

AC-UL ALBINEI ȘI DRUMUL PRIN GEOMETRIE

Elena-Maria Mărginean, Cătălina-Maria Rus, and Mărioara Safta

Abstract Rezolvarea problemelor de geometrie la Evaluarea Națională nu reprezintă doar un exercițiu matematic, ci un test complex al gândirii logice, al stăpânirii emoțiilor și al capacității de adaptare. În sala de clasă, elevul de gimnaziu este obișnuit să parcurgă probleme legate de o anumită unitate de învățare: o lecție despre Teorema lui Thales, o aplicație a Teoremei lui Pitagora sau o demonstrație bazată pe proprietățile cercului. În acel context, el știe „ce trebuie să aplice”, pentru că direcția îi este clar oferită de profesor.

La examen însă, situația se schimbă fundamental: problemele de geometrie pot solicita întreaga materie din gimnaziu, fără a indica teorema potrivită. Aceasta generează o tensiune emoțională firească: elevul știe teoria, dar nu reușește mereu să identifice „cu ce să înceapă”. Blocajul apare nu din lipsa cunoștințelor, ci din dificultatea de a alege metoda corectă într-o situație deschisă.

Un principiu esențial în rezolvarea problemelor de geometrie, fie ele plane sau spațiale, este acela de a începe cu „punctul cel mai slab” al problemei, adică locul unde informația este mai clară sau unde elevul recunoaște imediat o relație cunoscută. Este asemenea unui **ac de albină care înțeapă mierea**: de la o mică pătrundere într-o structură complexă, se deschide treptat întregul drum al rezolvării.

Această alegere inițială este însă una dintre cele mai dificile etape. Elevul de 15 ani resimte adesea o tensiune emoțională firească: deși știe teoria, nu reușește mereu să identifice „cu ce să înceapă”. Blocajul apare nu din lipsa cunoștințelor, ci din dificultatea de a selecta metoda corectă într-o situație deschisă, unde nu există un indiciu direct despre ce teoremă să fie aplicată.

Aici intervine rolul algoritmului de gândire: revenirea asupra desenului, recitirea atentă a cerinței și construirea pas cu pas a unui plan de rezolvare. Geometria se transformă astfel într-un test al **rezilienței intelectuale**: elevul care își păstrează calmul și începe de la „punctul de intrare” pe care îl cunoaște poate, printr-o succesiune de pași logici, să atingă soluția.

Deosebirea între geometria plană și cea în spațiu adaugă un strat suplimentar de complexitate. În plan, elevul poate urmări vizual toate relațiile; în spațiu, trebuie să învețe să „pătrundă în figură”, să o descompună în planuri și secțiuni, să transforme problema tridimensională într-o succesiune de probleme plane. Această diferență explică de ce, în fața problemelor de tipul celor de la subiectul 6, unii elevi se simt copleșiți: planul de rezolvare nu este evident, ci necesită o gândire flexibilă și capacitatea de a explora mai multe

metode alternative. Din această perspectivă, geometria nu este doar o disciplină de studiu, ci și un instrument de ierarhizare. Ea distinge natural între elevii cu înclinații către domeniul real – analitic, abstract, structural – și cei care posedă talente spre zona umanistă – comunicare, expresie, creativitate verbală. Această triere nu trebuie privită ca o nedreptate, ci ca o orientare firească: fiecare elev își va găsi locul potrivit, acolo unde se potrivește cu adevărat, unde se simte în armonie cu propriile aptitudini.

Dacă în viitor generațiile vor stăpâni temeinic geometria, atunci cu siguranță un alt filtru va fi folosit pentru a diferenția elevii. Esențial rămâne însă același principiu: fiecare va ajunge să își urmeze drumul firesc, iar educația are menirea de a ghida aceste drumuri, nu de a le îngrădi. Geometria, cu logica ei riguroasă și cu frumusețea figurilor ei, este doar o etapă din acest proces, o „rimă” bine așezată în poezia vieții fiecărui elev, care, în final, se va plia acolo unde se simte cu adevărat împlinit.

1. ALGORITMUL REZOLVĂRII ÎN GEOMETRIA PLANĂ ȘI ÎN GEOMETRIA ÎN SPAȚIU

1. Geometria plană – pașii esențiali

La problemele de geometrie plană, planul de rezolvare se bazează pe câțiva pași clari:

1. **Citirea atentă a enunțului** – identificarea datelor de intrare (ce este cunoscut) și a cerinței (ce se cere demonstrat sau calculat).
2. **Construirea desenului** – trasarea figurii și notarea tuturor elementelor. Un desen corect este „scheletul” raționamentului.
3. **Analiza figurii** – căutarea triunghiurilor asemenea, a patrulaterelor speciale, a simetriilor sau a altor proprietăți.
4. **Aplicarea teoremelor** – alegerea metodei potrivite (Thales, Pitagora, criterii de asemănare, proprietăți ale cercului, metoda ariilor).
5. **Redactarea clară a pașilor** – ordonarea logică a demonstrației sau a calculelor.

Dacă elevul se blochează, o strategie utilă este **să pornească de la cerință și să încerce să o descompună**: „Pentru a demonstra X, ar trebui să arăt că Y; pentru Y, ce relații cunosc?” Acest mecanism invers (de la concluzie spre ipoteze) este un instrument puternic.

2. Geometria în spațiu – diferențe și dificultăți

În geometria în spațiu, planul de rezolvare urmează aceiași pași generali, dar există particularități:

- Figura nu mai este bidimensională, iar elevii întâmpină dificultăți în „a pătrunde în figură”. De aceea, este important să distingă între **date de intrare** (lungimi de muchii, înălțimi, unghiuri date) și **date de ieșire** (ce trebuie calculat sau demonstrat).

- Un pas crucial este **identificarea planurilor și secțiunilor** relevante: în spațiu, soluția se găsește adesea prin reducerea problemei la o secțiune plană.
- Diferența majoră față de geometria plană este că **nu toate relațiile pot fi vizualizate direct**; uneori trebuie să „desenezi mental” un plan auxiliar sau să proiectezi problema într-o figură plană.

Elevii trebuie să își dezvolte abilitatea de **a privi figura 3D ca pe o colecție de figuri plane**: triunghiuri, dreptunghiuri, secțiuni circulare. Aceasta transformă problema geometriei în spațiu într-o succesiune de probleme plane mai accesibile.

3. Dimensiunea psihologică și emoțională

Un aspect esențial este **starea emoțională a elevului de 15 ani**. În clasă, elevul poate reproduce imediat o metodă lucrată anterior, dar la examen apare dificultatea:

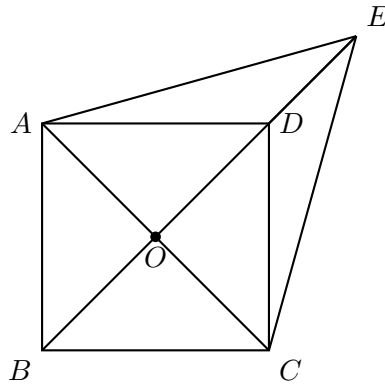
- are la dispoziție toată materia, fără ca enunțul să îi indice ce teoremă să folosească;
- presiunea timpului și emoțiile pot bloca accesul la cunoștințe deja bine însușite;
- se poate instala senzația de „știu teoria, dar nu știu ce să aplic acum”.

Pentru a depăși acest blocaj, elevul trebuie să învețe să gândească algoritmic: **să citească cerința, să noteze datele, să reducă problema la figuri mai simple, să încerce mai multe abordări**. Conștientizarea faptului că există mereu „mai multe drumuri” (ca în problema 6b) are un efect eliberator: elevul nu trebuie să caute „singura metodă corectă”, ci o cale care funcționează.

Problema 6b ilustrează perfect diferența între o lucrare de clasă – unde metoda este sugerată – și examenul național – unde elevul trebuie să **aleagă singur metoda**. Ea arată cum geometria în spațiu devine un teren de selecție între elevii care doar reproduc pași învățați și cei care gândesc algoritmic și flexibil. Astfel, geometria rămâne un instrument de ierarhizare, dar și un exercițiu de maturizare intelectuală, în care fiecare elev învață să caute drumul care i se potrivește.

2. PROBLEMA 4. METODA 1

Se consideră pătratul $ABCD$ și triunghiul echilateral ACE , astfel încât punctele D și E sunt situate de aceeași parte a dreptei AC . Perimetrul pătratului $ABCD$ este egal cu 48 cm.



Să se demonstreze că distanța de la punctul D la dreapta AE este egală cu $3\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)$ cm.

IPOTEZĂ

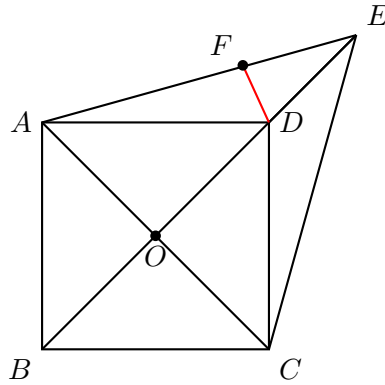
Se dă pătratul $ABCD$ și triunghiului echilateral ACE .

- perimetrul pătratului $ABCD$ este egal cu 48 cm;
- punctele D și E sunt situate pe aceeași parte a dreptei AC .

CONCLUZIE

Distanța de la punctul D la dreapta AE este egală cu $3\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)$ cm.

DEMONSTRAȚIE



Date inițiale: Dacă perimetrul pătratului $ABCD = 8$ cm, atunci latura pătratului este

$$l = \frac{48}{4} = 12 \text{ cm}$$

Din proprietățile pătratului știm că diagonala AC are lungimea

$$AC = l\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$$

Pasul 1. Observație asupra triunghiului ACE . În triunghiul echilateral ACE , dreapta care unește vârful E cu mijlocul bazei AC este **înălțime** și **mediatoare**, ceea ce rezultă că EO este perpendiculară pe AC și trece prin mijlocul laturii.

Pasul 2. Observație asupra triunghiului DAC . În triunghiul DAC observăm că $DA = DC$ (ambele sunt laturi ale pătratului), deci DAC este un triunghi isoscel cu vârful în D . Într-un triunghi isoscel, segmentul care pleacă din vârful și trece prin mijlocul bazei (mijlocul lui AC) este **mediatoare** și perpendicular pe baza. Deci, și DO este perpendicular pe AC și trece prin O .

Pasul 3. Condiția de coliniaritate a punctelor E, D, O . Cum atât EO cât și DO sunt perpendiculare pe aceeași dreaptă AC și ambele trec prin O , ele coincid ca dreaptă $\implies$ în consecință punctele E, D, O sunt **coliniare**. (Adică D și E se află pe aceeași perpendiculară la AC prin O)

Pasul 4. Calculul lungimii EO . (înălțimea triunghiului echilateral ACE din E pe baza AC).

Pentru un unghi echilateral de latură AC , înălțimea este $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AC$. Deci,

$$EO = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AC = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 12\sqrt{2} = 6\sqrt{6}.$$

Pasul 5. Calculul lungimii DO . (distanța de la vârful D la mijlocul O al diagonalei AC).

Știm că O este centrul pătratului, iar D este unul din vârfurile acestuia, deci distanța DO este distanța de la centru la vârf. Aceasta este jumătate din diagonala pătratului, mai precis

$$DO = \frac{12\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$$

Pasul 6. Calculul lungimii DE și DF . Fiind punctele E, D, O coliniare pe aceeași latură, atunci

$$DE = EO - DO = 6\sqrt{6} - 6\sqrt{2} \implies DE = 6\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)$$

Fie DF o dreaptă perpendiculară pe AE , atunci rezultă că $\angle DEF = 90^\circ$. Într-un triunghi dreptunghic, cateta opusă unghiului de 30 de grade are lungimea egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei, deci

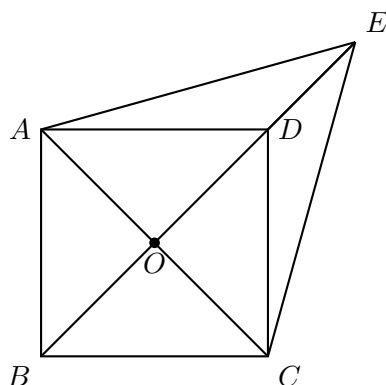
$$DF = \frac{DE}{2} = 3\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)$$

Pasul 7. Concluzie. Am demonstrat că

$$DF = 3\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)$$

3. PROBLEMA 4, METODA 2.

Se consideră pătratul $ABCD$ și triunghiul echilateral ACE , astfel încât punctele D și E sunt situate de aceeași parte a dreptei AC . Perimetrul pătratului $ABCD$ este egal cu 48 cm.



Să se demonstreze că distanța de la punctul D la dreapta AE este egală cu $3\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)$ cm.

IPOTEZĂ

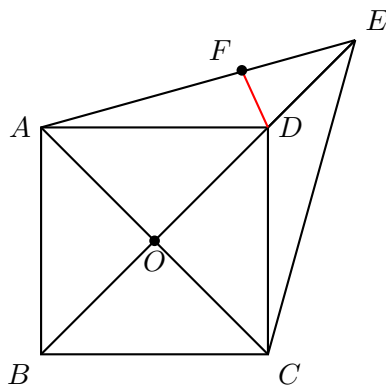
Se dă pătratul $ABCD$ și triunghiului echilateral ACE .

- perimetrul pătratului $ABCD$ este egal cu 48 cm;
- punctele D și E sunt situate pe aceeași parte a dreptei AC .

CONCLUZIE

Distanța de la punctul D la dreapta AE este egală cu $3\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)$ cm.

DEMONSTRAȚIE



Date inițiale: Dacă perimetrul pătratului $ABCD = 8$ cm, atunci latura pătratului este

$$l = \frac{48}{4} = 12 \text{ cm}$$

Din proprietățile pătratului știm că diagonala AC are lungimea

$$AC = l\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$$

Pasul 1. Calculul ariei triunghiului ADE .

$$\begin{aligned} A_{ADE} &= A_{AOE} - A_{AOD} \\ &= \frac{OE \cdot AO}{2} - \frac{AO \cdot OD}{2} = \frac{AO}{2}(OE - OD) \\ &= \frac{AO \cdot DE}{2} = \frac{6\sqrt{2}}{2} \cdot (6\sqrt{6} - 6\sqrt{2}) \\ &= 18\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}(\sqrt{3} - 1) = 36(\sqrt{3} - 1) \end{aligned}$$

Pasul 2. Calculul distanței de la punctul D la dreapta AE .

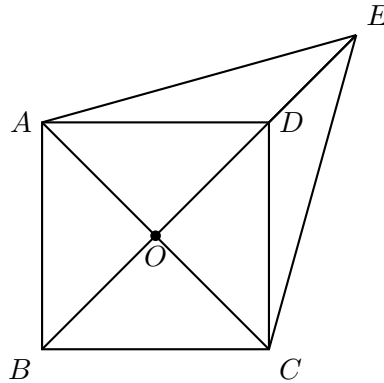
$$\begin{aligned} A_{ADE} &= \frac{DF \cdot AE}{2} \implies \\ DF &= \frac{2 \cdot 36(\sqrt{3} - 1)}{12\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1) \end{aligned}$$

Pasul 3. Concluzie. Am demonstrat că

$$DF = 3\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)$$

4. PROBLEMA 4, METODA 3.

Se consideră pătratul $ABCD$ și triunghiul echilateral ACE , astfel încât punctele D și E sunt situate de aceeași parte a dreptei AC . Perimetrul pătratului $ABCD$ este egal cu 48 cm.



Să se demonstreze că distanța de la punctul D la dreapta AE este egală cu $3\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)$ cm.

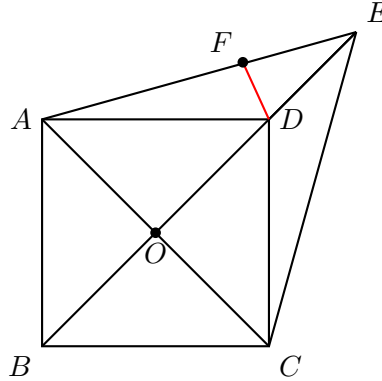
IPOTEZĂ

Se dă pătratul $ABCD$ și triunghiului echilateral ACE .

- perimetrul pătratului $ABCD$ este egal cu 48 cm;
- punctele D și E sunt situate pe aceeași parte a dreptei AC .

CONCLUZIE

Distanța de la punctul D la dreapta AE este egală cu $3\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)$ cm.

DEMONSTRAȚIE

Date inițiale: Dacă perimetrul pătratului $ABCD = 8$ cm, atunci latura pătratului este

$$l = \frac{48}{4} = 12 \text{ cm}$$

Din proprietățile pătratului știm că diagonala AC are lungimea

$$AC = l\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$$

Pasul 1. Calculul ariei triunghiului AEC . Aria unui triunghi echilateral de latură a este

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2.$$

În cazul nostru

$$A_{AEC} = \frac{\sqrt{3} \cdot (12\sqrt{2})^2}{4} = \sqrt{3} \cdot 288 = 72\sqrt{3}.$$

Pasul 2. Calculul ariei triunghiului ADC . Diagonala AC împarte pătratul în două triunghiuri congruente, deci

$$A_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot \text{aria pătratului} = \frac{1}{2} \cdot 144 = 72.$$

Pasul 3. Calculul ariei triunghiului ADE . Aria triunghiului ADE este egală cu jumătate din diferența ariilor triunghiurilor AEC și ADC .

$$A_{ADE} = \frac{A_{AEC} - A_{ADC}}{2} = \frac{72\sqrt{3} - 72}{2} = 36(\sqrt{3} - 1)$$

$$A_{ADE} = 36(\sqrt{3} - 1)$$

Pasul 4. Calculul distanței de la punctul D la dreapta AE .

$$A_{ADE} = \frac{DF \cdot AE}{2} \implies$$

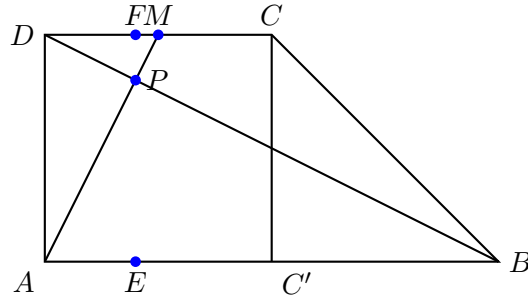
$$DF = \frac{2 \cdot 36(\sqrt{3} - 1)}{12\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)$$

Pasul 5. Concluzie. Am demonstrat că

$$DF = 3\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)$$

5. PROBLEMA 5, METODA 1.

Se consideră trapezul dreptunghic $ABCD$, cu $AB \parallel DC$, $\angle DAB = 90^\circ$, $AB = 8\text{ cm}$ și $AD = DC = 4\text{ cm}$. Punctul M este mijlocul segmentului DC și P este punctul de intersecție a dreptelor AM și BD



Să se calculeze aria patrulaterului $MPBC$.

IPOTEZĂ

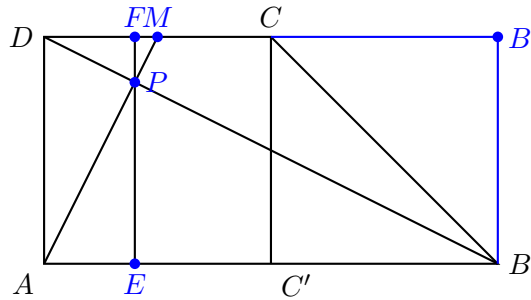
Se dă trapezul dreptunghic $ABCD$.

- $AB \parallel DC$, $\angle DAB = 90^\circ$, $AB = 8\text{ cm}$;
- punctele $AD = DC = 4\text{ cm}$;
- M - mijlocul segmentului DC .

CONCLUZIE

Aria patrulaterului $MPBC = ?$

DEMONSTRAȚIE



Date inițiale: Se consideră punctul E pe segmentul AB astfel încât $PE \perp AB$ și $PE = x$.

$$PE \perp AB, \quad PE = x \implies PF = 4 - x$$

Pasul 1. Avem $MD \parallel AB$. Din Teorema fundamentală a asemănării, rezultă că triunghiurile $\triangle MPD$ și $\triangle APB$ sunt asemenea:

$$\triangle MPD \sim \triangle APB$$

Pasul 2. Observație asupra triunghiurilor asemenea. Deoarece triunghiurile sunt asemenea, raportul laturilor corespunzătoare este egal:

$$\frac{MD}{AB} = \frac{PF}{FE}$$

Pasul 3. Înlocuim valorile numerice: Se cunosc lungimile $MD = 2$, $AB = 8$, $PF = 4 - x$, $FE = x$. Prin urmare:

$$\frac{2}{8} = \frac{4 - x}{x}$$

Pasul 4. Rezolvarea ecuației. Simplificăm raportul din stânga:

$$\frac{1}{4} = \frac{4 - x}{x}$$

Înmulțim în cruce:

$$x = 4(4 - x) \implies x = 16 - 4x \implies 5x = 16 \implies x = \frac{16}{5}$$

Pasul 5. Calcul ariei A_{MPBC} .

$$A_{MPBC} = A_{MCBA} - A_{PAB}$$

Folosim formulele ariilor:

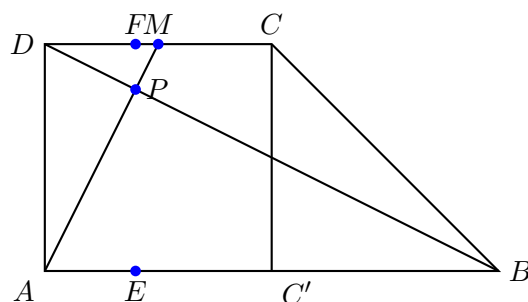
$$A_{MCBA} = \frac{(2 + 8) \cdot 4}{2}, \quad A_{PAB} = \frac{x \cdot 8}{2}$$

$$A_{MPBC} = 20 - \frac{8x}{2} = 20 - 4x = 20 - 4 \cdot \frac{16}{5} = 20 - \frac{64}{5} = \frac{36}{5} \text{ cm}^2$$

Pasul 6. Concluzie. $A_{MPBC} = \frac{36}{5} \text{ cm}^2$

6. PROBLEMA 5, METODA 2.

Se consideră trapezul dreptunghic $ABCD$, cu $AB \parallel DC$, $\angle DAB = 90^\circ$, $AB = 8\text{cm}$ și $AD = DC = 4\text{cm}$. Punctul M este mijlocul segmentului DC și P este punctul de intersecție a dreptelor AM și BD



Să se calculeze aria patrulaterului $MPBC$.

IPOTEZĂ

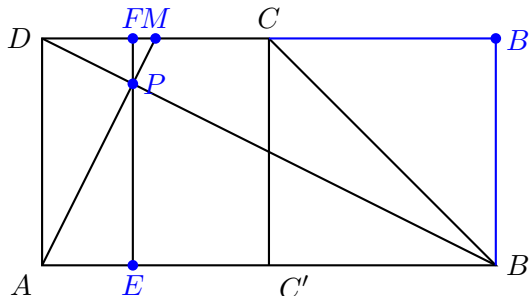
Se dă trapezul dreptunghic $ABCD$.

- $AB \parallel DC, \angle DAB = 90^\circ, AB = 8 \text{ cm};$
- punctele $AD = DC = 4 \text{ cm};$
- M - mijlocul segmentului DC .

CONCLUZIE

Aria patrulaterului $MPBC = ?$

DEMONSTRAȚIE



Date inițiale: Se consideră punctul E pe segmentul AB astfel încât $PE \perp AB$ și $PE = x$.

$$PE \perp AB, \quad PE = x$$

Pasul 1. Analog metodei 1, determinăm valoarea expresiei știind că $x = \frac{16}{5}$ cm.

$$\Rightarrow 4 - x = 4 - \frac{16}{5} = \frac{20 - 16}{5} = \frac{4}{5} \text{ cm}$$

Pasul 2. Identificăm ariile implicate: Dorim să aflăm aria suprafeței A_{MPBC} , care este diferența dintre aria mare $A_{BB'D}$ și ariile micilor triunghiuri $A_{BB'C}$ și A_{MPD} :

$$A_{MPBC} = A_{BB'D} - (A_{BB'C} + A_{MPD})$$

Pasul 3. Calculăm aria triunghiurilor $BB'D$, $BB'C$ și MPD :

$$A_{BB'D} = \frac{BB' \cdot B'D}{2} = \frac{8 \cdot 4}{2} = 16$$

$$A_{BB'C} = \frac{BB' \cdot B'C}{2} = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8$$

$$A_{MPD} = \frac{MD(4-x)}{2} = \frac{2 \cdot \frac{4}{5}}{2} = \frac{4}{5}$$

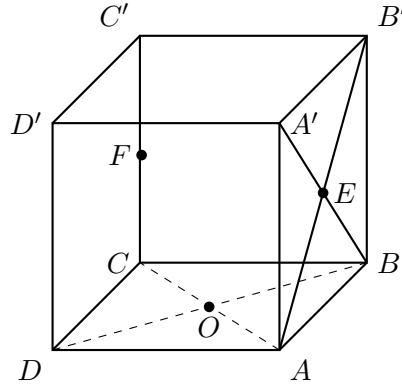
Pasul 4. Calculăm aria finală prin diferență:

$$A_{MPBC} = 16 - (8 + \frac{4}{5}) = 16 - \frac{44}{5} = \frac{80 - 44}{5} = \frac{36}{5}$$

Pasul 5. Concluzie. $A_{MPBC} = \frac{36}{5} \text{ cm}^2$

7. PROBLEMA 6, METODA 1.

Se consideră cubul $ABCD A' B' C' D'$ cu latura $AB = 8$. Dreapta AC și BD se intersectează în O , dreptele $A'B$ și AB' se intersectează în E , iar F este mijlocul lui CC' .



Să se demonstreze: $FO \perp DE$.

IPOTEZĂ

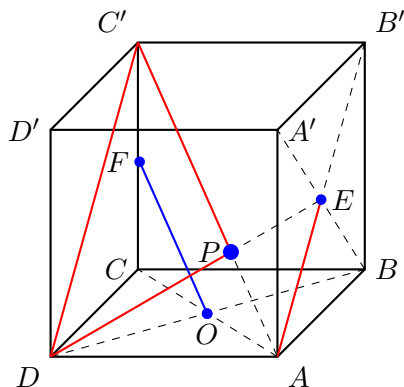
Se dă cubul $ABCD A' B' C' D'$ cu latura $AB = 8$. Punctele definite:

- O — intersecția diagonalelor bazei (AC și BD), deci O este mijlocul segmentului AC ;
- F — mijlocul segmentului CC' ;
- E — intersecția dreptelor $A'B$ și AB' .

CONCLUZIE

Dreptele FO și DE sunt **perpendiculare**.

DEMONSTRATIE



Pasul 1. Observație asupra triunghiului ACC' . În triunghiul ACC' , O este **mijlocul** lui AC și F este **mijlocul** lui CC' . Prin proprietatea **liniei mijlocii** rezultă că segmentul FO este **linie mijlocie** în triunghiul ACC' , deci

$$FO \parallel AC'.$$

Astfel unghiul format de FO cu DE este același cu unghiul format de AC' cu DE . Pentru a demonstra $FO \perp DE$ este suficient să arătăm că dreapta AC' este perpendiculară pe DE .

Pasul 2. Notăm. $P = AC' \cap DE$. Trebuie să arătăm că $\angle C'PD = 90^\circ$.

Pasul 3. Avem.

$$\left. \begin{array}{l} AD \parallel B'C' \\ AD \equiv B'C' \end{array} \right\} \Rightarrow ADC'B' \text{ paralelogram}$$

Dacă

$$ADC'B' \text{ paralelogram și } A, E, B' \text{ coliniare} \Rightarrow \mathbf{AE \parallel DC'}$$

Pasul 4. Teorema fundamentală a asemănării. O paralelă dusă la una dintre laturile unui triunghi formează cu celelalte două laturi (sau cu prelungirile acestora) un triunghi asememea cu cel dat. Prin urmare, dacă

$$AE \parallel DC \text{ și } \triangle APE \sim \triangle C'PD$$

rezultă că

$$\frac{AE}{DC'} = \frac{AP}{C'P} = \frac{PE}{PD}.$$

Pasul 5. Calculul lungimilor relevante (din datele cubului). Lungimile cunoscute ale cubului cu latura 8:

$$AC' = 8\sqrt{3}, \quad DC' = 8\sqrt{2}.$$

Din geometria figurii se găsește că

$$AE = \frac{1}{2}DC' = 4\sqrt{2}.$$

Din raportul $\frac{AE}{DC'} = \frac{1}{2} = \frac{AP}{C'P}$ rezultă

$$AP = \frac{1}{2}C'P.$$

Dar $AP + C'P = AC'$, deci

$$\frac{1}{2}C'P + C'P = AC' \Rightarrow \frac{3}{2}C'P = 8\sqrt{3},$$

de unde

$$C'P = \frac{16\sqrt{3}}{3}.$$

Din raportul $\frac{PE}{PD} = \frac{1}{2}$ rezultă $PE = \frac{1}{2}PD$, deci

$$DE = PD + PE = PD + \frac{1}{2}PD = \frac{3}{2}PD.$$

(Prin calcul geometric se găsește totodată $DE = 4\sqrt{6}$; din aceasta obținem)

$$\frac{3}{2}PD = 4\sqrt{6} \Rightarrow PD = \frac{8\sqrt{6}}{3}.$$

Pasul 6. Verificarea dreptunghiului (Pitagora). Verificăm că în triunghiul $C'PD$ se respectă teorema lui Pitagora la P :

$$C'P^2 + PD^2 = \left(\frac{16\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{8\sqrt{6}}{3}\right)^2 = \frac{256 \cdot 3}{9} + \frac{64 \cdot 6}{9} = \frac{768 + 384}{9} = \frac{1152}{9} = 128.$$

Dar $C'D^2 = (8\sqrt{2})^2 = 128$. Deci

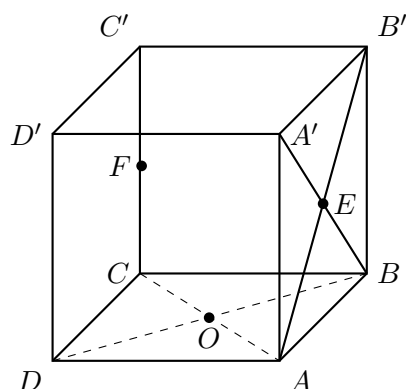
$$C'P^2 + PD^2 = C'D^2,$$

deci triunghiul $C'PD$ este **dreptunghic** în P , adică $\angle C'PD = 90^\circ$.

Pasul 7. Concluzie. Am arătat că $\angle C'PD = 90^\circ$. Deoarece $FO \parallel AC'$, rezultă că unghiul dintre FO și DE este tot drept. Prin urmare $FO \perp DE$, ceea ce trebuia demonstrat.

8. PROBLEMA 6, METODA 2.

Se consideră cubul $ABCD A'B'C'D'$ cu latura $AB = 8$. Dreapta AC și BD se intersectează în O , dreapta $A'B$ și AB' se intersectează în E , iar F este mijlocul lui CC' .



Să se demonstreze: $FO \perp DE$.

IPOTEZĂ

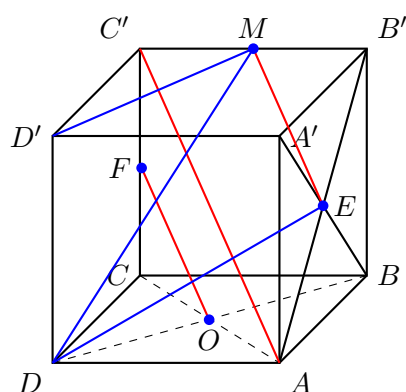
Se dă cubul $ABCD A'B'C'D'$ cu latura $AB = 8$. Punctele definite:

- O — intersecția diagonalelor bazei (AC și BD), deci O este mijlocul segmentului AC ;
- F — mijlocul segmentului CC' ;
- E — intersecția dreptelor $A'B$ și AB' .

CONCLUZIE

Dreptele FO și DE sunt **perpendiculare**.

DEMONSTRAȚIE



Pasul 1. Observație asupra triunghiului ACC' . În triunghiul ACC' , O este mijlocul lui AC și F este mijlocul lui CC' . Prin proprietatea **liniei mijlocii** rezultă că segmentul FO este **linie mijlocie** în triunghiul ACC' , deci

$$FO \parallel AC' \text{ și } FO = \frac{AC'}{2}.$$

Pasul 2. Observație asupra triunghiului $AB'C'$. În triunghiul $AB'C'$, E este **mijlocul** lui AB' și M este **mijlocul** lui $C'B'$. Prin proprietatea **liniei mijlocii** rezultă că segmentul ME este **linie mijlocie** în triunghiul $AB'C'$, deci

$$ME \parallel AC' \text{ și } ME = \frac{AC'}{2}.$$

Pasul 3. Relația dintre segmentele ME și FO . Din pașii anteriori rezultă:

$$ME = FO$$

$$ME \parallel FO$$

Deci, $FOME$ este un paralelogram.

Pasul 4. Unghiurile determinate. Se observă că:

$$\angle(FO, DE) = \angle(ME, DF) = \angle(MED),$$

deoarece $FO \parallel ME$ și DF este paralel cu muchia cubului.

Pasul 5. Determinarea lungimilor necesare. Calculăm:

$$AC' = 8\sqrt{3} \Rightarrow ME = \frac{AC'}{2} = 4\sqrt{3}.$$

În $\triangle DAE$ avem:

$$\left. \begin{array}{l} DA \perp (ABB'A') \\ AE \subset (ABB'A') \end{array} \right\} \Rightarrow DA \perp AE$$

rezultă că $\triangle DAE$ dreptunghic. Folosind calculul teoremei lui Pitagora, obținem:

$$DE = 4\sqrt{6} \text{ cm.}$$

În $\triangle D'C'M$ dreptunghic, avem:

$$MD' = 4\sqrt{5} \text{ cm,}$$

iar în $\triangle DD'M$ avem:

$$\left. \begin{array}{l} DD' \perp (A'D'C'B') \\ D'M \subset (A'D'C'B') \end{array} \right\} \Rightarrow DD' \perp D'M$$

rezultă că $\triangle DD'M$ dreptunghic. Folosind calculul teoremei lui Pitagora, obținem:

$$MD = 12 \text{ cm.}$$

Pasul 6. Aplicarea reciprocei teoremei lui Pitagora. În triunghiul $\triangle DEM$, verificăm dacă:

$$MD^2 = ME^2 + DE^2.$$

Înlocuind valorile:

$$12^2 = (4\sqrt{3})^2 + (4\sqrt{6})^2.$$

Calculăm:

$$144 = 16 \cdot 3 + 16 \cdot 6 = 48 + 96 = 144.$$

Egalitatea este adevărată.

Pasul 7. Concluzie. Deoarece în triunghiul DEM se verifică relația lui Pitagora, acesta este dreptunghic în E , adică:

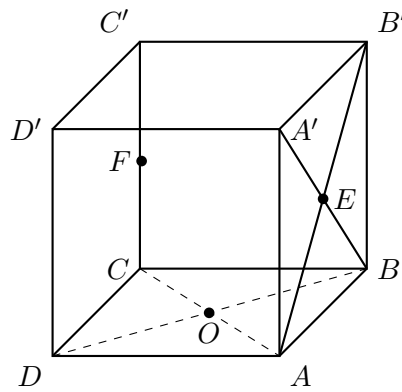
$$\angle MED = 90^\circ.$$

Din pasul (4) rezultă că $\angle(FO, DE) = \angle MED = 90^\circ$, deci:

$$FO \perp DE.$$

9. PROBLEMA 6, METODA 3.

Se consideră cubul $ABCD A' B' C' D'$ cu latura $AB = 8$. Dreapta AC și BD se intersectează în O , dreptele $A'B$ și AB' se intersectează în E , iar F este mijlocul lui CC' .



Să se demonstreze: $FO \perp DE$.

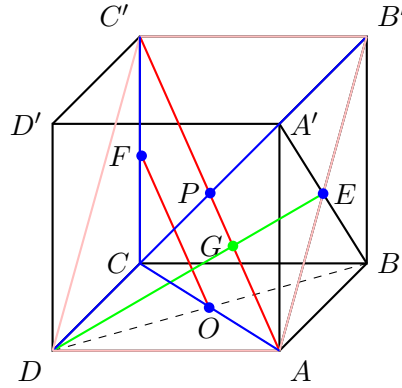
IPOTEZĂ

Se dă cubul $ABCD A' B' C' D'$ cu latura $AB = 8$. Punctele definite:

- O — intersecția diagonalelor bazei (AC și BD), deci O este mijlocul segmentului AC ;
- F — mijlocul segmentului CC' ;
- E — intersecția dreptelor $A'B$ și AB' .

CONCLUZIE

Dreptele FO și DE sunt **perpendiculare**.

DEMONSTRAȚIE

Pasul 1. Observație asupra triunghiului ACC' . În triunghiul ACC' , O este **mijlocul** lui AC și F este **mijlocul** lui CC' . Prin proprietatea **liniei mijlocii** rezultă că segmentul FO este **linie mijlocie** în triunghiul ACC' , deci

$$FO \parallel AC' \implies \angle FO, DE = \angle AC', DE$$

Pasul 2. Observație asupra dreptunghiului $AB'C'D$. În dreptunghiul $AB'C'D$, avem

$$AC' \cap DB' = P$$

Punctul de intersecție al diagonalelor unui dreptunghi este mijlocul ambelor diagonale și, de asemenea, centrul de simetrie al dreptunghiului. Acest punct este equidistant față de toate cele patru vârfuri ale dreptunghiului. Prin urmare, P este **mijlocul** lui AC' și DB'

Pasul 3. Observație asupra triunghiului DAB' . Medianele triunghiului DAB' sunt concurente într-un punct G numit **centru de greutate** al acestuia. Centrul de greutate se găsește pe fiecare mediană la $1/3$ de mijlocul laturii pe care cade mediana și $2/3$ de vârful triunghiului din care pleacă mediana. Prin urmare

$$\left. \begin{array}{l} DE \cap AC' = G \\ AP, DE = \text{mediane} \end{array} \right\} \implies G \text{ centru de greutate.}$$

Pasul 4. Calculăm:

$$AC' = 8\sqrt{3} \implies AE = \frac{AB'}{2} = 4\sqrt{2}.$$

În $\triangle DAE$ avem:

$$\left. \begin{array}{l} DA \perp (ABB'A') \\ AE \subset (ABB'A') \end{array} \right\} \implies DA \perp AE$$

rezultă că $\triangle DAE$ dreptunghic. Folosind calculul teoremei lui Pitagora, obținem:

$$DE = 4\sqrt{6} \text{ cm.}$$

Pasul 5. Punctul de greutate și determinarea lungimilor necesare. Din proprietatea medianelor prezentate la **pasul 3**, rezultă că:

$$PG = \frac{1}{3}AP = \frac{1}{3} \cdot \frac{AC'}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{6} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$C'G = C'P + PG = \frac{8\sqrt{3}}{2} + \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{16\sqrt{3}}{3}$$

$$DG = \frac{2}{3}DE = \frac{2}{3} \cdot 4\sqrt{6} = \frac{8\sqrt{6}}{3}$$

Pasul 6. Aplicarea reciprocei teoremei lui Pitagora. În triunghiul $\triangle DGC'$, verificăm dacă:

$$DC'^2 = DG^2 + C'G^2.$$

Înlocuind valorile:

$$(8\sqrt{2})^2 = \left(\frac{8\sqrt{6}}{3}\right)^2 + \left(\frac{8 \cdot 2\sqrt{3}}{3}\right)^2.$$

Împărțim toată ecuația la 8:

$$2 = \frac{6}{9} + \frac{4 \cdot 3}{9}$$

$$2 = \frac{18}{9} \implies (A)$$

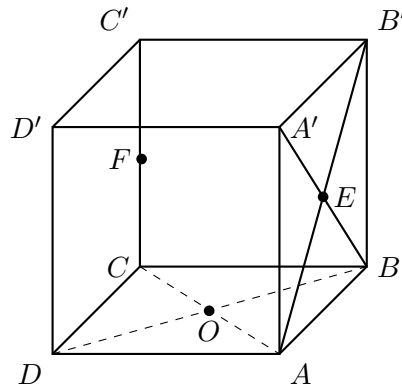
Egalitatea este adevărată. Prin urmare, în triunghiul DGC' se verifică relația lui Pitagora, acesta este dreptunghic în G , adică:

$$\angle DGC' = 90^\circ.$$

Pasul 7. Concluzie. Deoarece $FO \parallel AC'$, rezultă că unghiul dintre FO și $DE = \angle DGC' = 90^\circ$. Prin urmare $FO \perp DE$, ceea ce trebuia demonstrat.

10. PROBLEMA 6, METODA 4.

Se consideră cubul $ABCD A'B'C'D'$ cu latura $AB = 8$. Dreapta AC și BD se intersectează în O , dreptele $A'B$ și AB' se intersectează în E , iar F este mijlocul lui CC' .



Să se demonstreze: $FO \perp DE$.

IPOTEZĂ

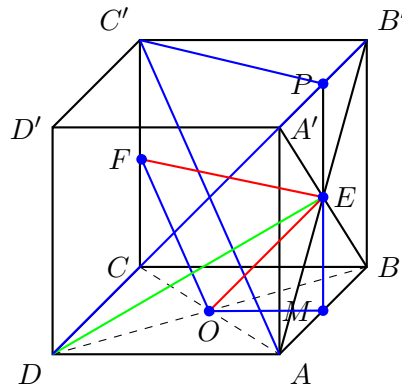
Se dă cubul $ABCD A' B' C' D'$ cu latura $AB = 8$. Punctele definite:

- O — intersecția diagonalelor bazei (AC și BD), deci O este **mijlocul** segmentului AC ;
- F — **mijlocul** segmentului CC' ;
- E — intersecția dreptelor $A'B$ și AB' .

CONCLUZIE

Dreptele FO și DE sunt **perpendiculare**.

DEMONSTRATIE



Pasul 1. Observație asupra triunghiului $A'B'C'$. În triunghiul $A'B'C'$, P este **mijlocul** lui $A'B'$ deci,

$$C'P = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}$$

Pasul 2. Observație asupra dreptunghiului $C'PEF$. Dacă $C'PEF$ este dreptunghi, atunci

$$C'P = FE = 4\sqrt{5}$$

Pasul 3. Observație asupra dreptunghiului $DC'B'P$. FO linie mijlocie în $\triangle CC'A$, ceea ce rezultă că

$$FO = \frac{AC'}{2} = 4\sqrt{3}$$

Pasul 4. Determinarea condiției de perpendicularitate.

$$\left. \begin{array}{l} FC \perp (ABCD) \\ CO \perp BD \\ CO, BD \subset (ABCD) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} FO \perp BD \text{ (conform teoremei celor trei perpendiculare)} \\ BD \subset (A'BD) \end{array}$$

Din $\triangle OME$, $M = 90^\circ$ avem $OM = ME = 4$ cm. Utilizând teorema lui Pitagora, obținem că

$$OE = 4\sqrt{2}$$

Aplicând reciproca teoremei lui Pitagora în $\triangle FOE$, obținem:

$$\mathbf{FO \perp OE}$$

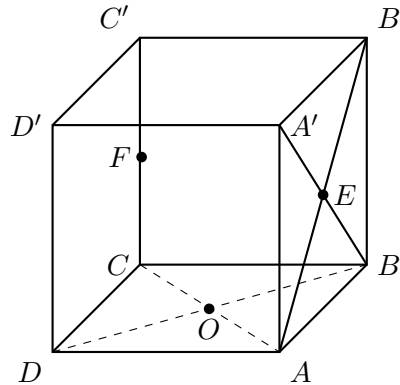
$$\left. \begin{array}{l} FO \perp OE \\ OE \in A'BD \\ FO \perp BD \\ BD \subset (A'BD) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} FO \perp (A'BD) \\ DE \subset A'BD \end{array} \right\} \Rightarrow$$

Pasul 5. Concluzie.

$$\mathbf{FO \perp DE}$$

11. PROBLEMA 6, METODA 5.

Se consideră cubul $ABCD A' B' C' D'$ cu latura $AB = 8$. Dreapta AC și BD se intersectează în O , dreptele $A'B$ și AB' se intersectează în E , iar F este mijlocul lui CC' .



Să se demonstreze: $FO \perp DE$.

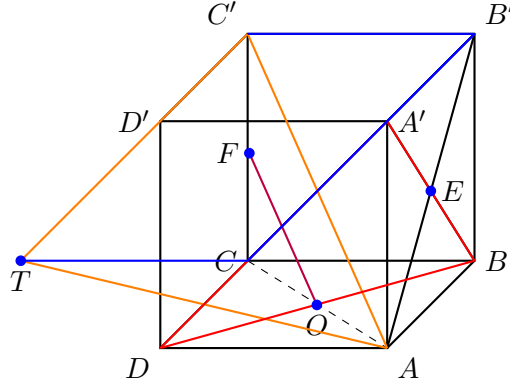
IPOTEZĂ

Se dă cubul $ABCD A' B' C' D'$ cu latura $AB = 8$. Punctele definite:

- O — intersecția diagonalelor bazei (AC și BD), deci O este mijlocul segmentului AC ;
- F — mijlocul segmentului CC' ;
- E — intersecția dreptelor $A'B$ și AB' .

CONCLUZIE

Dreptele FO și DE sunt **perpendiculare**.

DEMONSTRAȚIE

Pasul 1. Construim.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} C'T \parallel B'C \\ C'T \equiv B'C \end{array} \right\} &\Rightarrow C'B'CT - \text{paralelogram} \\ &\Rightarrow C'T = B'C = 8\sqrt{2} \end{aligned}$$

Pasul 2. $\triangle ABT$ - teorema lui Pitagora.

$$\Rightarrow AT = 8\sqrt{5}$$

Pasul 3. $\triangle AC'T$ - reciproca teoremei lui Pitagora.

$$\Rightarrow AC' \perp C'T$$

Cum

$$C'T \parallel B'C \Rightarrow AC' \perp B'C$$

Pasul 4. $FO \perp A'D$.

$$FO \parallel AC' \Rightarrow FO \perp B'C$$

dar

$$A'D \parallel B'C \Rightarrow \mathbf{FO} \perp \mathbf{A'D(1)}$$

Pasul 5.

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} FC \perp (ABCD) \\ CO \perp BD \\ CO, BD \subset (ABCD) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{folosind teorema celor trei perpendiculare, c\^a } \mathbf{FO} \perp \mathbf{BD(2)}$$

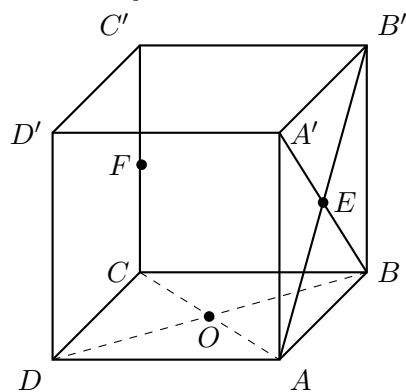
Pasul 6. $FO \perp (A'BD)$. Din (1) și (2) $\Rightarrow FO \perp (A'BD)$

Pasul 7. Concluzie.

$$DE \in (A'BD) \Rightarrow FO \perp DE$$

12. PROBLEMA 6, METODA 6.

Se consideră cubul $ABCD A' B' C' D'$ cu latura $AB = 8$. Dreapta AC și BD se intersectează în O , dreptele $A'B$ și AB' se intersectează în E , iar F este mijlocul lui CC' .



Să se demonstreze: $FO \perp DE$.

IPOTEZĂ

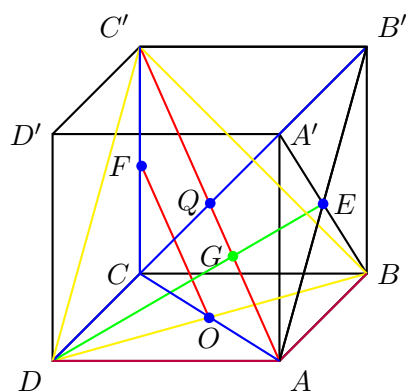
Se dă cubul $ABCD A' B' C' D'$ cu latura $AB = 8$. Punctele definite:

- O — intersecția diagonalelor bazei (AC și BD), deci O este mijlocul segmentului AC ;
- F — mijlocul segmentului CC' ;
- E — intersecția dreptelor $A'B$ și AB' .

CONCLUZIE

Dreptele FO și DE sunt **perpendiculare**.

DEMONSTRAȚIE



Pasul 1. Observație asupra triunghiului ACC' . În triunghiul ACC' , O este **mijlocul** lui AC și F este **mijlocul** lui CC' . Prin proprietatea **liniei mijlocii** rezultă că segmentul FO este **linie mijlocie** în triunghiul ACC' , deci

$$\mathbf{FO} \parallel \mathbf{AC'}$$

Pasul 2. G - centru de greutate în triunghiul $A'BD$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & G - \text{centru de greutate în } \triangle A'B'D \\ & G \in DE, \text{ unde } DE \text{ mediană} \end{aligned}$$

Pasul 3. $C'A'BD$ piramidă regulată.

$$\Rightarrow C'G \perp (A'BD)$$

Pasul 4. $AA'BD$ piramidă regulată.

$$\Rightarrow AG \perp (A'BD)$$

Pasul 5. A, G, C' - coliniare.

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{Pasul 3} \\ \text{Pasul 4} \end{array} \right\} \Rightarrow A, G, C' - \text{coliniare}$$

Pasul 6. AC' perpendicular pe $(A'BD)$.

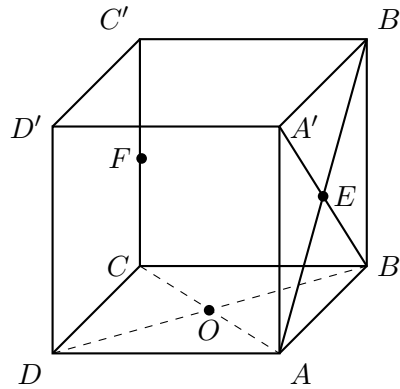
$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} DE \in (A'BD) \\ AC' \perp (A'BD) \\ DE \in (A'BD) \end{array} \right\} \Rightarrow AC' \perp DE$$

Pasul 7. Concluzie.

$$FO \parallel AC' \Rightarrow \mathbf{FO} \perp \mathbf{DE}$$

13. PROBLEMA 6, METODA 7.

Se consideră cubul $ABCD A'B'C'D'$ cu latura $AB = 8$. Dreapta AC și BD se intersectează în O , dreptele $A'B$ și AB' se intersectează în E , iar F este mijlocul lui CC' .



Să se demonstreze: $FO \perp DE$.

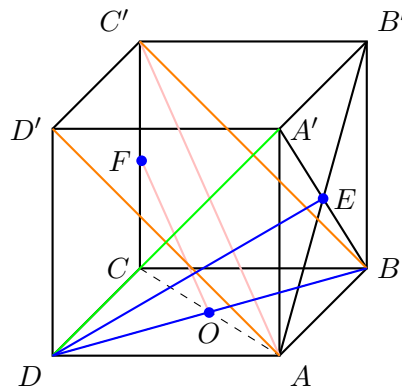
IPOTEZĂ

Se dă cubul $ABCD A' B' C' D'$ cu latura $AB = 8$. Punctele definite:

- O — **intersecția diagonalelor bazei** (AC și BD), deci O este **mijlocul segmentului AC** ;
- F — **mijlocul segmentului CC'** ;
- E — **intersecția dreptelor $A'B$ și AB'** .

CONCLUZIE

Dreptele FO și DE sunt **perpendiculare**.

DEMONSTRAȚIE

Pasul 1. Dacă.

$$\left. \begin{array}{l} D'C' \perp (ADD'A') \\ A'D \subset (ADD'A') \\ CO, BD \subset (ABCD) \end{array} \right\} \Rightarrow D'C' \perp A'D$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} A'D \perp D'C' \\ A'D \perp AD' \\ \text{din } (ADD'A') \text{ pătrat} \end{array} \right\} \Rightarrow A'D \perp (AD'C') \text{ dar } AC' \subset (AD'C')$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} A'D \perp AC' \\ \text{dar } AC' \parallel FO \text{ (FO - linie mijlocie în } \triangle ACC') \end{array} \right\} \Rightarrow A'D \perp FO(1)$$

Pasul 2. Avem.

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} FC \perp (ABCD) \\ CO \perp BD \\ CO, BD \subset (ABCD) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{folosind teorema celor trei perpendiculare, că } FO \perp BD(2)$$

Pasul 3. Din (1) și (2).

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} FO \perp (A'DB) \\ DF \subset (A'DB) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

Pasul 4. Concluzie.

$\implies \mathbf{FO} \perp \mathbf{DE}$

CONCLUZIE

De reținut este că, în matematică — și mai ales în geometrie — există o distincție esențială: problemele de examen, precum cele din Evaluarea Națională, oferă de regulă mai multe căi de rezolvare, ceea ce permite elevului să-și valorifice creativitatea și să-și aleagă drumul cel mai potrivit. Alegerea punctului de plecare — „**ac-ul albinei**” — devine momentul decisiv care deschide întregul proces de gândire: o pătrundere precisă într-o structură complexă, din care se poate construi pas cu pas întreaga soluție. Tocmai de aceea, blocajul nu apare din lipsă de teorie, ci din dificultatea de a decide „pe unde să intri în problemă” — sau, altfel spus, **unde pătrunde acul albinei pentru a scoate mierea**. Elevul învață astfel să fie rezilient, să revină la desen și să construiască algoritmic soluția, chiar dacă prima idee nu funcționează.

În contrast, **cele mai dificile probleme de matematică sunt adesea cele care au o singură soluție**. Istoria geometriei oferă exemple remarcabile de astfel de probleme, unde unicitatea soluției a reprezentat atât provocarea, cât și frumusețea lor:

- **Problema lui Apollonius (sec. III î.Hr.):** construcția cercului tangent la trei cercuri date. Are o soluție geometrică unică în anumite cazuri, iar generalizarea ei a devenit una dintre cele mai celebre probleme ale antichității.
- **Problema celor patru puncte cociclice:** dat fiind un triunghi și un punct interior, există o unică circumferință care trece prin vârfurile triunghiului și prin punctul dat.
- **Problema cercului celor nouă puncte:** pentru orice triunghi, cercul care trece prin mijloacele laturilor, picioarele înălțimilor și mijloacele segmentelor dintre ortocentru și vârfuri este unic.
- **Problema dreptei lui Euler:** toate elementele fundamentale ale unui triunghi (ortocentru, baricentru, circumcentru) se află pe o dreaptă unică.
- **Teorema lui Morley (1899):** unică și surprinzătoare, arată că intersecțiile trisectoarelor unghiurilor unui triunghi formează întotdeauna un triunghi echilateral.

Aceste exemple arată că frumusețea matematicii nu constă doar în rezolvarea rapidă a exercițiilor, ci și în descoperirea unor structuri unice, irepetabile, care au fascinat generații întregi de matematicieni.

BIBLIOGRAFIE

- [1] SUBIECT MATEMATICĂ EVALUARE NAȚIONALĂ 2025