

POLINOAMELE MINIMALE ALE LUI $\cos \frac{2\pi}{n}$ ȘI $\sin \frac{2\pi}{n}$

Andrei Marcus

Rezumat. Prezentăm câteva metode elementare pentru calculul polinomului minimal al unor numere algebrice trigonometrice.

MSC 2000. 12F05.

Key words. Polinom ireductibil, polinom minimal, polinoamele lui Cebîșev.

1. INTRODUCERE

Este bine cunoscut faptul că numerele reale $\cos 2\pi r$ și $\sin 2\pi r$, unde r este rațional, sunt numere algebrice, adică sunt rădăcini ale unor polinoame cu coeficienți raționali. Pe de altă parte, Felix Klein a arătat în 1897 că numerele $\cos r$ și $\sin r$ sunt transcendente.

Studiul acestora a prezentat interes pentru mulți autori având motivații diverse, dar mai ales prin prisma legăturii cu polinomul ciclotomic Φ_n (polinomul minimal al lui $\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$) și particular cu probleme de construcție cu rigla și compasul. Se știe că gradul polinomului ciclotomic Φ_n este numărul lui Euler $\phi(n)$. Dacă $r = k/n$, unde k și n sunt prime între ele ($n > 4$), atunci D. H. Lehmer [5] a demonstrat că gradul polinomului minimal al lui $\cos 2\pi r$ este $\phi(n)/2$, iar gradul polinomului minimal al lui $\sin 2\pi r$ este $\phi(n)$ dacă $(n, 8) < 4$, este $\phi(n)/4$ dacă $(n, 8) = 4$ și este $\phi(n)/2$ dacă $(n, 8) = 8$. Un rezultat asemănător privind gradul polinomului minimal al lui $\tan 2\pi r$ se găsește în [7, Chapter 3].

Polinomul minimal al lui $\cos \frac{2\pi}{n}$ este uzual notat prin Ψ_n . Polinoamele lui Cebîșev de prima și a doua speță T_n respectiv U_n sunt definite prin

$$T_n(\cos t) = \cos nt, \quad U_n(\cos t) = \frac{\sin((n+1)t)}{\sin t}.$$

Multiple conexiuni între aceste polinoame sunt studiate în [1], [2], [3], [4] și [8].

Lucrările [9] și [10] prezintă liste de polinoame cu coeficienți raționali care au ca rădăcini numere „trigonometrice”. În aceste articole, precum și în cele menționate mai sus, este doar indicată ideea de calcul pentru polinoamele Ψ_n și de multe ori sunt folosite considerații mai avansate de algebră, cum ar fi grupul Galois al unui polinom. Scopul notei de față este de a prezenta în detaliu câteva metode elementare de calcul al polinoamelor minimale ale lui $\cos \frac{2\pi}{n}$ și $\sin \frac{2\pi}{n}$, metode accesibile la nivel de liceu. Toate noțiunile și rezultatele neexplicate aici pot fi găsite în [6].

2. PRELIMINARII

În această secțiune introducem notațiile de bază și prezentăm câteva formule utile. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n > 3$.

Notații:

- $t = 2\pi/n$.
- $x = \cos t$, $y = \sin t$.
- $\omega = x + iy$, $\theta = -i\omega = \sin t - i \cos t$.

Cu aceste notații avem:

$$(1) \quad \omega^n = 1, \quad \theta^{2n} = i^n.$$

$$(2) \quad 2x = \omega + \frac{1}{\omega}, \quad 2y = \theta + \frac{1}{\theta}.$$

Din formula lui de Moivre avem

$$(x + iy)^n = x^n = (\cos t + i \sin t)^n = \cos nt + i \sin nt.$$

Pe de altă parte, din binomul lui Newton avem

$$(x + iy)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} yi + C_n^2 x^{n-2} y^2 i^2 + C_n^3 x^{n-3} y^3 i^3 + \dots$$

Identificând părțile reale respectiv părțile imaginare, obținem

$$(3) \quad \cos nt = x^n - C_n^2 x^{n-2} y^2 + C_n^4 x^{n-4} y^4 - C_n^6 x^{n-6} y^6 + \dots$$

$$(4) \quad \sin nt = C_n^1 x^{n-1} y - C_n^3 x^{n-3} y^3 + C_n^5 x^{n-5} y^5 - \dots$$

Așadar, deoarece $x^2 + y^2 = 1$, $\cos nt$ este polinom de grad n în $\cos t$. Dacă n este impar, atunci $\sin nt$ este polinom de grad n în $\sin t$, iar dacă n este par, atunci $\sin nt = \cos t \cdot (\text{polinom de grad } n-1 \text{ în } \sin t)$.

Enumerăm câteva identități pe care le vom folosi în continuare.

$$(5) \quad \cos 3t = 4x^3 - 3x, \quad \sin 3t = -4y^3 + 3y.$$

$$(6) \quad \cos 4t = 8x^4 - 8x^2 + 1, \quad \sin 4t = 2x(-4y^3 + 2y).$$

$$(7) \quad \cos 5t = 16x^5 - 20x^3 + 5x, \quad \sin 5t = 16y^5 - 20y^3 + 5y.$$

3. APLICAȚII

În această secțiune prezentăm trei metode pentru calculul polinoamelor minimale ale lui $x = \cos t$ și $y = \sin t$, în cazurile $n = 5$ (doar pentru y), $n = 7$ și $n = 9$.

3.1. Fie $n = 5$. Fie $t = 2\pi/5$.

3.1.1. Metoda 1. Pornim de la observația că $\sin 3t = -\sin 2t$, deoarece $3t + 2t = 2\pi$. De aici, folosind faptul că $\sin t \in (0, 1)$ obținem ecuațiile:

$$-4y^3 + 3y = -2xy,$$

$$x = \frac{3 - 4y^2}{2},$$

$$1 - y^2 = \frac{1}{4}(9 - 24y^2 + 16y^4),$$

$$16y^4 - 20y^2 + 5 = 0.$$

3.1.2. Metoda 2. Folosind formulele din Secțiunea 2, obținem imediat aceeași ecuație ca mai sus:

$$0 = \sin 5t = 16y^4 - 20y^2 + 5.$$

3.1.3. Metoda 3. Folosim egalitățile $\theta + 1/\theta = 2y$, $\theta^2 + 1/\theta^2 = 4y^2 - 2$ și $(\theta^2)^5 = -1$. Deoarece $\theta^2 + 1 \neq 0$, obținem că θ satisface ecuația reciprocă

$$(\theta^2)^4 - (\theta^2)^3 + (\theta^2)^2 - \theta^2 + 1 = 0.$$

Deoarece $\theta \neq 0$, obținem

$$(\theta^2)^2 + \frac{1}{(\theta^2)^2} - (\theta^2 + \frac{1}{\theta^2}) + 1 = 0.$$

De aici obținem din nou ecuația

$$16y^4 - 20y^2 + 5 = 0.$$

Este ușor de văzut că această ecuație bipătrată are o unică soluție reală în intervalul $(1/2, 1)$.

$$y = \sin \frac{2\pi}{5} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}}.$$

Aplicând Criteriul lui Eisenstein cu $p = 5$, deducem că polinomul

$$f = 16Y^4 - 20Y^2 + 5$$

este ireductibil peste $\mathbb{Q}$. Rezultă că f este polinomul minimal peste $\mathbb{Q}$ al lui $\sin \frac{2\pi}{5}$.

Calculule de mai sus rămân valabile înlocuind pe t cu kt , $k = 1, 2, 3, 4$. Așadar, $16Y^4 - 20Y^2 + 5$ este polinomul minimal peste $\mathbb{Q}$ al lui $\sin \frac{2k\pi}{5}$, $k = 1, 2, 3, 4$.

3.2. Fie $n = 7$. Fie $t = 2\pi/7$, $x = \cos t$, $y = \sin t$.

3.2.1. Metoda 1. a) Pentru x , pornim de la egalitatea $\cos 4t = \cos 3t$. Obținem ecuația

$$8x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 3x + 1 = 0,$$

care are o soluție neconvenabilă $x = 1$. Simplificând cu $x - 1$, obținem ecuația

$$8x^3 + 4x^3 - 4x - 1 = 0.$$

Polinomul

$$8X^4 - 4X^3 - 8X^2 + 3X + 1$$

este ireductibil deoarece are gradul 3 și nu are rădăcini reale, deci este polinomul minimal peste $\mathbb{Q}$ al lui $x = \cos 2\pi/7$.

b) Pentru y , pornim de la egalitatea $\sin 4t = -\sin 3t$, ridicăm la pătrat și înlocuim x^2 cu $1 - y^2$. Obținem ecuația

$$64y^6 - 112y^4 + 56y^2 - 7 = 0.$$

3.2.2. Metoda 2. a) Pentru x , pornim de la egalitatea $\sin 7t = 0$ și obținem ecuația

$$64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1 = 0,$$

care se descompune astfel:

$$(8x^3 + 4x^3 - 4x - 1)(8x^3 - 4x^3 - 4x + 1 = 0) = 0.$$

Rădăcinile primului factor sunt $\cos t$, $\cos 2t$ și $\cos 3t$, iar rădăcinile celui de-al doilea factor (de asemenea ireductibil) sunt $\cos \pi/7$, $\cos 3\pi/7$ și $\cos 5\pi/7$.

b) Pentru y , pornim tot de la egalitatea $\sin 7t = 0$ și obținem ecuația

$$64y^6 - 112y^4 + 56y^2 - 7 = 0.$$

Aplicând Criteriul lui Eisenstein cu $p = 7$, deducem că polinomul

$$64Y^6 - 112Y^4 + 56Y^2 - 7$$

este ireductibil, deci este polinomul minimal peste $\mathbb{Q}$ al lui $\sin 2k\pi/7$, pentru $k = 1, \dots, 6$, deci, în particular, și al lui $\sin \pi/7$.

3.2.3. Metoda 3. Fie $\omega = x + iy$, $\theta = -i\omega = \sin t - i \cos t$.

a) Pentru x , avem ca ω satisface ecuația reciprocă

$$\omega^6 + \omega^5 + \omega^4 + \omega^3 + \omega^2 + \omega + 1 = 0.$$

Împărțind cu ω^3 și folosind $2x = \omega + \frac{1}{\omega}$, obținem din nou ecuația

$$8x^3 + 4x^3 - 4x - 1 = 0.$$

b) Pentru y , pornim de la $\theta^{14} + 1 = 0$ și împărțim cu θ^6 . Folosind $2y = \theta + \frac{1}{\theta}$, obținem din nou ecuația

$$64y^6 - 112y^4 + 56y^2 - 7 = 0.$$

3.3. Fie $n = 9$. Fie $t = 2\pi/9$, $x = \cos t$, $y = \sin t$.

3.3.1. Metoda 1. a) Pentru x , pornim de la egalitatea $\cos 4t = \cos 5t$. Obținem ecuația

$$(x-1)(2x-1)(8x^3-6x+1)=0,$$

deci

$$8X^3-6X+1$$

este polinomul minimal peste $\mathbb{Q}$ al lui $x = \cos 2\pi/9$. Rădăcinile acestuia sunt $\cos t$, $\cos 2t$ și $\cos 4t$.

b) Pentru y , pornim de la egalitatea $\sin 4t = -\sin 5t$. Obținem ecuația

$$64y^6-96y^4+36y^2-3=0.$$

Aplicând Criteriul lui Eisenstein cu $p=3$, deducem că polinomul

$$64Y^6-96Y^4+36Y^2-3$$

este ireductibil, deci este polinomul minimal peste $\mathbb{Q}$ al lui $\sin 2k\pi/7$, pentru $k=1,2,4,5,7,8$.

3.3.2. Metoda 2. Avem

$$0 = \sin 9t = \sin 3t(3-4\sin^2 3t),$$

dar $\sin 3t \neq 0$.

a) Pentru x , observăm că

$$3-4\sin^2 3t = 4\cos^2 3t - 1 = (2\cos 3t - 1)(2\cos 3t + 1).$$

Obținem ecuația

$$(8x^3-6x+1)(8x^3-6x-1)=0.$$

Ambii factori sunt ireductibili. Primul factor are rădăcinile $\cos t$, $\cos 2t$ și $\cos 4t$, iar al doilea are rădăcinile $\cos \pi/9$, $\cos 5\pi/9$ și $\cos 7\pi/9$.

b) Pentru y , ecuația $3-4\sin^2 3t=0$ ne dă din nou ecuația

$$64Y^6-96Y^4+36Y^2-3.$$

3.3.3. Metoda 3. Fie $\omega = x + iy$, $\theta = -i\omega = \sin t - i\cos t$.

a) Pentru x , putem porni de la $\omega^9 = 1$, sau mai bine, vedem că ω este rădăcină a polinomului ciclotomic Φ_3 , deci obținem ecuația reciprocă

$$\omega^6 + \omega^3 + 1 = 0.$$

Împărțind cu ω^3 și folosind $2x = \omega + \frac{1}{\omega}$, obținem din nou ecuația

$$8x^3-6x+1=0$$

b) Pentru y , avem $\theta^{18} = -1$, deci

$$0 = \theta^{18} + 1 = (\theta^6 + 1)(\theta^{12} - \theta^6 + 1).$$

Primul factor este nenul, deci obținem ecuația reciprocă

$$\theta^{12} - \theta^6 + 1 = 0.$$

Folosind $2y = \theta + \frac{1}{\theta}$, obținem din nou ecuația

$$64y^6 - 96y^4 + 36y^2 - 3 = 0.$$

Calcululele devin laborioase odată cu creșterea lui n . Recomandăm cititorului aplicarea metodelor de mai sus pentru următoarele valori ale lui n :

- $n = 6$. Polinoamele minimale sunt $X - 1/2$ respectiv $Y^2 - 3/4$.
- $n = 12$. Polinoamele minimale sunt $4X^2 - 3$ respectiv $2Y - 1$.
- $n = 8$. Polinoamele minimale sunt $X^2 - 1/2$ respectiv $Y^2 - 1/2$.
- $n = 10$. Polinoamele minimale sunt $4X^2 - 2X - 1$ respectiv $16Y^4 - 20Y^2 + 5$.
- $n = 16$. Polinoamele minimale sunt $8X^2 - 8X + 1$ respectiv $16Y^4 - 20Y^2 + 5$.
- $n = 7$. Polinoamele minimale sunt $8X^3 - 4X^2 - 4X + 1$ respectiv $64Y^6 - 112Y^4 + 56Y^2 - 7$.
- $n = 15$.
- $n = 18$.
- $n = 20$.

4. DISCUȚIE ÎN CAZUL GENERAL

Calcululele din secțiunea anterioară arată că Metoda 3 este cea care se generalizează cel mai bine.

Se arată ușor că pentru $n > 2$, polinomul ciclotomic Φ_n este palindromic (reciproc) de grad par $\phi(n) =: 2m$. Notând $Z := X + \frac{1}{X}$, putem scrie

$$\Phi_n(X) = X^m F_n(Z).$$

Deoarece Φ_n este ireductibil peste $\mathbb{Z}$ rezultă că și $F_n(Z)$ este ireductibil peste $\mathbb{Z}$. Evident, gradul lui F_n este $\phi(n)/2$.

Discutăm următoarele patru cazuri: $(n, 8) = 1$, $(n, 8) = 2$, $(n, 8) = 4$ și $(n, 8) = 8$.

Mai jos, ω poate fi luat orice rădăcină primitivă de ordin n a unității, iar $\theta := -i\omega$.

4.1. $(n, 8) = 1$. Atunci $n = 2k + 1$, unde $k \in \mathbb{N}$. Evident, polinomul minimal al lui ω este Φ_n și polinomul minimal al lui $x = \cos t$ este F_n .

Deoarece $\theta^{2n} = -1$, rezultă că polinomul minimal al lui θ este Φ_{4n} și polinomul minimal al lui $y = \sin t$ este F_{4n} . Avem $\phi(4n) = 2\phi(n)$, deci gradul lui F_{4n} este $\phi(n)$.

4.2. $(n, 8) = 2$. Atunci $n = 2(2k + 1)$, unde $k \in \mathbb{N}$. Deoarece $\omega^{2k+1} = -1$, rezultă că polinomul minimal al lui ω este Φ_n și polinomul minimal al lui $x = \cos t$ este F_n .

Deoarece $\theta^n = -1$, rezultă că polinomul minimal al lui θ este Φ_{2n} și polinomul minimal al lui $y = \sin t$ este F_{2n} de grad $\phi(n)$.

4.3. $(n, 8) = 4$. Atunci $n = 4(2k + 1)$, unde $k \in \mathbb{N}$. Deoarece $\omega^{2(2k+1)} = -1$, rezultă că polinomul minimal al lui ω este Φ_n și polinomul minimal al lui $x = \cos t$ este F_n .

Deoarece $\theta^{2k+1} = -1$, rezultă că polinomul minimal al lui θ este $\Phi_{n/2}$ și polinomul minimal al lui $y = \sin t$ este $F_{n/2}$.

4.4. $(n, 8) = 8$. Atunci $n = 8k$, unde $k \in \mathbb{N}^*$. Deoarece $\omega^{4k} = \theta^{4k} = -1$, rezultă că ω și θ au același polinom minimal Φ_n , deci $x = \cos t$ și $y = \sin t$ au același polinom minimal F_n de grad $\phi(n)/2$.

BIBLIOGRAFIE

- [1] ADIGA, C., CANGUL, I. N., RAMASWAMY, H. N., *On the Constant Term of the Minimal Polynomial of $\cos(2\pi/n)$ over $\mathbb{Q}$* . Filomat **30** (2016), 1097–1102.
- [2] CANGUL, I. N., *The Minimal Polynomial of $\cos(2\pi/n)$ over $\mathbb{Q}$* . Problemy Matematyczne, **15** (1997), 57–62.
- [3] GÜRTAŞ, Y. Z., *The Minimal Polynomial of $\cos(2\pi/n)$* . Commun. Korean Math. Soc. **31** (2016), 667–682.
- [4] GÜRTAŞ, Y. Z., *Chebyshev Polynomials and the Minimal Polynomial of $\cos(2\pi/n)$* . The American Mathematical Monthly **124** (2017), 74–78.
- [5] LEHMER, H. H., *A Note on Trigonometric Algebraic Numbers*. The American Mathematical Monthly **40** (1933), 165–166.
- [6] MARCUS, A., *Polinoame și ecuații algebrice*, Casa Cărții de Știință, Cluj-Napoca, 2020.
- [7] NIVEN, I., *Irrational Numbers*. MAA, Washington, D.C., 1956.
- [8] WATKINS, W., ZEITLIN, J., *The Minimal Polynomial of $\cos(2\pi/n)$* . The American Mathematical Monthly **100** (1993), 471–474.
- [9] WEGNER, K. W., *Trigonometric values that are algebraic numbers*. The Mathematics Teacher, **8** (1957), 557–561.
- [10] WEGNER, K. W., *Equations with Trigonometric Values as Roots*. The American Mathematical Monthly **66** (1959), 52–53.

Faculty of Mathematics and Computer Science
“Babeș-Bolyai” University
Str. Kogălniceanu, no. 1
400084 Cluj-Napoca, Romania
 e-mail: marcus@math.ubbcluj.ro