

ASPECTE METODICE PRIVIND STUDIUL POLINOAMELOR ÎN
ÎNVĂȚĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR

Serghei-Daniel Frunzescu

În contextul reconfigurării programelor școlare și al învățământului preuniversitar românesc actual este utilă remodelarea metodelor de învățare ale diferitelor materii. În acest sens, lucrarea de față își propune observarea unor aspecte metodice privind studiul polinoamelor în învățământul preuniversitar. Mai precis, lucrarea își propune să atragă atenția asupra unor teme din programa actuală care ne aduc foarte aproape de studiul polinoamelor, chiar dacă acestea apar înainte de clasa a XII-a când se studiază *Inelele de polinoame*. Ne putem gândi la o posibilă remodelare a programei în sensul introducerii noțiunii și a unor proprietăți legate de polinoame mai devreme decât prevede programa școlară în vigoare și aceasta pentru că premisele sunt în mare măsură întrunite începând din ciclul gimnazial. În sprijinul acestei idei aduc următorul argument: elevii de gimnaziu cunosc și folosesc calculul algebric și studiază ecuațiile de grad I și II - elemente care premere studiului polinoamelor. Există până în ultimul an de liceu situații în care se pare că unii autori de manuale se așteaptă ca elevii să poată folosi astfel de instrumente matematice care provin din acest studiu. Totodată, programa în vigoare pentru Olimpiada Națională de Matematică prevede pentru clasa a X-a, la etapa națională, noțiuni și proprietăți ce țin de polinoame.

Lucrarea de față are trei părți: prima parte amintește sumar capitolul *Inele de polinoame* așa cum este prezentat în clasa a XII-a în manualele actuale, partea a doua prezintă câteva teme care ne pun în situațiile amintite mai sus, iar partea a treia, concluzii și observații. Exemplele discutate în partea a doua sunt preluate atât din manualele de gimnaziu actuale, cât și din culegerile și manualele de liceu folosite de mine. Trebuie menționat că exemplele alese pentru a arăta apropierea de polinoame nu sunt dificile și prezumez că este foarte probabil ca temele propuse să poată fi înțelese de majoritatea elevilor, nu doar de cei olimpici.

1. POLINOAMELE ÎN PROGRAMA ȘCOLARĂ ACTUALĂ

1.1. Construcția inelului de polinoame.

Contextul în care se lucrează în clasa a XII-a este cel al polinoamelor peste un corp comutativ ($\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p$ p-prim), așa cum e menționat în programa în vigoare. În cele ce urmează vom face o scurtă prezentare a discuției din manualul de clasa a XII-a.

DEFINIȚIA 1. (i) O funcție $f : \mathbb{N} \rightarrow K$ se numește **șir de elemente** din corpul K .

(ii) Două șiruri $f = (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$ și $g = (b_0, b_1, \dots, b_n, \dots)$ sunt egale dacă $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n, \dots$.

Notăm cu $K^{\mathbb{N}}$ mulțimea șirurilor de elemente din corpul K și cu $K^{(\mathbb{N})}$ mulțimea șirurilor care de la un rang încolo au toți termenii zero. (Evident $K^{(\mathbb{N})} \subset K^{\mathbb{N}}$).

Fie $f, g \in K^{\mathbb{N}}$, $f = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$, $g = (b_0, b_1, b_2, \dots, b_n, \dots)$ două șiruri, atunci:

- Șirul $f + g \in K^{\mathbb{N}}$, $f + g = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n, \dots)$ se numește **suma** șirurilor f și g .
- Șirul $f \cdot g \in K^{\mathbb{N}}$, $f \cdot g = (c_0, c_1, \dots, c_n, \dots)$, cu:

$$c_m = a_0 b_m + a_1 b_{m-1} + \dots + a_m b_0 = \sum_{k=0}^m a_k \cdot b_{m-k}$$

pentru orice $m \in \mathbb{N}$ se numește **produsul** șirurilor f și g .

TEOREMA 1. Tripletul $(K^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ formează un inel comutativ fără divizori ai lui zero, iar $(K^{(\mathbb{N})}, +, \cdot)$ este un subinel al său.

DEFINIȚIA 2. Elementele mulțimii $K^{(\mathbb{N})}$ se numesc **polinoame cu coeficienți în corpul K** .

DEFINIȚIA 3. Dacă $f \in K^{(\mathbb{N})}$, $f = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$, unde $a_n \in K^*$, $n \in \mathbb{N}$ se numește **gradul** polinomului f și se notează $\text{grad } f$.

DEFINIȚIA 4.

- (i) Polinomul cu un singur coeficient nenul se numește **monom**.
- (ii) Polinomul cu toți coeficienții nuli se numește **polinom nul**.
- (iii) Polinomul nul are gradul $-\infty$.

Observații:

(i) Polinoamele de forma $f = (a, 0, 0, \dots)$ se numesc polinoame constante. Acestea se identifică cu elementele din K .

(ii) Monomul $X = (0, 1, 0, 0, \dots)$ se numește **nedeterminata** X .

Putem scrie puterile nedeterminatei X folosind definiția înmulțirii polinoamelor, astfel avem:

$$X^n = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_n, 1, 0, 0, \dots)$$

Forma algebrică a polinomului $f \in K^{(\mathbb{N})}$, $f = (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$, cu $a_n \in K^*$ este $f = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$.

Observații:

- (i) $\text{grad}(f + g) \leq \max \{ \text{grad } f, \text{grad } g \}$.
- (ii) $\text{grad}(f \cdot g) = \text{grad } f + \text{grad } g$.

DEFINIȚIA 5. Fie $f = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$, $a_n \in K^*$, valoarea polinomului f în $c \in K$ este elementul $f(c) = a_0 + a_1c + \dots + a_nc^n \in K$.

Definiția valorii unui polinom ne conduce la noțiunea de *funcție polinomială*, adică asocierea elementului $x \in K$ cu valoarea sa prin polinom.

DEFINIȚIA 6. Fie $f \in K[X]$ polinom. Funcția $\bar{f} : K \rightarrow K$, $\bar{f}(x) = f(x)$ se numește *funcția polinomială atașată lui f* .

1.2. Împărțirea polinoamelor. Divizibilitatea.

TEOREMA 2. (Teorema împărțirii cu rest) Fie $f, g \in K[X]$, $g \neq 0$. Atunci există polinoamele $q, r \in K[X]$ astfel încât:

(i) $f = g \cdot q + r$

(ii) $\text{grad } r < \text{grad } g$

unde polinomul q se numește **câtul** împărțirii lui f la g , iar polinomul r **restul** împărțirii lui f la g .

DEFINIȚIA 7. Fie polinoamele $f, g \in K[X]$. Spunem că g **divide** f dacă există un polinom $h \in K[X]$ astfel încât $f = g \cdot h$ (notăm $g \mid f$).

TEOREMA 3. (Teorema restului) Restul împărțirii polinomului nenul $f \in K[X]$ la polinomul $g = X - a \in K[X]$ este egal cu $f(a)$.

TEOREMA 4. (Bezout) Fie K corp, $f \in K[X]$. $a \in K$ este rădăcină a polinomului f dacă și numai dacă $X - a \mid f$.

1.3. Rădăcinile polinoamelor.

DEFINIȚIA 8.

(i) $\alpha \in K$ se numește **rădăcină** a polinomului $f \in K[X]$ dacă $f(\alpha) = 0$.

(ii) Fie $f \in K[X]$ un polinom nenul și $m \in \mathbb{N}^*$. Elementul $\alpha \in K$ se numește rădăcină multiplă de ordinul m dacă polinomul f se divide cu $(X - \alpha)^m$, dar nu se divide cu $(X - \alpha)^{m+1}$.

(iii) Numărul m se numește **ordinul de multiplicitate** al rădăcinii α .

DEFINIȚIA 9. Fie $f \in K[X]$, polinom de grad $n \in \mathbb{N}^*$, ecuația de forma $f(x) = 0$ se numește *ecuație algebrică de ordin n cu coeficienți în K* .

TEOREMA 5. (Teorema fundamentală a algebrei) O ecuație algebrică de grad mai mare sau egal cu 1, cu coeficienți în $\mathbb{C}$ admite cel puțin o soluție complexă.

Consecință: O ecuație algebrică de grad $n \in \mathbb{N}^*$ cu coeficienți complecși are exact n soluții complexe, nu neapărat diferite.

Observație: Un polinom de grad $n \in \mathbb{N}$ cu coeficienți complecși se anulează de cel mult n -ori (are cel mult n rădăcini). Altfel el este polinomul nul.

TEOREMA 6. (*Teorema Abel-Ruffini*) *Ecuatia algebrică generală de grad mai mare sau egal cu 5 nu poate fi rezolvată prin radicali (nu există nicio expresie cu radicali, formată cu coeficienții ecuației, care să fie o rădăcină a ecuației).*

1.4. Descompunerea polinoamelor în factori ireductibili.

DEFINIȚIA 10.

- (i) Polinomul nenul $f \in K[X]$ se numește **reductibil** peste K dacă există polinoamele $g, h \in K[X]$ de grad cel puțin 1, astfel încât $f = g \cdot h$.
(ii) Polinomul $f \in K[X]$ de grad cel puțin 1, care nu e reductibil peste K , se numește **ireductibil**.

TEOREMA 7. *Fie K corp comutativ și $f \in K[X]$ polinom de grad $n \in \mathbb{N}^*$. Polinomul f se descompune într-un produs finit de polinoame ireductibile peste K .*

TEOREMA 8. *Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ polinom de grad $n \in \mathbb{N}^*$, dacă $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{C}$ sunt rădăcinile distincte ale polinomului f , cu ordinele de multiplicitate $m_1, m_2, \dots, m_k \in \mathbb{N}^*$ atunci:*

$$f = a_n(X - c_1)^{m_1}(X - c_2)^{m_2} \dots (X - c_k)^{m_k}$$

1.5. Relațiile lui Viète.

În manualul actual de clasa a XII-a, relațiile lui Viète sunt introduse pentru polinoame de grad $n \in \mathbb{N}^*$ cu coeficienți în $\mathbb{C}$. Acest context asigură existența a n rădăcini, nu neapărat distincte (vezi teorema fundamentală a algebrei și consecința). O remarcă importantă este aceea că relațiile lui Viète se pot scrie pentru un polinom cu coeficienți într-un corp K , doar dacă toate rădăcinile sale sunt în corpul K ([8] manual din 2007).

TEOREMA 9. (*Relațiile lui Viète*)

Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \dots + a_n$, $a_0 \neq 0$. Fie $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ rădăcinile polinomului f .

Atunci:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 + \dots + z_n &= -\frac{a_1}{a_0} \\ z_1z_2 + z_1z_3 + \dots + z_{n-1}z_n &= \frac{a_2}{a_0} \\ \dots &\dots \\ z_1z_2 \dots z_k + z_1z_3 \dots z_{k+1} + \dots + z_{n-k+1} \dots z_{n-1}z_n &= (-1)^k \frac{a_k}{a_0} \\ \dots &\dots \\ z_1z_2 \dots z_n &= (-1)^n \frac{a_n}{a_0} \end{aligned}$$

1.6. Rezolvarea unor ecuații algebrice cu coeficienți în $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.

Din Teorema Abel-Ruffini reiese că rezolvarea efectivă a ecuațiilor algebrice de

grad mai mare sau egal cu 5 este dificilă în lipsa unor informații suplimentare asupra soluțiilor sau ecuației.

În cele ce urmează, vom prezenta câteva teoreme care furnizează astfel de informații suplimentare pentru polinoame cu coeficienți în $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ și $\mathbb{R}$.

TEOREMA 10. Fie $f = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \in \mathbb{Z}[X]$, $a_n \neq 0$, polinom de grad $n \in \mathbb{N}^*$, atunci:

(i) Dacă $c \in \mathbb{Z}$ e rădăcină a lui f , atunci $c|a_0$

(ii) Dacă $c = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, cu $(p, q) = 1$ e rădăcină a lui f , atunci $p|a_0$, iar $q|a_n$.

TEOREMA 11. Fie $f = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \in \mathbb{Q}[X]$, $a_n \neq 0$, polinom de grad $n \in \mathbb{N}^*$, iar $u = a + \sqrt{b}$, $\sqrt{b} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Dacă u este rădăcină a polinomului f , atunci:

(i) $\bar{u} = a - \sqrt{b}$ e rădăcină a polinomului f

(ii) u și $\bar{u}$ au același ordin de multiplicitate.

TEOREMA 12. Fie $f = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \in \mathbb{R}[X]$, $a_n \neq 0$ polinom de grad $n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $z = a + bi \in \mathbb{C}$, cu $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$ este rădăcină a polinomului f , atunci:

(i) $\bar{z}$ e rădăcină a polinomului f

(ii) z și $\bar{z}$ au același ordin de multiplicitate.

Observații:

(i) Funcția $\varphi : K[X] \rightarrow K^K$, $\varphi(f) = \bar{f}$ este un morfism (unital) de inele. Procedul de identificare a coeficienților se poate transpune de la polinoame la funcții polinomiale când φ este morfism injectiv.

Pentru $K \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, φ este injectiv, dar există situații când φ nu e injectiv.

În cazul $K = \mathbb{Z}_2$, injectivitatea nu mai are loc.

Polinoamele $X + \hat{1}$ și $X^2 + \hat{1} = X(X + \hat{1}) + X + \hat{1}$ induc aceeași funcție polinomială (polinomul $X(X + \hat{1})$ ia mereu valoarea zero).

(ii) Este de remarcat că în manualele mai vechi de 1990 de clasa a VII-a [9], polinoamele se introduc ca sume de monoame. Nedeterminatele sunt literele dintr-o formulă. "Termenii sumei ce formează un polinom se numesc termenii polinomului" ([9] manual din 1988). Aceștia sunt numiți mai apoi monoame.

(iii) Înaintea manualelor alternative, capitolul actual intitulat *Inele de polinoame* era studiat preponderent în clasa a X-a, în contextul numerelor complexe.

2. ASPECTE REFERITOARE LA STUDIUL POLINOAMELOR CARE APAR ÎN PROGRAMUL ȘCOLAR ÎNAINTEA PREDĂRII POLINOAMELOR

2.1. Calcul algebric și formule de calcul prescurtat.

În manualul de clasa a VIII ([4] manual din 2020), la unitatea *Calcul algebric în $\mathbb{R}$* sunt studiate *formulele de calcul prescurtat*, contextul este unul care nu e clar precizat, dar care permite înlocuirea literelor cu numere. Scoaterea factorului comun este cunoscută de elevi încă din ciclul primar. Distributivitatea

înmulțirii față de adunare este proprietatea pe care ne bazăm când facem acest procedeu matematic, așa cum se știe și se află mai târziu de către elevi. Subcapitolul *formule de calcul prescurtat* studiat în clasa a VIII-a (împreună cu metoda factorului comun) sunt teme care abordate în context foarte general, ascund calcule cu polinoame, chiar în mai multe nedeterminate. În numeroase exerciții, literele folosite în formule sunt tratate ca nedeterminatele unor polinoame. Reamintim formulele:

Factorul comun/distributivitatea:

$$ab + ac = a(b + c)$$

Restrângerea pătratului/pătratul binomului:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

Diferența pătratelor/produsul sumei cu diferența:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Formula diferenței cuburilor:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Formula sumei cuburilor:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Contextul riguros în care se pot stabili aceste formule este cel al unui inel comutativ și inelele de polinoame peste un corp comutativ (în una sau mai multe nedeterminate). În particular, polinoamele peste $\mathbb{R}$ ar putea fi un context bun pentru discuția din clasa a VIII-a.

Menționăm că în manualele de algebră de clasa a VII-a din anul 1988 [9] și a VIII-a din anul 1990 [10] apar noțiunile de polinom (chiar de fracție rațională), valoarea unui polinom (chiar a fracției raționale) și proprietăți ale polinoamelor - divizibilitatea, ireductibilitatea, descompunerea în factori. Acestea sunt prezentate ca o extindere a proprietăților similare ale numerelor.

Exemplu (Ex. 8 c)/ pg. 42/ [4]):

Efectuați: $\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x-1} + \frac{2x}{x^2-1}, x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$

Soluție: Rezolvarea exercițiului necesită aducerea fracțiilor la același numitor. Acest procedeu se realizează folosind calculul algebric. Se descompune în factori diferența de pătrate:

$$\frac{2x}{x^2-1} = \frac{2x}{(x-1)(x+1)}$$

Se amplifică primele fracții algebrice cu $x-1$, respectiv $x+1$ pentru a ajunge la un multiplu comun. Expresia devine:

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}$$

Folosind formula restrângerii pătratului se obține $\frac{(x+1)^2}{x^2-1}$.

Se remarcă faptul că nu este relevant dacă se consideră că se lucrează cu numere sau expresii algebrice.

Exemplu (Ex. 2, a), b)/ pg. 16/ [15]):

Numerele reale a și b îndeplinesc condițiile $a + b = 6$ și $ab = 1$. Calculați:

a) $a^2 + b^2$ b) $a^3 + b^3$

Soluție: În rezolvarea exercițiului se vor folosi formulele de calcul prescurtat amintite anterior:

a) $36 = 6^2 = (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = a^2 + b^2 + 2$, așadar $a^2 + b^2 = 34$.

b) $216 = 6^3 = (a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = a^3 + b^3 + 3 \cdot 1 \cdot 6 = a^3 + b^3 + 18$, așadar $a^3 + b^3 = 198$.

Rezolvarea exercițiului *ascunde* proprietăți mai elaborate cu privire la polinoamele în mai multe nedeterminate (Teorema fundamentală a polinoamelor simetrice).

Dacă proprietățile din formulele de calcul prescurtat pot fi privite ca proprietăți ale structurilor numerice de bază (adică proprietăți ale operațiilor cu numere, dacă punem problema în contextul actual al clasei a VIII-a), vom vedea o situație în care, în opinia noastră, nu putem ignora faptul că avem de-a face cu polinoame (Binomul lui Newton).

2.2. Valoarea numerică a unei expresii.

În manualul de clasa a VIII-a ([4] manual din 2020) se folosesc termenii *expresie algebrică* și *fracții algebrice* pentru a desemna ceea ce este, de fapt, o *expresie polinomială*, respectiv o *fracție rațională*.

În cazul unei expresii algebrice care este și un polinom, valoarea numerică a expresiei este totuna cu valoarea polinomului într-un element. Schimbarea terminologiei nu ar afecta parcursul matematic al elevilor, ci dimpotrivă i-ar obișnui cu limbajul de specialitate folosit în clasa a XII-a și totodată ar ușura înțelegerea provenienței acestor instrumente.

Exemplu (Test de autoevaluare subiectul II ex. 1/ pg 44/ [4]):

$E(x) = \frac{x^2 - 6}{x}$. Calculând $E(2)$ se obține?

Soluție: Frația algebrică dată este evident o fracție rațională, unde numărătorul și numitorul sunt expresii polinomiale în x . Rezolvarea necesită înlocuirea lui x cu 2 (adică exact calculul valorilor polinoamelor de la numărător și numitor în 2). Se obține:

$$E(2) = -1$$

Exemplu (Ex. 15 a), c)/ pg. 43/ [4]): Fie $E(x) = \frac{x^4 + 8x^2 - 9}{x^3 - x}$.

a) Simplificați, punând condițiile de existență.

c) Determinați $x \in \mathbb{Z}$, pentru care $E(x) \in \mathbb{Z}$.

Subpunctul b) nu este relevant discuției.

Soluție: Rezolvarea exercițiului necesită descompunerea în factori a expresiilor polinomiale de la numărător și numitor.

Se notează x^2 cu y și se rezolvă ecuația de gradul II, $y^2 + 8y - 9 = 0$. Se obțin soluțiile $-9, 1$ și rezultă că:

$$x^4 + 8x^2 - 9 = (x^2 + 9)(x^2 - 1)$$

Numitorul se descompune în:

$$x(x - 1)(x + 1)$$

Fie că le considerăm ca aplicație la formulele de calcul prescurtat sau descompunere a unei expresii de gradul II când se cunosc rădăcinile, ceea ce se face, de fapt, este descompunerea în factori a două polinoame (expresii polinomiale). Condițiile de existență pentru fracția rațională sunt $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$. Se

simplifică expresia cu factorii comuni, iar $E(x)$ devine $\frac{x^2 + 9}{x}$.

c) Descompunem fracția algebrică astfel ca numărătorul fracției rămase să fie un număr întreg:

$$E(x) = \frac{x^2 + 9}{x} = x + \frac{9}{x} \quad (1)$$

Avem că

$$E(x) \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{9}{x} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x|9$$

Așadar $x \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 9\}$.

Se observă că pentru a aduce pe $E(x)$ la forma (1), ceea ce se face, de fapt, este aflarea câtului și restului împărțirii expresiei polinomiale $x^2 + 9$ la x (Existența unor cunoștințe despre împărțirea polinoamelor permite rezolvarea unor astfel de exerciții și atunci când aducerea lui $E(x)$ la forma (1) nu e atât de evidentă).

2.3. Binomul lui Newton.

În manualul de clasa a X-a ([6] manual din 2005), introducerea *binomului lui Newton* este motivată de formulele de calcul algebric în $\mathbb{R}$ (ex. $(a + b)^2$). Binomul lui Newton este prezentat ca un rezultat mai general al acestora.

Fie $a, b \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}^*$, atunci:

$$(1) \quad (a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^n b^n$$

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$$

Termenul $k + 1$ (notat T_{k+1}) este dat de următoarea formulă:

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$$

Numerele C_n^k se numesc **coeficienți binomiali** ($k = \overline{0, n}$).

Chiar dacă contextul formulei prezentat în manualul de clasa a X-a este unul numeric, în foarte multe situații, membrul drept din (1) este privit ca un polinom cu coeficienți reali.

Observație: Coeficienții binomiali nu sunt în general aceiași cu coeficienții

polinomului rezultat și, în unele situații, autorii de culegeri sau manuale abordează această temă având în minte polinomul din membrul drept.

Exemplu (E8/ pg. 184/ [6]): Se consideră egalitatea

$$(5x^2 - x - 1)^n = a_1x^{2n} + a_2x^{2n-1} + \dots + a_{2n}x + a_{2n+1}. \text{ Să se calculeze } S = a_1 + a_2 + \dots + a_{2n+1}.$$

Soluție: Indicația dată de autor este "se ia $x = 1$ ".

Credem că autorul se așteaptă ca elevii să-l vadă pe x ca pe o nedeterminată, iar expresiile ca pe niște polinoame pentru care se identifică coeficienții (cu atât mai mult întrucât membrul stâng nu este în forma unui binom).

Putem face legătura cu expresii și calcul algebric, dar evitarea instrumentelor care provin de la polinoame este nenaturală, în acest context.

Aceeași opinie o avem în ce privește următorul exercițiu:

Exemplu (Aplicația 2/ pg. 180/ [6]): Să se demonstreze egalitatea:

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$$

Soluție: Rezolvarea propusă de manual folosește identitatea:

$$(x+1)^m(x+1)^n = (x+1)^{m+n}, \quad m, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$$

în care se *egalează* coeficienții lui x^k din membrul stâng cu cei ai lui x^k din membrul drept.

Coeficientul lui x^k din membrul stâng este

$$C_m^0 \cdot C_n^k + C_m^1 \cdot C_n^{k-1} + C_m^2 \cdot C_n^{k-2} + \dots + C_m^k \cdot C_n^0$$

Coeficientul lui x^k din membrul drept este C_{m+n}^k .

Așadar, pentru $m, n \in \mathbb{N}^*$ și $k \leq m, k \leq n$:

$$C_m^0 \cdot C_n^k + C_m^1 \cdot C_n^{k-1} + C_m^2 \cdot C_n^{k-2} + \dots + C_m^k \cdot C_n^0 = C_{m+n}^k.$$

Pentru $m = n = k$, se obține:

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n.$$

Procedeu folosit de egalare a coeficienților nu este altceva decât *identificarea coeficienților* expresiilor polinomiale.

2.4. Limitele unor funcții raționale.

În manualul de clasa a XI-a la capitolul *Limite de funcții* sunt prezentate și limite ale funcțiilor raționale. Pentru definirea funcției raționale se folosesc două *funcții polinomiale*.

Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$, unde $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ și $a_n \neq 0$, f se numește **funcție polinomială de grad n** .

Fie f și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții polinomiale de grad n , respectiv m .

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0\}$.

$h: \mathbb{R} \setminus A \rightarrow \mathbb{R}$, cu $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ se numește **funcție rațională**.

Manualul conține o discuție pe cazuri a limitei în infinit și într-un punct oarecare a funcțiilor raționale.

2.4.1. Cazul limitei la infinit.

Studiul limitei la infinit a funcției raționale se face printr-o discuție pe baza gradelor expresiilor polinomiale care o alcătuiesc.

Fie $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funcții polinomiale de gradul p , respectiv q :

$$f(x) = a_0x^p + a_1x^{p-1} + \dots + a_p, \quad g(x) = b_0x^q + b_1x^{q-1} + \dots + b_q.$$

Atunci limita funcției raționale $\frac{f(x)}{g(x)}$ va fi:

$$x_0 = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0} \cdot (+\infty), & p > q, \\ \frac{a_0}{b_0}, & p = q, \\ 0, & p < q, \end{cases}$$

$$x_0 = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0} \cdot (-\infty)^{p-q}, & p > q, \\ \frac{a_0}{b_0}, & p = q, \\ 0, & p < q. \end{cases}$$

2.4.2. Cazul $\frac{0}{0}$.

Un alt caz interesant din punct de vedere al discuției noastre este cazul $\frac{0}{0}$ ([7] manual din 2006), deoarece este necesară o *simplificare* a fracțiilor algebrice cu un termen de forma $x - x_0$ pentru a înlătura nedeterminarea.

Exemplu (E3 d)/ pg. 184/ [7]): Să se calculeze:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^8 - 2^8}{x^6 - 2^6}$$

Soluție: Se observă imediat că suntem în cazul amintit mai sus. Se descompun în factori funcțiile polinomiale:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)(x^2+2^2)(x^4+2^4)}{(x-2)(x^2+2x+4)(x^3+2^3)}$$

Se simplifică:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x^2+2^2)(x^4+2^4)}{(x^2+2x+4)(x^3+2^3)}$$

Limita obținută se poate calcula și este $\frac{16}{3}$.

Procedul folosit, de fapt, este o descompunere a expresiilor polinomiale de la numărător și numitor, urmată de simplificarea termenilor asemenea.

2.5. Integrarea funcțiilor raționale.

În clasa a XII-a, calculul integralelor (și primitivelor) funcțiilor raționale se face după predarea lecțiilor despre polinoame. Cu toate acestea, am atras atenția asupra unei discontinuități datorate lipsei unor noțiuni anterioare cu privire la polinoame.

În contextul actualei programe, calculul integralelor (și al primitivelor) funcțiilor raționale este predat în jurul săptămânii 24, mult după celelalte aspecte discutate despre studiul primitivelor care se termină în preajma săptămânii 16 (vezi exemplul de planificare calendaristică de la pagina 10 din [16]). Această separare a materiei este motivată de actualul moment al studierii polinoamelor (în jurul săptămânii 19-21).

Așa cum vom vedea în continuare, scrierea unei funcții raționale oarecare ca sumă de funcții pentru care știm să calculăm primitive necesită folosirea unor instrumente din capitolul *Inele de polinoame*. Considerăm că, dacă (măcar) o parte din noțiunile din acest capitol ar fi cunoscute mai repede, acest decalaj nu ar fi necesar.

Calculul primitivelor funcțiilor raționale se face pe baza următoarei teoreme (a se vedea [8]):

TEOREMA 13. Fie funcția rațională $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, unde

$P, Q \in \mathbb{R}[X]$,

$Q(x) \neq 0, \forall x \in I$. Dacă:

$Q(x) = (x - a_1)^{\alpha_1} (x - a_2)^{\alpha_2} \cdots (x - a_p)^{\alpha_p} (x^2 + b_1x + c_1)^{\beta_1} \cdots (x^2 + b_rx + c_r)^{\beta_r}$,

unde $b_k^2 - 4c_k < 0$, $k = \overline{1, r}$, atunci $f(x)$ se scrie în mod unic sub forma:

$$f(x) = L(x) + \sum_{k=1}^p \left(\frac{A_k^{(1)}}{x - a_k} + \frac{A_k^{(2)}}{(x - a_k)^2} + \cdots + \frac{A_k^{(\alpha_k)}}{(x - a_k)^{\alpha_k}} \right) + \\ + \sum_{k=1}^r \left(\frac{B_k^{(1)}x + C_k^{(1)}}{x^2 + b_kx + c_k} + \frac{B_k^{(2)}x + C_k^{(2)}}{(x^2 + b_kx + c_k)^2} + \cdots + \frac{B_k^{(\beta_k)}x + C_k^{(\beta_k)}}{(x^2 + b_kx + c_k)^{\beta_k}} \right),$$

unde L este funcție polinomială. Coeficienții $A_k^{(i)}, B_k^{(i)}, C_k^{(i)}$, urmând a fi determinați.

Observații:

(i) $L(x)$ este funcția polinomială asociată polinomului cât rezultat din împărțirea lui P la Q .

(ii) Teorema precedentă folosește descompunerea în factori ireductibili a polinomului care ne dă $Q(x)$.

(iii) Coeficienții A_k, B_k, C_k , vor fi determinați folosind metoda identificării coeficienților (instrument care poate fi transferat de la polinoame la funcții polinomiale deoarece morfismul $\varphi : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ este *injectiv*) (vezi 1.6 observații).

Exemplu (Ex. A4, d)/pg. 262/ [8]: Să se calculeze integrala:

$$\int_0^1 \frac{x^5 + x^4 + 2x^3 + 3x^2 + x + 1}{x^4 + 2x^2 + 1}$$

Soluție: Se aplică teorema precedentă. Prima dată se determină funcția $L(x)$. Se împarte polinomul P de la numărător la polinomul Q de la numitor. Se obține câtul $(x + 1)$ și restul x^2 . Se descompune fracția:

$$\frac{(x^4 + 2x^2 + 1)(x + 1)}{x^4 + 2x^2 + 1} + \frac{x^2}{x^4 + 2x^2 + 1}$$

Se fac simplificările:

$$(x + 1) + \frac{x^2}{x^4 + 2x^2 + 1}$$

Se obține $L(x) = x + 1$. Se descompune fracția rămasă în fracții simple:

$$(x + 1) + \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 1)^2}$$

Din egalitatea $\frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2}$, se determină coeficienții.

Se obține $A = C = 0, B = 1, D = -1$.

Rămâne acum de integrat următoarea sumă de fracții simple:

$$x + 1 + \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{(x^2 + 1)^2}$$

Exercițiul continuă cu integrarea expresiilor conform cu instrumentele date până în săptămâna 16 (din planificarea calendaristică [16]).

2.6. Rădăcini ale polinoamelor. Ecuații algebrice.

Un alt aspect care ține de studiul polinoamelor este rezolvarea ecuațiilor algebrice, începând cu ecuația de gradul I și ajungând până la rezolvarea unor ecuații algebrice de grad superior. Chiar dacă abordarea acestora poate evita folosirea unor instrumente provenite de la polinoame, nu suntem siguri că acest fapt este necesar. Mai mult, modalitatea în care ecuațiile sunt introduse, prezentate și aprofundate ne conduce foarte aproape de contextul în care terminologia și anumite proprietăți care țin de polinoame să fie cel puțin menționate.

În continuare vom prezenta și discuta succint principalele ecuații studiate înainte de clasa a XII-a.

2.6.1. Ecuația de gradul I.

În programa școlară la matematică în vigoare la clasele a III-a și a IV-a, în cadrul *Competențelor specifice și exemple de activități de învățare* apar *aflarea unui termen necunoscut, folosind metoda balanței sau prin efectuarea probei adunării/scăderii*, respectiv *aflarea unui termen necunoscut, folosind diverse metode*. Contextul din respectivele manuale nu este unul clar precizat, dar se poate observa că operațiile nu depășesc cadrul mulțimii numerelor naturale. Găsirea termenului care trebuie adunat/scăzut/înmulțit/împărțit la un termen dat pentru a obține un anumit rezultat (ex.: $\dots + 3 = 5$) este procedeul care constituie esența aflării soluției unei ecuații de gradul I. Pașii inversi pe

care elevul îi face în mod algoritmic pentru a afla răspunsul este înlocuit în clasa a V-a de calculul simbolic.

În clasa a V-a elevii încep să folosească necunoscute în expresii, iar tema *Metoda mersului invers* le oferă instrumentele necesare pentru a le determina din expresii. Toate aceste teme sunt premergătoare rezolvării ecuației de gradul I care este studiată în clasa a VI-a și lecțiilor despre calculul algebric care apar în programă începând din clasa a VII-a.

Exemplu (Ex. 14 b)/pg. 67 / [3]): Rezolvați în mulțimea numerelor întregi:

$$\frac{8}{x-2} = \frac{6}{x}$$

Soluție: Expresia algebrică din exercițiu este reductibilă la o ecuație de grad I. Fie aducând la același numitor, fie folosind proprietatea fundamentală a unei proporții, expresia devine:

$$8x = 6x - 12$$

Se obține $x = -6$, rezultat care convine (se impun restricțiile $x \neq 2$ și $x \neq 0$). Se observă că pe tot acest parcurs elevii folosesc elemente de calcul algebric.

2.6.2. Ecuații de forma $x^2 = a, a \in \mathbb{R}_+$.

În clasa a VII elevii se întâlnesc cu ecuația $x^2 = a, a \in \mathbb{R}_+$ care este un pas intermediar ecuației de gradul al II-lea. Rezolvarea ecuației se face folosind radicalul de ordin doi și modulul: $x^2 = a \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{a} \Rightarrow x = \pm\sqrt{a}$.

Soluțiile ecuației $\{\sqrt{a}, -\sqrt{a}\}$ se numesc numere opuse ([3] manual din 2024).

Exemplu (Ex. 3 e)/pg. 54 / [3]): Rezolvați ecuațiile, unde x este număr întreg negativ: e) $3x^2 = 36$.

Soluție: Se aduce ecuația la forma echivalentă $x^2 = 12$ și se obține

$$x_{1,2} = \pm 2\sqrt{3}$$

Alternativ, exercițiul (și ecuația în sine) se poate rezolva cu ajutorul calculului algebric:

Se scrie ecuația în forma $3x^2 - 36 = 0$, se dă *factor comun* $3(x^2 - 12) = 0$, de unde se obține $x^2 - 12 = 0$. După folosirea formulei *diferenței pătratelor* se obține $(x - 2\sqrt{3})(x + 2\sqrt{3}) = 0$, cu soluțiile:

$$x_{1,2} = \pm 2\sqrt{3}$$

Soluțiile **nu** convin, așadar răspunsul este $S = \emptyset$.

Observație: Rezolvarea ecuațiilor de forma $x^2 = a$ oferă primele exemple de numere iraționale.

2.6.3. Sisteme de două ecuații liniare cu două necunoscute.

În programa școlară de clasa a VII-a apare în conținuturi tema *Ecuații și sisteme de ecuații liniare*. Studiul sistemelor de ecuații se rezumă la sisteme de două ecuații liniare cu două necunoscute, rezolvate prin metoda substituției și/sau prin metoda reducerii. Ambele metode folosesc elemente de calcul algebric în care expresiile sunt de fapt expresii polinomiale în două nedeterminate.

2.6.4. Ecuația de gradul 2 cu coeficienți reali.

În programa de clasa a VIII-a la conținutul *Calcul algebric în $\mathbb{R}$* începe studiul ecuației de gradul al doilea. Acest studiu continuă și în clasa a IX-a la care se adaugă *Funcția de gradul al doilea*.

Fie ecuația de gradul 2:

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ unde } a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

Ecuația se rezolvă calculând discriminantul $\Delta = b^2 - 4ac$ și folosind formula

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

În manualul de clasa a VIII-a ([4] manual din 2020), formula de aflare a rădăcinilor ecuației de gradul al doilea se demonstrează prin punerea în evidență a unui pătrat perfect $((2ax + b)^2 = b^2 - 4ac)$, notarea și rezolvarea pe cazuri a ecuației obținute ($y^2 = \Delta$, adică ecuația din 2.6.2).

Cazul $\Delta < 0$, în care spunem în clasele a VIII-a și a IX-a că nu există soluții este rezolvat în clasa a X-a prin introducerea numerelor complexe. Ecuația de gradul II este o motivație pentru introducerea numerelor complexe, cu ajutorul cărora orice ecuație de gradul II are exact 2 soluții, nu neapărat diferite.

Totodată, în programa școlară pentru clasa a IX-a la conținuturi pentru funcția de gradul II apar și relațiile lui Viète. Acestea sunt prezentate în manualele școlare ca relații între rădăcini și coeficienți, iar ca aplicație importantă este dată determinarea semnelor soluțiilor ecuației.

Am sublinia că această incursiune în studiul ecuației de gradul II este destul de consistentă înspre studiul polinoamelor.

2.6.5. Ecuații algebrice de forma $x^n - a = 0$, $a, x \in \mathbb{R}$.

În clasa a X-a, în primul capitol al manualului în vigoare se studiază radicalul de ordin n . Motivația pentru introducerea acestui instrument matematic este aflarea soluțiilor reale ale ecuațiilor de forma $x^n - a = 0$, $a, x \in \mathbb{R}$.

DEFINIȚIA 11. Un element $b \in \mathbb{R}$ se numește radical peste $\mathbb{R}$ dacă este rădăcină a unui polinom de forma $X^n - a \in \mathbb{R}[X]$, $n \geq 2$.

TEOREMA 14. Ecuația $x^n - a = 0$, cu $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $a \in (0, \infty)$ are o singură soluție reală pozitivă.

TEOREMA 15. Fie ecuația $x^n - a = 0$, cu $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $a \in (-\infty, 0)$ atunci:
 1) dacă $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}^*$ ecuația nu are soluții reale.
 2) dacă $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}^*$ ecuația are o singură soluție reală negativă.

Observație: Funcția care modelează această ecuație este *funcția putere* (caz particular de funcție polinomială).

2.6.6. Rădăcinile de ordinul n ale unui număr complex. Ecuații binome.

În manualul de clasa a X-a în vigoare rădăcinile de ordin n ale unui număr complex sunt introduse folosind forma trigonometrică a numărului complex și formula lui Moivre.

DEFINIȚIA 12. Se numește rădăcină de ordinul $n \in \mathbb{N}^*$ a unui număr complex z orice număr $u \in \mathbb{C}$ cu proprietatea că $u^n = z$.

DEFINIȚIA 13. Fie $z \in \mathbb{C}$ atunci există și sunt unice $r \geq 0$ și $t \in [0, 2\pi)$ astfel încât $z = r(\cos t + i \sin t)$.

Formula lui Moivre: Fie $z \in \mathbb{C}$, $z = r(\cos t + i \sin t)$ și $n \in \mathbb{N}$ atunci

$$z^n = r^n(\cos(nt) + i \sin(nt))$$

TEOREMA 16. Fie $z \in \mathbb{C}^*$, $z = r(\cos t + i \sin t)$ și $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Numărul z are n rădăcini distincte date de formula:

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{t + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{t + 2k\pi}{n} \right), \quad k = \overline{0, n-1}$$

Tot la această temă se studiază ecuațiile binome, adică ecuații de forma:

$$x^n - a = 0, \quad a \in \mathbb{C}, \quad n \geq 2$$

În cadrul mulțimii de numere complexe, ecuația binomă se rezolvă folosind elemente de trigonometrie. Polinomul atașat ecuației fiind peste $\mathbb{C}$ și având grad n , va avea n rădăcini în $\mathbb{C}$.

Exemplu (Ex.4 d)/pg. 77/ [6]): Să se rezolve ecuația $z^9 - 1 = 0$.

Soluție: Folosind reprezentarea numerelor complexe în forma trigonometrică se obține: $z_k = \cos \frac{2k\pi}{9} + i \sin \frac{2k\pi}{9}$, $k = \overline{0, 8}$

2.7. Zerouri ale unor funcții polinomiale.

În rezolvarea problemei determinării zerourilor unei funcții polinomiale ne bazăm adesea pe rezolvarea ecuației algebrice aferente. Acest fapt este bine cunoscut încă din învățământul preuniversitar deoarece studiul funcției de gradul I este precedat de cel al ecuației de gradul I, cum de altfel se întâmplă și în cazul funcției și ecuației de gradul II.

2.7.1. Funcția de gradul 1 și 2 cu coeficienți în $\mathbb{R}$.

În clasa a VIII-a se întâlnește conceptul de funcție. Acum, avem trei instrumente matematice (ecuație, funcție și polinom) toate fiind similare, dar având și particularități. Particularitatea pentru funcție este interpretarea geometrică, pentru ecuație - rezolvarea efectivă a acesteia și aflarea soluțiilor, iar pentru polinom - calculul algebric și proprietățile care derivă din studiul acestuia (ireductibilitatea, descompunerea, identificarea coeficienților ...).

Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, cu $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, o funcție de gradul al doilea.

Observație: Din simetria graficului funcției de gradul al 2-lea se poate observa (și demonstra cu ajutorul relațiilor lui Viète) că vârful parabolei are abscisa mijlocul distanței dintre abscisele celor 2 rădăcini.

2.7.2. Funcția polinomială de grad $n \in \mathbb{N}^*$. Rădăcini multiple.

Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, unde $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ și $a_n \neq 0$, f se numește **funcție polinomială de grad n** .

DEFINIȚIA 14. Spunem că $c \in \mathbb{R}$ este un **zero** al funcției polinomiale $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ dacă $f(c) = 0$.

În manualul de clasa a XI-a se studiază tema *Aplicații. Rădăcini multiple ale ecuațiilor polinomiale*. Prima dată, se definește funcția polinomială pe baza căreia, mai apoi, se introduce ecuația polinomială.

Dacă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ este o funcție polinomială de grad n , atunci ecuația polinomială se definește ca fiind ecuația $f(x) = 0$. Se observă conexiunea între cele două concepte și totodată se observă terminologia specifică polinoamelor când vine vorba de *rădăcini* și nu de *soluții*.

DEFINIȚIA 15. Fie f o funcție polinomială de grad $n \in \mathbb{N}^*$. Spunem că $c \in \mathbb{R}$ este **rădăcină de ordin m** , $0 < m \leq n$, $m \in \mathbb{N}^*$ a funcției polinomiale f , dacă există o funcție polinomială g de grad $n - m$ astfel încât:

$$f(x) = (x - c)^m g(x), \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{și} \quad g(c) \neq 0$$

3. OBSERVAȚII

Din partea a doua a lucrării se conturează anumite instrumente folosite în rezolvarea exercițiilor care provin din studiul polinoamelor. În variantele mai vechi ale programelor de matematică, până la sfârșitul clasei a X-a erau studiate toate aspectele din capitolul *Inele de polinoame*, pentru polinoame cu coeficienți complecși. Credem că unele teme ar putea fi studiate mai devreme și ar putea ajuta la înțelegerea noțiunilor și conceptelor matematice.

Dăm o listă de astfel de elemente care pot fi menționate în avans, ținând cont de baza teoretică pe care elevii o au și totodată concentrându-ne pe frecvența apariției lor în exerciții. Totodată, vom face referire la anumite situații concludente.

1. Metoda identificării coeficienților

Metoda identificării coeficienților este o consecință imediată a egalării polinoamelor.

O percepție mai clară asupra a ceea ce este un polinom ar ajuta la o mai bună înțelegere a funcției polinomiale asociate, mai ales atunci când corpul K al coeficienților este finit (și $f = g$ în $K[X]$ nu este echivalent cu $\bar{f} = \bar{g}$ pentru funcțiile polinomiale asociate, vezi 1.6, observația (i)).

O posibilă cauză a percepției neclare asupra nedeterminatei poate fi că, în multe situații, proprietăți care în clasa a XII-a sunt prezentate în context de polinoame au fost întâlnite anterior pentru expresii algebrice, iar literele

de acolo puteau fi considerate numere. Definirea în avans a conceptului de polinom ar putea înlătura această dificultate de înțelegere observată la unii elevi.

2. Descompunerea în factori

Descompunerea în factori a polinoamelor ar putea fi introdusă ca o consecință a calculului algebric și a formulelor de calcul prescurtat.

Adesea, rezolvarea ecuațiilor algebrice de forma $P(x) = 0$ (studiate înainte de clasa a XII-a) se face prin punerea în evidență a unui factor de forma $x - a$ în $P(x)$ (sau prin descompunerea în factori). Din acest motiv, una dintre greșelile frecvente ce apar la unii elevi este legarea reductibilității unui polinom de existența unei rădăcini și implicit ireductibilitatea polinoamelor este caracterizată eronat de lipsa rădăcinilor polinomului.

Observăm și în acest caz că introducerea mai rapidă a descompunerii în factori a polinoamelor ar putea fi benefică în clarificarea legăturii dintre rădăcini și reductibilitate pentru elevi.

Observații:

(i) Dacă polinomul $f \in K[X]$ are gradul 2 sau 3 și **nu** admite rădăcini în K , atunci el e ireductibil.

(ii) Descompunerea în factori ireductibili a unui polinom depinde de corpul coeficienților.

Proprietatea amintită în observația (i) nu rămâne valabilă pentru polinoame de grad cel puțin 4.

Exemplu: $f = X^4 + 3X^2 + 2 \in \mathbb{R}[X]$ admite scrierea $(X^2 + 1)(X^2 + 2)$, deci este reductibil peste $\mathbb{R}$, dar rădăcinile lui $\{i, -i, \sqrt{2}i, -\sqrt{2}i\}$ nu aparțin lui $\mathbb{R}$. Totodată $g = X^4 + 3X^2 + 2 \in \mathbb{C}[X]$ admite scrierea $(X + 1)(X - 1)(X + \sqrt{2}i)(X - \sqrt{2}i)$, așadar g și f au descompuneri diferite.

3. Teorema împărțirii cu rest

Teorema împărțirii cu rest este o consecință a calculului algebric. Cu toate acestea, aspectele ce țin de teoremă și nu rezultă din calcul algebric, sunt utile în contextele deja prezentate acolo unde folosirea calculului algebric nu pune în evidență care este câtul și restul împărțirii celor două polinoame. Această componentă se remarcă în programa de liceu (vezi integrarea funcțiilor raționale, limitele unor funcții polinomiale etc.).

Dacă teorema împărțirii cu rest și câteva aspecte legate de descompunerea în factori ireductibili a polinoamelor din $\mathbb{R}[X]$ ar fi cunoscute încă din clasa a XI-a, atunci calculul primitivelor funcțiilor raționale, precum și limitele unor funcții raționale (cazul $\frac{0}{0}$), ar putea fi abordate mai ușor. În cazul calculului primitivelor și al integralelor s-ar putea chiar evita sincopa din planificarea calendaristică remarcată în secțiunea 2.

4. Relațiile lui Viète

Relațiile lui Viète ar putea fi abordate înainte de clasa a XII-a (măcar pentru polinoame de grad 3 și 4). Acestea pot rezulta prin calcul algebric și prin metoda identificării coeficienților. Relațiile lui Viète s-ar putea utiliza în calculul

unor tipuri de determinanți, în clasa a XI-a, care au în componență rădăcinile unui polinom. Subliniem că un astfel de parcurs de rezolvare este natural și eficient.

Exemplu (Ex. 10 a)/ pg. 53/ [14]): "Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile ecuației $x^3 - 2x = 0$. Calculați determinantul:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix}."$$

Soluție: Determinantul se scrie $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului $f = X^3 - 2X \in \mathbb{Q}[X]$. Se folosește faptul că x_1, x_2, x_3 sunt rădăcini ale unui polinom pentru a scrie relațiile lui Viète. Totuși rădăcinile **nu** sunt toate în $\mathbb{Q}$, așadar înainte de a scrie relațiile lui Viète problema trebuie mutată în cadrul unui polinom $g = X^3 - 2X \in \mathbb{C}[X]$, pentru a asigura existența tuturor rădăcinilor în corp. Folosind relațiile lui Viète se obține: $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -2$, $x_1x_2x_3 = 0$. Așadar $\Delta_1 = 0$.

Rezolvarea acestui tip de exercițiu, chiar dacă este posibilă la nivelul clasei a XI-a cu instrumentele furnizate de programa școlară (prin aflarea rădăcinilor și înlocuirea acestora în determinant), se face eficient folosind relațiile lui Viète care apar în programă abia în clasa a XII-a. O astfel de abordare permite rezolvarea mai multor tipuri de exerciții cu determinanți, chiar și în situații în care rădăcinile polinomului sunt dificil de aflat.

Temele prezentate mai sus ar putea fi discutate mai devreme de clasa a XII-a, iar acest fapt ar putea consolida baza teoretică a elevilor și ar eficientiza rezolvarea exercițiilor, folosind instrumente clar definite și naturale.

În formularea observațiilor finale despre abordarea conceptului de polinoame voi folosi ca argument experiența proprie de elev în sistemul românesc de învățământ. La finalul liceului am înțeles că aș fi avut nevoie încă din gimnaziu de o definiție în termeni mai simpli (dar care să existe) a conceptului de polinom, precum și de o acomodare cu proprietățile acestuia.

În opinia mea, aceasta ar fi fost o învățare structurată concentric, care ar fi facilitat o asimilare mai rapidă și eficientă a noțiunilor. În acest sens, poate că nu ar fi de evitat reluarea în programa actuală a unor idei din programele mai vechi asupra unor capitole cu privire la polinoame.

În cele ce urmează, voi prezenta succint modul de abordare al studiului polinoamelor (înainte de clasa a XII-a) în manualele editate până în anii '90.

Studiul polinoamelor în clasa a VII-a ([9], manual din 1988), în capitolul intitulat "Polinoame și fracții raționale", prezintă polinoamele în scopul introducerii calculului simbolic. Construcția polinoamelor este una intuitivă, pornind de la monoame [9]. Sunt prezentate operațiile obișnuite cu polinoame,

iar fracțiile raționale sunt introduse ca ”o pereche de polinoame în nedeterminata X , $P(X), Q(X)$ scrise sub forma $\frac{P(X)}{Q(X)}$, unde numitorul trebuie să fie diferit de polinomul nul” [9]. În clasa a VIII-a ([10] manual din 1990) studiul polinoamelor continua cu un capitol intitulat ”Polinoame și fracții raționale”. De remarcat este analogia între polinoame și numere în momentul prezentării ireductibilității. Sunt învățate c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. a două polinoame. În clasa a X-a, în manualele mai vechi de 1990 [11], se completează studiul polinoamelor cu toate elementele prezentate în secțiunea 1. Studiul polinoamelor în clasa a X-a se finalizează cu ecuații algebrice de grad superior (peste $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$).

Noțiunea de *polinoame* apărea încă din ciclul gimnazial în manualele editate înainte de 1990, acomodându-l pe elev cu limbajul matematic și cu abstractizarea noțiunilor.

Dacă studiul polinoamelor ar debuta în primii ani de liceu, ar putea exista un avantaj în rezolvarea naturală și eficientă a problemelor din teme cum ar fi: calculul unor determinanți folosind relațiile lui Viète sau integrarea fracțiilor raționale.

Aceste observații pe marginea programei școlare și a manualelor de matematică se înscriu în reliefaarea necesității îmbunătățirii, în anumite puncte, a abordării studiului polinoamelor și al algebrei în ciclurile preuniversitare.

Observațiile din prezentare trebuie privite din perspectiva viitorului profesor de matematică de învățământ preuniversitar și a provocărilor prezumate a fi depășite cu succes în predarea polinoamelor, în beneficiul elevului.

4. BIBLIOGRAFIE

- [1] Ion Cicu, Ștefan Smarandache, Ioana Iacob, Răzvan Ceucă, *Matematică clasa a V-a*, Editura Intuitext, București, 2022
- [2] Maria-Daniela Stoica, Titi Hanghiuc, *Matematică clasa a VI-a*, Editura Booklet, București, 2023
- [3] Marius Perianu, Dana Heuberger, Ștefan Smărăndoiu, Cătălin Stănică, Ioan Balica, *Matematică clasa a VII-a*, Editura Art Klett, București 2024
- [4] Constantin Basarab, Cătălin Cristea, Dănuț Drăcea, Dan Seclăman, *Matematică: Manual pentru clasa a VIII-a*, Editura CD PRESS, București, 2020
- [5] Marius Burtea, Georgeta Burtea, *Matematică: Manual pentru clasa a IX-a Trunchi comun + Curriculum diferențiat*, Editura Carminis, Pitești, 2008
- [6] Marius Burtea, Georgeta Burtea, *Matematică: Manual pentru clasa a X-a Trunchi comun + Curriculum diferențiat*, Editura Carminis, Pitești, 2005
- [7] Marius Burtea, Georgeta Burtea, *Matematică: Manual pentru clasa a XI-a Trunchi comun + Curriculum diferențiat*, Editura Carminis, Pitești, 2006
- [8] Marius Burtea, Georgeta Burtea, *Matematică: Manual pentru clasa a XII-a Trunchi comun + Curriculum diferențiat*, Editura Carminis, Pitești, 2007

- [9] Dr. Tiberiu Spircu, Prof. Ioan Crăciunel, *Matematică Algebră: Manualul pentru clasa a VII-a*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1988
- [10] Ioan Crăciunel, Mircea Fianu, Laurențiu Gaiu, Liliana Niculescu, Petre Simion, Tiberiu Spircu, *Matematică Algebră: Manualul pentru clasa a VIII-a*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1990
- [11] C. Năstăsescu, C. Niță, Editura Didactică și Pedagogică, *Matematică Algebră: Manualul pentru clasa a X-a*, București, 1989
- [12] Ion D. Ion, A.P. Ghioca, N.I. Nediță, *Matematică Algebră: Manualul pentru clasa a XII-a*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1989
- [13] Adrian Zanoschi, Gheorghe Iurea, Gabriel Popa, Petru Răducanu, Ioan Șerdean, *Bacalaureat 2022 Matematică M1 mate-info Teme recapitulative 65 teste, după modelul M.E. Breviar teroretic*, Editura Paralele 45, Pitești 2021
- [14] Marius Perianu, Florian Dumitrel, *Matematică clasa a IX-a semestrul I*, Editura Art Educațional, 2017
- [15] Ministerul Educației și Cercetării, *Repere metodologice pentru aplicarea curriculumului la clasa a XII-a în anul școlar 2024-2025*, București, 2024
- [16] Ministerul Educației și Cercetării, *Programă școlară pentru ciclul superior al liceului matematică clasa a XI-a*, București, 2006
- [17] Ministerul Educației și Cercetării, *Programe școlare pentru clasa a X-a ciclul inferior al liceului matematică*, București, 2004
- [18] Ministerul Educației și Cercetării, *Programă școlară matematică clasa a IX-a ciclul inferior al liceului*, București, 2009
- [19] Ministerul Educației și Cercetării Științifice, *Programa școlară pentru disciplina matematică clasele a V-a - a VIII-a*, București, 2017
- [20] Ministerul Educației și Cercetării Științifice, *Programa școlară pentru disciplina matematică clasele a III-a - a IV-a*, București, 2014

Universitatea Babeș-Bolyai, Cluj-Napoca
Facultatea de Matematică și Informatică
Departamentul de Matematică
e-mail: serghei17frunzescu@gmail.com