v^0. \end{cases} \tag{3.11}$$

Vom vedea mai târziu că soluţia problemei de mai sus este o funcţie periodică de forma $\theta(t) = x^0 \cos\sqrt{\frac{g}{l}}t + \frac{v^0 l}{g}\sin\sqrt{\frac{g}{l}}t$. Perioada de oscilaţie a pendulului gravitaţional este $T = 2\pi\sqrt{\frac{g}{l}}$.

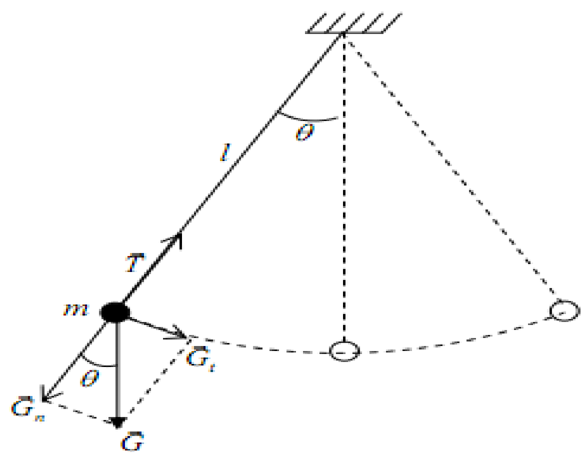


Fig. 1.

3.5 Exerciţii rezolvate şi propuse

A. Exerciţii rezolvate.

1) **Geometrie: Ecuaţia diferenţială a unei familii de curbe.**

In sistemul xOy fie familia de curbe plane

$$y = g(x, c), x \in I,$$

unde $c \in \mathbb{R}$ este un parametru. Găsiţi ecuaţia diferenţială a acestei familii de curbe şi ecuaţia diferenţială a familiei de curbe ortogonale la familia dată (traiectorii ortogonale = curbe care se intersectează cu cele din familia dată sub un unghi drept).

Soluţie. Dacă derivăm relaţia $y = g(x, c)$ în raport cu x avem

$$y'(x) = g'(x, c).$$

Eliminând parametrul c între cele două relaţii obţinem o relaţie de forma

$$F(x, y, y') = 0,$$

ceea ce reprezintă ecuaţia diferenţială a familiei date. Ecuaţia diferenţială a familiei de curbe ortogonale se obţine din ecuaţia diferenţială a familiei date prin înlocuirea lui y' cu $-\frac{1}{y'}$, adică are forma

$$F(x, y, -\frac{1}{y'}) = 0.$$

Observaţie. Dacă familia de curbe plane nu este dată printr-o ecuaţie explicită în raport cu y, de exemplu de forma $h(x, y, c) = 0$, atunci ecuaţia diferenţială a familiei de curbe date se obţine prin derivarea, în raport cu x a relaţiei de mai sus (în care se va considera $y = y(x)$) şi eliminarea parametrului c între cele doua relaţii.

Exemplu. Să se determine ecuaţia diferenţială a familiei de curbe plane $x^2 + y^2 = c, \ c > 0$ (familii de cercuri).

Soluţie. Prin derivare în raport cu x avem $2x + 2yy' = 0$. Cum c nu mai apare, ecuaţia diferenţială a familiei de cercuri este $x + yy' = 0$.

Ecuaţia diferenţială a traiectoriilor ortogonale este $x - \frac{y}{y'} = 0$. Rezolvând-o ca o ecuaţie cu variabile separabile, avem familia de drepte $y = cx$, $c \in \mathbb{R}$.

2) **Biologie/Medicină: evoluţia tumorilor.** Viteza de creştere a unei tumori sferice este direct proporţională cu volumul ei. In momentul descoperirii ei, tumora avea un volum de 1 cm^3. Să se afle volumul şi raza tumorii după o lună (o lună = 30 de zile) de la descoperirea ei, ştiind că volumul tumorii după 10 zile de la momentul identificării ei este de e^2 ori mai mare decât cea iniţială.

Soluţie. Fie $V = V(t)$ volumul tumorii la momentul $t \geq 0$. Ecuaţia diferenţială ce modelează procesul este

$$V'(t) = \alpha V(t), t \geq 0 \text{ cu condiţia iniţială } V(0) = V^0,$$

unde α este factorul de proporţionalitate aferent procesului. Se dă, de asemenea, $V^0 = 1$. Rezolvând ecuaţia cu variabile separabile şi problema lui Cauchy asociată avem

$$V(t) = V^0 e^{\alpha t}, t \geq 0.$$

Din condiţia $V(10) = e^2 V^0$ deducem $\alpha = \frac{1}{5}$, deci procesul e modelat de funcţia

$$V(t) = V^0 e^{\frac{1}{5}t} = e^{\frac{1}{5}t}, t \geq 0.$$

Deoarece volumul tumorii sferice în funcţie de raza tumorii este data de expresia

$$V(t) = \frac{4}{3}\pi R^3(t),$$

ţinând cont că $V^0 = \frac{4}{3}\pi R_0^3$, avem

$$V^0 e^{\frac{1}{5}t} = \frac{4}{3}\pi R_0^3 e^{\frac{1}{5}t} = \frac{4}{3}\pi R^3(t),$$

de unde deducem legea de creştere a razei ca fiind

$$R(t) = R_0 e^{\frac{1}{15}t}.$$

Ţinând cont că $V^0 = 1$ rezultă că $R_0 = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}$ şi deducem că după o lună de la descoperirea ei avem

$$V(30) = e^6,\ R(30) = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}e^2}.$$

3) **Arheologie, Biomedicină, Geologie, Paleontologie ...: Metoda datării cu radiocarbon.** Metoda datării cu radiocarbon (cunoscută şi ca metoda datării cu Carbon^{14}) este folosită pentru a stabili vârsta organismelor vii ce conţin carbon şi au cel mult 50.000-60.000 ani vechime. Se ştie că organismele vii conţin, în afară de izotopul stabil de Carbon^{12} şi o mică cantitate de izotop radioactiv de Carbon^{14}, rezultat al bombardamentului cosmic. C^{14} intră în aceste organisme datorită unor procese specifice, iar raportul dintre cantităţile de C^{14} şi C^{12} este constant. Notăm această valoare cu r_0. Ea depinde de tipul organismului studiat.

Dacă un organism moare, acest proces de schimb încetează, iar izotopul C^{14} începe să descrească cu o rată constantă cu o valoare (determinată experimental) de $\frac{1}{8000}$. Aceast proces permite determinarea vârstei organismelor moarte. Dacă $x = x(t)$ este valoarea raportului $\frac{C^{14}}{C^{12}}$ după t ani de la moarte atunci evoluţia este modelată de problema cu valori iniţiale

$$\begin{cases} x'(t) = -\frac{1}{8000}x(t), t \geq 0, \\ x(0) = r_0. \end{cases} \tag{3.12}$$

In consecinţă, dacă cunosc $x(T)$-valoarea la zi a raportului, se poate determina numărul T al anilor scurşi de la moarte din relaţia

$$T = 8000 \ln \frac{r_0}{x(T)}.$$

Intr-adevăr, rezolvând problema de mai sus, găsim soluţia în formă implicită

$$\ln|x(t)| = -\frac{1}{8000}t + \ln r_0,$$

de unde putem exprima timpul

$$t = 8000 \ln \frac{r_0}{x(t)}, t \geq 0.$$

Pentru $t = T$ găsim formula enunţată mai sus.

Comentariu istoric. Metoda datării cu radiocarbon a fost dezvoltată de Willard Libby şi colaboratorii săi de la Universitatea din Chicago în anul 1949. Pentru această descoperire, Libby a fost răsplătit cu Premiul Nobel pentru Chimie pe anul 1960. Mai menţionăm că metoda are limitările ei: Carbonul este absorbit numai de organismele vii (sau mai bine zis care au fost vii la un moment dat) precum lemnul sau fosilele, deci nu poate fi folosit la datarea pietrelor sau a ceramicii, de exemplu.

Exemplu. Să se găsească vârsta unor seminţe de in descoperite urmare a unor săpături în piatră, ştiind că raportul dintre cantităţile de C^{14} şi C^{12} este de e^{-6}, iar la momentul descoperirii valoarea raportului dintre aceleaşi tipuri de carbon a fost e^{-10}.

Soluţie. Avem $r_0 = e^{-6}, x(T) = e^{-10}$. Deducem $T = 32.000$ ani.

Exerciţii propuse.

1) Să presupunem că un corp omenesc a fost descoperit într-o cameră de hotel la ora 10.00 dimineaţa, iar temperatura corpului său este de $27°C$. Temperatura camerei este constantă de valoare $16°C$. Două ore mai târziu temperatura corpului a scăzut la $24°C$. Să se afle ora decesului.

2) Perioada de înjumătăţire pentru radioizotopul Cesiu-137 este de 29 de ani. Determinaţi procentajul de substanţă dezintegrată după 10 de ani.

3) Intr-o universitate cu n cadre didactice se trece gradual la procesul de susţinere a cursurilor online. Pe bază de voluntariat, se selectează p^0 cadre didactice care trec imediat pe online, restul urmând să intre pe parcurs. Rata de introducere a cursurilor online este direct proporţională cu numărul celor care au adoptat deja sistemul online şi este invers proporţională cu cei care nu au adoptat sistemul. Să se afle

ecuaţia diferenţială ce modelează procesul şi să se arate că într-un termen mediu spre lung de timp, toate cadrele didactice vor trece la online. (Indicaţie: dacă $x = x(t)$ este numărul celor ce au adoptat sistemul online la momentul t, atunci procesul este modelat de ecuaţia diferenţială

$$x'(t) = \alpha x(t) \frac{1}{n - x(t)},$$

cu condiţia iniţială $x(0) = p^0$, unde $\alpha > 0$ este un parametru ce indică rezistenţa la trecerea în online: cu cât α este mai mic, cu atât rezistenţa este mai mare.)

Capitolul 4

Principiul contracţiei

4.1 Noţiunea de normă. Spaţii Banach

Fie $(X, +, \cdot, \mathbb{R})$ un spaţiu liniar real. Notăm cu Θ elementul neutru al grupului $(X, +)$. O funcţională $p : X \to \mathbb{R}_+$ se numeşte o normă pe X dacă următoarele axiome sunt satisfăcute:

(i) $p(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \Theta$;

(ii) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$, oricare ar fi $x \in X$ şi $\lambda \in \mathbb{R}_+$

(iii) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, oricare ar fi $x, y \in X$.

Vom nota de aici înainte $p(x) := \|x\|$, $x \in X$.

Perechea $(X, \|\cdot\|)$, unde X este spaţiu liniar iar $\|\cdot\|$ este o normă pe X se numeşte spaţiu normat.

Dacă $(X, \|\cdot\|)$ este un spaţiu normat, $x_0 \in X$ şi $r > 0$, atunci notăm:

$$B(x_0; r) := \{x \in X | \|x - x_0\| < r\}$$

şi respectiv

$$\widetilde{B}(x_0; r) := \{x \in X | \|x - x_0\| \leq r\}$$

bila deschisă, respectiv bila închisă de centru x_0 şi rază r.

Prin $S(x_0; r) := \{x \in X | \|x - x_0\| = r\}$ notăm sfera de centru x_0 şi rază r.

Şiruri în spaţii normate

Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spaţiu normat. Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din X se numeşte:

(i) Cauchy (sau fundamental), dacă oricare ar fi $\epsilon > 0$ există $N_\epsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât oricare ar fi $n, m \geq N_\epsilon$, $m > n$ avem $\|x_n - x_m\| < \epsilon$ (sau, în mod equivalent, $\|x_n - x_{n+p}\| \to 0$ când $n, p \to +\infty$ independent).

(ii) convergent la $x^* \in X$, dacă oricare ar fi $\epsilon > 0$ există $N_\epsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât oricare ar fi $n \geq N_\epsilon$ avem $\|x_n - x^*\| < \epsilon$. Scriem, $x_n \to x^*$, când $n \to \infty$.

Se poate arăta uşor că orice şir convergent în X este Cauchy în X.

Un spaţiu normat $(X, \|\cdot\|)$ se numeşte complet dacă orice şir Cauchy din X este convergent în X.

Un spaţiu normat şi complet se numeşte spaţiu Banach.

Observaţie. Norma $p : X \to \mathbb{R}_+$ pe un spaţiu liniar X este o funcţie continuă, în sensul că, dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir din X convergent la $x \in X$, atunci şirul $(p(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir din $\mathbb{R}_+$ convergent la $p(x)$.

Exemple de spaţii Banach

1) $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ este spaţiu Banach cu fiecare dintre următoarele funcţionale:

$$\|x\|_E := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} - \text{ norma euclidiană}$$

$$\|x\|_M := \sum_{i=1}^{n} |x_i| - \text{ norma de tip Minkowski}$$

$$\|x\|_C := \max_{i\in\{1,2,\cdots,n\}} |x_i| - \text{ norma de tip Cebîşev.}$$

2) $(C[a,b], \|\cdot\|)$ este spaţiu Banach cu fiecare dintre următoarele funcţionale:

$$\|x\|_C := \max_{t\in[a,b]} |x(t)| - \text{ norma de tip Cebîşev}$$

$$\|x\|_B := \max_{t\in[a,b]}(|x(t)|e^{-\tau|t-t_0|}) - \text{ norma de tip Bielecki,}$$

unde $t_0 \in [a,b]$, $\tau > 0$ este arbitrar, iar prin $C[a,b]$ am notat spaţiul funcţiilor continue definite pe intervalul $[a,b]$ al axei reale şi cu valori reale.

Echivalenţa normelor

Fie X un spaţiu liniar şi $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ două norme pe X.

Prin definiţie, două norme $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ pe X se numesc tare echivalente dacă şi numai dacă, oricare ar fi $x \in X$ există $c_1, c_2 > 0$ astfel ca

$$c_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2\|x\|_1.$$

Dacă două norme sunt tare echivalente atunci o serie de proprietăţi ce au loc în raport cu o normă au imediat loc şi în raport cu orice normă tare echivalentă cu ea. De exemplu, dacă un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este Cauchy în raport cu o normă $\|\cdot\|_1$, iar $\|\cdot\|_2$ este o normă echivalentă cu ea în spaţiul normat X, atunci $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este Cauchy şi în raport cu o normă $\|\cdot\|_2$. Intr-adevăr, dacă presupunem că $\|x_n - x_{n+p}\|_1 \to 0$ când $n, p \to +\infty$ independent, atunci, folosind definiţia normelor tare echivalente avem

$$c_1\|x_n - x_{n+p}\|_1 \leq \|x_n - x_{n+p}\|_2 \leq c_2\|x_n - x_{n+p}\|_1,$$

ceea ce induce că $\|x_n - x_{n+p}\|_2 \to 0$ când $n, p \to +\infty$ independent.

Operatori în spaţii normate

Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spaţiu normat şi $A : X \to X$ un operator (o funcţie). Atunci A se numeşte:

(i) continuu în punctul x^* din X dacă oricare ar fi un şir $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din X convergent la x^*, rezultă că şirul $(A(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent în X la $A(x^*)$.

ii) α-Lipschitz dacă $\alpha > 0$ şi are loc relaţia

$$\|A(x) - A(y)\| \leq \alpha\|x - y\|, \text{ oricare ar fi } x, y \in X;$$

iii) α-contracţie dacă este α-Lipschitz cu $\alpha \in [0, 1[$.

Observaţie. $(iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i)$.

4.2 Principiul contracţiei al lui Banach

Incepem cu câteva definiţii necesare.

Definiţie. Dacă X este o mulţime nevidă şi $A : Y \subset X \to X$ este o funcţie dată, atunci un element $x^* \in X$ se numeşte un punct fix pentru A dacă $x^* = A(x^*)$. Notăm cu $Fix(A)$ mulţimea tuturor punctelor fixe ale funcţiei/operatorului A.

De asemenea, notă cu $I(A) := \{Y \subset X \mid A(Y) \subset Y\}$ mulţimea tuturor submulţimilor invariante în raport cu funcţia A.

Definiţie. Fie X este o mulţime nevidă şi $A : Y \subset X \to X$ este o funcţie dată. Atunci, şirul aproximaţiilor succesive pentru A pornind dintr-un element $x \in X$ (notat cu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$) este definit astfel:

$$x_0 = x,\ x_n = A^n(x),\ \text{for } n \in \mathbb{N},$$

unde $A^0 := 1_X,\ A^1 := A, \ldots, A^{n+1} = A \circ A^n,\ n \in \mathbb{N}$ sunt iteratele operatorului A. Ca şi consecinţă, observăm că şirul aproximaţiilor succesive pentru A satisface următoarea relaţie de recurenţă

$$x_0 = x,\ x_{n+1} = A(x_n),\ n \in \mathbb{N}.$$

Principiul contracţiei al lui Banach

Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spaţiu Banach şi $A : X \to X$ o α-contracţie. Atunci următoarele concluzii au loc:

(i) $Fix(A) = \{x^*\}$;

(ii) oricare ar fi $x \in X$ şirul aproximaţiilor succesive pentru A pornind din x (i.e. $x_0 = x,\ x_n := A^n(x),\ n \geq 1$) converge la x^*;

(iii) $\|x_n - x^*\| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \cdot \|x_0 - A(x_0)\|$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Demonstraţie.

(i) + (ii)

Etapa 1. Arťăm că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ al aproximaţiilor succesive pentru A pornind dintr-un element arbitrar x al spaţiului X este Cauchy. Demonstraţia se bazează pe evaluările:

$$(*) \quad \|x_n - x_{n+1}\| \leq \alpha^n \cdot \|x_0 - A(x_0)\|, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}$$

şi

$$(**) \quad \|x_n - x_{n+p}\| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \cdot \|x_0 - A(x_0)\|, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N} \text{ şi } p \in \mathbb{N}^*.$$

Intr-adevăr,

$$\|x_n - x_{n+1}\| = \|A(x_{n-1}) - A(x_n)\| \leq \alpha \cdot \|A(x_{n-2}) - A(x_{n-1})\| \leq \cdots$$

$$\leq \alpha^n \cdot \|x_0 - x_1\| = \alpha^n \cdot \|x_0 - A(x_0)\|.$$

Pentru relaţia $(**)$ avem

$$\|x_n - x_{n+p}\| \leq \|x_n - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - x_{n+2}\| + \cdots + \|x_{n+p-1} - x_{n+p}\| \leq$$

$$\alpha^n \cdot \|x_0 - A(x_0)\| + \cdots + \alpha^{n+p-1} \cdot \|x_0 - A(x_0)\| =$$

$$\alpha^n \cdot \|x_0 - A(x_0)\| \left(1 + \alpha + \cdots \alpha^{p-1}\right) = \alpha^n \frac{1-\alpha^p}{1-\alpha} \cdot \|x_0 - A(x_0)\| \leq$$

$$\frac{\alpha^n}{1-\alpha} \cdot \|x_0 - A(x_0)\|.$$

Etapa 2. Din proprietatea de spaţiu Banach a lui X, rezultă că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent în X. Notăm $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x^*$.

Etapa 3. Arătăm că $x^* \in Fix(A)$. Aceasta rezultă din relaţia $x_{n+1} = A(x_n), n \in \mathbb{N}$, folosind continuitatea operatorului A.

Etapa 4. Unicitatea punctului fix x^* rezultă folosind metoda reducerii la absurd şi condiţia de contracţie.

(iii) Evaluarea erorii de la (iii) rezultă folosind relaţia $(**)$, prin trecere la limită după $p \to \infty$. $\square$

Observaţie. Principiul contracţiei al lui Banach este o teoremă de existenţă, unicitate şi aproximare pentru soluţia ecuaţiei de punct fix $x = A(x)$.

Următoarea teoremă de dependenţă de date a punctului fix este foarte uşor de demonstrat (exerciţiu).

Teorema de dependenţă continuă de date a punctului fix.

Fie $(X, \|\cdot\|)$ *un spaţiu Banach şi* $A, B : X \to X$ *doi operatori. Presupunem:*

(i) A *este o* α*-contracţie (notăm cu* x_A^* *unicul punct fix al lui* A*);*

(ii) există $x_B^* \in Fix(B)$*;*

(iii) există $\eta > 0$ *astfel încât* $\|A(x) - B(x)\| \leq \eta$*, oricare ar fi* $x \in X$.

Atunci $\|x_A^* - x_B^*\| \leq \frac{\eta}{1-\alpha}$.

4.3 Exerciţii rezolvate şi propuse

A. Exerciţii rezolvate.

1) Considerăm pe $\mathbb{R}^2$ funcţionalele $\|x\|_M := |x_1| + |x_2|$ şi respectiv $\|x\|_C := \max\{|x_1|, |x_2|\}$. Să se arate că $\|\cdot\|_M$ şi $\|\cdot\|_C$ sunt norme pe $\mathbb{R}^2$ şi să se determine, pentru fiecare în parte, $B((0,0);1)$.

Soluţie. Se verifică uşor primele doua axiome ale normei. Să verificăm acum cea de-a treia axiomă, i.e., inegalitatea triunghiului:

$$\|x + y\|_M \leq \|x\|_M + \|y\|_M, \forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Avem de arătat că $|x_1 + y_1| + |x_2 + y_2| \leq |x_1| + |x_2| + |y_1| + |y_2|$, ceea ce este adevărat din inegalitatea triunghiului pentru modul.

In cazul funcţionalei $\|x\|_C$ avem de arătat că

$$\|x + y\|_C \leq \|x\|_C + \|y\|_C, \forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2,$$

ceea ce revine la a arăta $\max\{|x_1 + y_1|, |x_2 + y_2|\} \leq \max\{|x_1|, |x_2|\} + \max\{|y_1|, |y_2|\}$. Această relaţie este, de asemenea, adevărată din proprietăţile funcţiei max şi inegalitatea triunghiului pentru modul.

Mai departe, avem:

i) pentru $\|\cdot\|_M$

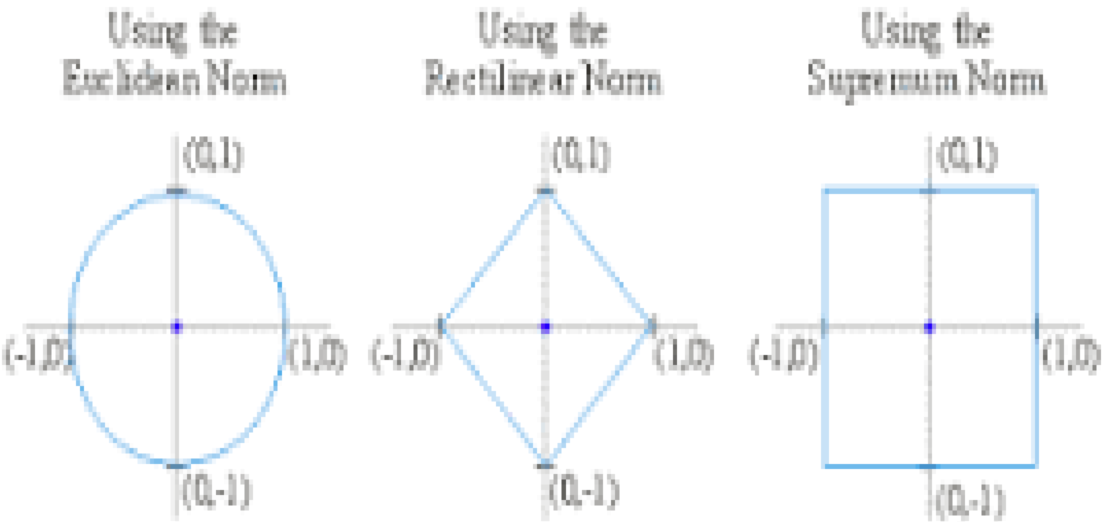
$$B((0,0);1) = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \|x - (0,0)\|_M < 1\} =$$

$$\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| + |x_2| < 1\}.$$

ii) pentru $\|\cdot\|_C$

$$B((0,0);1) = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \|x - (0,0)\|_C < 1\} =$$

$$\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x_1|, |x_2|\} < 1\}.$$



2) Fie $f \in C^1(\mathbb{R})$. Atunci

$$f \text{ is } \alpha - \text{Lipschitz} \;\Leftrightarrow\; |f'(x)| \le \alpha, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R}.$$

Soluţie. Folosim Teorema lui Lagrange a creşterilor finite. Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ cu $x_1 < x_2$. Pe intervalul $[x_1, x_2]$ aplicăm Teorema lui Lagrange. Atunci există $c \in]x_1, x_2[$ astfel ca

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |f'(c)||x_2 - x_1|.$$

”$\Leftarrow$” Dacă $|f'(x)| \leq \alpha$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, atunci, de mai sus, avem

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq \alpha |x_2 - x_1|.$$

”$\Rightarrow$” Dacă f este α-Lipschitz, atunci pentru x_0 fixat, dar oarecare şi $x > x_0$ (şi analog, pentru situaţia $x < x_0$) avem

$$|f'(x_0)| = |\lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}| \leq \lim_{x \searrow x_0} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} \leq \alpha.$$

3) Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de $f(x) = \ln \sqrt{1 + x^2}$ este o $\frac{1}{2}$-contracţie.

Soluţie. Observăm că $f(x) = \frac{1}{2} \ln(1 + x^2)$. Folosind exerciţiul precedent, avem $|f'(x)| = \frac{|x|}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

4) Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de $f(x) = x^2$ nu este Lipschitz pe $\mathbb{R}$.

Soluţie. Deoarece $|f'(x)| = 2|x|$ este nemărginită pe $\mathbb{R}$, din exerciţiul 2, rezultă că f nu e Lipschitz pe $\mathbb{R}$.

5) Să se verifice dacă ecuaţia

$$x' = -\frac{x(x + 2t)}{t(2x + t)}, (t, x) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

este cu diferenţială totală exactă şi apoi, în caz afirmativ, să se rezolve.

Soluţie. Putem scrie ecuaţia echivalent ca

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x(x + 2t)}{t(2x + t)} \Leftrightarrow t(2x + t)dx + x(x + 2t)dt = 0$$

Recunoaştem $g(t, x) = t(2x + t)$ iar $h(t, x) = x(x + 2t)$. Verifică condiţia de diferenţială totală exactă (vezi relaţia (2.6))

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial h}{\partial x}(t, x), \text{ oricare ar fi } (t, x) \in D.$$

Avem

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial h}{\partial x}(t,x) = 2x + 2t, \text{ oricare ar fi } (t,x) \in D.$$

Am arătat că ecuaţia dată este cu diferenţială totală exactă. Atunci, soluţia în formă implicită a ecuaţiei date este

$$F(t,x) = c_1, t \in I \ (c_1 \in \mathbb{R}),$$

unde determinarea lui F se poate face prin integrarea sistemului

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} = h \\ \frac{\partial F}{\partial x} = g. \end{cases}$$

Avem succesiv

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} = x^2 + 2tx \\ \frac{\partial F}{\partial x} = 2tx + t^2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(t,x) = tx^2 + t^2x + \varphi(x) \\ \frac{\partial F}{\partial x} = 2tx + t^2, \end{cases}$$

unde φ este o funcţie de clasă C^1 deocamdată necunoscută. Inlocuind forma lui F în cea de-a doua ecuaţie avem

$$\begin{cases} F(t,x) = tx^2 + t^2x + \varphi(x) \\ 2tx + t^2 + \varphi'(x) = 2tx + t^2, \end{cases}$$

deducem că $\varphi'(x) = 0$, adică $\varphi(x) = c_2, c_2 \in \mathbb{R}$. In concluzie, soulţia în formă implicită a ecuaţiei date este

$$tx^2 + t^2x = c, t \in I \ (c \in \mathbb{R}),$$

rezultată prin comasarea constantelor c_1, c_2.

6) Să se rezolve ecuaţia: $tx'(t) = t^2\sqrt{x(t)} + 2x(t)$, pentru $t > 0$.

Soluţie. Recunoaştem o ecuaţie Bernoulli, a cărei forma generală este (reamintesc)

$$x'(t) = p(t)x(t) + q(t)x^{\alpha}(t), \ t \in I \subseteq \mathbb{R},$$

unde p, q sunt funcţii continue pe un interval I, iar $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

In cazul nostru avem $p(t) = \frac{2}{t}, q(t) = t, \alpha = \frac{1}{2}$.

Pentru rezolvarea ei efectivă se face schimbarea de variabilă

$$y = x^{1-\alpha} = x^{\frac{1}{2}}$$

prin care ar trebui să obţinem o ecuaţie diferenţială liniară de ordinul 1 în necunoscuta $y = y(t)$.

Avem $x = y^2$ şi $x' = 2yy'$. Astfel, ecuaţia în necunoscuta y este

$$2tyy' = t^2 y + 2y^2.$$

Dând factor comun, avem cazul $y = 0$ care conduce (revenind la notaţia iniţială) la soluţia $x(t) = 0, t > 0$, iar, pe de altă parte, ecuaţia

$$2ty' = t^2 + 2y,$$

care este o ecuaţie diferenţială liniară în necunoscuta $y = y(t)$. O scriem în forma ei generală $2ty' - 2y = t^2$ şi o rezolvăm în cele două etape deja învăţate.

Etapa 1: rezolvăm ecuaţia omogenă asociată: $2ty' - 2y = 0$. Fiind o ecuaţie cu variabile separabile avem (după împărţire cu 2)

$$t\frac{dy}{dt} = y \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{y}dy = \frac{1}{t}dt.$$

Integrând, obţinem

$$y(t) = ct, t > 0 \; (c \in \mathbb{R}).$$

Astfel, am obţinut

$$\mathcal{S}_0 = \{y(t) = ct, t > 0 : c \in \mathbb{R}\}.$$

Etapa 2: găsim o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene. Caut $y_p(t) = \varphi(t)t$, unde φ este o funcţie de clasă C^1,deocamdată necunoscută. Punem condiţia ca y_p să verifice ecuaţia neomogenă $2ty' - 2y = t^2$. Inlocuind avem

$$2t\left(\varphi' t + \varphi\right) - 2t\varphi = t^2 \;\Leftrightarrow\; \varphi'(t) = \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; \varphi(t) = \frac{t}{2}.$$

Astfel, $y_p(t) = \frac{t^2}{2}$. In consecinţă, soluţia generală a ecuaţiei în necunoscuta y este

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_\prime + \{y_p\} = \{y(t) = ct + \frac{t^2}{2}, t > 0 : c \in \mathbb{R}\}.$$

Concluzionă că soluţiile ecuaţiei date sunt

$$x(t) = 0, t > 0 \text{ şi } x(t) = \left(ct + \frac{t^2}{2}\right)^2, t > 0 (\text{ unde } c \in \mathbb{R}).$$

B. Exerciţii propuse.

1) Considerăm funcţionalele $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ definite de

$$p(x) = \begin{cases} 3, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

respectiv

$$q(x) = |x|, x \in \mathbb{R}.$$

Studiaţi dacă p şi q sunt norme pe $\mathbb{R}$ şi determinaţi (în ambele cazuri, indiferent dacă avem normă sau nu) $B(0;2)$, $\widetilde{B}(0;3)$ şi $S(0;3)$.

2) Fie $f :]0,1[\to]0,1[,\ f(x) = \frac{x}{3}$ şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = \frac{\pi}{2} + x - arctanx$. Arătaţi că f şi g nu au puncte fixe. Comentaţi legătura cu principiul contracţiei al lui Banach.

3) Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x(1-x)$ (operatorul logistic).
(a) Găsiţi $Fix(f)$
(b) Este f o contracţie pe $[0,1]$?
(c) Găsiţi un interval închis $J = [a,b]$ inclus în $[0,1]$ cu proprietatea că $f(J) \subseteq J$ şi $f : J \to J$ este o contracţie.

4) Să se verifice dacă ecuaţia

$$x' = -\frac{3t(t+2x^2)}{2x(3t^2+2x^2)}, (t,x) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

este cu diferenţială totală exactă şi apoi, în caz afirmativ, să se rezolve.

6) Să se rezolve problema cu condiţii iniţiale

$$\begin{cases} x' = x\cos t - x^2\cos t, t \in \mathbb{R}, \\ x(0) = 2. \end{cases}$$

Capitolul 5

Problema lui Cauchy

In acest capitol vom demonstra şi enunţa doua rezultate de existenţă şi unicitate pentru problema lui Cauchy. Cazul particular al sistemelor liniare va fi, de asemenea, considerat.

5.1 Teoreme de existenţă şi unicitate

5.1.1 Teorema globală de existenţă şi unicitate

Considerăm problema cu condiţii iniţiale (problema lui Cauchy) de forma

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x^0, \end{cases} \tag{5.1}$$

unde $t_0, x^0 \in \mathbb{R}$, $f : Dom(f) := [t_0 - a, t_0 + a] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă, iar $a > 0$ este oarecare. Fie $I := [t_0 - a, t_0 + a]$, cu $a > 0$ arbitrar.

In condiţiile în care problema nu poate fi rezolvată efectiv, ne interesează un rezultat de existenţă, unicitate şi aproximare a soluţiei problemei date. Există mai multe abordări ale acestei problematici în literatura de specialitate. Abordarea din acest curs se bazează pe folosirea principiului contracţiei a lui Banach şi a tehnicii punctului fix. Metoda este relativ nouă (A. Bielecki, 1956) şi se bazează pe folosirea normei Bielecki pe spaţiul funcţiilor continue.

Următorul rezultat auxiliar este foarte important în demersul nostru.

Lema. *In condiţiile de mai sus, considerăm problema lui Cauchy (5.1). Atunci orice soluţie a problemei (5.1) este soluţie a ecuaţiei integrale*

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds + x^0, \ t \in I \tag{5.2}$$

şi reciproc. Cu alte cuvinte, problemele (5.1) şi (5.2) sunt echivalente.

Demonstraţie. Să notăm mai întâi că printr-o soluţie a ecuaţiei (5.2) înţelegem o funcţie continuă x ce verifică ecuaţia pentru fiecare $t \in I$.

"$\Rightarrow$" Fie x o soluţie pentru problema (5.1). Integrând ecuaţia de la t_0 la $t \in I$ avem

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds.$$

Cum $x(t_0) = x^0$, rezultă că x e soluţie pentru (5.2).

"$\Leftarrow$" Fie x o funcţie continuă, soluţie pentru ecuaţia integrală (5.2). Atunci, din (5.2) rezultă că $x(t_0) = x^0$. Mai mult, derivând ecuaţia (5.2) obţinem că $x'(t) = f(t, x(t)), t \in I$, ceea ce arată că x este derivabilă cu derivata continuă şi e soluţie pentru (5.1). $\square$

Comentariu istoric. *Ecuaţia (5.2) este o ecuaţie integrală de tip Volterra. Vito Volterra a fost un matematician italian cu contribuţii însemnate în teoria ecuaţiilor integrale. Pe de altă parte, matematicianul român Traian Lalescu este autorul primei monografii de ecuaţii integrale din lume (1911).*

Lema anterioară arată că studiul problemei (5.1) se poate reduce la studiul ecuaţiei (5.2). Dar ecuaţia (5.2) este o ecuaţie de punct fix. Intradevăr, dacă, pentru $x \in C(I)$, notăm

$$Tx(t) := \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds + x^0, t \in I,$$

atunci (din faptul că f este presupusă funcţie continuă) am obţinut operatorul

$$T : C(I) \to C(I),\ x \longmapsto Tx.$$

Folosind această notaţie, ecuaţia (5.2) se scrie ca o problemă de punct fix de forma

$$x = Tx, x \in C(I). \tag{5.3}$$

Dacă observăm (vezi pag. 44) că $C(I)$ înzestrat cu oricare dintre normele Cebîşev sau Bielecki este spaţiu Banach, atunci suntem foarte aproape de a putea utiliza principiul contracţiei la ecuaţia de punct fix (5.3). Mai trebuie doar ca operatorul T să fie contracţie. Cu alte cuvinte, ar trebui să arătăm că există $\alpha \in]0, 1[$ astfel ca

$$\|Tx - Ty\| \leq \alpha\|x - y\|, \text{ oricare ar fi } x, y \in C(I), \tag{5.4}$$

unde $\|\cdot\|$ este o normă pe $C(I)$. Pornim acest calcul de la expresia ce apare în membrul stâng al relaţiei de mai sus:

$$|Tx(t) - Ty(t)| = |\int_{t_0}^{t} (f(s, x(s)) - f(s, y(s)))\, ds|.$$

Distingem două cazuri:

a) $t \geq t_0$. Avem

$$|Tx(t) - Ty(t)| \leq \int_{t_0}^{t} |f(s, x(s)) - f(s, y(s))|ds$$

Pentru a putea evalua cantitatea de mai sus în raport cu $|x(t) - y(t)|$ (ce apare în membrul drept al relaţiei de demostrat (5.4), impunem aici o condiţie de tip Lipschitz asupra lui f. Mai precis, presupunem că există $L_f > 0$ astfel încât

$$|f(s, u) - f(s, v)| \leq L_f|u - v|, \text{ oricare ar fi } u, v \in \mathbb{R} \text{ şi } s \in I. \tag{5.5}$$

Atunci avem

$$|Tx(t){-}Ty(t)| \leq \int_{t_0}^{t} |\,(f(s, x(s)) - f(s, y(s)))\,|ds \leq L_f \int_{t_0}^{t} |x(s)){-}y(s)|ds$$

$$= L_f \int_{t_0}^{t} |x(s)) - y(s)| e^{-\tau|s-t_0|} e^{\tau|s-t_0|} ds \leq L_f \|x - y\|_B \int_{t_0}^{t} e^{\tau|s-t_0|} ds$$

$$\leq \frac{L_f}{\tau} \|x - y\|_B e^{\tau|t-t_0|}, \text{ oricare ar fi } t \in I, t \geq t_0.$$

Impărţind relaţia cu $e^{\tau|t-t_0|}$ şi luând maximul după t obţinem

$$\|Tx - Ty\|_B \leq \frac{L_f}{\tau} \|x - y\|_B, \text{ oricare ar fi } x, y \in C(I). \tag{5.6}$$

b) $t \leq t_0$. Presupunem şi în acest caz, că are loc condiţia Lipschitz (5.5). Atunci avem

$$|Tx(t) - Ty(t)| \leq \int_{t}^{t_0} |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| ds \leq L_f \int_{t}^{t_0} |x(s)) - y(s)| ds$$

$$= L_f \int_{t}^{t_0} |x(s)) - y(s)| e^{-\tau|s-t_0|} e^{\tau|s-t_0|} ds \leq L_f \|x - y\|_B \int_{t_0}^{t} e^{\tau|s-t_0|} ds$$

$$\leq \frac{L_f}{\tau} \|x - y\|_B e^{\tau|t-t_0|}, \text{ oricare ar fi } t \in I, t \leq t_0.$$

Impărţind relaţia cu $e^{\tau|t-t_0|}$ şi luând maximul după t obţinem şi în acest caz

$$\|Tx - Ty\|_B \leq \frac{L_f}{\tau} \|x - y\|_B, \text{ oricare ar fi } x, y \in C(I). \tag{5.7}$$

In concluzie, am arătat că pentru orice $x, y \in C(I)$ avem

$$\|Tx - Ty\|_B \leq \frac{L_f}{\tau} \|x - y\|_B, \tag{5.8}$$

unde $\|\cdot\|_B$ este norma Bielecki pe $C(I)$. Cum $\tau > 0$ este arbitrar, alegând $\tau > L_f$ obţinem că $\alpha := \frac{L_f}{\tau} < 1$, ceea ce arată că T este o α-contracţie pe $C(I)$ în raport cu norma Bielecki a spaţiului.

Astfel, toate ipotezele principiului contracţiei a lui Banach pentru operatorul $T : (C(I), \|\cdot\|_B) \to (C(I), \|\cdot\|_B)$ definit de relaţia

$$Tx(t) := \int_{t_0}^{t} f(s, x(s)) ds + x^0, t \in I$$

sunt îndeplinite. In concluzie, ecuaţia $x = Tx$ are în $C(I)$ o unică soluţie (punct fix pentru T) pe care-l notăm cu x^*. Mai mult, şirul recurent definit de relaţia

$$x_{n+1}(t) = \int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s))ds + x^0, t \in I, n \in \mathbb{N}$$

(unde x_0 poate fi orice element din $C(I)$) este convergent la x^* atât în raport cu norma Bielecki cât şi în raport cu norma Cebîşev a spaţiului $C(I)$.

Din consideraţiile de mai sus, rezultă că am demonstrat teorema.

Teorema globală de existenţă şi unicitate pentru problema lui Cauchy. *Fie problema lui Cauchy (5.1), unde valorile $t_0, x^0 \in \mathbb{R}$ sunt date. Presupunem:*

(i) (condiţia de continuitate a datelor) $f : Dom(f) := [t_0 - a, t_0 + a] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă, iar $a > 0$ este oarecare.

(ii) (condiţia Lipschitz asupra lui f în raport cu al doilea argument) există $L_f > 0$ astfel încât

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq L_f|u - v|, \text{ oricare ar fi } u, v \in \mathbb{R} \text{ şi } t \in I.$$

Atunci, problema lui Cauchy (5.1) are soluţie unică x^* şi oricare ar fi $x_0 \in C(I)$ şirul $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ din $C(I)$, definit recurent de relaţia

$$x_{n+1}(t) = \int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s))ds + x^0, t \in I, n \in \mathbb{N}$$

converge uniform la x^*.

Să considerăm acum problema cu condiţii iniţiale (problema lui Cauchy) pentru un sistem de n ecuaţii diferenţiale de ordinul 1, de forma

$$\begin{cases} X'(t) = f(t, X(t)) \\ X(t_0) = X^0, \end{cases} \tag{5.9}$$

unde $t_0 \in \mathbb{R}$, $X^0 \in \mathbb{R}^n$, iar $f : Dom(f) := [t_0 - a, t_0 + a] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ este o funcţie continuă, cu $a > 0$ oarecare.

Repetând consideraţiile de mai sus, dar lucrând în spaţiul Banach $C(I, \mathbb{R}^n)$ înzestrat cu norma Bielecki

$$\|X\|_B := \max_{t\in[a,b]}(\|X(t)\|_{\mathbb{R}^n} e^{-\tau|t-t_0|}),$$

se poate demonstra uşor (exerciţiu !) teorema următoare.

Teorema globală de existenţă şi unicitate pentru problema lui Cauchy asociată unui sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul intâi. *Fie problema lui Cauchy (5.9), unde valorile* $t_0 \in \mathbb{R}$ *şi* $X^0 \in \mathbb{R}^n$ *sunt date. Presupunem:*

(i) $f : Dom(f) := [t_0 - a, t_0 + a] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *este o funcţie continuă, iar* $a > 0$ *este oarecare.*

(ii) există $L_f > 0$ *astfel încât*

$$\|f(t, u) - f(t, v)\|_{\mathbb{R}^n} \le L_f \|u - v\|_{\mathbb{R}^n}, \text{ oricare ar fi } u, v \in \mathbb{R}^n \text{ şi } t \in I.$$

Atunci, problema lui Cauchy (5.9) are soluţie unică X^* *şi oricare ar fi* $X_0 \in C(I, \mathbb{R}^n)$ *şirul* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *din* $C(I, \mathbb{R}^n)$*, definit recurent de relaţia*

$$X_{n+1}(t) = \int_{t_0}^{t} f(s, X_n(s))ds + X^0, t \in I, n \in \mathbb{N}$$

converge uniform la X^*.

In cazul în care sistemul (5.9) este liniar (ceea ce înseamnă că f este o funcţie liniară în raport cu al doilea argument, i.e., $f(t, u) := A(t)u+B(t)$ problema cu condiţii iniţiale anterioară capătă următoarea formă:

$$\begin{cases} X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \\ X(t_0) = X^0. \end{cases} \tag{5.10}$$

Să notăm că A e o matrice de funcţii continue

$$A(t) := \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

în timp ce B este un vector de funcţii continue de forma

$$B(t) := \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \cdots \\ b_n(t) \end{pmatrix},$$

ceea ce justifică denumirea de sistem de ecuaţii diferenţiale.

Din teorema anterioară deducem următorul rezultat.

Teorema de existenţă şi unicitate pentru problema lui Cauchy asociată unui sistem liniar de ecuaţii diferenţiale de ordinul intâi. *Fie problema lui Cauchy (5.10), unde valorile* $t_0 \in \mathbb{R}$ *şi* $X^0 \in \mathbb{R}^n$ *sunt date. Presupunem că* $A \in C(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ *şi* $B \in C(I, \mathbb{R}^n)$.

Atunci, problema lui Cauchy (5.10) are soluţie unică X^* *şi oricare ar fi* $X_0 \in C(I, \mathbb{R}^n)$ *şirul* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *din* $C(I, \mathbb{R}^n)$*, definit recurent de relaţia*

$$X_{n+1}(t) = \int_{t_0}^{t} (A(s)X_n(s) + B(s))\, ds + X^0, t \in I, n \in \mathbb{N}$$

converge uniform la X^*.

Demonstraţie. Arătăm că $f(t, u) = Au+B$ satisface ipotezele Teoremei globale de existenţă şi unicitate pentru problema lui Cauchy asociată unui sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul intâi. Avem de verificat doar ipoteza (ii). Avem

$$\|f(t, u) - f(t, v)\|_{\mathbb{R}^n} = \|A(t)\,(u - v)\,\|_{\mathbb{R}^n} \leq c\|A(t)\|_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\|u - v\|_{\mathbb{R}^n}$$

$$\leq cM_A\|u - v\|_{\mathbb{R}^n},$$

unde $M_A > 0$ are proprietatea (rezultată din continuitatea funcţiei A pe compactul I) că

$$\|A(t)\|_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \leq M_A, \text{ oricare ar fi } t \in I.$$

Din relaţia de mai sus, notând $L_f := cM_A > 0$, observăm că are loc condiţia lui Lipschitz pentru f. Concluzia rezultă aplicând Teorema globală de existenţă şi unicitate pentru problema lui Cauchy asociată unui sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul intâi. □

Observaţie. Printr-un calcul asemănător cu cel din cazul scalar (folosind elemente de analiză matriceală) obţinem că unica soluţie a problemei lui Cauchy aratată mai sus are reprezentarea

$$X^*(t) = e^{\int_{t_0}^t A(s)ds} X^0 + \int_{t_0}^t e^{\int_s^t A(p)dp} B(s)ds.$$

Exemplu. Fie problema cu condiţii iniţiale

$$\begin{cases} x'(t) = \arctan x(t) + t^2 \\ x(0) = 1, \end{cases} \tag{5.11}$$

Să se studieze existenţă şi unicitatea soluţiei problemei date.

Soluţie. Avem $t_0 = 0, x^0 = 1$, $f(t,u) = \arctan u + t^2$, unde presupunem $f : [-a,a] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu $a > 0$ arbitrar. Verificăm ipotezele teoremei globale de existenţă şi unicitate:

(i) f este continuă pe $[-a,a] \times \mathbb{R}$;

(ii) f este Lipschitz (cu constanta $L_f = 1$) în raport cu al doilea argument. Intr-adevăr, avem $|\frac{\partial f}{\partial u}| = \frac{1}{1+u^2} \leq 1$, oricare ar fi $u \in \mathbb{R}$.

Atunci, din Teorema globală de existenţă şi unicitate pentru problema lui Cauchy asociată unui sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul intâi obţinem că problema lui Cauchy are soluţie unică x^* şi aceasta se poate obţine ca limită uniformă a şirului definit recurent de relaţia

$$x_{n+1}(t) = \int_{t_0}^t \left(\arctan x_n(s) + s^2\right) ds + 1, t \in [-a,a], n \in \mathbb{N},$$

unde pe rol de funcţie de start se poate lua orice funcţie continuă, de exemplu se poate lua $x_0(t) = 1$, $t \in [-a,a]$.

5.1.2 Teorema locală de existenţă şi unicitate

Deseori ne interesează existenţa şi unicitatea soluţiei problemei lui Cauchy într-o anumită parte a spaţiului. Pe de altă parte, condiţia Lipschitz pentru f în raport cu al doilea argument pe $\mathbb{R}$ sau un domeniu nemărginit este destul de restrictivă, nefiind verificată de destul de multe funcţii. pentru atingerea celor două situaţii descrise mai sus (localizarea soluţiei şi relaxarea condiţiei de funcţie Lipschitz), vom prezenta în continuare un rezultat de existenţă şi unicitate locală.

Considerăm problema cu condiţii iniţiale (problema lui Cauchy) de forma

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x^0, \end{cases} \tag{5.12}$$

unde $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă, $(t_0, x^0) \in \Omega$, iar Ω este un domeniu (mulţime deschisă şi conexă) în $\mathbb{R}^2$. Fie dreptunghiul $\tilde{D} := [t_0 - a, t_0 + a] \times [x^0 - b, x^0 + b] \subset \Omega$, unde $a, b > 0$. Fie $0 < h \leq a$. Studiem existenţa şi unicitatea soluţiei problema cu condiţii iniţiale de mai sus în $\tilde{B}(x^0; b) \subset C[t_0 - h, t_0 + h])$. Notăm $J := [t_0 - h, t_0 + h]$ şi desemnăm cu $M_f > 0$ numărul cu proprietatea

$$|f(t, u)| \leq M_f, \text{ oricare ar fi } (t, u) \in \tilde{D}.$$

Vom presupune în continuare că f este local Lipschitz pe Ω în raport cu al doilea argument, ceea ce înseamnă că f este Lipschitz pe orice compact din domeniul de definiţie respectiv.

Următorul rezultat auxiliar se obţine în mod identic cu paragraful anterior.

Lema. *Considerăm problema lui Cauchy (5.12), unde $f : \tilde{D} \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă. Atunci orice soluţie a problemei (5.12) este soluţie a ecuaţiei integrale*

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds + x^0, \ t \in J \tag{5.13}$$

şi reciproc.

Ca şi mai sus, pentru $x \in \tilde{B}(x^0; b)$, notăm

$$Tx(t) := \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds + x^0, t \in J.$$

Obţinem astfel operatorul

$$T : \tilde{B}(x^0; b) \to C(J), \; x \longmapsto Tx.$$

Folosind această notaţie, ecuaţia integrală (5.13) se scrie ca o problemă de punct fix de forma

$$x = Tx, x \in \tilde{B}(x^0; b). \tag{5.14}$$

Să observăm că analog cu abordarea din secţiunea precedentă, $C(J)$ înzestrat cu oricare dintre normele Cebîşev sau Bielecki este spaţiu Banach. Cum $\tilde{B}(x^0; b)$ este o mulţime închisă în $C(J)$, rezultă că $\tilde{B}(x^0; b)$ înzestrat cu oricare dintre normele Cebîşev sau Bielecki este, de asemenea, spaţiu Banach.

Pentru a putea utiliza principiul contracţiei la ecuaţia de punct fix (5.14). mai trebuie să arătăm ca operatorul T acţionează de la $\tilde{B}(x^0; b)$ la $\tilde{B}(x^0; b)$ şi că este o contracţie. Cu alte cuvinte, ar trebui să arătăm cumulativ:

(i) oricare ar fi $x \in \tilde{B}(x^0; b)$ avem că $Tx \in \tilde{B}(x^0; b)$;

(ii) există $\alpha \in]0, 1[$ astfel ca

$$\|Tx - Ty\|_B \leq \alpha \|x - y\|_B, \text{ oricare ar fi } x, y \in \tilde{B}(x^0; b), \tag{5.15}$$

unde $\| \cdot \|_B$ este o norma Bielecki pe $C(J)$.

Intr-adevăr, avem:

(i) $|Tx(t) - x^0| = |\int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds|$, oricare ar fi $t \in J$. Dacă presupunem $t \geq t_0$, atunci avem

$$|Tx(t) - x^0| \leq \int_{t_0}^{t} |f(s, x(s))|ds \leq M_f(t - t_0) \leq M_f h.$$

Analog obţinem şi în situaţia $t \leq t_0$.
Dacă presupunem că $h := \min\{a, \frac{b}{M_f}\}$ atunci am obţinut $|Tx(t)-x^0| \leq b$, oricare ar fi $t \in J$, cu h ca mai sus. Trecând la maxim după $t \in J$, avem

$$\|Tx - x^0\|_C \leq b,$$

ceea ce arată că $Tx \in \tilde{B}(x^0; b)$.

(ii) se obţine la fel ca în secţiunea anterioară (exerciţiu !).

In consecinţă, am demonstrat următoarea teoremă de existenţă şi unicitate locală.

Teorema locală de existenţă şi unicitate pentru problema lui Cauchy asociată unei ecuaţii diferenţiale de ordinul intâi. *Fie problema lui Cauchy (5.12), unde* $(t_0, x^0) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$. *Presupunem:*

(i) $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *este o funcţie continuă;*

(ii) f *este Lipschitz pe* $\tilde{D} := [t_0 - a, t_0 + a] \times [x^0 - b, x^0 + b] \subset \Omega$ *în raport cu al doilea argument, i.e., există* $L_f > 0$ *astfel încât*

$$|f(t,u) - f(t,v)| \leq L_f |u - v|, \text{ oricare ar fi } (t,u), (t,v) \in \tilde{D}.$$

Atunci, problema lui Cauchy (5.12) are soluţie unică $x^* \in \tilde{B}(x^0; b) \subset C[t_0 - h, t_0 + h]$ *definită cel puţin pe intervalul* $J := [t_0 - h, t_0 + h]$ *(unde* $h := \min\{a, \frac{b}{M_f}\}$, *cu* $M_f > 0$ *având proprietatea că* $|f(t,u)| \leq M_f$, *oricare ar fi* $(t,u) \in \tilde{D}$*) şi oricare ar fi* $x_0 \in \tilde{B}(x^0; b)$ *şirul* $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *din* $\tilde{B}(x^0; b) \subset C(J)$, *definit recurent de relaţia*

$$x_{n+1}(t) = \int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s))ds + x^0, t \in J, n \in \mathbb{N}$$

converge uniform la x^*.

Observaţie. In mod analog cu situaţia din cazul teoremei globale, se poate demonstra şi enunţa o teorema locală de existenţă şi unicitate pentru problema lui Cauchy asociată unui sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi.

Exemplu. Fie problema cu valori iniţiale

$$\begin{cases} x'(t) = 2t - 3x^4(t) \\ x(0) = 0. \end{cases} \tag{5.16}$$

Să se stabilească un rezultat de existenţă şi unicitate pentru această problemă şi să se scrie primele trei aproximaţii succesive pentru soluţia problemei.

Soluţie. In raport cu teoria generală, avem $f(t,u) = 2t - 3u^4$, $t_0 = 0$ şi $x^0 = 0$. Presupunem $f : [-a,a] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, unde $a > 0$ este arbitrar.

Studiem mai întâi aplicabilitatea teoremei globale. In mod evident, f este continuă pe $[-a,a] \times \mathbb{R}$. Verifică dacă f este Lipschitz în raport cu al doilea argument. Avem

$$|\frac{\partial f}{\partial u}| = 12|u^3| \to \infty, \text{ când } u \to \infty.$$

Deci, f nu este Lipschitz în raport cu al doilea argument pe $\mathbb{R}$. In aceste condiţii, teorema globală de existenţă şi unicitate nu este aplicabilă.

Analizăm acum aplicabilitatea teoremei locale. Considerăm $f : \tilde{D} := [-a,a] \times [-b,b] \to \mathbb{R}$, unde $a, b > 0$ sunt arbitare. Atunci,

$$|\frac{\partial f}{\partial u}| = 12|u^3| \leq 12b^3.$$

In consecinţă, f este Lipschitz în raport cu al doilea argument pe $\tilde{D}$ cu constanta $L_f = 12b^3$. De asemenea, avem

$$|f(t,u)| = |2t - 3u^4| \leq 2|t| + 3|u^4| \leq 2a + 3b^4 := M_f, \text{ oricare ar fi } (t,u) \in \tilde{D}.$$

Atunci $h := \min\{a, \frac{b}{2a+3b^4}\}$. Concluzionăm că teorema locală de existenţă şi unicitate este aplicabilă şi deci problema lui Cauchy de mai sus are soluţie unică x^* definită, cel puţin, pe intervalul $[-h,h]$. Mai mult, $x^* \in \tilde{B}(0;b) \subset C[-h,h]$, ceea ce înseamnă că $x(t) \in [-b,b]$, oricare ar fi $t \in [-h,h]$. De exemplu, dacă luăm $a = 1, b = 1$, rezultă $h = \frac{1}{5}$ şi soluţia unică este $x^* : [-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}] \to [-1,1]$.

In plus, şirul $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ din $\tilde{B}(0;b) \subset C[-h,h]$, definit recurent de relaţia

$$x_{n+1}(t) = \int_0^t (2s - 3x_n^4(s))ds + x^0, t \in J, n \in \mathbb{N}$$

(unde $x_0 \in C[-h,h]$ poate fi arbitrar ales) converge uniform la x^*. De exemplu, alegând $x_0(t) = 0$ obţinem

$$x_1(t) = \int_0^t 2sds = t^2$$

şi

$$x_2(t) = \int_0^t (2s - 3x_1^4(s))ds = t^2 - 3\int_0^t s^8 ds = t^2 - \frac{t^9}{3}.$$

...

5.2 Exerciţii rezolvate şi propuse

A. Exerciţii rezolvate.

1) Fie funcţia $x(t) = t^2$, $t \in [0,2]$. Să se afle $\|x\|_C$ şi $\|x\|_B$.

Soluţie. $\|x\|_C = \max\limits_{t\in[0,2]} |x(t)| = \max\limits_{t\in[0,2]} t^2 = 4$. Pe de altă parte, $\|x\|_B = \max\limits_{t\in[0,2]}(|x(t)|e^{-\tau t})$. Iau $\tau = 1$. Atunci $\|x\|_B = \max\limits_{t\in[0,2]}(t^2e^{-t}) = \dfrac{4}{e^2}$.

2) Să se stabilească un rezultat de existenţă şi unicitate pentu problema

$$\begin{cases} x'(t) = e^{-t^2} + \frac{1}{2}\ln(1 + x^2(t)) \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Aceeaşi problemă pentru

$$\begin{cases} x'(t) = e^{-t^2} + k\ln(1 + x^2(t)) \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

unde $k > 0$ este dat.

Soluţie. Avem $t_0 = 0, x^0 = 0$ şi $f(t,u) = e^{-t^2} + \frac{1}{2}\ln(1+u^2)$. Evident, putem lua $f : [-a,a] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu $a > 0$ oarecare.

Avem:

(i) f continuă pe $[-a,a] \times \mathbb{R}$;

(ii) f este Lipschitz în raport cu al doilea argument, deoarece

$$|\frac{\partial f}{\partial u}| = \frac{|u|}{1+u^2} \leq \frac{1}{2}, \text{ oricare ar fi } (t,u) \in [-a,a] \times \mathbb{R}.$$

Din teorema globală de existenţă şi unicitate rezultă că există soluţie unică x^* definită, cel puţin, pe intervalul $[-a,a]$. Cum $a > 0$ este arbitar, rezultă că soluţia este definită pe $\mathbb{R}$.

3) Să se stabilească un rezultat de existenţă şi unicitate pentu problema

$$\begin{cases} x'(t) = e^{-x(t)} + 2t\,(x(t) - 1) \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Soluţie. Avem $t_0 = 0, x^0 = 1$ şi $f(t,u) = e^{-u} + 2t(u-1)$. Evident, putem lua $f : [-a,a] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, unde $a > 0$ este oarecare.

Avem:

(i) f continuă pe $[-a,a] \times \mathbb{R}$;

(ii) f nu este Lipschitz în raport cu al doilea argument pe $[-a,a] \times \mathbb{R}$, deoarece derivata sa parţială în raport cu al doilea argument nu este mărginită pe $\mathbb{R}$, după cum rezultă din calculul de mai jos

$$|\frac{\partial f}{\partial u}| \leq e^{-u} + 2|t| \to \infty, \text{ când } u \to -\infty.$$

In aceste condiţii, teorema globală de existenţă şi unicitate nu este aplicabilă.

Analizăm pentru cazul teoremei locale.

Fie $f : \tilde{D} := [-a,a] \times [1-b, 1+b] \to \mathbb{R}$, unde $a, b > 0$. Atunci, deoarece

$$|\frac{\partial f}{\partial u}| \leq e^{-u} + 2|t| \leq e^{b-1} + 2a, \text{ oricare ar fi } (t,u) \in \tilde{D},$$

rezultă că f este Lipschitz pe $\tilde{D}$. Calculând M_f din

$$|f(t,u)| \leq e^{-u} + 2|t||u-1| \leq e^{b-1} + 2ab := M_f,$$

obţinem $h = \min\{a, \frac{b}{e^{b-1}+2ab}\}$. Din teorema globală de existenţă şi unicitate avem că problema lui Cauchy are soluţie unică definită cel puţin pe intervalul $[-h,h]$. Mai mult $x^* \in \tilde{B}(1;b) \subset C[-h,h]$. De exemplu, dacă luăm $a = 2, b = 1$ atunci $M_f = 4$ şi $h = \frac{1}{4}$. In consecinţă, există şi este unică o soluţie x^* definită cel puţin pe intervalul $[-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}]$. In plus, în acest caz, $x^* \in \tilde{B}(1;1) \subset C[-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}]$, ceea ce arată că $x^*(t) \in [0,2]$, oricare ar fi $t \in [-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}]$.

4) Să se rezolve problema cu condiţia iniţială $x(0) = 2$ asociată următoarei ecuaţii Riccati

$$x'(t) + x^2(t)\sin t = 2\frac{\tan t}{\cos t}, t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[,$$

ştiind că $\rho(t) = \frac{1}{\cos t}$ este soluţie a ecuaţiei date.

Soluţie. Recunoaştem mai sus o ecuaţie Riccati, ce are forma generală

$$x'(t) - p(t)x(t) = q(t)x^2(t) + r(t),\ t \in I \subseteq \mathbb{R},$$

unde p, q, r sunt funcţii continue pe un interval I.

Facem schimbarea de variabilă $x(t) = \rho(t) + \frac{1}{z(t)}$ şi vom obţine o ecuaţie diferenţială liniară în necunoscuta $z = z(t)$. In cazul nostru, obţinem

$$z'(t) - 2z\tan t = \sin t, t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$$

Rezolvând avem soluţia generală

$$z(t) = \frac{c}{\cos^2 t} - \frac{\cos t}{3} = \frac{3c - \cos^3 t}{3\cos^2 t}.$$

Revenind la notaţia iniţială, avem (pe lângă soluţia dată ρ), familia de soluţii

$$x(t) = \frac{1}{\cos t} + \frac{3\cos^2 t}{3c - \cos^3 t}.$$

Din condiţia lui Cauchy $x(0) = 1$, găsim $c = \frac{4}{3}$. Deci, soluţia unică a problemei date este

$$x^*(t) = \frac{1}{\cos t} + \frac{3\cos^2 t}{4 - \cos^3 t}.$$

5) Să se rezolve ecuaţia de tip Clairault

$$x(t) = tx'(t) + \sqrt{1 + (x'(t))^2}, t \in \mathbb{R}.$$

Soluţie. Prin derivare, obţinem

$$x'(t) = x'(t) + tx''(t) + x''(t)x'(t)\left(1 + (x'(t))^2\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

După reducerea termenilor asemenea, şi avem

$$x''(t)\left(t + x'(t)\left(1 + (x'(t))^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right) = 0,$$

a) Dacă $x''(t) = 0$ atunci $x'(t) = c, c \in \mathbb{R}$ şi astfel obţinem (din ecuaţie) soluţia generală

$$x(t) = ct + \sqrt{1 + c^2}, c \in \mathbb{R}.$$

b) Dacă $t + x'(t)\left(1 + (x'(t))^2\right)^{-\frac{1}{2}} = 0$, atunci, notând $x' = p, p \in \mathbb{R}$, obţinem (folosind relaţia anterioară şi ecuaţia) soluţia singulară a ecuaţiei lui Clairault

$$\begin{cases} t = -\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \\ x = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}, p \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Eliminând p între cele două relaţii, obţinem forma explicită a soluţiei singulare, anume

$$x(t) = \sqrt{1 - t^2},\ t \in]-1, 1[$$

care reprezintă ecuaţia semicercului superior de centru $(0, 0)$ şi rază 1. Acest semicerc este înfăşurătoarea familiei de drepte reprezentată de soluţia generală. (Notă: Verificaţi la *Geometrie* noţiunea de înfăşurătoare a unei familii de drepte.)

B. Exerciţii propuse.

1) Să se stabilească un rezultat de existenţă şi unicitate pentu problema

$$\begin{cases} x'(t) = \sin t + \frac{1}{3}\arctan(1 + x^2(t)) \\ x(1) = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

2) Să se stabilească un rezultat de existenţă şi unicitate pentu pro-blema

$$\begin{cases} x'(t) = x^3(t) + \cos t \\ x(0) = 1, \end{cases}$$

precizându-se un interval al axei reale pe care problema există şi este unică. In acest caz, să se scrie şirul aproximaţiilor succesive corespunzător şi să se calculeze primele trei aproximaţii.

3) Să se stabilească un rezultat de existenţă şi unicitate pentu problema

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + y^2(t) + -y + 1 \\ y'(t) = x^2(t) - x - y - 2t \\ x(0) = 0, y(0) = 1 \end{cases}$$

precizându-se un interval al axei reale pe care problema există şi este unică.

4) Să se rezolve ecuaţia Riccati $t^2x'(t) + tx(t) + t^2x^2(t) = 4,\ t > 0$, ştiind că $\rho(t) = \frac{2}{t},\ t > 0$, este o soluţie a sa.

5) Să se rezolve ecuaţia Clairault $x(t) = tx'(t) + 2\ln(x'(t))$.

Capitolul 6

Dependenţa de date a soluţiei problemei Cauchy

Considerăm problema lui Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x^0, \end{cases} \tag{6.1}$$

unde $t_0, x^0 \in \mathbb{R}$, $f : Dom(f) := [t_0 - a, t_0 + a] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă, iar $a > 0$ este oarecare. Fie $I := [t_0 - a, t_0 + a]$, cu $a > 0$ arbitrar. Dacă presupunem că f este Lipschitz în raport cu al doilea argument, atunci din teorema globală de existenţă şi unicitate se ştie că există şi este unică o soluţie x^* a problemei noastre, definită cel puţin pe intervalul $[t_0 - a, t_0 + a]$. Problema pe care ne-o punem acum (problemă importantă în procesele de aproximare a soluţiei) este:
Intrebare: Dacă în problema de mai sus, înlocuim f cu o funcţie apropiată (într-un sens pe care-l vom defini) de ea notată cu g şi înlocuim x^0 cu o valoare y^0 apropiată de x^0, oare cât de apropiată este soluţia (notată cu y^*) problemei Cauchy cu g şi y^0 de x^* ? Dacă, atunci când g se apropie/tinde de/la f şi y^0 tinde la x^0 obţinem că y^* tinde spre x^*, spunem că are loc dependenţa continuă de date a soluţiei problemei lui

Cauchy, lucru ce este extrem de important în analiza numerică (calculul aproximativ) a soluţiei.

Comentariu istoric. Noţiunea de dependenţă continuă de date a fost formulată de Jacques Hadamard în 1902 în contextul studiilor sale asupra unor ecuaţii cu derivate parttţiale. Hadamard a numit o problemă bine pusă (well-posed) dacă soluţia sa există este unică şi depinde continuu de datele problemei. In acest cadru, vom demonstra în acest capitol că problema lui Cauchy pentru ecuaţii/sisteme de ecuaţii diferenţiale este (în ipotezele menţionate mai sus) bine pusă.

6.1 Lema Gronwall

Următorul rezultat, cunoscut în literatura ca lema lui Gronwall, este important pentru demostraţia dependenţei de date a soluţiei problemei lui Cauchy.

Teoremă (Lema Gronwall). *Fie $\varphi, \psi : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ două funcţii continue pe un interval J. Fie $t_0 \in J$, $\alpha \geq 0, \beta > 0$. Dacă*

$$\psi(t) \leq \alpha + \beta \left| \int_{t_0}^{t} \varphi(s)\psi(s)ds \right|, \text{ oricare ar fi } t \in J,$$

atunci

$$\psi(t) \leq \alpha e^{\beta \left| \int_{t_0}^{t} \varphi(s)ds \right|} \text{ oricare ar fi } t \in J.$$

Demonstraţie. Facem demonstraţia în doi paşi.

A. Presupunem $\alpha > 0$.

Notăm $F(t) := \alpha + \beta \left| \int_{t_0}^{t} \varphi(s)\psi(s)ds \right|$, situaţie în care ipoteza lemei este $\psi(t) \leq F(t)$, oricare ar fi $t \in J$. Avem 2 cazuri:

A1. Presupunem $t \geq t_0$.

Atunci $F(t) := \alpha + \beta \int_{t_0}^{t} \varphi(s)\psi(s)ds$ şi $F'(t) = \beta\varphi(t)\psi(t)$. Rezultă, folosind ipoteza, că

$$F'(t) \leq \beta\varphi(t)F(t), \text{ oricare ar fi } t \geq t_0$$

şi atunci

$$\frac{F'(t)}{F(t)} \leq \beta\varphi(t), \text{ oricare ar fi } t \geq t_0$$

Integrând de la t_0 la t avem

$$\ln F(t) - \ln F(t_0) \leq \beta \int_{t_0}^{t} \varphi(s)ds.$$

Cum $F(t_0) = \alpha$, obţinem

$$F(t) \leq \alpha e^{\beta \int_{t_0}^{t} \varphi(s)ds} \text{ oricare ar fi } t \geq t_0.$$

Folosind din nou ipoteza $\psi(t) \leq F(t)$, avem că

$$\psi(t) \leq \alpha e^{\beta \int_{t_0}^{t} \varphi(s)ds} \text{ oricare ar fi } t \geq t_0.$$

A2. Presupunem $t \leq t_0$.
Atunci $F(t) := \alpha + \beta \int_{t}^{t_0} \varphi(s)\psi(s)ds$. Avem

$$F'(t) = -\beta\varphi(t)\psi(t) \geq -\beta\varphi(t)F(t), \text{ oricare ar fi } t \leq t_0.$$

Separând, avem

$$\frac{F'(t)}{F(t)} \geq -\beta\varphi(t), \text{ oricare ar fi } t \leq t_0$$

Integrând de la t la t_0 avem

$$\ln F(t_0) - \ln F(t) \geq -\beta \int_{t}^{t_0} \varphi(s)ds.$$

In consecinţă, avem ca şi mai sus, că

$$F(t) \leq \alpha e^{\beta \int_{t}^{t_0} \varphi(s)ds} = \alpha e^{\beta \left|\int_{t_0}^{t} \varphi(s)ds\right|} \text{ oricare ar fi } t \leq t_0.$$

Cum $\psi(t) \leq F(t)$, oricare ar fi $t \leq t_0$, concluzia este demonstrată şi în acest caz.
B. Presupunem $\alpha = 0$.

Atunci ipoteza lemei este

$$\psi(t) \le \beta \left| \int_{t_0}^{t} \varphi(s)\psi(s)ds \right|, \text{ oricare ar fi } t \in J,$$

iar ceea ce trebuie demonstrat

$$\psi(t) = 0, \text{ oricare ar fi } t \in J.$$

Din ipoteza acestui caz rezultă că, oricare ar fi $\varepsilon > 0$ avem

$$\psi(t) \le \varepsilon + \beta \left| \int_{t_0}^{t} \varphi(s)\psi(s)ds \right|, \text{ oricare ar fi } t \in J.$$

Aplicând **A.**, avem că

$$\psi(t) \le \varepsilon e^{\beta \left| \int_{t_0}^{t} \varphi(s)ds \right|} \text{ oricare ar fi } t \in J.$$

Cum $\varepsilon > 0$ a fost ales arbitrar, făcând $\varepsilon \searrow 0$ avem că

$$\psi(t) \le 0, \text{ oricare ar fi } t \in J.$$

Cum ψ ia valori pozitive, concluzia este $\psi(t) = 0$, oricare ar fi $t \in J$.

6.2 Dependenţa continuă de date a soluţiei problemei lui Cauchy

Fie problema Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x^0, \end{cases} \tag{6.2}$$

unde $t_0, x^0 \in \mathbb{R}$, $f : Dom(f) := [t_0 - a, t_0 + a] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă şi Lipschitz în raport cu al doilea argument, iar $a > 0$ este oarecare. Fie $I := [t_0 - a, t_0 + a]$, cu $a > 0$ arbitrar.

Asociem problemei de mai sus o problemă Cauchy "apropiată", şi anume

$$\begin{cases} y'(t) = g(t, y(t)) \\ y(t_0) = y^0, \end{cases} \tag{6.3}$$

unde $g \in C(I)$, $y^0 \in \mathbb{R}$ sunt astfel încât:

(i) există $\rho_1 > 0$ astfel ca $|f(t,u) - g(t,u)| \leq \rho_1$, oricare ar fi $(t,u) \in I \times \mathbb{R}$;

(ii) există $\rho_2 > 0$ astfel ca $|x^0 - y^0| \leq \rho_2$.

Mai presupunem că problema (6.2) are cel puţin o soluţie y^* definită pe I. Intrebarea este **"Cât de departe este y^* de x^* ?"**

Avem următorul rezultat ce arată că are loc dependenţa continuă de date a soluţiei problemei lui Cauchy.

Teorema. *Considerăm problemele (6.2) şi (6.3) în ipotezele mai sus menţionate. Notez cu $L_f > 0$ constanta Lipschitz a lui f, cu x^* unica soluţie a problemei (6.2) şi cu y^* o soluţie a problemei (6.3). Atunci*

$$\|x^* - y^*\|_C \leq (\rho_1 a + \rho_2) e^{L_f a}.$$

Demonstraţie. Ştim de la capitolul cu teorema de existenţă şi unicitate că problema (6.2) este echivalentă cu problema

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds + x^0, t \in I,$$

iar, analog, problema (6.3) este echivalentă cu

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} g(s, y(s))ds + y^0, t \in I.$$

Deoarece $\|x^* - y^*\|_C = \max\limits_{t \in I} |x^*(t) - y^*(t)|$, să evaluăm, folosind faptul că x^* respectiv y^* verifică ecuaţiile integrale de mai sus, valoarea

$$|x^*(t) - y^*(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} f(s, x^*(s))ds + x^0 - \int_{t_0}^{t} g(s, y^*(s))ds - y^0 \right| \leq$$

$$\left|\int_{t_0}^{t} f(s,x^*(s))ds - \int_{t_0}^{t} g(s,y^*(s))ds\right| + \left|x^0 - y^0\right|.$$

Să presupunem mai întâi că $t \geq t_0$. Atunci avem

$$|x^*(t) - y^*(t)| \leq \int_{t_0}^{t} |f(s,x^*(s)) - g(s,y^*(s))|\, ds + \left|x^0 - y^0\right| \leq$$

$$\int_{t_0}^{t} |f(s,x^*(s)) - f(s,y^*(s))|\, ds + \int_{t_0}^{t} |f(s,y^*(s)) - g(s,y^*(s))|\, ds + \rho_2 \leq$$

$$L_f \int_{t_0}^{t} |x^*(s)-y^*(s)|ds + \rho_1 \int_{t_0}^{t} ds + \rho_2 \leq L_f \int_{t_0}^{t} |x^*(s)-y^*(s)|ds + \rho_1 a + \rho_2.$$

Deci, am obţinut relaţia

$$|x^*(t) - y^*(t)| \leq (\rho_1 a + \rho_2) + L_f \int_{t_0}^{t} |x^*(s) - y^*(s)|ds,\ t \in I.$$

Pentru această relaţie putem aplica lema Gronwall (cu $\alpha := \rho_1 a + \rho_2$, $\beta := L_f$, $\varphi(t) := 1$ şi $\psi(t) := |x^*(t) - y^*(t)|$). Rezultă că avem

$$|x^*(t) - y^*(t)| \leq (\rho_1 a + \rho_2)e^{L_f \int_{t_0}^{t} ds} = (\rho_1 a + \rho_2)e^{L_f a},\ t \in I.$$

Trecând la maxim după $t \in I$ avem

$$\|x^* - y^*\|_C \leq (\rho_1 a + \rho_2)e^{L_f a}.$$

Observă că, dacă $g \to f$ şi $y^0 \to x^0$ (ceea ce conduce la $\rho_1, \rho_2 \searrow 0$), avem că $y^* \to x^*$, adică avem fenomenul dependenţei continue de date pentru soluţia problemei lui Cauchy.

Cazul $t \leq t_0$ este analog şi este lăsat ca exerciţiu. $\square$.

Observaţie. O altă metodă de a demonstra fenomenul dependenţei continue de date pentru soluţia problemei lui Cauchy este utilizarea teoremei abstracte de dependenţă de date a punctului fix (vezi problemele propuse de la capitolul principiul contrcaţiei). Acesta este un bun exerciţiu pentru studenţii interesaţi şi o temă frumoasă pentru lucrarea de licenţă.

6.3 Aspecte dinamice în teoria ecuaţiilor diferenţiale

Vom introduce în ceea ce urmează câteva noţiuni importante pentru abordarea dinamică din teoria ecuaţiilor diferenţiale. Vom reveni asupra subiectului după capitolele referitoare la sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare.

Fie ecuaţia diferenţială

$$x' = f(x),$$

unde $f : X \to X$ (cu $X := \mathbb{R}$) este o funcţie de clasă C^1.

Presupunem că oricare ar fi $\eta \in X$, problema lui Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = \eta \end{cases} \tag{6.4}$$

are soluţie unică (pe care o notăm cu x^*_η) definită pe $G := \mathbb{R}$. Considerăm, de asemenea, funcţia $\varphi : G \times X \to X$ definită de relaţia $\varphi(t, \eta) = x^*_\eta(t)$.

Atunci, prin definiţie, tripletul $(X := \mathbb{R}, G := \mathbb{R}, \varphi)$ se numeşte sistemul dinamic generat de sistemul autonom de ecuaţii diferenţiale $x' = f(x)$. In tripletul de mai sus, domeniul $X = \mathbb{R}$ de definiţie al funcţiei f se numeşte spaţiul fazelor (stărilor), $G := \mathbb{R}$ este domeniul de definiţie al soluţiei problemei lui Cauchy (6.4), iar φ este fluxul sistemului dinamic generat de sistemul autonom de ecuaţii diferenţiale.

Desemnăm prin termenul *curbă integrală* graficul unei soluţii de ecuaţie/sistem de ecuaţii diferenţiale.

Traiectoria sistemului dinamic ce trece prin η este $\varphi(\mathbb{R}, \eta)$, iar portretul fazic al sistemului dinamic este mulţimea traiectoriilor sistemului dinamic respectiv.

Aşa cum s-a mai menţionat, soluţiile echilibru (sau soluţiile staţionare) ale sistemului $x' = f(x)$ sunt soluţiile constante în timp, adică funcţiile x ce se obţin rezolvând ecuaţia $f(x) = 0$.

Exemplu. Fie ecuaţia $x' = x$. Să se rezolve problema lui Cauchy formată din ecuaţia dată şi condiţia $x(0) = \eta(\eta \in \mathbb{R})$. Precizaţi şirul aproximaţiilor succesive corespunzător problemei de mai sus şi calculaţi limita sa. Să se afle apoi soluţiile echilibru şi să se precizeze sistemul dinamic generat, traiectoriile şi portretul fazic.

Soluţie. In cazul nostru $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$.

(a) Pentru problema lui Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) \\ x(0) = \eta \end{cases}$$

unica soluţie este $x *_\eta (t) = \eta e^t, t \in \mathbb{R}$. Şirul aproximaţiilor succesive este

$$x_{n+1}(t) = \int_0^t x_n(s)ds + \eta, n \geq 0,$$

unde x_0 se poate lua orice func tie continua pe $[-a, a], (a > 0)$. De exemplu, pentru $x_0(t) = \eta$ obţinem

$$x_1(t) = \eta(1 + t), x_2(t) = \eta(1 + t + \frac{t^2}{2}), \cdots , x_n(t) = \eta(1 + t + \cdots + \frac{t^n}{n!}).$$

Calculând $\lim_{n\to\infty} x_n(t) = \eta e^t$ obţinem (şi pe această cale) soluţia exactă a problemei.

(b) soluţiile echilibru se obţin rezolvând ecuaţia $f(x) = 0$. Rezultă că $x = 0$ este unica soluţie echilibru. Mai exact, funcţia $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x(t) = 0$ este unica soluţie echilibru (staţionară).

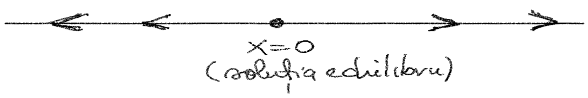
(c) sistemul dinamic generat: $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \varphi)$, unde $\varphi(t, \eta) := \eta e^t$ este fluxul sistemului dinamic corespunzător ecuaţiei $x' = f(x)$ (se obţine rezolvând problema Cauchy $x' = x, x(0) = \eta$).

(d) traiectoriile sistemului dinamic ce trec prin η (corespunzător cazurilor $\eta < 0, \eta = 0$, respectiv $\eta > 0$ sunt date de următoarele mulţimi: $]-\infty, 0[, \{0\},]0, \infty[$, iar portretul fazic este $\{]-\infty, 0[, \{0\},]0, \infty[\}$.

O reprezentare sugestivă a soluţiei echilibru şi a portetului fazic este

[Phase Portrait]

Portretul fazic corespunzător ecuației $x'=x$



6.4 Exerciţii rezolvate şi propuse

A. Exerciţii rezolvate.

1) Să se arate că unica soluţie $x \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ a inecuaţiei integrale

$$|x(t)| \leq \beta \int_a^t |x(s)| ds, t \geq a,$$

unde $a, \beta \geq 0$.

Soluţie. Din Lema lui Gronwall deducem $|x(t)| \leq 0$, $t \geq a$.

2) Să se determine funcţiile continue $x \in C[0, \frac{\pi}{2}]$ cu proprietăţile:
a) $x(t) \geq e^{t^3}$, oricare ar fi $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$;
b) x verifică relaţia $x(t) \leq 1 + 3\int_0^t s^2 x(s) ds,\ t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Soluţie. Din b) deducem (via Lema lui Gronwall) că

$$x(t) \leq 1 \cdot e^{3\int_0^t s^2 ds} = e^{t^3}, \forall t \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

Din a) rezultă că $x(t) = e^{t^3}, t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

3) Fie ecuaţia $x' = 1 - x$. Să se afle soluţiile echilibru şi să se precizeze sistemul dinamic generat, traiectoriile şi portretul fazic (în format de mulţime şi format grafic).

Soluţie. In acest caz $f(x) = 1 - x, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Soluţiile echilibru rezultă din rezolvarea ecuaţiei $f(x) = 0$, adică $x(t) = 1, t \in \mathbb{R}$. Pentru a preciza portretul fazic aferent rezolvăm problema lui Cauchy

$$x' = 1 - x, x(0) = \eta.$$

Avem $x^*_\eta(t) = (\eta - 1)e^{-t} + 1, t \in \mathbb{R}$. Deci, sistemul dinamic generat este $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \varphi)$, unde $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este dat de relaţia

$$\varphi(t, \eta) = x^*_\eta(t) = (\eta - 1)e^{-t} + 1.$$

4) Să se rezolve problema lui Cauchy $x'(t) = \sqrt{x(t)}, x(0) = \eta$, unde $\eta > 0$. Există soluţii ale problemei definite pe $\mathbb{R}$?

Soluţie. Să notăm faptul că ne interesează funcţii $x \in C^1$ cu $x(t) \geq 0$ şi $x'(t) \geq 0$, $t \in I$. Observ ca $x(t) = 0, t \in \mathbb{R}$ e soluţie a ecuaţiei (dar nu şi pentru problema lui Cauchy). Pentru x diferit de funcţia nulă, prin separarea variabilelor şi impunerea condiţiei lui Cauchy, obţinem

$$x(t) = \frac{(t + 2\sqrt{\eta})^2}{4}, t \in \mathbb{R}.$$

Din $x'(t) \geq 0$ rezultă $t \geq -2\sqrt{\eta}$. Deci,

$$x(t) = \frac{(t + 2\sqrt{\eta})^2}{4}, t \in [-2\sqrt{\eta}, \infty[$$

este soluţie a problemei. Unica soluţie de clasă C^1 definită pe $\mathbb{R}$ este

$$x^*_\eta(t) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } t < -2\sqrt{\eta} \\ \frac{(t+2\sqrt{\eta})^2}{4}, & \text{dacă } t \geq -2\sqrt{\eta} \end{cases}$$

5) Să se rezolve ecuaţiile integrale:

(a) $x(t) = 2\int_0^t sx(s)ds + 1, t \geq 0$.

(b) $x(t) = \int_0^1 (t+s)\, x(s)ds + 1, t \in [0,1]$.

Soluţie. a) Este o ecuaţie integrală de tip Volterra. Derivăm membru cu membru, avem $x'(t) = 2tx(t), t \geq 0$. Considerând $t = 0$ in ecuaţia integrală avem $x(0) = 1$. Rezolvând problema lui Cauchy astfel obţinută, găsim $x^*(t) = e^{t^2}, t \in [0, \infty[$.

(b) Este o ecuaţie integrală Fredholm. Scriem succesiv:

$$x(t) = \int_0^1 (t+s)\, x(s)ds + 1 \Leftrightarrow x(t) = t\int_0^1 x(s)ds + \int_0^1 sx(s)ds + 1.$$

Notăm $c_1 := \int_0^1 x(s)ds, c_2 := \int_0^1 sx(s)ds$. Atunci, forma soluţiei este $x(t) = c_1 t + c_2 + 1$. Inlocuind pe $x(t) = c_1 t + c_2 + 1$ în sistemul format din cele două notaţii, obţinem:

$$\begin{cases} c_1 = \int_0^1 (c_1 s + c_2 + 1) \\ c_2 = \int_0^1 s\,(c_1 t + c_2 + 1)\,. \end{cases}$$

Rezolvând sistemul algebric liniar în necunscutele c_1, c_2 găsim $c_1 = -12, c_2 = -7$. Astfel, unica soluţie este $x^*(t) = -12t - 6$.

B. Exerciţii propuse.

1) Să se determine soluţiile nenegative ale ecuaţiei:

$$x(t) = 2\int_0^t s^2 e^{-s^2} x(s)ds,\ t \in [0,4].$$

2) Fie ecuaţia $x' = -x$. Să se afle soluţiile echilibru şi să se precizeze sistemul dinamic generat, traiectoriile şi portretul fazic (în format de mulţime şi format grafic).

3) Să se rezolve problema lui Cauchy $x'(t) = \sqrt{x(t)}, x(0) = 0$.

4) Să se rezolve ecuaţiile integrale:

(a) $x(t) = \int_0^t (s^2 + x(s))ds, t \geq 0$.

(b) $x(t) = \lambda \int_0^\pi \cos(t+s)x(s)ds + \cos 3t, t \in [0,1]$, unde λ este un parametru real.

Capitolul 7

Sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare

In acest capitol vom prezenta metode de rezolvare a sistemelor de ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul 1. La aplicaţii, vom studia doar cazul sistemelor de două ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul 1.

7.1 Sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare şi omogene

Fie sistemul de ecuaţii diferenţiale liniare şi omogene

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t)x_1(t) + \cdots + a_{1n}(t)x_n(t) \\ \cdots \\ x_n'(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + \cdots + a_{nn}(t)x_n(t), \end{cases} \tag{7.1}$$

unde $a_{ij} \in C[a, b]$ pentru $i, j \in \{1, \cdots, n\}$, iar $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Vectorial, putem scrie sistemul de mai sus în forma

$$X'(t) = A(t)X(t), \tag{7.2}$$

unde $A = (a_{ij})_{i,j\in\{1,\cdots,n\}}$ este o matrice de funcţii continue, iar

$$X(t) := \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \cdots \\ x_n(t) \end{pmatrix},$$

este funcţia necunoscută.

Să notăm cu $\mathcal{S}_0$ mulţimea tuturor soluţiilor sistemului (7.2).

Scopul acestui capitol este să rezolvăm sistemul liniar şi neomogen de forma

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t), \tag{7.3}$$

unde $A = (a_{ij})_{i,j\in\{1,\cdots,n\}}$ este o matrice de funcţii continue, iar

$$B(t) := \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \cdots \\ b_n(t) \end{pmatrix},$$

este o funcţie vectorială continuă dată (termenul liber al sistemului neomogen).

Să notăm cu $\mathcal{S}$ mulţimea tuturor soluţiilor sistemului (7.3).

Din teoremele de existenţă şi unicitate, ştim că, oricare ar fi $t_0 \in [a, b]$ şi oricare ar fi $X^0 \in \mathbb{R}^n$ există şi este unică o soluţie $X^* : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ a problemei lui Cauchy

$$\begin{cases} X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \\ X(t_0) = X^0. \end{cases} \tag{7.4}$$

Conform teoriei sistemelor liniare, se ştie că

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \{\tilde{X}\},$$

unde $\tilde{X}$ este o soluţie oarecare a sistemului neomogen (7.3).

In acest paragraf, vom studia sistemul omogen (7.2). Rezultatul teoretic principal cu privire la acest sistem este următorul.

Teorema (de structură a mulţimii soluţiilor). *Fie sistemul liniar şi omogen (7.2), unde* $A = (a_{ij})_{i,j\in\{1,\cdots,n\}}$ *este o matrice de funcţii continue. Atunci mulţimea* $\mathcal{S}_0$ *a tuturor soluţiilor sale este un spaţiu liniar de dimensiune* n.

Demonstraţie. Avem de arătat două lucruri:

1) mulţimea $\mathcal{S}_0$ a soluţiilor sistemului (7.2) este un spaţiu liniar;

2) $dim\mathcal{S}_0 = n$.

Pentru 1), observăm că au loc relaţiile:

1)-a $\forall X, Y \in \mathcal{S}_0 \Rightarrow X + Y \in \mathcal{S}_0$;

1)-b $\forall X \in \mathcal{S}_0, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \cdot X \in \mathcal{S}_0$.

Pentru a demonstra 2) să notăm că e suficient să arătăm că există un izomorfism de spaţiu liniar între $\mathcal{S}_0$ şi $\mathbb{R}^n$. Va rezulta concluzia 2). Fie $t_0 \in [a, b]$ oarecare, dar fixat. Definim $T : \mathcal{S}_0 \to \mathbb{R}^n$, $X \to T(X)$ prin

$$T(X) = X(t_0).$$

Atunci:

2)-a T este liniară, i.e., $T(\lambda X + \mu Y) = \lambda T(X) + \mu T(Y), \forall X, Y \in \mathcal{S}_0, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$;

2)-b T este bijectivă, căci oricare ar fi $X^0 \in \mathbb{R}^n$ există şi este unică (din teorema de existenţă şi unicitate a soluţiei problemei lui Cauchy liniare) o soluţie $X^* \in \mathcal{S}_0$ a problemei lui Cauchy

$$X'(t) = A(t)X(t), X(t_0) = X^0$$

Cu aceasta, teorema e demonstrată. □

Observaţie. Din Teorema anterioară rezultă că $\mathcal{S}_0$ admite o bază formată din n elemente, adică n elemente din $\mathcal{S}_0$ liniar independente. Fie $(X^1, X^2, \cdots, X^n)$ o bază în $\mathcal{S}_0$. Aceasta înseamnă că fiecare vector

$$X^1 := \begin{pmatrix} x_1^1(t) \\ \cdots \\ x_n^1(t) \end{pmatrix}, \cdots, X^n := \begin{pmatrix} x_1^n(t) \\ \cdots \\ x_n^n(t) \end{pmatrix}$$

este o soluţie a sistemului omogen (7.2).

Observaţie. Reamintesc că un sistem $(X^1, X^2, \cdots, X^n)$ se numeşte liniar independent dacă oricare ar fi $c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{R}$ următoarea implicaţie are loc:

$$\text{dacă } \sum_{i=1}^{n} c_i X^i = 0 \text{ atunci } c_1 = \cdots = c_n = 0.$$

Definiţie. Fie $(X^1, X^2, \cdots, X^n)$ o bază în $\mathcal{S}_0$. Atunci matricea

$$U := (X^1 X^2 \cdots X^n)$$

se numeşte o matrice fundamentală de soluţii pentru sistemul omogen (7.2). In mod evident $U \in C^1([a,b], \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}))$.

Următoarele rezultate sunt importante pentru rezolvarea sistemelor de ecuaţii diferenţiale liniare.

Lemă. *Fie sistemul liniar şi omogen (7.2), unde* $A = (a_{ij})_{i,j \in \{1,\cdots,n\}}$ *este o matrice de funcţii continue. Dacă* $U = U(t)$ *este o matrice fundamentală de soluţii, atunci* U *verifică ecuaţia matriceală*

$$U'(t) = A(t)U(t). \tag{7.5}$$

Şi reciproc.

Demonstraţie. Avem de arătat că

$$(X^1(t)X^2(t) \cdots X^n(t))' = A \cdot (X^1 X^2 \cdots X^n)$$

ceea ce revine la

$$\big((X^1)'(X^2)' \cdots (X^n)'\big) = A \cdot (X^1(t)X^2(t) \cdots X^n(t)),$$

adică la $(X^i)' = AX^i, \forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, ceea ce e adevărat. $\square$

Observaţie. Este uşor de văzut că matricea fundamentală de soluţii nu este unică. Dacă $\tilde{C}$ este o matrice constantă nesingulară cu n linii şi n coloane, atunci $Y(t) = U(t)\tilde{C}$ este o matrice fundamentală de soluţii.

Intr-adevăr, din Lema precedentă ştim că $U' = AU$. Intrebarea este dacă avem şi $Y' = AY$. Verificăm acest lucru

$$\left(U(t)\tilde{C}\right)' = A\left(U(t)\tilde{C}\right) \Leftrightarrow (U)'\,\tilde{C} = AU\tilde{C}$$

Dacă înmulţim la dreapta cu $\tilde{C}^{-1}$ avem $U' = AU$, ceea ce este adevărat. Mai mult, reciproc, orice soluţie $Y = Y(t)$ a sistemului omogen (7.2) poate fi reprezentată sub forma $Y(t) = U(t)C$, unde $C \in \mathbb{R}^n$. $\square$

Definiţie. Fie

$$U := (X^1 X^2 \cdots X^n)$$

o matrice fundamentală de soluţii pentru sistemul omogen (7.2). Atunci Wronskianul asociat acesteia este funcţia $W : [a,b] \to \mathbb{R}$, definită de $W(t) := detU(t)$.

Pentru a verifica că un sistem de soluţii pentru (7.2) este liniar independent, teorema următoare este importantă.

Teorema. *Sistemul de soluţii* $U := (X^1 X^2 \cdots X^n)$ *formează o matrice fundamentală de soluţii dacă şi numai dacă există* $t_0 \in [a,b]$ *astfel ca* $W(t_0) \neq 0$.

Această teoremă ne arată că pentru a arată că soluţiile sistemului omogen (7.2) sunt liniar independente dacă reuşim să arătăm că Wrosnskianul nu se anulează în cel puţin un punct $t \in [a,b]$.

Concluzii. In acest paragraf, am arătat că pentru a afla toate soluţiile sistemului liniar şi omogen (7.2) este suficient să găsim n soluţii liniar independente ale acestuia. Dacă $X^1, X^2, \cdots, X^n$ sunt n soluţii liniar independente ale sistemului (7.2) şi notăm $U := (X^1 X^2 \cdots X^n)$, atunci mulţimea tuturor soluţiilor sale este

$$\mathcal{S}_0 = \{X(t) = U(t)C | C \in \mathbb{R}^n\}.$$

Din pĂcate, în cazul general în care A este o matrice oarecare de funcţii continue nu avem o metodă generală de găsire a unei matrice fundamentale de soluţii. Vom vedea că putem face acest lucru doar în cazul particular în care A este o matrice de numere reale.

7.2 Sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare şi neomogene

Fie sistemul liniar şi neomogen de ecuaţii diferenţiale de ordinul 1 de forma

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \tag{7.6}$$

Conform teoriei sistemelor liniare, se ştie că

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \{\tilde{X}\},$$

unde $\tilde{X}$ este o soluţie oarecare a sistemului neomogen (7.6) iar $\mathcal{S}_0$ este mulţimea soluţiilor sistemului liniar şi omogen $X'(t) = A(t)X(t)$. Din paragraful precedent, ştim că

$$\mathcal{S}_0 = \{X(t) = U(t)C | C \in \mathbb{R}^n\},$$

unde U este o matrice fundamentală de soluţii pentru sistemul omogen.

Scopul acestui paragraf este să arătăm cum se poate afla $\tilde{X}$ dacă cunoaştem pe $\mathcal{S}_0$. Metoda este cunoscută sub numele de metoda variaţiei constantelor a lui Lagrange.

Căutăm pe $\tilde{X}$ sub forma

$$\tilde{X} := U(t)\Phi(t),$$

unde Φ este o funcţie de clasă C^1, deocamdată necunoscută. Φ se determină din condiţia ca $\tilde{X}$ să fie soluţie a sistemului neomogen (7.6). Inlocuin înd în (7.6) avem

$$U'(t)\Phi(t) + U(t)\Phi'(t) = A(t)U(t)\Phi(t) + B(t).$$

Dar $A(t)U(t) = U'(t)$ şi astfel după reducerea celor doi termeni asemenea găsim

$$U(t)\Phi'(t) = B(t) \text{ adică } \Phi'(t) = U^{-1}(t)B(t).$$

In final $\Phi(t) = \int_{t_0}^{t} U^{-1}(s)B(s)ds$ şi astfel am găsit

$$\tilde{X}(t) = U(t)\int_{t_0}^{t} U^{-1}(s)B(s)ds.$$

In concluzie, mulţimea tuturor soluţiilor sistemului liniar şi neomeogen (7.6) este

$$\mathcal{S} := \{U(t)C + \int_{t_0}^{t} U(t)U^{-1}(s)B(s)|\ C \in \mathbb{R}^n\}ds.$$

In particular, pentru problema lui Cauchy

$$\begin{cases} X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \\ X(t_0) = X^0. \end{cases} \tag{7.7}$$

unica sa soluţie se reprezintă prin

$$X^*(t) = U(t)U^{-1}(t_0)X^0 + \int_{t_0}^{t} U(t)U^{-1}(s)B(s),$$

în care vectorul constant C s-a determinat din condiţia $X(t_0) = X^0$.

Exemplu. Fie sistemul

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t)\cos^2(t) + x_2(t)(\sin t\cos t - 1) \\ x_2'(t) = x_1(t)(1 + \sin t\cos t) + x_2(t)\sin^2(t). \end{cases} \tag{7.8}$$

(a) Să se arate că

$$X^1(t) = \begin{pmatrix} e^t\cos t \\ e^t\sin t \end{pmatrix},\ X^2(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \tag{7.9}$$

sunt soluţii ale sistemului.

(b) Să se arate că sistemul $\{X^1, X^2\}$ este liniar independent.

(c) Să se scrie soluţia generală a sistemului dat.

(d) Să se afle soluţia problemei lui Cauchy corespunzătoare sistemului dat şi condiţiei Cauchy $x_1(0) = 1, x_2(0) = 0$.

(e) Să se afle soluţia sistemului liniar şi neomogen

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t)\cos^2(t) + x_2(t)(\sin t \cos t - 1) \\ x_2'(t) = x_1(t)(1 + \sin t \cos t) + x_2(t)\sin^2(t) - \frac{1}{\sin t}, t \in]0, \pi[. \end{cases} \tag{7.10}$$

7.3 Exerciţii rezolvate şi propuse

A. Exerciţii rezolvate.

1) Fie sistemul

$$\begin{cases} x_1'(t) = (1 + \frac{1}{t})x_1(t) - \frac{1}{t}x_2(t) \\ x_2'(t) = \frac{t-2}{t-1}x_1(t) + \frac{1}{t-1}x_2(t), \ t > 1. \end{cases} \tag{7.11}$$

(a) Să se arate că

$$X^1(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}, \ X^2(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} \tag{7.12}$$

sunt soluţii ale sistemului.

(b) Să se arate că sistemul $\{X^1, X^2\}$ este liniar independent.

(c) Să se scrie soluţia generală a sistemului dat.

(d) Să se afle soluţia problemei lui Cauchy corespunzătoare sistemului dat şi condiţiei Cauchy $x_1(2) = 1, x_2(2) = 4$.

(e) Să se afle soluţia sistemului liniar şi neomogen

$$\begin{cases} x_1'(t) = (1 + \frac{1}{t})x_1(t) - \frac{1}{t}x_2(t) + 1 \\ x_2'(t) = \frac{t-2}{t-1}x_1(t) + \frac{1}{t-1}x_2(t) + t, \ t > 1. \end{cases} \tag{7.13}$$

Soluţie. a) se verifică direct (prin înlocuire în sistem) că $(x_1, x_2) = (t, t^2)$ respectiv $(x_1, x_2) = (e^t, e^t)$ sunt soluţii ale sistemului omogen dat.

b) se arată că

$$W(t) = \det U(t) = \det(X^1(t) \ X^2(t)) = \begin{vmatrix} t & e^t \\ t^2 & e^t \end{vmatrix}$$

este diferit de zero în cel puţin un punct $t \in]1, \infty[$ (de exemplu în $t = 2$). In consecinţă, matricea $U = U(t) = (X^1(t)\ X^2(t))$ este o matrice fundamentală de soluţiii pentru sistemul omogen.

c) Soluţia generală a sistemului omogen este

$$\mathcal{S}_0 = \{X(t) = U(t)C : C \in \mathbb{R}^2\}.$$

d) Din condiţiile iniţiale date $X(2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, rezultă $C = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{2}{e^2} \end{pmatrix}$.
Deci, soluţia unică a problemei lui Cauchy este $X^*(t) = U(t) \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{2}{e^2} \end{pmatrix}$.

e) Folosind metoda variaţiei constantelor, că utăm soluţia particulară a sistemului neomogen sub forma $\tilde{X}(t) = U(t)\Phi(t)$, unde Φ este o fun'ţie de clasă C^1, deocamdată necunsoscută. Ea se determină din condiţia ca $\tilde{X}$ să verifice sistemul neomogen. Prin înlocuire rezultă condiţia $U(t)\Phi'(t) = B(t)$, unde $B(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ este neomogenitatea sistemului liniar. După calcule rezultă $\Phi(t) = \begin{pmatrix} \ln t \\ 1 \end{pmatrix}$ şi astfel $\tilde{X}(t) = \begin{pmatrix} t \ln t + e^t \\ t^2 \ln t + e^t \end{pmatrix}$. In consecinţă, soluţia generală sistemului liniar şi neomogen este

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \tilde{X} = \{X(t) = U(t)C + \tilde{X}(t) : C \in \mathbb{R}^2\}.$$

2) Fie funcţiile

$$\tilde{X}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{pmatrix}, \ \tilde{Y}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{y}_1(t) \\ \tilde{y}_2(t) \end{pmatrix} \tag{7.14}$$

liniar independente. Să se arate că $\tilde{X}, \tilde{Y}$ sunt soluţii ale sistemului

$$\left\{\begin{array}{l}\begin{vmatrix} x_1' & \tilde{x}_1' & \tilde{y}_1' \\ x_1 & \tilde{x}_1 & \tilde{y}_1 \\ x_2 & \tilde{x}_2 & \tilde{y}_2 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x_2' & \tilde{x}_2' & \tilde{y}_2' \\ x_1 & \tilde{x}_1 & \tilde{y}_1 \\ x_2 & \tilde{x}_2 & \tilde{y}_2 \end{vmatrix} = 0 \end{array}\right. \tag{7.15}$$

Soluţie. Se verifică prin înlocuire directă.

3) Să se construiască sistemul liniar şi omogen care are ca şi sistem fundamental de soluţii matricea

$$U(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Soluţie. Se aplică problema 2).

B. Exerciţii propuse.

1) Fie sistemul

$$\left\{\begin{array}{l} x_1'(t) = (t - \frac{1}{t})x_1(t) + (\frac{1}{t^2} - 1)x_2(t) \\ x_2'(t) = t^2 x_1(t) + (\frac{1}{t} - t)x_2(t),\ t > 0. \end{array}\right. \tag{7.16}$$

(a) Să se arate că

$$X^1(t) = \begin{pmatrix} t + \frac{1}{t} \\ t^2 \end{pmatrix},\ X^2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \tag{7.17}$$

sunt soluţii ale sistemului.

(b) Să se arate că sistemul $\{X^1, X^2\}$ este liniar independent.

(c) Să se scrie soluţia generală a sistemului dat.

(d) Să se afle soluţia problemei lui Cauchy corespunzătoare sistemului dat şi condiţiei Cauchy $x_1(1) = 0, x_2(1) = 2$.

(e) Să se afle soluţia sistemului liniar şi neomogen

$$\begin{cases} x_1'(t) = (t - \frac{1}{t})x_1(t) + (\frac{1}{t^2} - 1)x_2(t) - t \\ x_2'(t) = t^2 x_1(t) + (\frac{1}{t} - t)x_2(t) + t, \ \ t > 0. \end{cases} \tag{7.18}$$

şi a problemei Cauchy asociate, unde $x_1(1) = 0, x_2(1) = 2$.

2) Să se construiască sistemul liniar şi omogen care are ca şi sistem fundamental de soluţii matricea

$$U(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -e^t \sin t \\ \sin t & e^t \cos t \end{pmatrix}.$$

Capitolul 8

Sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi

8.1 Sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare şi omogene cu coeficienţi constanţi

Considerăm sistemul de două ecuaţii diferenţiale liniare şi omogene cu coeficienţi constanţi, de forma

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) \\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t), \ t \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{8.1}$$

unde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

este o matrice de numere reale. In formă vectorială, sistemul (8.1) se scrie

$$X'(t) = AX(t), t \in \mathbb{R}.$$

Recunoaştem un sistem liniar şi omogen. Notăm cu $\mathcal{S}_0$ mulţimea tuturor soluţiilor sale.

Din teorema de structură a mulţimii soluţiilor sistemelor liniare ştim că $\mathcal{S}_0$ este un spaţiu liniar de dimensiune 2. Este deci suficient să găsim două soluţii liniar independente ale sistemului. Acestea vor determina o matrice fundamentală de soluţii pentru sistem (să presupunem că e notată cu $U = U(t)$). Atunci soluţia generală a sistemului va fi

$$\mathcal{S}_0 = \{X(t) = U(t)C : C \in \mathbb{R}^2\}.$$

Caut soluţii ale sistemului sub forma $X(t) = e^{rt}V$, unde $r \in \mathbb{R}$ iar

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

este din $\mathbb{R}^2$, cu $V \neq 0$. Inlocuind în sistemul pe care-l studiem

$$X'(t) = A \cdot X(t),$$

obţinem

$$re^{rt}V = Ae^{rt}V \;\Leftrightarrow\; (A - rI_2)V = 0.$$

Sistemul

$$(A - rI_2)V = 0 \tag{8.2}$$

se numeşte sistemul valorilor şi funcţiilor proprii corespunzătoare matricei A. Se ştie de la disciplina de Algebră liniară că r este valoare proprie iar V corespunzător este vector propriu.

Pentru că noi căutăm soluţii V nenule ale sistemului, ştim că pentru ca un sistem omogen să admită soluţii nenule condiţia este ca determinatul sistemului să fie zero, adică

$$det(A - rI_2) = 0. \tag{8.3}$$

Ecuaţia (8.3) este o ecuaţie algebrică de gradul doi în necunoscuta r şi ea se numeşte ecuaţia caracteristică asociată sistemului (8.1). Explicitând ecuaţia de mai sus, obţinem

$$r^2 - (a_{11} + a_{22})r + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0. \tag{8.4}$$

Observând că

$$(a_{11} + a_{22}) = tr(A) \quad \text{(unde tr(A) notează urma matricei A)}$$

şi

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = det(A),$$

ecuaţia caracteristică se mai scrie

$$r^2 - tr(A)r + det(A) = 0. \tag{8.5}$$

In funcţie de natura rădăcinilor, distingem trei cazuri:

Cazul I: rădăcini reale şi distincte.

Fie $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ cu $r_1 \neq r_2$.

Atunci pentru fiecare r_1, r_2 determinăm soluţii nenule V^1, V^2 ale sistemului (8.2). Am obţinut două soluţii

$$X^1(t) = e^{r_1 t}V^1, \; X^2(t) = e^{r_2 t}V^2$$

ale sistemului de ecuaţii diferenţiale (8.1). Mai mult, sistemul $\{X^1, X^2\}$ este liniar independent, căci determinantul matricei U dată de

$$U(t) = \big(X^1(t) \; X^2(t)\big)$$

nu se anulează (de exemplu în $t = 0$).

In consecinţă, $U(t) = (X^1(t) \; X^2(t))$ este o matrice fundamentală de soluţii, ceea ce arată că

$$\mathcal{S}_0 = \{X(t) = U(t)C : C \in \mathbb{R}^2\}$$

este mulţimea tuturor soluţiilor în acest caz.

Exemplu. Să se rezolve în $C^1(\mathbb{R})$ sistemul:

$$\begin{cases} x_1'(t) = -2x_1(t) - 4x_2(t) \\ x_2'(t) = -x_1(t) + x_2(t). \end{cases} \tag{8.6}$$

Cazul II: rădăcini reale egale.

Fie $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ cu $r_1 = r_2$. Notăm valoarea comună cu r, i.e., $r := r_1 = r_2$.

Atunci, ca şi la Cazul I, pentru r determinăm vectorul propriu corespunzător, adică soluţia nenulă V a sistemului (8.2). Astfel, obţinem soluţia sistemului sub forma $X^1(t) = e^{rt}V$. Caut o a doua soluţie (liniar independentă în raport cu prima) sub forma

$$X^2(t) = e^{rt}(tV + W), \tag{8.7}$$

unde W este un vector necunoscut pe care-l determinăm din condiţia ca X^2 să verifice sistemul dat. Avem $(X^2(t))' = re^{rt}(tV + W) + e^{rt}V$. Inlocuind în sistemul $X' = AX$ avem

$$re^{rt}(tV + W) + e^{rt}V = Are^{rt}(tV + W)$$

sau echivalent

$$tre^{rt}V + re^{rt}W + e^{rt}V = tAe^{rt}V + e^{rt}AW.$$

Ţinând cont că

$$Ae^{rt}V = AX^1 \text{ şi } re^{rt}V = (X^1(t))'$$

obţinem

$$(A - rI_2)W = V. \tag{8.8}$$

Acest sistem (în necunoscuta W) este compatibil căci rangul matricei extinse $(A - rI_2 \;\; V)$ este egal cu rangul matricei $A - rI_2$ a sistemului şi este egal cu 1. Astfel se determină W, care induce a doua soluţie $X^2(t) = e^{rt}(tV + W)$ a sistemului liniar şi omogen. Mai mult, sistemul de vectori $\{X^1, X^2\}$ este liniar independent. De aceea, sistemul de mai sus determină o bază în mulţimea soluţiilor, şi atunci $U(t) = (X^1(t) \; X^2(t))$ este o matrice fundamentală de soluţii, ceea ce arată că

$$\mathcal{S}_0 = \{X(t) = U(t)C : C \in \mathbb{R}^2\}$$

este mulţimea tuturor soluţiilor în acest caz.

Exemplu. Să se rezolve în $C^1(\mathbb{R})$ sistemul:

$$\begin{cases} x_1'(t) = 5x_1(t) - 3x_2(t) \\ x_2'(t) = 3x_1(t) - x_2(t). \end{cases} \tag{8.9}$$

Cazul III: rădăcini complexe conjugate.

Fie $r_1, r_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ cu $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$, unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Avem

$$X = e^{r_1 t}V = e^{(\alpha+i\beta)t}V = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)(V^1 + iV^2) =$$

$$e^{\alpha t}\left(V^1\cos\beta t - V^2\sin\beta t\right) + ie^{\alpha t}\left(V^1\sin\beta t + V^2\cos\beta t\right),$$

unde am scris $V = V^1 + iV^2$. In mod evident, X e o soluţie complexă a sistemului. Dar sistemul nostru este unul liniar şi omogen cu coeficienţi reali, deci

$$Re(X) = e^{\alpha t}\left(V^1\cos\beta t - V^2\sin\beta t\right) := X^1(t)$$

respectiv

$$Im(X) = e^{\alpha t}\left(V^1\sin\beta t + V^2\cos\beta t\right) := X^2(t)$$

sunt soluţii reale ale sistemului şi ele determină o matrice fundamentală de soluţii pentru sistem. Astfel, $U(t) = (X^1(t)\ X^2(t))$ este o matrice fundamentală de soluţii, ceea ce arată că

$$\mathcal{S}_0 = \{X(t) = U(t)C : C \in \mathbb{R}^2\}$$

este mulţimea tuturor soluţiilor în acest caz.

Exemplu. Să se rezolve în $C^1(\mathbb{R})$ sistemul:

$$\begin{cases} x_1'(t) = 5x_1(t) - 9x_2(t) \\ x_2'(t) = 2x_1(t) - x_2(t). \end{cases} \tag{8.10}$$

8.2 Exerciţii rezolvate şi propuse

A. Exerciţii rezolvate.

1) Fie sistemul:

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2'(t) = 2x_1(t) + x_2(t). \end{cases}$$

a) Să se scrie sistemul în formă vectorială $X' = AX$, precizându-se matricea A şi vectorul necunoscut X;

b) Să se afle o matrice fundamentală de soluţii U şi să se scrie soluţia generală a sa.

c) Să se rezolve sistemul neomogen $X' = AX + B$ unde

$$B = \begin{pmatrix} 2e^t \\ 3e^{4t}. \end{pmatrix}$$

d) Să se rezolve problema lui Cauchy

$$\begin{cases} X' = AX + B \\ x_1(0) = 2,\ x_2(0) = 0. \end{cases}$$

2) Fie sistemul:

$$\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) + 4x_2(t) \\ x_2'(t) = -x_1(t) - 2x_2(t). \end{cases}$$

Se se dea răspunsuri la aceleaşi exigenţe ca şi la problema 1), considerând la c) şi d) vectorul

$$B = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

3) Fie sistemul:

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) = 4x_1(t) + x_2(t). \end{cases}$$

Se se dea răspunsuri la aceleaşi exigenţe ca şi la problema 1), considerând la c) şi d) vectorul

$$B = \begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

B. Exerciţii propuse.

1) Fie sistemul:

$$\begin{cases} x_1'(t) = 3x_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) = 10x_1(t) - 4x_2(t). \end{cases}$$

a) Să se scrie sistemul în formă vectorială $X' = AX$, precizându-se matricea A şi vectorul necunoscut X;

b) Să se afle o matrice fundamentală de soluţii U şi să se scrie soluţia generală a sa.

c) Să se rezolve sistemul neomogen $X' = AX + B$ unde

$$B = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{-t}. \end{pmatrix}$$

d) Să se rezolve problema lui Cauchy

$$\begin{cases} X' = AX + B \\ x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 1. \end{cases}$$

2) Fie sistemul

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) - 5x_2(t) \\ x_2'(t) = 2x_1(t) - x_2(t). \end{cases}$$

Se se dea răspunsuri la aceleaşi exigenţe ca şi la problema propusă 1), considerând la c) şi d) vectorul

$$B = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

3) Fie sistemul:

$$\begin{cases} x_1'(t) = -x_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) - 3x_2(t). \end{cases}$$

Se se dea răspunsuri la aceleaşi exigenţe ca şi la problema propusă 1), considerând la c) şi d) vectorul

$$B = \begin{pmatrix} 1+t \\ 1-t \end{pmatrix}.$$

Capitolul 9

Ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul 2

In acest capitol vom considera cazul ecuaţiilor diferenţiale liniare de ordinul al doilea. Vom considera mai întâi cazul ecuaţiilor diferenţiale liniare cu coeficienţi funcţii continue şi apoi cazul particular în care coeficienţii ecuaţiei liniare sunt constanţi. Şi într-un caz şi în celălalt vom aborda şi cazul ecuaţiei diferenţiale liniare neomogene.

9.1 Ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul 2

Să considerăm în acest paragraf cazul urătoarei ecuaţii diferenţiale ordinare de ordinul doi liniare şi neomogene

$$x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = g(t), t \in I, \tag{9.1}$$

unde $I \subseteq \mathbb{R}$ este un interval al axei reale, iar $a, b, g \in C(I)$.

Printr-o soluţie a ecuaţiei (9.1) pe intervalul $J \subseteq I$ înţelegem o funcţie $x \in C^2(J)$ ce verifică ecuaţia (9.1) pentru fiecare $t \in J$.

Observaţie. Aşa cum am mai precizat, orice ecuaţie de ordinul al doilea este echivalentă cu un sistem de două ecuaţii de ordinul întâi.

Intr-adevăr, în cazul nostru, dacă notăm

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = x' \end{cases}$$

atunci avem $x_1' = x_2$ şi $x_2' = -ax_2 - bx_1 + g$. Cu alte cuvinte, ecuaţia (9.1) este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} x_1' = & x_2 \\ x_2' = -bx_1 - ax_2 + g. \end{cases} \tag{9.2}$$

Dacă notăm

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix},$$

şi

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix}$$

atunci sistemul (9.2) se scrie vectorial

$$X' = AX + B.$$

Din capitolul anterior ştim că, dacă $\mathcal{S}$ este mulţimea soluţiilor sale, atunci

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \{\tilde{X}\},$$

unde $\mathcal{S}_0$ este mulţimea soluţiilor sistemului omogen $X' = AX$ asociat, iar $\tilde{X}$ este o soluţie oarecare a sistemului neomogen $X' = AX + B$.

In consecinţă, putem enunţa următoarea teoremă de structură a mulţimii soluţiilor ecuaţiei (9.1) (prin adaptarea la acest caz particular a teoremei de structură din cazul sistemelor liniare).

Teoremă. *Fie ecuaţia* $x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = g(t), t \in I$, *unde* $I \subseteq \mathbb{R}$ *este un interval al axei reale, iar* $a, b, g \in C(I)$. *Atunci, avem următoarele concluzii:*

(i) problema lui Cauchy

$$\begin{cases} x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = g(t), t \in I \\ x(t_0) = x^0, x'(t_0) = y^0 \end{cases} \tag{9.3}$$

(unde $t_0 \in I$ *şi* $x^0, y^0 \in \mathbb{R}$ *sunt date) are soluţie unică;*

(ii) Mulţimea $\mathcal{S}_0$ *a tuturor soluţiilor ecuaţiei omogene asociate este spaţiu liniar de dimensiune* 2*;*

(iii) mulţimea $\mathcal{S}$ *a tuturor soluţiilor ecuaţiei (9.1) are reprezentarea*

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \{\tilde{x}\},$$

unde $\tilde{x}$ *este o soluţie oarecare a ecuaţiei neomogene (9.1).*

In consecinţă, şi în acest caz, pe de o parte trebuie să punem în evidenţă o bază în $\mathcal{S}_0$ (două soluţii liniar independente ale ecuaţiei omogene asociate $x'' + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = 0, t \in I$), iar pe de altă parte să determinăm (prin metoda variaţiei constantelor) o soluţie particulară (oarecare) a ecuaţiei neomogene $x'' + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = g(t), t \in I$.

Precizăm de asemenea că metoda variaţiei constantelor presupune în acest caz, căutarea unei soluţii particulare (oarecare) a ecuaţiei neomogene sub forma

$$\tilde{x}(t) = \varphi_1(t)x^1(t) + \varphi_2(t)x^2(t),$$

unde x^1, x^2 sunt două soluţii liniar independente ale ecuaţiei omogene asociate $x'' + a(t)x'(t) + b(t) = 0$, iar φ_1, φ_2 sunt două funcţii de clasă C^2 deocamdată necunoscute. Ele se determină dintr-un sistem de două ecuaţii în necunoscutele φ_1' şi φ_2'. Mai precis, sistemul este format din ecuaţia

$$\varphi_1'x^1 + \varphi_2'x^2 = 0$$

(rezultată din calculul lui $\tilde{x}'$ şi impunerea condiţiei ca suma termenilor ce conţin pe φ_1' şi φ_2' să fie zero), respectiv din ecuaţia

$$\varphi_1'(x^1)' + \varphi_2'(x^2)' = g(t),$$

rezultată în urma înlocuirii $\tilde{x}(t)$ în ecuaţia neomogenă $x'' + a(t)x'(t) + b(t) = g(t)$ şi identificării celor doi membri. In consecinţa, φ_1, φ_2 se obţin din rezolvarea sistemului

$$\begin{cases} \varphi_1' x^1 + \varphi_2' x^2 = 0 \\ \varphi_1'(x^1)' + \varphi_2'(x^2)' = g(t). \end{cases} \tag{9.4}$$

9.2 Ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul 2 cu coeficienţi constanţi

Să considerăm în acest paragraf cazul ecuaţiilor diferenţiale ordinare de ordinul doi liniare cu coeficienţi constanţi.

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = g(t), t \in I, \tag{9.5}$$

unde $I \subseteq \mathbb{R}$ este un interval al axei reale, iar $a, b \in \mathbb{R}$, iar $g \in C(I)$.

Printr-o soluţie a ecuaţiei (9.5) pe intervalul $J \subseteq I$ înţelegem o funcţie $x \in C^2(J)$ ce verifică ecuaţia (9.5) pentru fiecare $t \in J$.

Ştim din paragraful precedent că, dacă notăm

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = x' \end{cases}$$

atunci ecuaţia (9.5) este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} x_1'(t) = \quad x_2 \\ x_2'(t) = -bx_1(t) - ax_2(t) + g(t). \end{cases} \tag{9.6}$$

Din capitolul anterior ştim că, dacă $\mathcal{S}$ este mulţimea soluţiilor sale, atunci

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \{\tilde{X}\},$$

unde $\mathcal{S}_0$ este mulţimea soluţiilor sistemului omogen asociat, iar $\tilde{X}$ este o soluţie oarecare a sistemului neomogen.

Să ne concentrăm pe sistemul omogen asociat

$$\begin{cases} x_1'(t) = & x_2 \\ x_2'(t) = -bx_1(t) - ax_2(t). \end{cases} \tag{9.7}$$

Matricea A este în acest caz egală cu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix},$$

iar ecuaţia caracteristică asociată ei este

$$\det(A - rI_2) = 0.$$

Aceasta conduce la ecuaţia de gradul doi

$$r^2 + ar + b = 0. \tag{9.8}$$

După cum se observă ea se poate scrie direct din forma ecuaţiei diferenţiale omogene de ordinul doi şi se numeaţe ecuaţia caracetristică asociată ecuaţiei diferenţiale liniare şi omogene de ordinul doi

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = 0, t \in I. \tag{9.9}$$

In funcţie de discriminantul ecuaţiei de gradul doi (9.8) distingem următoarele cazuri:

Cazul I. rădăcini reale şi distincte.

Fie $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ cu $r_1 \neq r_2$. Atunci $x^1(t) = e^{r_1 t}$ şi $x^2(t) = e^{r_2 t}$ sunt două soluţii liniar independente ale ecuaţiei diferenţiale (9.9). In consecinţă, soluţia generală a ecuaţiei este

$$\mathcal{S}_0 = \{x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Cazul II. rădăcini reale şi egale.

Fie $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ cu $r_1 = r_2 := r$. Atunci $x^1(t) = e^{rt}$ şi $x^2(t) = te^{rt}$ sunt două soluţii liniar independente ale ecuaţiei diferenţiale (9.9). In consecinţă, soluţia generală a ecuaţiei este

$$\mathcal{S}_0 = \{x(t) = c_1 e^{rt} + c_2 t e^{rt} : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Cazul I. rădăcini complexe nereale.

Fie $r_1, r_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ cu $r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \alpha - i\beta,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Atunci funcţiile $x^1(t) = e^{\alpha t}\cos\beta t$ şi $x^2(t) = e^{\alpha t}\sin\beta t$ sunt două soluţii liniar independente ale ecuaţiei diferenţiale (9.9). In consecinţă, soluţia generală a ecuaţiei este

$$\mathcal{S}_0 = \{x(t) = c_1 e^{\alpha t}\cos\beta t + c_2 e^{\alpha t}\sin\beta t : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Exemple. Să se rezolve ecuaţiile diferenţiale de ordinul doi:
(a) $x''(t) - x'(t) - 2x(t) = 0, t \in \mathbb{R}$.
(b) $x''(t) + 4x'(t) + 4x(t) = 0, t \in \mathbb{R}$.
(c) $x''(t) + 6x'(t) + 34x(t) = 0, t \in \mathbb{R}$.
(d) $x''(t) - x'(t) - 2x(t) = 6e^t, t \in \mathbb{R}$.

9.3 Exerciţii rezolvate şi propuse

A. Exerciţii rezolvate.

1) Fie ecuaţia

$$t^2 x''(t) - 2tx'(t) + 2x(t) = \frac{1}{t}, t \in [1, \infty[.$$

(a) Ştiind că $x_1(t) = t, x_2(t) = t^2$ sunt soluţii ale ecuaţiei

$$t^2 x''(t) - 2tx'(t) + 2x(t) = 0, t \in [1, \infty[$$

să se determine soluţia generală a ecuaţiei date;

(b) Să se rezolve problema Cauchy formată din ecuaţia dată şi condiţiile iniţiale $x(1) = 0, x'(1) = 2$.

2) Să se rezolve ecuaţiile diferenţiale de ordinul doi:

(a) $x''(t) - x'(t) - 6x(t) = 0, t \in \mathbb{R}$.

(b) $x''(t) - 6x'(t) + 9x(t) = 0, t \in \mathbb{R}$.

(c) $x''(t) + 4x'(t) + 5x(t) = 0, t \in \mathbb{R}$.

(d) $x''(t) - x'(t) - 6x(t) = te^{-t}, t \in \mathbb{R}$.

3) Să se rezolve următoarele probleme Cauchy:

(a) $x''(t) + 4x'(t) + 5x(t) = \sin t - \cos t$, cu condiţiile iniţiale date de $x(0) = 0, x'(0) = 2$.

(b) $x''(t) - x'(t) - 6x(t) = te^{-t}$, cu condiţiile $x(0) = -1, x'(0) = 1$.

B. Exerciţii propuse.

1) Fie ecuaţia

$$tx''(t) + 2x'(t) - tx(t) = e^t, t > 0.$$

(a) Ştiind că $x_1(t) = \frac{e^t}{t}, x_2(t) = \frac{e^{-t}}{t}$ sunt soluţii ale ecuaţiei

$$tx''(t) + 2x'(t) - tx(t) = 0, t > 0$$

să se determine soluţia generală a ecuaţiei date;

(b) Să se rezolve problema Cauchy formată din ecuaţia dată şi condiţiile iniţiale $x(1) = 0, x'(1) = 1$.

2) Să se rezolve ecuaţiile diferenţiale de ordinul doi:

(a) $x''(t) - 5x'(t) + 6x(t) = e^{3t}, t \in \mathbb{R}$.

(b) $x''(t) - 2x'(t) + x(t) = t^2 + 1, t \in \mathbb{R}$.

(c) $x''(t) - 2x'(t) + 17x(t) = \cos 2t, t \in \mathbb{R}$.

3) Să se rezolve următoarele probleme Cauchy:

(a) $x''(t) - 5x'(t) + 6x(t) = e^{3t}$, cu condiţiile iniţiale date de $x(0) = 1, x'(0) = 0$.

(b) $x''(t) - 2x'(t) + x(t) = t^2 + 1$, cu condiţiile $x(0) = -1, x'(0) = 1$.

(c) $x''(t) - 2x'(t) + 17x(t) = \cos 2t$, cu condiţiile $x(\frac{\pi}{2}) = 4, x'(\frac{\pi}{2}) = 0$.

Capitolul 10

Aspecte dinamice în teoria sistemelor de două ecuaţii diferenţiale liniare

In acest capitol vom face consideraţii asupra unor aspecte dinamice din teoria sistemelor de două ecuaţii diferenţiale liniare.

10.1 Noţiunea de sistem dinamic

Fie sistemul autonom de ecuaţii diferenţiale de forma

$$X' = f(X),$$

unde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ este o funcţie de clasă C^1. Atunci noţiunea de sistem dinamic asociat se defineşte în felul următor.

Presupunem că oricare ar fi $\eta = (\eta_1, \cdots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n$, problema lui Cauchy

$$\begin{cases} X'(t) = f(X(t)) \\ X(0) = \eta \end{cases} \tag{10.1}$$

are soluţie unică (pe care o notăm cu X_η^*) definită pe $\mathbb{R}$. Considerăm, de asemenea, funcţia $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definită de relaţia $\varphi(t, \eta) = X_\eta^*(t)$.

Atunci, prin definiţie, tripletul $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, \varphi)$ se numeşte sistemul dinamic generat de sistemul autonom de ecuaţii diferenţiale $X' = f(X)$.

In tripletul de mai sus, domeniul $\mathbb{R}^n$ de definiţie al funcţiei f se numeşte spaţiul fazelor (stărilor), $\mathbb{R}$ este domeniul de definiţie al soluţiei problemei lui Cauchy (10.1), iar φ este fluxul sistemului dinamic generat de sistemul autonom de ecuaţii diferenţiale.

Traiectoria (sau orbita) sistemului dinamic ce trece prin η este $\varphi(\mathbb{R}, \eta)$, iar portretul fazic al sistemului dinamic este mulţimea traiectoriilor sistemului dinamic respectiv.

Aş cum s-a mai menţionat, soluţiile echilibru (sau soluţiile staţionare) ale sistemului $X' = f(X)$ sunt soluţiile constante în timp, adică funcţiile X ce se obţin rezolvând ecuaţia $f(X) = 0$.

Vom discuta, în ceea ce urmează, cazul particular al sistemelor autonome de două ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi.

Fie sistemul:

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) \\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t), \end{cases} \tag{10.2}$$

unde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

este o matrice de numere reale. In formă vectorială, sistemul (10.2) se scrie

$$X'(t) = AX(t), t \in \mathbb{R},$$

unde

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

este funcţia necunoscută.

Printr-o soluţie a sistemului (10.2) se înţelege o funcţie $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ de clasă C^1 ce verifică sistemul pentru orice $t \in \mathbb{R}$.

Să ne concentrăm acum atenţia asupra unei soluţii $X = (x_1, x_2)$ a sistemului de mai sus. In teoria sistemelor dinamice, interesul este focalizat asupra modului în care mărimile x_1 şi x_2 variază (fiecare în parte, dar şi una faţă de cealaltă) în raport cu evoluţia sistemului în timp ($t \to \infty$). Pentru aceasta, se pot reprezenta grafic cele două funcţii $x_1(t), x_2(t)$ în acelaşi sistem de coordonate tOx.

Un alt mod de reprezentare (preponderent folosit) este prin a reprezenta în planul x_1Ox_2 curba de ecuaţii parametrice

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t) \\ x_2 = x_2(t), t \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{10.3}$$

ceea ce înseamnă, de fapt, reprezentarea curbei descrise de punctul M de coordonate $M(x_1(t), x_2(t))$, când $t \to \infty$. Această curbă este traiectoria (sau orbita) sistemului dinamic generat de sistemul de ecuaţii diferenţiale. Planul x_1Ox_2 în care facem reprezentarea de mai sus se numeşte planul fazelor (sau al stărilor). In această reprezentare, traiectoriilor li se adaugă şi un sens de parcurgere, marcat printr-o săgeată, care indică sensul parcurgerii lor în evoluţia timpului. Rezultatul reprezentării în planul x_1Ox_2 a mai multor traiectorii (orbite) ale aceluiaşi sistem este portet fazic corespunzător.

Exemplu. Fie sistemul

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = -x_1(t). \end{cases} \tag{10.4}$$

Se cer:
a) soluţia generală;
b) soluţiile echilibru;
c) soluţia problemei lui Cauchy formată din sistemul dat mai sus şi condiţia iniţială $x_1(0) = \eta_1, x_2(0) = \eta_2$;

d) sistemul dinamic generat;
e) curbele integrale corespunzătoare soluţiei sistemului de mai sus şi condiţiei iniţiale de forma $x_1(0) = 0, x_2(0) = 1$;
f) traiectoriile şi portretul fazic.

Soluţie. In acest caz, matricea sistemului are forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

iar funcţia necunoscută este

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Pentru rezolvarea sistemului putem aplica metoda reducerii la o ecuaţie diferenţială de ordinul doi. Astfel, dacă derivăm (de exemplu) prima ecuaţie, avem $x_1''(t) = x_2'(t)$. Folosind a doua ecuaţie avem

$$x_1''(t) + x_1(t) = 0, t \in \mathbb{R}.$$

Rezolvam această ecuaţie şi obţinem

$$x_1(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t, \forall t \in \mathbb{R} \text{ (unde } c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

Inlocuind în relaţia $x_1'(t) = x_2(t)$ găsim componenta a doua a soluţiei generale, anume

$$x_2(t) = -c_1 \sin t + c_2 \cos t, \forall t \in \mathbb{R}.$$

In consecinţă, dacă notăm cu $U = U(t)$ matricea fundamentală de soluţii, unde

$$U(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

atunci soluţia generală a sistemului de ecuaţii este

$$\mathcal{S}_0 = \{X(t) = U(t)C : C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\}.$$

b) Soluţiile echilibru ale unui sistem de forma $X' = f(X)$ se obţin rezolvând ecuaţia $f(X) = 0$. In cazul nostru

$$f(X) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}.$$

Atunci, unica soluţie echilibru este $(0, 0)$, obţinută prin rezolvarea ecuaţiei

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

c) Impunând condiţiile iniţiale $x_1(0) = \eta_1, x_2(0) = \eta_2$ asupra soluţiei generale, găsim

$$C = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$$

şi astfel unica soluţie a problemei lui Cauchy este

$$X^*_\eta(t) = U(t)\eta,$$

unde

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}.$$

d) Sistemul dinamic generat de sistemul de ecuaţii diferenţiale este

$$(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, \varphi),$$

unde

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \text{ definit de } \varphi(t, \eta) := U(t)\eta,$$

este fluxul sistemului dinamic.

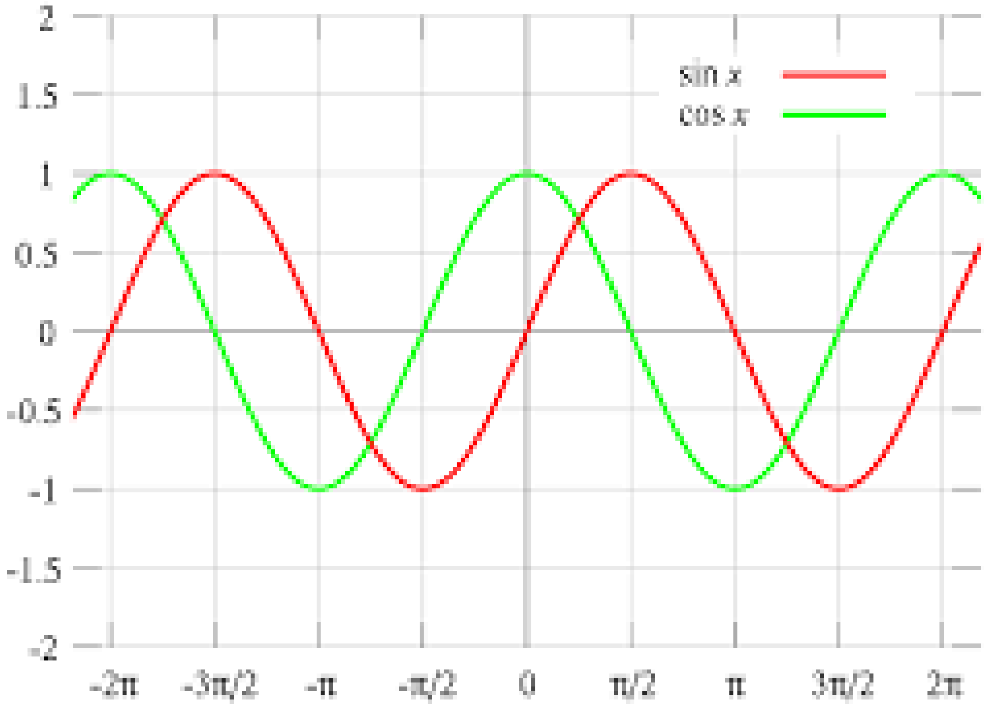
e) Pentru condiţia iniţială $x_1(0) = 0, x_2(0) = 1$ găsim $c_1 = 0, c_2 = 1$. Astfel, unica soluţie a acestei probleme Cauchy este

$$X^*(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

sau, în scriere pe componente, avem

$$x_1(t) = \sin t, x_2(t) = \cos t, \ t \in \mathbb{R}.$$

Curbele integrale corespunzătoare sunt date în figura următoare



f) Conform definiţiei, traiectoriile ce trec prin punctul η sunt date de $\varphi(\mathbb{R}, \eta)$. Aşa cum am mai precizat, acestea se obţin prin reprezentarea în planul x_1Ox_2 a curbei de ecuaţii parametrice

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t) \\ x_2 = x_2(t), t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

ceea ce înseamnă, de fapt, reprezentarea curbei descrise de punctul M de coordonate $M(x_1(t), x_2(t))$, când $t \to \infty$. In cazul nostru, de exemplu pentru $\eta = (0, 1)$ am obţinut

$$\begin{cases} x_1(t) = \sin t \\ x_2(t) = \cos t, t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

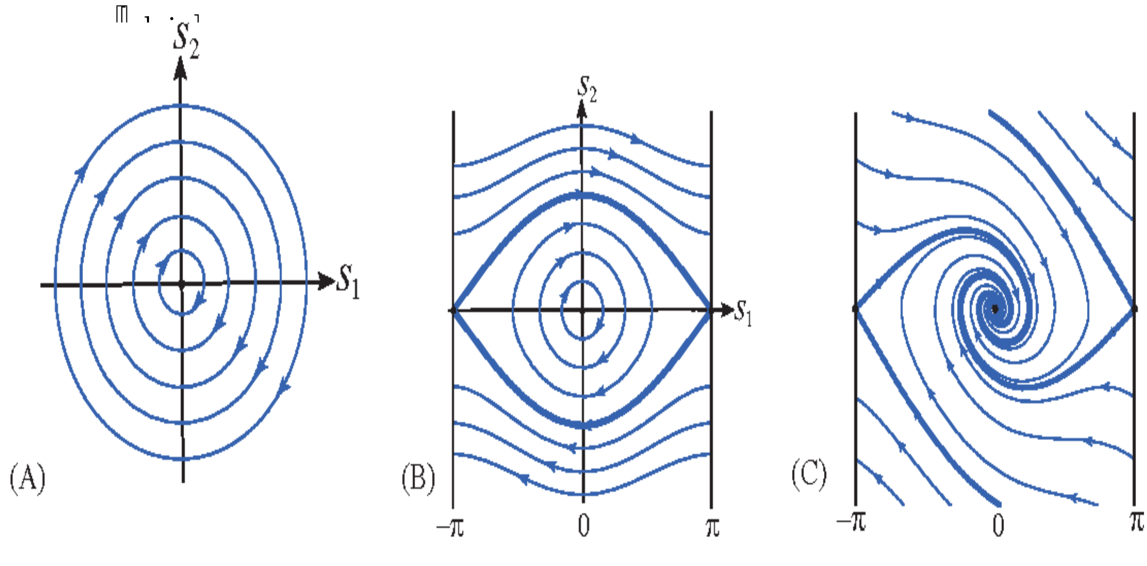
Eliminând t între cele două relaţii de mai sus obţinem curba

$$x_1^2 + x_2^2 = 1$$

ceea ce reprezintă cercul unitate din planul $x_1 O x_2$. In cazul general, pentru $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ obţinem

$$x_1^2 + x_2^2 = \eta_1^2 + \eta_2^2,$$

adică tot cercuri de rază $r = \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2}$. Deci, traiectoriile sunt familii de cercuri. Portretul fazic, definit teoretic ca mulţimea traiectoriilor, este dat de prima figură.



In finalul acestei secţiuni să enunţăm următoarea lemă, extrem de utilă în găsirea traiectoriilor unui sistem dinamic format din două ecuaţii.

Lemă. Fie sistemul de ecuaţii diferenţiale

$$\begin{cases} x_1'(t) = f_1(x_1, x_2) \\ x_2'(t) = f_2(x_1, x_2), \end{cases} \tag{10.5}$$

unde $f_1, f_2 \in C^1(D)$ cu $f_1(x_1, x_2) \neq 0$ pe $D \subset \mathbb{R}^n$

şi fie ecuaţia diferenţială

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2}{f_1}. \tag{10.6}$$

Atunci traiectoriile sistemului dinamic (10.5) şi curbele integrale ale ecuaţiei (10.6) coincid.

10.2 Exerciţii rezolvate şi propuse

A. Exerciţii rezolvate.

1) Folosind forma specială a membrului drept, să se rezolve ecuaţiile liniare şi neomogene următoare:

a) $x''(t) + 7x'(t) + 12x(t) = 42te^{3t}$;

b) $x''(t) - 2x'(t) + 2x(t) = te^t \cos t$.

2) Să se rezolve ecuaţia de tip Euler $t^2x''(t)+atx'(t)+bx(t) = g(t), t \in I :=]0, \infty[$, unde $a, b \in \mathbb{R}$ şi $g \in C(I)$.

Indicaţie. Metoda I. Se face schimbarea de variabilă $s = \ln t$ şi se obţine o ecuaţie liniară în necunoscuta $x = x(s)$; Metoda II. Se caută soluţii sub forma $x = t^r$, $r \in \mathbb{R}$.

3) Fie sistemul

$$\begin{cases} x_1'(t) = -x_1(t) \\ x_2'(t) = x_2(t). \end{cases}$$

Se cer:

a) soluţia generală;

b) soluţiile echilibru;
c) soluţia problemei lui Cauchy formată din sistemul dat mai sus şi condiţia iniţială $x_1(0) = \eta_1, x_2(0) = \eta_2$;
d) sistemul dinamic generat;
e) curbele integrale corespunzătoare soluţiei sistemului de mai sus şi condiţiei iniţiale de forma $x_1(0) = 1, x_2(0) = 1$;
f) traiectoriile şi portretul fazic.

4) Fie sistemul

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) \\ x_2'(t) = 2x_2(t). \end{cases}$$

Se cer:
a) soluţia generală;
b) soluţiile echilibru;
c) soluţia problemei lui Cauchy formată din sistemul dat mai sus şi condiţia iniţială $x_1(0) = \eta_1, x_2(0) = \eta_2$;
d) sistemul dinamic generat;
e) curbele integrale corespunzătoare soluţiei sistemului de mai sus şi condiţiei iniţiale de forma $x_1(0) = 1, x_2(0) = 1$;
f) traiectoriile şi portretul fazic.

A. Exerciţii propuse.

1) Folosind forma specială a membrului drept, să se rezolve ecuaţiile liniare şi neomogene următoare:

a) $x''(t) + 7x'(t) + 12x(t) = 42te^{-3t}$;
b) $x''(t) + 4x'(t) + 5x(t) = t^2 \cos 2t$.

2) Să se rezolve ecuaţia de tip Euler $t^2x''(t)+5tx'(t)+4x(t) = \ln t, t \in I :=]0, \infty[$.

3) Fie sistemul

$$\begin{cases} x_1'(t) = -x_2(t) \\ x_2'(t) = -x_1(t). \end{cases}$$

Se cer:
a) soluţia generală;
b) soluţiile echilibru;
c) soluţia problemei lui Cauchy formată din sistemul dat mai sus şi condiţia iniţială $x_1(0) = \eta_1, x_2(0) = \eta_2$;
d) sistemul dinamic generat;
e) curbele integrale corespunzătoare soluţiei sistemului de mai sus şi condiţiei iniţiale de forma $x_1(0) = 1, x_2(0) = 1$;
f) traiectoriile şi portretul fazic.

4) Fie sistemul

$$\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) \\ x_2'(t) = -x_2(t). \end{cases}$$

Se cer:
a) soluţia generală;
b) soluţiile echilibru;
c) soluţia problemei lui Cauchy formată din sistemul dat mai sus şi condiţia iniţială $x_1(0) = \eta_1, x_2(0) = \eta_2$;
d) sistemul dinamic generat;
e) curbele integrale corespunzătoare soluţiei sistemului de mai sus şi condiţiei iniţiale de forma $x_1(0) = 2, x_2(0) = 0$;
f) traiectoriile şi portretul fazic.

Capitolul 11

Stabilitatea sistemelor de ecuaţii diferenţiale

11.1 Noţiuni de stabilitate în sens Lyapunov

Fie sistemul

$$X'(t) = f(t, X(t)), \tag{11.1}$$

unde $f : [a, +\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ este o funcţie ce satisface condiţiile Teoremei de existenţă şi unicitate globale. Presupunem, de asemenea, că problema lui Cauchy formată din ecuaţia (11.1) şi condiţia

$$X(t_0) = \eta \tag{11.2}$$

are soluţie unică, notată $X^*_{(t_0,\eta)}(t)$, definită pe $[a, +\infty)$.

Problema stabilităţii în sens Lyapunov: dacă modificăm valoarea condiţiei iniţiale η într-o valoare γ apropiată de η (în sensul $\|\gamma - \eta\| \leq \epsilon$), oare soluţia $X^*_{(t_0,\gamma)}(t)$ rămâne apropiată de soluţia $X^*_{(t_0,\eta)}(t)$? Daca DA, avem de a face cu stabilitate, daca NU atunci avem de a face cu instabilitate.

Exemplu. Fie ecuaţia $x' = x$. Problema lui Cauchy asociată (cu condiţia $x(t_0) = \eta$) are soluţia $x^*_{(t_0,\eta)}(t) = \eta e^{t-t_0}$. Atunci

$$|x^*_{(t_0,\gamma)}(t) - x^*_{(t_0,\eta)}(t)| = |\gamma - \eta| e^{t-t_0} \to \infty, \text{ pentru } t \to \infty.$$

In acest caz, nu avem stabilitate.

Pentru simplitate, vom nota soluţia problemei lui Cauchy (11.1)+(11.2) cu $X^*_\eta(t)$.

Definiţie. O soluţie $\Phi \in C^1([a, +\infty), \mathbb{R}^n)$ a sistemului (11.1) se numeşte:

(a) stabilă dacă oricare ar fi $\epsilon > 0$ şi oricare ar fi $t_0 \in [a, +\infty)$ există $\delta = \delta(\epsilon, t_0) > 0$ astfel ca următoarea implicaţie are loc:

$$\|\eta - \Phi(t_0)\| \leq \delta \;\Rightarrow\; \|x^*_\eta(t) - \Phi(t)\| \leq \epsilon, \text{ pentru orice } t \geq t_0.$$

(b) asimptotic stabilă dacă oricare ar fi $t_0 \in [a, +\infty)$ există $\delta = \delta(t_0) > 0$ astfel ca următoarea implicaţie are loc:

$$\|\eta - \Phi(t_0)\| \leq \delta \;\Rightarrow\; \lim_{t\to\infty} \|x^*_\eta(t) - \Phi(t)\| = 0.$$

Observaţie. Din definiţiile de mai sus rezultă că stabilitatea este o proprietate a soluţiei. In cazul sistemelor liniare, se poate arăta că stabilitatea este o proprietate a sistemului, adică toate soluţiile sale au acelaşi caracter de stabilitate.

11.2 Stabilitatea sistemelor liniare

Ne ocupăm, în ceea ce urmează, de stabilitatea sistemelor liniare de forma

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t), \tag{11.3}$$

unde A şi B sunt funcţii continue pe $[a, +\infty)$.

Ca şi mai sus, presupunem, de asemenea, că problema lui Cauchy formată din ecuaţia (11.3) şi condiţia

$$X(t_0) = \eta \tag{11.4}$$

are soluţie unică, notată $X^*_\eta(t)$, definită pe $[a, +\infty)$.

Aşa cum precizam mai sus, în cazul sistemelor liniare toate soluţiile sale au acelaşi caracter de stabilitate. Din această perspectivă, este suficient să studiem stabilitatea unei soluţii (de exemplu, stabilitatea soluţiei nule în cazul sistemului omogen $X'(t) = A(t)X(t)$) pentru a deduce caracterul de stabilitate al sistemului.

Următoarele două teoreme sunt criterii generale de stabilitate pentru sistemele liniare de forma (11.3).

Teorema.(Criteriu de stabilitate)

Fie sistemul (11.3). Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(A) sistemul (11.3) este stabil;

(B) sistemul (11.3) are o matrice fundamentală de soluţii mărginită pe $[a, +\infty)$;

(C) toate soluţiile sistemului omogen $X' = A(t)X$ sunt mărginite pe $[a, +\infty)$.

Teorema.(Criteriu de asimptotic stabilitate)

Fie sistemul (11.3). Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(A) sistemul (11.3) este asimptotic stabil;

(B) sistemul (11.3) are o matrice fundamentală de soluţii $U = U(t)$ cu proprietatea $\lim\limits_{t\to+\infty} U(t) = 0$;

(C) toate soluţiile $X = X(t)$ ale sistemului omogen $X' = A(t)X$ au proprietatea că $\lim\limits_{t\to+\infty} X(t) = 0$.

11.3 Stabilitatea sistemelor liniare cu coeficienţi constanţi

Vom considera mai departe doar cazul sistemelor de două ecuaţii cu două necunoscute, de forma

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + b_1(t) \\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + b_2(t), \end{cases} \tag{11.5}$$

unde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

este o matrice de numere reale, iar

$$B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix}$$

este o funcţie continuă pe $[a, +\infty)$.

In formă vectorială, sistemul (11.5) se scrie

$$X'(t) = AX(t) + B(t).$$

unde

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

este funcţia necunoscută.

Următoarele două teoreme sunt criterii generale de stabilitate pentru sistemele liniare de forma (11.5).

Teorema.(Criteriu de stabilitate)

Fie sistemul (11.5). Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(A) sistemul (11.5) este stabil;

(B) valorile proprii ale matricei A au partea reală strict negativă sau, dacă partea reală este 0, atunci valoarea proprie respectivă este simplă.

Teorema.(Criteriu de asimptotic stabilitate)

Fie sistemul (11.5). Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(A) sistemul (11.5) este asimptotic stabil;

(B) valorile proprii ale matricei A au partea reală strict negativă.

Definiţie. O matrice A pentru care toate valorile proprii au partea reală strict negativă se numeşte matrice hurwitziană.

Exemple.

Fie sistemele

a)

$$\begin{cases} x_1'(t) = -x_2(t) \\ x_2'(t) = -x_1(t), \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x_1'(t) = -x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t), \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = -2x_1(t) - 2x_2(t). \end{cases}$$

Să se studieze stabilitatea fiecăruia.

Răspuns: a) instabil, (b) stabil, (c) asimptotic stabil.

11.4 Stabilitatea sistemelor neliniare

Fie sistemul autonom

$$X'(t) = f(X(t)), \tag{11.6}$$

unde $f : [a, +\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ este o funcţie de clasă C^1 pe un domeniu din $\mathbb{R}^2$, cu proprietatea $f(0) = 0$. Presupunem, de asemenea, că problema lui Cauchy formată din ecuaţia (11.6) şi condiţia

$$X(t_0) = \eta \tag{11.7}$$

are soluţie unică, notată $X_\eta^*(t)$, definită pe $[a, +\infty)$. Presupunem

$$f(X) = \begin{pmatrix} f_1(X) \\ f_2(X) \end{pmatrix}.$$

Notăm cu

$$J_f((x_1, x_2)) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

matricea lui Jacobi corespunzătoare.

Avem următoarele două teoreme, care sunt criterii generale de stabilitate în primă aproximaţie pentru soluţiile staţionare (echilibru) ale sistemului de forma (11.6).

Teorema.(Criteriu de stabilitate)

Fie sistemul (11.6). Fie $\tilde{X}$ o soluţie staţionară (echilibru) a sa. Atunci $\tilde{X}$ este stabilă dacă valorile proprii ale matricei $J_f(\tilde{X})$ au partea reală strict negativă sau, dacă partea reală este 0, atunci valoarea proprie respectivă este simplă.

Teorema.(Criteriu de asimptotic stabilitate)

Fie sistemul (11.6). Fie $\tilde{X}$ o soluţie staţionară (echilibru) a sa. Atunci $\tilde{X}$ este asimptotic stabilă dacă matricea $J_f(\tilde{X})$ este hurwitziană.

Exemple.

a) Fie ecuaţia logistică: $x' = kx(1 - \frac{x}{L})$, unde $k, L > 0$. Ecuaţia are 2 soluţii staţionare: $\tilde{x} = 0$ şi $\tilde{x} = L$. Atunci, soluţia $\tilde{x} = 0$ este instabilă (deoarece $f'(0) > 0$), iar soluţia $\tilde{x} = L$ este asimptotic stabilă (deoarece $f'(L) < 0$).

b) Fie sistemul

$$\begin{cases} x_1'(t) = -x_1 + 8x_2^2(t) \\ x_2'(t) = x_1^2(t) - x_2(t). \end{cases}$$

Soloţiile staţionare sunt $(0, 0)$ şi $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$. Deoarece matricea $J_f((0, 0))$ e hurwitziană, soluţia nulă e asimptotic stabilă. Pe de altă parte, matricea $J_f((\frac{1}{2}, \frac{1}{4}))$ nu e hurwitziană, rezultând că soluţia $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ nu e stabilă.

Capitolul 12

Recapitularea noţiunilor fundamentale

In acest capitol vom recapitula câteva dintre chestiunile principale din tematica cursului.

12.1 Cazul ecuaţiilor diferenţiale

A. Ecuaţii rezolvabile efectiv

1) Ecuaţii cu variabile separabile

Forma generală a unei ecuaţii diferenţiale cu variabile separabile este

$$x'(t) = g(t)h(x),$$

unde (i) g e o funcţie continuă pe intervalul $]t_1, t_2[$ (unde $t_1 = -\infty, t_2 = +\infty$ sunt acceptate);
(ii) h e o funcţie continuă pe intervalul $]x_1, x_2[$ (unde $x_1 = -\infty, x_2 = +\infty$ sunt acceptate).

Necunoscuta ecuaţiei este $x = x(t), t \in I$ (unde $I \subseteq]t_1, t_2[$ este un interval al axei reale) şi ea se caută în clasa de funcţii C^1.

Exemple.

a) $x'(t) = x^2(t), x(0) = \eta$ (Discuţie după $\eta \in \mathbb{R}$).

b) Să se determine curba plană ce trece prin punctul $A(2,4)$ şi are proprietatea că dacă printr-un punct oarecare al curbei se duc două paralele la axele de coordonate, atunci cele două suprafeţe plane în care curba împarte dreptunghiul format au proprietatea că aria uneia este de două ori mai mare ca aria celeilalte.

2) Ecuaţii liniare

Forma generală a unei ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul 1 este

$$x'(t) = p(t)x(t) + q(t),\ t \in I \subseteq \mathbb{R},$$

unde p, q sunt funcţii continue pe un interval I al axei reale.

Mulţimea tuturor soluţiilor ecuaţiei notată cu $\mathcal{S}$ are reprezentarea

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \{\tilde{x}\},$$

unde $\mathcal{S}_0$ este mulţimea soluţiilor ecuaţiei omogene asociate ($x'(t) = p(t)x(t),\ t \in I \subseteq \mathbb{R}$ - o ecuaţie cu variabile separabile), iar $\tilde{x}$ este o soluţie (oarecare) a ecuaţiei neomogene date. Dacă

$$\mathcal{S}_0 = \{x(t) = c\Gamma(t), t \in J : c \in \mathbb{R}\}$$

atunci $\tilde{x}$ se caută sub forma

$$\tilde{x} = \varphi(t)\Gamma(t),$$

unde $\varphi \in C^1(J)$ se determină din condiţia ca $\tilde{x}$ să verifice ecuaţia neompogenă dată.

Exemplu.

a) $x'(t) - 2tx(t) = -2e^{t^2}, x(1) = e$.

b) $tx''(t) + 2x'(t) = t^4$, $t > 0$.

3) Ecuaţii rezolvabile prin schimbări de variabilă

a) schimbarea variabilei dependente

Exemple.

i) Forma generală a unei ecuaţii diferenţiale de tip Bernoulli este

$$x'(t) - p(t)x(t) = q(t)x^{\alpha}(t),\ t \in I \subseteq \mathbb{R},$$

unde p, q sunt funcţii continue pe un interval I al axei reale, iar $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Dacă facem schimbarea de variabilă

$$y = x^{1-\alpha}$$

se obţine o ecuaţie diferenţială liniară de ordinul 1 în necunoscuta $y = y(t)$ de forma

$$y'(t) = (1 - \alpha)\left(p(t)y(t) + b(t)\right).$$

ii) Să se rezolve ecuaţia

$$x'(t) = tx(t) + x^2(t) + 2 - 6t^2, t \in \mathbb{R}$$

ştiind că ea admite o soluţie de forma λt.

Indicaţie. Este o ecuaţie Riccati, în general nerezolvabilă efectiv. Totuşi, dacă se ştie o soluţie a ecuaţiei (să zicem $\tilde{x}(t) = \rho(t), t \in I$), atunci prin schimbarea de variabilă

$$x(t) = \rho(t) + \frac{1}{y(t)}$$

se obţine o ecuaţie diferenţială liniară de ordinul 1 în necunoscuta $y(t)$.

b) schimbarea variabilei independente

Forma generală a unei ecuaţii de tip Euler este

$$t^2x''(t) + atx'(t) + bx(t) = 0,\ t > 0,$$

unde $a, b \in \mathbb{R}$.

Prin schimbarea de variabilă

$$s = \ln t$$

se ob tine o ecuaţie diferenţială liniară cu coeficienţi constanţi. Intr-adevăr

$$x'(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{dx}{ds} \cdot \frac{1}{t},$$

$$x''(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\frac{dx}{ds}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{1}{t} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{ds}\right) =$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{1}{t} \cdot \frac{d^2x}{ds^2} \cdot \frac{ds}{dt} = -\frac{1}{t^2} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{1}{t} \cdot \frac{d^2x}{ds^2} \cdot \frac{1}{t} = -\frac{1}{t^2} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{1}{t^2} \cdot \frac{d^2x}{ds^2}.$$

Inlocuind în ecuaţia iniţială obţinem

$$x''(s) + (a-1)x'(s) + bx(s) = 0.$$

Exemplu. $t^2x''(t) + 2tx'(t) - 2x(t) = 0,\ t > 0.$

B. Rezultate de existenţă, unicitate şi aproximare

1) Teorema globală

2) Teorema locală

Considerăm problema cu condiţii iniţiale (problema lui Cauchy) de forma

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x^0, \end{cases}$$

unde $f : \tilde{D} := [t_0 - a, t_0 + a] \times [x^0 - b, x^0 + b] \subset \Omega \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă, $(t_0, x^0) \in \Omega$, Ω este un domeniu în $\mathbb{R}^2$, iar unde $a, b > 0$.

Fie $0 < h \leq a$. Studiem existenţa şi unicitatea soluţiei problema cu condiţii iniţiale de mai sus în $\tilde{B}(x^0; b) \subset C[t_0 - h, t_0 + h])$. Notăm $J := [t_0 - h, t_0 + h]$ şi desemnăm cu $M_f > 0$ numărul cu proprietatea

$$|f(t, u)| \leq M_f, \text{ oricare ar fi } (t, u) \in \tilde{D}.$$

Să presupunem că f este Lipschitz pe $\tilde{D}$ în raport cu al doilea argument.

Teorema locală de existenţă şi unicitate pentru problema lui Cauchy de mai sus spune că dacă $f : \Omega \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă şi f este Lipschitz pe $\tilde{D} := [t_0 - a, t_0 + a] \times [x^0 - b, x^0 + b] \subset \Omega$ în raport cu al doilea argument, atunci problema lui Cauchy are soluţie unică $x^* \in \tilde{B}(x^0; b) \subset C[t_0 - h, t_0 + h]$ definită cel puţin pe intervalul $J := [t_0 - h, t_0 + h]$ (unde $h := \min\{a, \frac{b}{M_f}\}$, cu $M_f > 0$ având proprietatea că $|f(t,u)| \leq M_f$, oricare ar fi $(t,u) \in \tilde{D}$) şi oricare ar fi $x_0 \in \tilde{B}(x^0; b)$ şirul $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ din $\tilde{B}(x^0; b) \subset C(J)$, definit recurent de relaţia

$$x_{n+1}(t) = \int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s))ds + x^0, t \in J, n \in \mathbb{N}$$

converge uniform la x^*.

Exemplu. Fie problema lui Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = x^2 + \cos t^2 \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Să se indice un interval al axei reale pe care problema admite soluţie unică şi să se scrie şirul aproximaţiilor succesive corespunzător.

12.2 Cazul sistemelor de ecuaţii diferenţiale

Consider sistemul

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t),$$

unde $A = (a_{ij})_{i,j\in\{1,2\}}$ este o matrice de funcţii continue, iar

$$B(t) := \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix},$$

este o funcţie vectorială continuă dată (termenul liber al sistemului neomogen).

Printr-o soluţie a sistemului înţelegem un vector

$$X(t) := \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix},$$

de clasă C^1 ce verifică sistemul dat.

Să notăm cu $\mathcal{S}$ mulţimea tuturor soluţiilor sistemului dat şi cu $\mathcal{S}_0$ mulţimea tuturor soluţiilor sistemului omogen asociat (fără B).

Atunci

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \{\tilde{X}\},$$

unde $\tilde{X} = \tilde{X}(t)$ este o soluţie oarecare a sistemului neomogen.

Pentru a afla $\mathcal{S}_0$ (toate soluţiile sistemului liniar şi omogen) este suficient să găsim 2 soluţii liniar independente ale acestuia. Dacă X^1, X^2 sunt 2 soluţii liniar independente ale sistemului şi notăm $U := (X^1 X^2)$, atunci mulţimea tuturor soluţiilor sale este

$$\mathcal{S}_0 = \{X(t) = U(t)C | C \in \mathbb{R}^2\}.$$

Apoi, $\tilde{X} = \tilde{X}(t)$ se poate găsi prin metoda variaţiei constantelor căutând $\tilde{X}(t) = U(t)\Phi(t)$, iar Φ se determină din condiţia

$$U(t)\Phi'(t) = B(t).$$

Exemplu.

Fie sistemul

$$\begin{cases} tx_1'(t) + 4x_1(t) - 2x_2(t) = t + 1 \\ tx_2'(t) - 3x_1(t) - x_2(t) = 2t, \ t > 0. \end{cases}$$

(a) Să se efectueze schimbarea de variabilă $t = e^s$;

(b) Să se rezolve sistemul obţinut la (a);

(c) Să se rezolve sistemul iniţial;

(d) Să se rezolve problema lui Cauchy corespunzătoare sistemului iniţial şi condiţiilor iniţiale $x_1(1) = 0, x_2(1) = 0$.

12.3 Exerciţii rezolvate

1) Fie problema cu condiţii pe frontieră de tip Dirichlet

$$\begin{cases} x''(t) + \lambda x(t) = 0, t \in [0, T],\ T > 0 \\ x(0) = x(T) = 0. \end{cases}$$

Să se determine soluţiile sale (discuţie după λ). Să se precizeze cazurile în care problema admite soluţii nenule.

2) Fie ecuaţia

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = 0, t \in \mathbb{R},$$

unde $a, b \in \mathbb{R}$. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât:

i) toate soluţiile ecuaţiei să fie mărginite;

ii) toate soluţiile ecuaţiei să fie periodice.

3) Corpul unei victime a fost descoperit, într-un mediu de temperatură constantă T_e, la ora t_1 cu temperatura corpului T_1. La momemntul $t_2 > t_1$ temperatura măsurată a corpului era T_2. Cunoscând că temperatura corpului viu este $T_0 = 36.5$ grade, să se determine ora t_0 la care a survenit decesul.

Indicaţie. Legea lui Newton a transferului termic, stabilită prin experimente, stipulează că rata schimbării de temperatură este proporţională cu diferenţa de temperatură dintre corp şi mediul în care acesta a fost plasat. Intr-adevăr, dacă $T(t)$ notează temperatura corpului la momentul t, avem:

- dacă $T - T_e > 0$, atunci $T \searrow T_e$ şi astfel trebuie ca $T' < 0$;
- dacă $T - T_e < 0$, atunci $T \nearrow T_e$ şi astfel trebuie ca $T' > 0$.

Această lege se scrie matematic în următoarea ecuaţie diferenţială de ordinul 1

$$T'(t) = -\alpha(T(t) - T_e), t \geq t_0$$

unde $\alpha > 0$ este coeficientul de transfer termic. Acest coeficient depinde de proprietăţile termice ale corpului şi se determină experimental.

In plus, mai ştim că $T(t_0) = T_0$. Rezolvând problema lui Cauchy

$$\begin{cases} T'(t) = -\alpha(T(t) - T_e), t \geq t_0 \\ T(t_0) = T_0, \end{cases}$$

găsim

$$T(t) = T_e + e^{-\alpha(t-t_0)}(T_0 - T_e), t \geq t_0.$$

Pentru $t := t_1, t := t_2$ găsim un sistem în necunoscutele α şi t_0 care dau prin calcul soluţia

$$t_0 = \frac{t_1 \ln|T_2 - T_e| - t_2 \ln|T_1 - T_e| + (t_2 - t_1)\ln|T_0 - T_e|}{\ln|T_2 - T_e| - \ln|T_1 - T_e|}.$$

4) Fie sistemul

$$X' = AX,$$

unde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix},$$

iar

$$X(t) := \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix},$$

a) Să se afle soluja sa generală;

b) Să se scrie sistemul dinamic generat;

c) Să se afle traiectoriile si portretul fazic.

Soluţie.

a) Ecuaţia caracteristică

$$r^2 + 5r = 0$$

are două soluţii reale distincte $r_1 = -5, r_2 = 0$. Vectorii proprii corespunzători sunt

$$V^1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

şi

$$V^2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Fie matricea fundamentală

$$U(t) = \begin{pmatrix} e^{-5t} & 2 \\ -2e^{-5t} & 1 \end{pmatrix},$$

Soluţia generală este

$$\mathcal{S}_0 = \{X(t) = U(t)C : C \in \mathbb{R}^2\}.$$

Pe componente soluţia se scrie

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 e^{-5t} + 2c_2 \\ x_2(t) = -2c_1 e^{-5t} + c_2. \end{cases}$$

b) Sistemul dinamic generat este

$$(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, \varphi),$$

unde $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, unde $\varphi(t, \eta)$ este unica soluţie $X_\eta^*(t)$ a problemei lui Cauchy formată din sistem şi condiţia iniţială $X(0) = \eta$. Dup a calcule, rezultă

$$c_1 = \frac{\eta_1 - 2\eta_2}{5}, c_2 = \frac{2\eta_1 + \eta_2}{5}.$$

c) Pentru găsirea traiectoriilor:

Metoda I. Eliminăm t intre cele două relaţii ce definesc soluţia generală

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 e^{-5t} + 2c_2 \\ x_2(t) = -2c_1 e^{-5t} + c_2. \end{cases}$$

şi obţinem

$$2x_1 + x_2 = 5c_2,$$

ceea ce reprezintă o familie de drepte paralele (de pantă -2).

Metoda II. Traiectoriile coincid cu curbele integrale ale ecuaţiei

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{2x_1 - 4x_2}{-x_2 + 2x_2},$$

ceea ce conduce la

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -2.$$

Prin integrare avem $x_2 = -2x_1 + c, c \in \mathbb{R}$.

Bibliografie

[1] A. Granas, J. Dugundji, *Fixed Point Theory*, Springer, Berlin, 2003.

[2] R. Precup, *Methods in Nonlinear Integral Equations*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002.

[3] I. A. Rus, *Principii şi aplicaţii ale teoriei punctului fix [Principles and Applications of the Fixed Point Theory]*, Ed. Dacia, Cluj-Napoca, 1979.

[4] I. A. Rus, *Ecuaţii diferenţiale, ecuaţii integrale şi sisteme dinamice*, Editura Transilvania Press, 1996.

[5] I. A. Rus, A. Petruşel, G. Petruşel, *Fixed Point Theory 1950-2000: Romanian Contributions*, House of the Book of Science Cluj-Napoca, 2002.

[6] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications. I. Fixed Point Theorems*, Springer Verlag, New York, 1986.