

EXPONENȚIALA MATRICIALĂ

Mihaela - Diana LUPEA

Abstract. In this paper, we present key properties of the matrix exponential and outline its use in solving linear differential systems with constant coefficients. As an illustration, we apply the method to a discretized heat equation, where the solution naturally involves the exponential of a symmetric matrix.

Cuvinte cheie. exponențiala matricială, ecuația căldurii, matrice simetrică, sisteme de ecuații diferențiale liniare.

1. INTRODUCERE

Exponențiala matricială constituie o extensie a funcției exponențiale din analiza reală și complexă în contextul spațiului matricial, fiind un instrument esențial în algebra liniară, analiza numerică și analiza sistemelor dinamice.

Un exemplu important al aplicabilității exponențialei matriciale este în rezolvarea sistemelor de ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți de forma $X' = AX$. Soluția generală a unui astfel de sistem este $X(t) = e^{tA}X(0)$.

Pentru a evidenția aplicabilitatea conceptului de exponențială matricială, am analizat un exemplu din teoria ecuațiilor cu derivate parțiale, mai precis din studiul ecuației căldurii. În urma discretizării doar în variabila spațială, ecuația căldurii poate fi redusă la un sistem liniar de ecuații diferențiale ordinare care implică o matrice simetrică. Soluția acestui sistem se exprimă cu ajutorul exponențialei acestei matrice.

2. DEFINIȚIA ȘI PROPRIETĂȚI

Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Notăm cu $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ mulțimea matricelor de tip $n \times n$ cu coeficienți reali. Notăm cu

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

matricea unitate (sau matricea identitate).

Înainte de a introduce noțiunea de exponențială matricială, reamintim proprietățile fundamentale ale seriei exponențiale asociate numerelor complexe.

Se știe că seria

$$e^a = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}, \quad a \in \mathbb{C},$$

este convergentă pentru orice număr complex a .

Vom folosi în continuare acest rezultat fundamental pentru a defini exponențiala unei matrice pătratice, printr-o serie de aceeași formă, dar în care termenii sunt puteri matriciale.

În definiția următoare se consideră o serie matricială a cărei convergență se definește pe componente.

DEFINIȚIA 1. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Exponențiala matricei A , notată e^A sau $\exp(A)$, este suma seriei matriciale

$$\exp(A) = I_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = I_n + \frac{1}{1!} A + \frac{1}{2!} A^2 + \cdots + \frac{1}{n!} A^n + \cdots.$$

OBSERVAȚIA 1. S-a demonstrat că seria din definiția anterioară este convergentă pentru orice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. În acest articol, vom arăta convergența doar pentru câteva cazuri particulare.

Cazuri particulare:

(1) Dacă $A = O_n$, atunci $e^{O_n} = I_n$.

(2) Dacă $A = I_n$, atunci

$$e^{I_n} = I_n \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots \right) = e I_n,$$

deoarece $A^k = I_n$, pentru orice $k \geq 1$.

(3) Pentru $A = tI_n$, se obține

$$e^{tI_n} = I_n \left(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + \cdots \right) = e^t I_n,$$

deoarece $A^k = t^k \cdot I_n$, pentru orice $k \geq 1$.

(4) Fie A o matrice diagonală:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

unde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Matricea A^k este

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

Folosind definiția

$$e^{tA} = I_n + tA + \frac{t^2}{2!} A^2 + \cdots + \frac{t^n}{n!} A^n + \cdots$$

obținem

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

(5) Considerăm matricea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculăm puterile acestei matrice.

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2,$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = A \cdot (-I_2) = -A,$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = I_2.$$

Observăm că

$$A^k = \begin{cases} I_2, & \text{dacă } k = 4p, \\ A, & \text{dacă } k = 4p + 1, \\ -I_2, & \text{dacă } k = 4p + 2, \\ -A, & \text{dacă } k = 4p + 3. \end{cases}$$

Prin urmare,

$$\begin{aligned} e^{tA} &= I_2 + \frac{t}{1!}A + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \frac{t^4}{4!}A^4 + \cdots \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - \frac{1}{6!}t^6 + \cdots & -\frac{1}{1!}t + \frac{1}{3!}t^3 - \frac{1}{5!}t^5 + \cdots \\ \frac{1}{1!}t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 - \cdots & 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - \frac{1}{6!}t^6 + \cdots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(6) Analog,

$$e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}t} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

PROPOZIȚIA 1. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ și $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât P este inversabilă și $A = PBP^{-1}$. Dacă există e^B , atunci există e^A și $e^A = Pe^BP^{-1}$.

Demonstrație. Deoarece $A = PBP^{-1}$, rezultă prin inducție matematică faptul că, pentru orice $k \in \mathbb{N}$,

$$A^k = (PBP^{-1})^k = PB^kP^{-1}.$$

Seria care definește exponențiala matricială este

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Înlocuind expresia lui A^k se obține

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} P B^k P^{-1} = P \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k \right) P^{-1} = P e^B P^{-1}.$$

Cum seria care definește e^B este convergentă, rezultă că și seria care definește e^A este convergentă. Prin urmare,

$$e^A = P e^B P^{-1}.$$

□

În continuare, ne propunem să calculăm exponențiala unei matrice diagonalizabile. Pentru a înțelege metoda de calcul, vom introduce mai întâi noțiunea de matrice diagonalizabilă, precum și alte concepte utile, cum ar fi valorile și vectorii proprii. De asemenea, vom prezenta câteva proprietăți esențiale care ne vor ajuta să simplificăm calculele.

DEFINIȚIA 2. Spunem că o matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este *diagonalizabilă* peste $\mathbb{R}$ dacă există o matrice diagonală $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ și o matrice inversabilă $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A = P D P^{-1}$.

DEFINIȚIA 3. Numărul $\lambda \in \mathbb{C}$ se numește *valoare proprie* a matricei A dacă există un vector $u \in \mathbb{C}^n$, $u \neq 0$, astfel încât $Au = \lambda u$. În acest caz, u se numește *vector propriu* corespunzător valorii proprii λ .

OBSERVAȚIA 2. Numărul $\lambda \in \mathbb{C}$ este o valoare proprie a matricei $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dacă și numai dacă

$$\det(A - \lambda I_n) = 0,$$

care este o ecuație polinomială în λ de grad n . Mai mult, dacă $A = P B P^{-1}$, atunci

$$\det(A - \lambda I_n) = 0 = \det(B - \lambda I_n).$$

PROPOZIȚIA 2. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Matricea A este diagonalizabilă peste $\mathbb{R}$ dacă și numai dacă toate valorile proprii ale lui A sunt reale și există n vectori proprii liniar independenți ai lui A . În acest caz, fie $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ valorile proprii ale lui A (nu neapărat distincte) și $u_1, u_2, \dots, u_n \in \mathbb{C}^n$ vectorii proprii liniar independenți ai lui A . Dacă notăm $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ și $P = (u_1 \dots u_n)$, atunci $A = P D P^{-1}$.

Demonstrație.

$$\begin{aligned} A = PBP^{-1} &\Leftrightarrow AP = PB \Leftrightarrow A(u_1 \dots u_n) = (u_1 \dots u_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow Au_1 = \lambda_1 u_1, \dots, Au_n = \lambda_n u_n \end{aligned}$$

□

PROPRIETATEA 1. Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este diagonalizabilă cu $A = PDP^{-1}$, atunci $e^{tA} = P \operatorname{diag}(e^{t\lambda_1}, e^{t\lambda_2}, \dots, e^{t\lambda_n}) P^{-1}$, $t \in \mathbb{R}$.

3. APLICAȚIE

Una dintre cele mai importante aplicații ale exponențialei matriciale este rezolvarea sistemelor de ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți,

$$X' = AX, \quad \text{a cărui soluție generală este } X(t) = e^{tA}X(0).$$

Pentru a evidenția aplicabilitatea acestui concept, am analizat un exemplu provenit din studiul ecuației căldurii. După discretizarea în variabila spațială, aceasta se reduce la un sistem liniar de ecuații diferențiale ordinare, a cărui soluție se exprimă prin exponențiala unei matrice simetrice.

Ne propunem să calculăm exponențiala acestei matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pentru a justifica forma discretizată a ecuației căldurii și apariția matricei considerate, este necesar să reamintim relațiile care aproximează derivatele de ordinul I și II ale unei funcții de variabilă reală. Acestea sunt prezentate în următoarea leamnă.

LEMA 1. Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval deschis, nevid și $u \in C^2(I)$. Atunci

$$u'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$

$$u''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x-h) - 2u(x) + u(x+h)}{h^2}, \quad x \in I.$$

(a se consulta [2])

Pentru valorile fixate $x_k \in I$, notăm $u_k = u(x_k)$, $0 \leq k \leq n$. Avem

$$\frac{u(x_k + h) - u(x_k)}{h} = \frac{u_{k+1} - u_k}{h},$$

$$\frac{u(x_k - h) - 2u(x_k) + u(x_k + h)}{h^2} = \frac{u_{k-1} - 2u_k + u_{k+1}}{h^2}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Pentru h suficient de mic se consideră

$$u'(x_k) \approx \frac{u_{k+1} - u_k}{h},$$

$$u''(x_k) \approx \frac{u_{k-1} - 2u_k + u_{k+1}}{h^2}, \quad 1 \leq k \leq n-1.$$

Dacă într-o ecuație diferențială de ordinul al doilea cu necunoscuta $x \mapsto u(x)$ se înlocuiesc u cu u_k , u' cu $\frac{u_{k+1} - u_k}{h}$ și u'' cu $\frac{u_{k-1} - 2u_k + u_{k+1}}{h^2}$, atunci ecuația cu diferențe obținută se numește *discretizarea ecuației diferențiale* date.

Considerăm Problema Cauchy pentru ecuația căldurii pe $\mathbb{R}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad t \in [0, \infty), \quad x \in \mathbb{R}, \quad u(0, x) = v(x)$$

cu condiția de periodicitate în variabila spațială

$$u(t, x + l) = u(t, x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, \infty),$$

unde $l > 0$ este o constantă reală fixată.

Ne propunem să o discretizăm doar în variabila spațială.

Considerăm o diviziune a intervalului $[0, l]$

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = l$$

astfel încât

$$x_{k+1} - x_k = h, \quad 0 \leq k \leq n-1, \quad \text{unde} \quad h = \frac{l}{n}.$$

Notăm

$$u_k(t) = u(t, x_k), \quad 0 \leq k \leq n,$$

$$u_{n+1}(t) = u(t, l + h), \quad \eta_k = v(x_k)$$

și obținem

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} - \frac{u_{k-1}(t) - 2u_k(t) + u_{k+1}(t)}{h^2} = 0, \quad u_k(0) = \eta_k, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (1)$$

Condiția de periodicitate asigură că

$$u_n(t) = u(t, l) = u(t, 0) = u_0(t)$$

și

$$u_{n+1}(t) = u(t, l + h) = u(t, h) = u(t, x_1) = u_1(t).$$

Scriem sistemul (1) pe componente

$$u'_1 - \frac{u_0 - 2u_1 + u_2}{h^2} = 0 \implies u'_1 - \frac{u_n - 2u_1 + u_2}{h^2} = 0$$

$$u'_2 - \frac{u_1 - 2u_2 + u_3}{h^2} = 0$$

$$\vdots$$

$$u'_n - \frac{u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}}{h^2} = 0 \implies u'_n - \frac{u_{n-1} - 2u_n + u_1}{h^2} = 0$$

Cu notațiile

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Problema Cauchy (1) devine

$$X' + \frac{1}{h^2}AX = 0, \quad X(0) = \eta$$

a cărei soluție este

$$X(t) = e^{-\frac{t}{h^2}A}\eta, \quad t \in \mathbb{R}.$$

4. CALCULUL VECTORILOR ȘI VALORILOR PROPRII

Căutăm vectorii proprii de forma

$$v_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \rho^k \\ \rho^{2k} \\ \vdots \\ \rho^{k(n-1)} \end{pmatrix}, \quad \rho \in \mathbb{C}^*, \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

Atunci

$$Av_k = \begin{pmatrix} 2 - \rho^k - \rho^{k(n-1)} \\ -1 + 2\rho^k - \rho^{2k} \\ -\rho^k + 2\rho^{2k} - \rho^{3k} \\ \vdots \\ -\rho^{k(n-3)} + 2\rho^{k(n-2)} - \rho^{k(n-1)} \\ -1 - \rho^{k(n-2)} + 2\rho^{k(n-1)} \end{pmatrix}$$

$$Av_k = \lambda_k v_k \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - \rho^k - \rho^{k(n-1)} = \lambda_k \\ -1 + 2\rho^k - \rho^{2k} = \lambda_k \rho^k \\ -\rho^k + 2\rho^{2k} - \rho^{3k} = \lambda_k \rho^{2k} \\ \vdots \\ -\rho^{k(n-3)} + 2\rho^{k(n-2)} - \rho^{k(n-1)} = \lambda_k \rho^{k(n-2)} \\ -1 - \rho^{k(n-2)} + 2\rho^{k(n-1)} = \lambda_k \rho^{k(n-1)} \end{cases}$$

Se remarcă faptul că ecuațiile

$$\begin{cases} -1 + 2\rho^k - \rho^{2k} = \lambda_k \rho^k \\ -\rho^k + 2\rho^{2k} - \rho^{3k} = \lambda_k \rho^{2k} \\ \vdots \\ -\rho^{k(n-3)} + 2\rho^{k(n-2)} - \rho^{k(n-1)} = \lambda_k \rho^{k(n-2)} \end{cases}$$

sunt echivalente, motiv pentru care putem reduce sistemul la următoarea formă

$$\begin{cases} 2 - \rho^k - \rho^{k(n-1)} = \lambda_k \\ -1 + 2\rho^k - \rho^{2k} = \lambda_k \rho^k \\ -1 - \rho^{k(n-2)} + 2\rho^{k(n-1)} = \lambda_k \rho^{k(n-1)} \end{cases}.$$

Sistemul obținut este echivalent cu

$$\begin{cases} \rho^{k(n-1)} = 2 - \rho^k - \lambda_k \\ \lambda_k \rho^k + \rho^{2k} - 2\rho^k + 1 = 0 \\ \lambda_k \rho^{k(n-1)} - 2\rho^{k(n-1)} + \rho^{k(n-2)} + 1 = 0 \end{cases}$$

Înmulțim prima relație cu ρ^k și obținem

$$\rho^{kn} = 2\rho^k - \rho^{2k} - \lambda_k \rho^k.$$

Înlocuind în a doua ecuație această expresie rezultă

$$\rho^{nk} = 1.$$

De aici rezultă că

$$\rho = e^{\frac{2\pi i}{n}} = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$$

este una dintre rădăcinile primitive de ordinul n ale unității.

A treia relație o înmulțim cu ρ^k și ținem cont că $\rho^{nk} = 1$. Obținem valorile proprii

$$\lambda_k = 2 - \rho^k - \rho^{k(n-1)}.$$

Dar

$$\rho^{nk} = 1,$$

deci

$$\rho^{k(n-1)} = \rho^{nk-k} = \rho^{nk} \cdot \rho^{-k} = \rho^{-k}.$$

Calculăm

$$\begin{aligned}\rho^k + \rho^{-k} &= \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} + \cos \left(-\frac{2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(-\frac{2k\pi}{n} \right) \\ &= \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} + \cos \frac{2k\pi}{n} - i \sin \frac{2k\pi}{n} \\ &= 2 \cos \frac{2k\pi}{n}.\end{aligned}$$

Așadar, valorile proprii ale lui A sunt numerele reale

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_k = 2 - \rho^k - \rho^{k(n-1)} = 2 - 2 \cos \frac{2k\pi}{n}, \quad 1 \leq k \leq n-1.$$

OBSERVAȚIA 3. Valorile proprii ale matricei A satisfac relația: $\lambda_{n-k} = \lambda_k$, iar vectorii proprii corespunzători $v_{n-k} = \overline{v_k}$. Notând $v_k = w_k + iw_{n-k}$, cu $w_k, w_{n-k} \in \mathbb{R}^n$, avem că w_k și w_{n-k} sunt doi vectori proprii reali liniar independenți corespunzători valorii proprii λ_k . Distribuția valorilor proprii și multiplicitățile acestora depind de paritatea lui n .

- Dacă n este impar:
 - $\lambda_0 = 0$ este valoare proprie simplă.
 - pentru $1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$, λ_k are multiplicitate algebrică 2 și multiplicitate geometrică 2.
- Dacă n este par:
 - $\lambda_0 = 0$ și $\lambda_{n/2}$ sunt valori proprii simple.
 - pentru $1 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1$, λ_k are multiplicitate algebrică 2 și multiplicitate geometrică 2.

5. INDEPENDENȚA LINIARĂ A VECTORILOR PROPRII

Vom demonstra că vectorii proprii v_k , $1 \leq k \leq n-1$ sunt liniar independenți. Considerăm matricea care are ca și coloane vectorii proprii

$$V := V(1, \rho, \rho^2, \dots, \rho^{n-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \dots & \rho^{n-1} \\ 1 & \rho^2 & \rho^4 & \rho^6 & \dots & \rho^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ 1 & \rho^{n-1} & \rho^{2(n-1)} & \rho^{3(n-1)} & \dots & \rho^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix},$$

unde $\rho = e^{\frac{2\pi i}{n}}$. Determinantul asociat acestei matrice este un determinant Vandermonde. Vom calcula valoarea lui.

Efectuând $-1 \cdot L_1 + L_2, -1 \cdot L_1 + L_3, \dots, -1 \cdot L_1 + L_n$, obținem:

$$\det V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \rho - 1 & \rho^2 - 1 & \cdots & \rho^{n-1} - 1 \\ 0 & \rho^2 - 1 & \rho^4 - 1 & \cdots & \rho^{2(n-1)} - 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \rho^{n-1} - 1 & \rho^{2(n-1)} - 1 & \cdots & \rho^{(n-1)(n-1)} - 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\rho - 1)(\rho^2 - 1) \cdots (\rho^{n-1} - 1) \cdot \det(V(\rho, \rho^2, \dots, \rho^{n-1})),$$

care reprezintă o relație de recurență. Aplicând recursiv această relație, rezultă

$$\det V = \det(V(1, \rho, \dots, \rho^{n-1})) = \prod_{0 \leq i < j \leq n-1} (\rho^j - \rho^i)$$

Cum $1, \rho^1, \dots, \rho^{n-1}$ sunt rădăcinile de ordin n ale unității (distincte două câte două), rezultă

$$\det V = \prod_{0 \leq i < j \leq n-1} (\rho^j - \rho^i) \neq 0.$$

Prin urmare, matricea A are n vectori proprii liniari independenți, deci este diagonalizabilă.

6. CALCULUL EXPONENȚIALEI MATRICEI A

Considerăm matricea

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Matricea exponențială este

$$e^{tA} = V e^{tD} V^{-1}.$$

Deoarece D este o matrice diagonală, rezultă că

$$e^{tD} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_0} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{t\lambda_{n-1}} \end{pmatrix}.$$

7. CALCULUL INVERSEI MATRICEI V

Pentru calculul inversei matricei V considerăm produsul scalar complex

$$\langle v_k, v_\ell \rangle = \sum_{j=0}^{n-1} v_k^j \cdot \bar{v}_\ell^j = \sum_{j=0}^{n-1} (\rho^k)^j \cdot (\bar{\rho}^\ell)^j = \frac{(\rho^k \bar{\rho}^\ell)^n - 1}{\rho^k \bar{\rho}^\ell - 1}$$

(a se vedea [3]). Numărătorul este 0 deoarece $\rho^n = 1$, iar numitorul este nenul deoarece $k \neq \ell$. Rezultă că $\langle v_k, v_\ell \rangle = 0$, adică vectorii v_k sunt ortogonali.

Fiecare vector v_k are norma

$$\|v_k\| = \sqrt{\langle v_k, v_k \rangle} = \sqrt{n}.$$

Prin urmare, putem defini vectorii ortonormali

$$e_k = \frac{1}{\sqrt{n}} v_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 \\ \rho^k \\ \rho^{2k} \\ \vdots \\ \rho^{(n-1)k} \end{pmatrix}.$$

Construim matricea F cu coloanele $e_0, e_1, \dots, e_{n-1}$

$$F = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \rho^{jk} \right)_{j,k=0,1,\dots,n-1}$$

adică

$$F = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{n-1} \\ 1 & \rho^2 & \rho^4 & \dots & \rho^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \rho^{n-1} & \rho^{2(n-1)} & \dots & \rho^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}$$

Aceasta este o matrice unitară, deci:

$$F^* = F^{-1}, \quad \text{unde } F^* = \text{adjuncta matricei } F.$$

Prin urmare,

$$F^{-1} = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \rho^{-jk} \right)_{j,k=0,1,\dots,n-1}$$

OBSERVAȚIA 4. Matricea F se numește *Transformata Fourier Discretă (DFT)*, a se vedea [4,5]. Această matrice este utilă pentru analiza semnalelor din punct de vedere al frecvențelor. În cazul imaginilor sau sunetelor, aceasta dezvăluie care componente sunt importante și care nu. De exemplu, în compresia JPEG, se transformă blocuri de pixeli folosind o versiune a DFT. Apoi se păstrează doar frecvențele dominante, deoarece ochiul uman oricum nu percepe detaliile foarte fine. Astfel, se obțin fișiere mai mici, dar cu o calitate vizuală foarte apropiată de original.

Observăm că $V = \sqrt{n} \cdot F$, deci

$$V = \left(\rho^{jk} \right)_{j,k=0,1,\dots,n-1} \Rightarrow V^{-1} = \frac{1}{n} \cdot \left(\rho^{-jk} \right)_{j,k=0,1,\dots,n-1}$$

$$V^{-1} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \rho^{-1} & \rho^{-2} & \cdots & \rho^{-(n-1)} \\ 1 & \rho^{-2} & \rho^{-4} & \cdots & \rho^{-2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \rho^{-(n-1)} & \rho^{-2(n-1)} & \cdots & \rho^{-(n-1)^2} \end{pmatrix} \quad \text{unde } \rho = e^{\frac{2\pi i}{n}}$$

Ținem cont că $\rho^{-k} = \overline{\rho^k}$, $0 \leq k \leq n-1$.

Exponențiala matricei A este:

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \rho & \cdots & \rho^{n-1} \\ 1 & \rho^2 & \cdots & \rho^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \rho^{n-1} & \cdots & \rho^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{t\lambda_{n-1}} \end{pmatrix} \cdot V^{-1},$$

unde

$$V^{-1} = \frac{1}{n} \cdot \left(\rho^{-jk} \right)_{j,k=0,1,\dots,n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \rho^{-1} & \rho^{-2} & \cdots & \rho^{-(n-1)} \\ 1 & \rho^{-2} & \rho^{-4} & \cdots & \rho^{-2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \rho^{-(n-1)} & \rho^{-2(n-1)} & \cdots & \rho^{-(n-1)^2} \end{pmatrix}$$

Unde $\rho = e^{\frac{2\pi i}{n}}$.

Soluția sistemului

$$X'(t) + \frac{1}{h^2}AX(t) = 0, \quad X(0) = \eta$$

este dată de

$$X(t) = e^{-\frac{t}{h^2}A}\eta, \quad t \in \mathbb{R}$$

Folosind

$$e^{tA} = V e^{tD} V^{-1},$$

rezultă

$$X(t) = V \cdot \text{diag} \left(e^{-\frac{t}{h^2}\lambda_k} \right) \cdot V^{-1}\eta.$$

BIBLIOGRAFIE

- [1] YASHINSKI, A., *Differential Equations*, July 21, 2021.
- [2] BUICĂ A., *Notițe de curs: Qualitative Theory of Differential Equations*.
- [3] RAWASHDEH E. A., *A simple method for finding the inverse matrix of Vandermonde matrix*, Matematički Vesnik, Vol. 71, **No. 3**, 2019, pp. 207–213.
- [4] STRANG G., *The Discrete Cosine Transform*, SIAM Review vol. 41, **no. 1**, pp. 135–147, 1999.
- [5] OLSHEVSKY V., *Note de curs: Fast Fourier Transform*, University of Connecticut, January 20, 2016.

Liceul Teoretic "Pavel Dan" Câmpia Turzii
Str. 1 Decembrie 1918, no 17
405100, Câmpia Turzii, România
e-mail: mihaela.lupea19@gmail.com