

SISTEMUL PUNCTELOR EXPLOZIVE - O ABORDARE INTUITIVĂ

Oana Maria Pârva, Aurica Viuța Boroș, Alin Florin Novac-Iuhas și Andreea Cunțan

Rezumat. Lucrarea explorează metoda „punctelor explozive” ca o abordare intuitivă și vizuală pentru a predă și înțelege conceptele fundamentale ale numerelor, sistemelor de numerație și operațiilor aritmetice. Autorii prezintă cum ideea de „cutii de puncte” în care punctele „explodează” când ating un anumit prag poate ilustra clar trecerea între poziții, conversia între baze, găsirea unor rezultate intuitive obținute în urma adunării, scăderii, înmulțirii și împărțirii numerelor întregi și a polinoamelor. Sunt incluse exemple demonstrative, reprezentări grafice statice și secvențe vizuale care arată cum cifrele se deplasează prin mutări. Lucrarea are scop pedagogic: de a oferi profesorilor și elevilor un instrument vizual, intuitiv, care transformă procedurile rigide de calcul în experiențe logice și atractive.

MSC 2000. 97D40, 97U10, 97C20.

Cuvinte cheie. Sisteme de numerație, operații aritmetice, polinoame, puncte explozive.

1. INTRODUCERE

În această lucrare dorim să ilustrăm faptul că matematica poate fi frumoasă, logică și intuitivă, oferind o nouă perspectivă asupra modului în care elevii pot învăța și înțelege această disciplină fundamentală.

Introducerea conceptului de sistem de numerație și a sistemului punctelor explozive reprezintă o etapă fundamentală în învățarea elementelor de algebră. Chiar dacă elevii din învățământul gimnazial sunt pregătiți să exploreze concepte matematice mai complexe cum ar fi sistemele de numerație, noi profesorii putem să le explicăm aceste noțiuni complicate într-o manieră mai atractivă.

Putem aplica metoda descrisă de James Tanton ([1]) și o putem adapta nevoilor de cunoaștere a elevilor noștri. Astfel putem prezenta elevilor o tehnică nouă de a efectua operații cu numere naturale, operații de transformare dintr-o bază de numerație în altă bază de numerație, de a efectua operații cu numere întregi, de a explora conceptele de polinoame, care sunt expresii matematice formate din termeni, fiecare având coeficienți și variabile. Aceste noțiuni sunt interconectate și ajută la dezvoltarea abilităților de rezolvare a problemelor și a gândirii critice.

2. BAZE DE NUMERAȚIE: SCRIEREA ÎN BAZA 10, SCRIEREA ÎN BAZA 2

Conform programei școlare la clasa a V-a, respectiv clasa a VI-a, teoria corespunzătoare lecțiilor: „Baze de numerație: scrierea în baza 10, scrierea în baza 2” și „Operații cu numere întregi”, cât și aplicațiile corespunzătoare pot

fi consultate în manualele digitale ([2], [3]) și în cărțile de specialitate ([6]), dar noi dorim să vă prezentăm o altă abordare.

O bază de numerație cu puncte explozive este un sistem în care numerele sunt reprezentate printr-o combinație de puncte, iar fiecare punct are o valoare specifică în funcție de poziția sa. Sistemul punctelor explozive este similar cu sistemele de numerație tradiționale, dar introduce un element de complexitate și creativitate. Punctele explozive pot fi folosite pentru a reprezenta diferite valori, iar modul în care acestea sunt aranjate determină valoarea totală a numărului.

2.1. Transformări de tipul $1 \leftarrow n$ și $m \leftarrow n$.

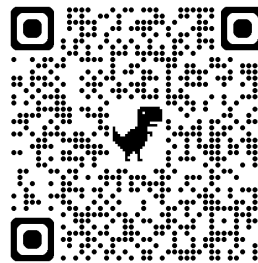
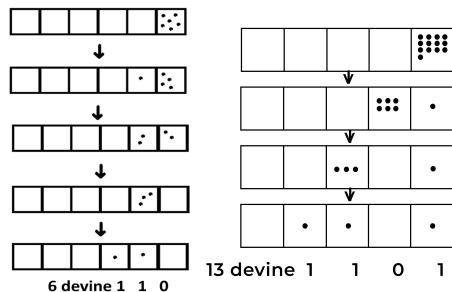
O transformare de bază $1 \leftarrow 2$ constă într-un șir de căsuțe, extinzându-se oricât de mult dorești spre stânga ([5]). Pentru a opera această transformare, așezi un anumit număr de puncte în căsuța cea mai din dreapta, iar apoi se redistribuie punctele conform următoarei reguli:

Două puncte în oricare căsuță sunt șterse (ele „explodează”) și sunt înlocuite cu un punct cu o poziție mai la stânga.

De exemplu, dacă plasăm șase puncte într-o mașină $1 \leftarrow 2$, apar patru explozii, rezultând într-o distribuție finală a punctelor ce poate fi citită ca „110”.

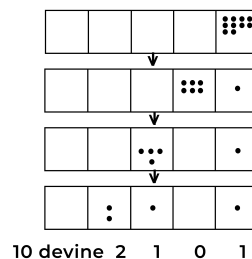
Dacă plasăm 13 puncte, distribuția devine „1101”, iar pentru 50 de puncte, obținem „110010”.

Aceste exerciții pot fi efectuate pe foaie sau pe tablă și pot fi verificate folosind aplicația „The Mathenaeum” ([5]) sau scanând codul QR.



Se pot face lucruri interesante cu mașinile de bază și se pot descoperi curiozități matematice frumoase.

Într-o transformare de tipul $2 \leftarrow 3$, vom înlocui trei puncte dintr-o casetă cu două puncte plasate cu o poziție mai la stânga. Dacă punem zece puncte în mașină, obținem următorul rezultat: $10 \rightarrow 2101$.



2.2. Exemplificarea punctelor explozive.

Opusul unui punct se referă la conceptul de număr opus în cadrul sistemelor de numerație. Dacă luăm în considerare un număr natural, opusul său este numărul întreg care, adunat cu numărul original, dă zero. De exemplu, pentru numărul 4, opusul este -4 . Acest concept este esențial în operațiile cu numere întregi, unde adunarea unui număr cu opusul său duce întotdeauna la zero, demonstrând astfel proprietatea inversului aditiv.

Dar aceste informații matematice sunt specifice clasei a VI-a! Pentru a putea continua aplicațiile la nivelul clasei a V-a, atunci vom numi simbolul $\bullet$ cu dot (în lb. Engleză = punct), iar opusul simbolului $\bullet$ va fi $\circ$ și denumit intuitiv de elevii noștri cu tod (cuvântul dot scris invers). Astfel un dot $\bullet$ se va anula cu un tod $\circ$: $\bullet + \circ = \text{nimic (zero)}$ [1].

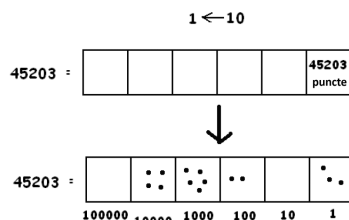
EXEMPLUL 1.

$$\begin{array}{lcl}
 4 + \text{opus } 4 = \text{nimic (zero)} & | & 5 + \text{opus } 3 = 2 \\
 \bullet \bullet + \circ \circ = & | & \bullet \bullet \bullet + \circ \circ \circ = \\
 \cancel{\bullet \bullet} + \cancel{\circ \circ} = & | & \cancel{\bullet \bullet} + \cancel{\circ \circ \circ} = \bullet \bullet \\
 \bullet \bullet + \bullet \bullet = & | & \bullet \bullet + \bullet \bullet = \bullet \bullet
 \end{array}$$

3. OPERAȚII CU NUMERE NATURALE/ÎNTREGI

3.1. Adunarea numerelor naturale/întregi.

Sistemul de notație pozițională pe care îl folosim astăzi pentru a scrie și a manipula numere este baza 10, o transformare $1 \leftarrow 10$ [1].



Adunarea în baza 10 este directă.

EXEMPLUL 2.

$279 + 568$ înseamnă:

$2 + 5 = 7$ puncte în poziția sutelor,

$7 + 6 = 13$ puncte în poziția zecilor,

$9 + 8 = 17$ puncte în poziția unităților.

$$\begin{array}{rcl}
 279 = & \boxed{\bullet \bullet} & \boxed{\bullet \bullet \bullet} & \boxed{\bullet \bullet \bullet} \\
 + & & & \\
 568 = & \boxed{\bullet \bullet \bullet} & \boxed{\bullet \bullet \bullet} & \boxed{\bullet \bullet \bullet} \\
 \hline
 = & \boxed{7} & \boxed{13} & \boxed{17}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 279 \\
 + 568 \\
 \hline
 71317
 \end{array}$$

Este rezonabil să scriem acest rezultat sub forma $7|13|17$, folosind bare verticale pentru a separa unitățile puterilor lui 10.

10 dintre cele 13 puncte din celula zecilor „explodează” și lasă 3 puncte în urmă, creând un punct suplimentar în caseta sutelor, rezultatul este $8|3|17$.

Din cele 17 puncte din caseta unităților, 10 „explodează” și lasă 7 în urmă, creând un punct în plus în caseta zecilor. Obținem rezultatul final:

$$279 + 568 = 8|4|7, \text{ adică } 847.$$

3.2. Înmulțirea numerelor naturale/întregi.

Unele probleme simple de înmulțire sunt conceptual clare în modelul cu puncte și căsuțe, se efectuează explodările pas cu pas pentru a obține răspunsul final.

EXEMPLUL 3.

$$42708 \cdot 3 = 12|6|21|0|24 = 12|8|1|0|24 = 12|8|1|2|4 = 128124$$

EXEMPLUL 4.

O **provocare dificilă** propusă de James Tanton ([1]) și rezolvată de noi este:

Dezvoltă o metodă pentru efectuarea înmulțirii lungi în modelul cu puncte și căsuțe. Folosește această metodă pentru a calcula: $354 \cdot 672$. Deși este posibil să dezvoltăm proceduri pentru înmulțirea lungă în modelul cu puncte și căsuțe, acestea tind să fie oarecum artificiale.

$$354 \cdot 672 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & 6 & 10 & 8 \\ \hline & & 21 & 35 & 28 & \\ \hline & 18 & 30 & 24 & & \\ \hline 18 & 51 & 65 & 38 & 8 & \\ \hline 23 & 7 & 8 & 8 & 8 & \\ \hline \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \right\} +$$

$$354 \cdot 672 = 237888$$

3.3. Scăderea numerelor naturale/întregi.

Scăderea nu este altceva decât adunarea unor cantități negative. În modelul nostru cu puncte și căsuțe, vom lucra acum cu „puncte = dots” și „anti-puncte = tods”

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet & \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet & \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \\ \hline \circ \circ & \circ \circ \circ & \circ \circ \circ \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline \end{array}$$

EXEMPLUL 5. $478 - 353 = 125$

$$\begin{array}{r} 478 \\ - 353 \\ \hline 125 \end{array}$$

EXEMPLUL 6.

$$423 - 254 =$$

Aceasta este o expresie perfect validă matematic, deși pentru majoritatea lumii poate fi greu de înțeles ce înseamnă „două sute și minus treizeci minus unu”!

Pentru a traduce acest lucru într-un format cunoscut, putem „de-exploda” un punct solid din stânga pentru a adăuga 10 puncte în căsuța din mijloc. Acest lucru dă: $1|7| - 1$. Dacă de-explodăm din nou, obținem: $1|6|9$.

$$\text{Astfel: } 423 - 254 = 2| - 3| - 1 = 1|7| - 1 = 1|6|9 = 169$$

OBSERVAȚIA 1.

Acest proces de „de-explodare” este numit împrumutul cifrelor. Elevii sunt învățați să împrumute pe măsură ce rezolvă o problemă de scădere, în loc să lase toate împrumuturile la final.

3.4. Împărțirea numerelor naturale/întregi.**a) Împărțirea numerelor naturale fără rest**

În ciuda limitării în cazul înmulțirii, un avantaj semnificativ al modelului cu puncte și căsuțe este că explică procesul împărțirii lungi cu o claritate conceptuală remarcabilă.

EXEMPLUL 7.

$$384 : 12 =$$

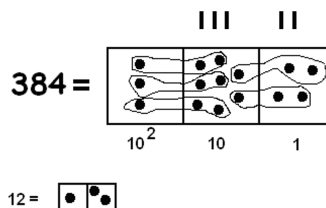
Dorim să vedem de câte ori putem găsi grupuri de 12 în cele 384 de puncte. Astfel căutăm grupuri de 12 în 384. Și aceasta devine pur și simplu o sarcină de recunoaștere a tiparelor.

Observăm că identificăm:

Trei grupuri de 12 la nivelul zecilor
(adică: o sută și două zeci).

Două grupuri de 12 la nivelul unităților (adică: un zece și două unități).

Astfel: $384 : 12 = 32$.

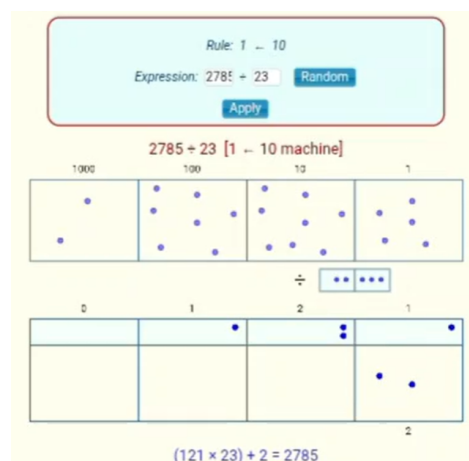
**b) Împărțirea numerelor naturale cu rest**

Se procedează la fel ca și la împărțirea fără rest.

EXEMPLUL 8.

$$2785 : 23 = 121 \text{ rest } 2 \text{ sau } 121 + \frac{2}{23}$$

Căutăm grupuri de 23 în 2785 și identificăm o grupă de 23 la nivelul sutelor, două grupe de 23 la nivelul zecilor, o grupă de 23 la nivelul unităților și ne mai rămân 2 unități (restul).



4. NUMERE ÎN BAZA X: INTRODUCEREA POLINOAMELOR

În cadrul programei de liceu, în clasa a XII-a, găsim capitolul de „Polinoame” unde noțiunea de polinom este definită foarte sofisticat astfel:

DEFINIȚIA 1. ([4]) Un element $f \in A[X]$ de forma $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$, $a_i \in A$, $i \geq 0$, se numește polinom în nedeterminata X cu coeficienți în inelul comutativ și unitar A .

Dar o definiție poetică ar putea fi:

DEFINIȚIA 2. Polinoamele sunt expresii matematice formate din variabile și coeficienți, care pot fi folosite pentru a reprezenta numere în diferite baze. Un polinom în baza X poate fi scris sub forma

$$f(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_2X^2 + a_1X^1 + a_0,$$

unde coeficienții a_i sunt numerele din baza respectivă. Această formă permite manipularea și evaluarea polinoamelor în mod eficient.

EXEMPLUL 9.

$$f(X) = 2X^2 + 3X + 1$$

Dacă dorim să evaluăm acest polinom în baza 10, putem înlocui X cu un număr, cum ar fi 2:

$$f(2) = 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 = 15.$$

Aceasta demonstrează cum polinoamele pot fi utilizate pentru a efectua calcule complexe într-un mod structurat.

Reprezentarea cu puncte explozive a polinomului:

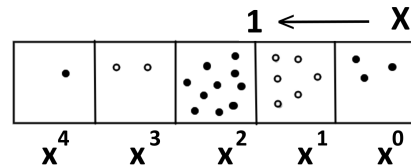
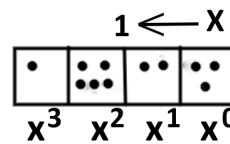
$$f(X) = X^3 + 5 \cdot X^2 + 2 \cdot X + 3,$$

cu coeficienți numere naturale.

Reprezentarea cu puncte explozive a polinomului:

$$f(X) = X^4 - 2X^3 + 10 \cdot X^2 - 6 \cdot X + 3,$$

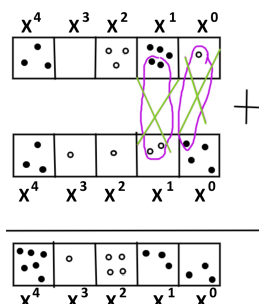
care are coeficienți numere întregi negative.



4.1. Adunarea polinoamelor.

Observăm că adunarea numerelor naturale ca și reprezentare cu puncte explozive este identică cu adunarea a două polinoame.

$$\begin{aligned}
 f(X) &= 3X^4 - 3X^2 + 5X - 1 \\
 g(X) &= 3X^4 - X^3 - X^2 - 2X + 4 \\
 f(X) + g(X) &= \\
 &= 6X^4 - X^3 - 4X^2 + 3X + 3
 \end{aligned}$$



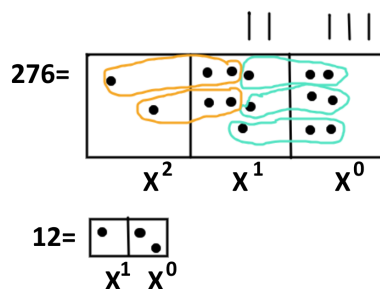
4.2. Împărțirea a două polinoame.

Se observă că împărțirea numerelor naturale ca și reprezentare cu puncte explozive este identică cu împărțirea a două polinoame.

EXEMPLUL 10.

$$276 : 12 = 23$$

$$\frac{2X^2 + 7X + 6}{X + 2} = 2X + 3$$



4.3. Împărțirea a două polinoame cu coeficienți numere întregi negative !

EXEMPLUL 11.

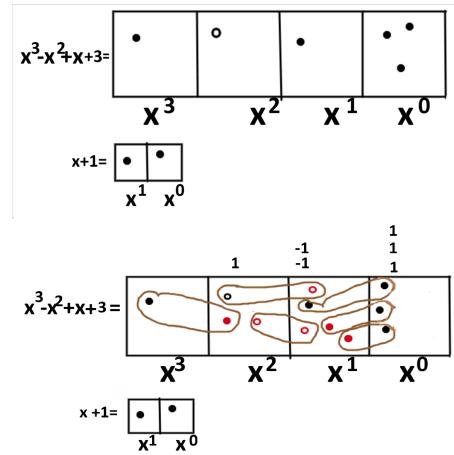
$$\frac{X^3 - X^2 + X + 3}{X + 1} =$$

Scopul nostru este să găsim grupuri de $(X + 1)$, dar apar dificultăți:

- poate că ne-am gândit să „de-explodăm” puncte pentru a introduce puncte noi (tods) în diagramă.
- dar aici apare o problemă: nu știm care este valoarea lui X , și astfel nu știm câte puncte ar trebui să desenăm pentru fiecare „de-explozie”.

Soluție: pentru a gestiona această dificultate, putem folosi un truc alternativ: putem completa celulele goale cu perechi de dots și tods. Aceasta păstrează valoarea celulei la zero, dar creează punctele necesare pentru a recunoaște tiparele dorite!

$$\frac{X^3 - X^2 + X + 3}{X + 1} = X^2 - 2X + 3$$



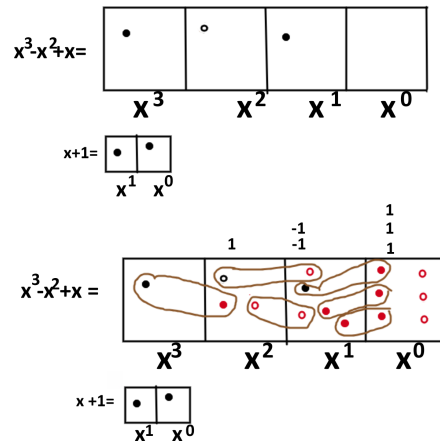
4.4. Împărțirea cu rest a două polinoame cu coeficienți numere întregi negative !

Foarte asemănător cu exemplul anterior, vom obține:

EXEMPLUL 12.

$$\frac{X^3 - X^2 + X}{X + 1}$$

$$\frac{X^3 - X^2 + X}{X + 1} = X^2 - 2X + 3 \text{ rest } (-3)$$



5. CONCLUZII

Recapitularea conceptelor fundamentale de algebră este esențială pentru elevii din ciclul gimnazial, aflați într-o etapă importantă de dezvoltare a gândirii logice și a abilităților de rezolvare a problemelor. Sistemele de numerație oferă baza pentru înțelegerea modului în care sunt reprezentate numerele și pentru realizarea corectă a operațiilor matematice. Operarea cu numere naturale și numere întregi contribuie la formarea unei înțelegeri solide a relațiilor numerice, întâlnite frecvent în viața de zi cu zi. De asemenea, polinoamele reprezintă un element central în studiul algebrei, fiind necesare pentru manipularea expresiilor și rezolvarea ecuațiilor.

Metoda punctelor „explozive” aduce o abordare vizuală și intuitivă acestor conținuturi, facilitând înțelegerea mecanismelor din spatele operațiilor matematice. Prin utilizarea acestei metode, elevii își pot dezvolta încrederea în propriile raționamente și pot construi o bază conceptuală solidă pentru explorări matematice mai avansate.

BIBLIOGRAFIE

- [1] J. TANTON *Thinking Mathematics!*, Volume 1, (2009).
- [2] I. CICU, Ș. SMARANDACHE, I. IACOB, R. CEUCĂ, *MATEMATICĂ, Clasa a V-a*, Intuitext, (2022), 48-49.
- [3] M. D. STOICA, T. HANGHIUC, *MATEMATICĂ, Clasa a VI-a*, Booklet, (2023), 75-85.
- [4] M. BURTEA, G. BURTEA, *MATEMATICĂ, Manual pentru clasa a XII-a*, Carminis, (2007), 110-115.
- [5] *The Mathenaeum*, disponibil la: <https://thewessens.net/ClassroomApps/subindex.html?topic=models&id=dotsmodels&path=Models>
- [6] V. ȘTEFĂNESCU, M. ȚENACHE, T. POPA, *MATEMATICI CONTEMPORANE, Științifică și Enciclopedică*, București, (1979), 81-99.

Oana Maria Pârva

*Liceul Teoretic „Avram Iancu” Brad, Catedra de Matematică
335200, Hunedoara, România*

e-mail: oanamaria.trif@gmail.com

Aurica Viuța Boros

*Școala Gimnazială „Dacia”, Oradea, Catedra de Matematică
410464, Bihor, România*

e-mail: auricaviutaboros@gmail.com

Alin Florin Novac-Iuhas

*Școala Gimnazială „Dacia”, Oradea, Catedra de Matematică
410464, Bihor, România*

e-mail: anovac2004@yahoo.com

Andreea Cunțan

*Universitatea „1 Decembrie 1918” Alba Iulia, Facultatea de Științe,
Departamentul de Matematică-Informatică, 510009 Alba Iulia, România*

e-mail: andreea.cuntan@uab.ro