

INTERPOLARE CU FUNCȚII SPLINE CUARTICE DE TIP AKIMA

Diana Curilă

Rezumat. Articolul prezintă o variantă modificată a metodei de interpolare spline Akima, care asigură o netezime locală superioară. Interpolarea Hermite de gradul patru se realizează atât pe nodurile partiției, cât și în punctele medii ale subintervalelor, derivatelor fiindu-le atribuite valori estimate printr-un algoritm de tip Akima. Pentru calculul derivatelor la capetele intervalelor, se consideră alternative care optimizează comportamentul local.

MSC 2000. 65D07, 65D10.

Cuvinte cheie. Interpolare spline, spline Akima, variantă modificată, netezime locală.

1. INTRODUCERE

Analiza numerică și Teoria aproximării încearcă să elaboreze principii, metode și algoritmi pentru găsirea soluțiilor numerice aproximative, cu precizie determinată, pentru diverse probleme studiate în matematică. În acest sens, deseori se pune problema aflării unor funcții de aproximare pentru o funcție necunoscută. O clasă importantă de funcții de aproximare o reprezintă funcțiile spline polinomiale. Acestea sunt funcții segmentar-polinomiale, având un anumit grad de netezime, în sensul că graficul lor este format din arce polinomiale care se racordează pe punctele de joncțiune astfel încât acestea să admită derivate continue până la un anumit ordin.

Funcțiile spline sunt utilizate pentru interpolarea, aproximarea și reconstrucția unei funcții necunoscute pe baza unui set finit de puncte date. Ele reprezintă funcții polinomiale definite pe subintervale ale unui domeniu, asigurând continuitatea derivatelor până la un anumit ordin la punctele de îmbinare. Scopul principal al utilizării spline-urilor este obținerea unor curbe netede, stabile numeric și suficient de flexibile pentru a descrie fenomene reale sau seturi de date experimentale.

În analiza numerică, funcțiile spline sunt folosite pentru interpolarea valorilor unei funcții $f(x)$ atunci când aceasta este cunoscută doar în anumite puncte $(x_i, f(x_i))$ sau pentru aproximarea datelor experimentale afectate de erori. În grafica computerizată și modelarea geometrică, spline-urile permit construirea curbilor și suprafețelor netede (precum curbele Bézier sau B-spline), fiind esențiale în aplicații CAD și animație 3D. De asemenea, acestea sunt utilizate în procesarea semnalelor și imaginilor, precum și în rezolvarea numerică a ecuațiilor diferențiale, unde asigură o reprezentare continuă și derivabilă a soluției.

Printre avantajele principale ale funcțiilor spline se numără netezimea, stabilitatea numerică superioară față de interpolarea polinomială globală, precum și flexibilitatea locală - modificarea formei curbei într-o zonă restrânsă fără a afecta întregul domeniu. Dintre cele mai utilizate tipuri de spline se remarcă spline-ul cubic natural, spline-urile Akima și Catmull-Rom precum și B-spline-urile, fiecare adaptat unui scop specific și nivel diferit de complexitate.

Preocupări similare în domeniu a avut Schoenberg (vezi [13]), în care introduce noțiunea de B-spline, funcțiile spline fiind introduse în lucrările lui Popoviciu (vezi [12]) și Chakalov (vezi [5]). V. A. Kodnyanko în (vezi [10]) a introdus spline-uri direcționale de ordin cubic și cuartec, comparându-le favorabil cu spline-urile Akima și Catmull-Rom, în special pentru distribuții de puncte inegale. Această metodă reduce zonele cu curbura excesivă, optimizează derivata a doua la punctele de legătură, și propune un coeficient care controlează uniformitatea pantei curbei.

DEFINIȚIA 1. Considerând o diviziune Δ a intervalului $[a, b]$

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

și fiind date valorile $y_i \in \mathbb{R}, i = \overline{0, n}$, se numește funcție spline, de grad $m \in \mathbb{N}^*$, de interpolare a valorilor $y_i, i = \overline{0, n}$ pe nodurile diviziunii Δ , o funcție $s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ cu următoarele proprietăți:

- (i) $s \in C^{m-1}[a, b]$
- (ii) restricția funcției s la fiecare interval $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$, al diviziunii Δ este câte un polinom de grad m
- (iii) $s(x_i) = y_i$, $\forall i = \overline{0, n}$.

OBSERVAȚIA 1. Dacă există o funcție $f \in C[a, b]$ astfel încât $f(x_i) = y_i$, $\forall i = \overline{0, n}$, atunci funcția spline s interpolează funcția f pe nodurile diviziunii Δ .

2. FUNCȚII SPLINE CUBICE DE TIP HERMITE

O diviziune $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ împreună cu valorile $f(x_i) = y_i$ și $f'(x_i) = m_i$, $i = \overline{0, n}$, permit construirea unei funcții spline Hermite cubice $s \in C^1[a, b]$. Pe fiecare subinterval $[x_{i-1}, x_i]$, spline-ul este un polinom cubic $P_i(x)$ care respectă condițiile de interpolare: $s(x_i) = f(x_i)$, $s'(x_i) = f'(x_i)$. Fiecare porțiune $s_i(x)$ are expresia:

$$\begin{aligned} s_i(x) = & \frac{(x - x_i)^2(x - x_{i-1})}{h_i^2} m_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})^2(x - x_i)}{h_i^2} m_i + \\ & + \frac{(x - x_i)^2[2(x - x_{i-1}) + h_i]}{h_i^3} y_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})^2[2(x_i - x) + h_i]}{h_i^3} y_i \end{aligned}$$

unde $h_i = x_i - x_{i-1}, i = \overline{1, n}$.

Dacă derivatele la noduri sunt cunoscute, spline-ul este unic. Dacă nu, valorile m_i pot fi determinate prin condiții suplimentare sau metode geometrice de estimare.

3. FUNCȚII SPLINE CUBICE DE TIP AKIMA

Când sunt cunoscute doar valorile funcției $f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$, dar nu și derivatele $f'(x_i)$, metoda Akima oferă o aproximare locală de natură geometrică a derivatei necesare construcției spline-urilor Hermite. Ea folosește valorile funcției în nodul curent și în alte două noduri situate în stânga și în dreapta acestuia. Din valorile x_i și $f(x_i) = y_i$, $i = \overline{0, n}$ se determină pantele:

$$p_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}, \quad i = \overline{0, n-1}$$

După care, derivata în nodurile interioare (cu excepția primelor și ultimelor două) se aproximează prin:

$$(1) \quad f'(x_i) \simeq m_i = \frac{|p_{i+1} - p_i| \cdot |p_{i-1}| + |p_{i-1} - p_{i-2}| \cdot |p_i|}{|p_{i+1} - p_i| + |p_{i-1} - p_{i-2}|}, \quad i = \overline{2, n-2}$$

dacă numitorul nu este nul. În cazul în care numitorul este nul se ia media pantei precedente și curente $m_i = \frac{p_{i-1} + p_i}{2}$. Pentru primele două și ultimele două noduri Akima a introdus două noduri anterioare x_{-2} și x_{-1} și a două noduri posterioare x_{n+1} și x_{n+2} , construite astfel încât să mențină continuitatea geometrică, conform condițiilor:

$$x_0 - x_{-2} = x_1 - x_{-1} = x_2 - x_0$$

$$x_{n+2} - x_n = x_{n+1} - x_{n-1} = x_n - x_{n-2}$$

și punctele să fie pe parabolele:

$$y = a'_0 + a'_1(x - x_0) + a'_2(x - x_0)^2$$

$$y = a''_0 + a''_1(x - x_n) + a''_2(x - x_n)^2$$

Pantele suplimentare $p_{-2}, p_{-1}, p_n, p_{n+1}$ obținute conform ([1]), împreună cu pantele p_i , $i = \overline{0, n-1}$ permit estimarea derivatelor m_i , $i = \overline{0, n}$ prin extinderea formulei de aproximare (1) pentru $i = \overline{0, n}$.

4. FUNCȚII SPLINE CUARTICE

Pentru a obține o interpolare mai precisă decât în cazul spline-ului cubic, Howell și Varma au introdus în [9] spline-ul cuartic $s \in C^2[a, b]$, care păstrează structura tridiagonală a sistemului de ecuații. Acest spline interpolează funcția f atât în nodurile diviziunii $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ cât și în punctele de mijloc ale intervalelor $x_{i-1/2} = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$, $i = \overline{1, n}$ unei grile după schema Marsden (vezi [11] și [14]).

Howell și Varma au arătat că există un spline cuartic $s \in C^2[a, b]$ unic, care respectă valorile funcției în aceste puncte și condițiile la capete $s'(a) = f'(a)$, $s'(b) = f'(b)$. Condiția de continuitate $s \in C^2[a, b]$ a funcției spline cuartice

conduce la sistemul tridiagonal de ecuații prin care se determină derivatele în noduri $m_i = s'(x_i)$, $i = \overline{0, n}$:

$$-\frac{1}{h_i} \left(\frac{4}{h_i} + \frac{4}{h_{i+1}} \right) m_i - \frac{1}{h_{i+1}} m_{i+1} = \frac{5}{h_i^2} f(x_{i-1}) - \frac{5}{h_{i+1}^2} f(x_{i+1}) +$$

$$+ \left(\frac{11}{h_i^2} - \frac{11}{h_{i+1}^2} \right) f(x_i) + \frac{16}{h_{i+1}^2} f(x_{i+1/2}) - \frac{16}{h_i^2} f(x_{i-1/2}) = d_i, \quad i = \overline{1, n-1}$$

unde $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = \overline{1, n}$, cu $m_0 = f'(a)$ și $m_n = f'(b)$ cunoscute, iar termenul d_i conține valorile funcției în noduri și în punctele de mijloc. Fiecare porțiune a spline-ului cuartec pe intervalul $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$ se exprimă, în funcție de parametrul $t = \frac{x-x_{i-1}}{h_i} \in [0, 1]$, sub forma:

$$s_i(x) = (1-t)^2(1-2t)(4t+1)y_{i-1} + 16t^2(1-t)^2 y_{i-1/2} +$$

$$+ t^2(2t-1)(5-4t)y_i + h_i t(1-t)^2(1-2t)m_{i-1} + h_i t^2(1-t)(1-2t)m_i$$

5. METODĂ DE TIP AKIMA PENTRU FUNCȚII SPLINE CUARTICE

Pentru funcția spline cuartecă a lui Howell și Varma din [9], în articolul [3] a fost propusă o metodă de tip Akima pentru determinarea coeficienților m_i , $i = \overline{0, n}$. Pe fiecare interval $[x_{i-1}, x_i]$ se calculează coeficienții m_{i-1} și m_i implicând atât punctele x_{i-1} și x_i cât și punctul din mijlocul intervalului $x_{i-1/2} = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$, $i = \overline{1, n}$. Se interpolează punctele (x_1, y_1) , $i = \overline{0, n}$ și se definesc pantele $d_i = \frac{y_{i-1/2}-y_{i-1}}{h_i/2}$, $d_{i-1/2} = \frac{y_i-y_{i-1/2}}{h_i/2}$, $d_{i+1/2} = \frac{y_{i+1/2}-y_i}{h_{i+1}/2}$, $d_{i+1} = \frac{y_{i+1}-y_{i+1/2}}{h_{i+1}/2}$ pentru $i = \overline{1, n-1}$.

Calculând în x_i derivatele polinoamelor pătratice Lagrange

$$p_i(x) =$$

$$= \frac{2(y_{i-1} + y_i - 2y_{i-1/2})}{h_i^2} (x - x_{i-1})^2 + \frac{4y_{i-1/2} - y_i - 3y_{i-1}}{h_i} (x - x_{i-1}) + y_{i-1}$$

$$p_{i+1}(x) =$$

$$= \frac{2(y_{i+1} + y_i - 2y_{i+1/2})}{h_{i+1}^2} (x - x_i)^2 + \frac{4y_{i+1/2} - y_{i+1} - 3y_i}{h_{i+1}} (x - x_i) + y_i$$

care interpolează capetele intervalelor $[x_{i-1}, x_i]$, respectiv $[x_i, x_{i+1}]$ și mijloacele acestora $x_{i-1/2}$, respectiv x_i , rezultă:

$$p'_i(x_i) = \frac{3y_i + y_{i-1} - 4y_{i-1/2}}{h_i}$$

$$p'_{i+1}(x_i) = \frac{4y_{i+1/2} - y_{i+1} - 3y_i}{h_{i+1}}$$

Se consideră formula diferențială în trei puncte ale derivatei în punctul x_i pentru intervalul $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$:

$$\tilde{y}'_i = \frac{-2h_{i+1}}{h_i(h_i + h_{i+1})} y_{i-1/2} + \frac{2(h_{i+1} - h_i)}{h_i h_{i+1}} y_i + \frac{2h_i}{h_{i+1}(h_i + h_{i+1})} y_{i+1/2}$$

Pentru aproximarea coeficientului m_i se calculează tangenta stângă ca o medie între derivata obținută din polinomul stâng $p'_i(x_i)$ și aproximarea $\tilde{y}'_i$:

$$T_-(x_i) = \frac{1}{2} (p'_i(x_i) + \tilde{y}'_i)$$

respectiv tangenta dreaptă ca o medie între derivata obținută din polinomul drept $p'_{i+1}(x_i)$ și aproximarea $\tilde{y}'_i$:

$$T_+(x_i) = \frac{1}{2} (p'_{i+1}(x_i) + \tilde{y}'_i)$$

Aproximarea coeficientului m_i este dată printr-o medie ponderată între tangenta stângă $T_-(x_i)$ și tangenta dreaptă $T_+(x_i)$.

$$m_i = \frac{|d_{i+1} - d_{i+1/2}| T_-(x_i) + |d_{i-1/2} - d_i| T_+(x_i)}{|d_{i-1/2} - d_i| + |d_{i+1} - d_{i+1/2}|}, \quad i = \overline{1, n-1}$$

Ponderile sunt determinate de diferențele între pantele d_{i-1} , d_i , d_{i+1} , care măsoară „cât de lină” este funcția în jurul punctului x_i . Dacă funcția este mai „înclinată” pe partea stângă ($|d_{i-1} - d_i|$ mare), formula folosește o pondere mai mare pentru tangenta din dreapta $T_+(x_i)$. Dacă funcția este mai „înclinată” pe partea dreaptă ($|d_{i+1} - d_i|$ mare), formula folosește o pondere mai mare pentru tangenta din stânga $T_-(x_i)$. Dacă numitorul fracției de mai sus este zero, înseamnă că pantele sunt egale (o funcție foarte „lină” sau constantă în acea zonă) și în acest caz formula devine o medie aritmetică:

$$m_i = \frac{1}{2} (T_-(x_i) + T_+(x_i))$$

cu valorile coeficienților m_0 și m_n conform [3].

6. CONCLUZII

Comparativ cu interpolarea clasică cu funcții spline cubice de tip Akima, varianta modificată asigură o tranziție mai uniformă a curburii între segmente adiacente, printr-o estimare mai bună a derivatei în punctele de interpolare. Această abordare conduce la o mai bună continuitate a derivatelor de ordinul întâi și al doilea, reducând oscilațiile locale și discontinuitățile de pantă la nivelul punctelor de joncțiune. Astfel, curba rezultată prezintă o netezime superioară și o comportare mai stabilă în regiunile cu variații abrupte ale datelor. În consecință, metoda de interpolare cu funcții spline cuartice de tip Akima este ideală pentru aplicații care necesită o modelare extrem de fidelă a datelor, fiind utilă pentru aplicații de modelare geometrică, prelucrarea semnalelor, îmbunătățirea imaginilor, grafică 3D sau traiectorii robotice.

Mulțumiri. Mulțumiri speciale domnului Prof. Univ. Dr. Habil. Alexandru Mihai Bica pentru că mi-a îndrumat pașii spre descoperirea unui domeniu de cercetare fascinant.

BIBLIOGRAFIE

- [1] AKIMA, H., *A new method for interpolation and smooth curve fitting based on local procedures*, J. Assoc.Comput. Mach., **4** (1970), 589–602.
- [2] BICA, A.M., and CURILĂ (POPESCU), D., *The Akima's Fitting Method for Quartic Splines*, J. Numer. Anal. Approx. Theory **51** (2) (2022), 155–166.
- [3] BICA, A.M., CURILĂ (POPESCU), D. and CURILĂ, M., *Optimal properties for deficient quartic splines of Marsden type*, J. Numer. Anal. Approx. Theory **49** (2) (2020), 113–130.
- [4] BICA, A.M., *Optimizing at the end-points the Akima's interpolation method of smooth curve fitting*, Computer Aided Geometric Design, **31** (2014), 245–257.
- [5] CHAKALOV, L., *On a certain presentation of the Newton divided differences in interpolation theory and its applications*, Annuaire Univ. Sofia, Fiz. Mat. Fakultet, **34** (1938), 353–394 (in Bulgarian).
- [6] CURILĂ (POPESCU), D., *Deficient quartic spline of Marsden type with minimal deviation by the data polygon*, Stud. Univ. Babeș-Bolyai Math., **68** (1) (2023), 203–211,
- [7] DUBEY, S. and DUBEY, Y.P., *Convergence of C2 deficient quartic spline interpolation*, Adv. Comput. Sciences & Technol., **10** (4) (2017), 519–527.
- [8] HAN, X., and GUO, X., *Cubic Hermite interpolation with minimal derivative oscillation*, J. Comput. Appl. Math., **33** (1) (2018), 82–87.
- [9] HOWELL, G., and VARMA, A.K., *Best error bounds for quartic spline interpolation*, J. Approx. Theory, **58** (1989), 58–67.
- [10] KODNYANKO, V.A., *Directional splines and their use for smoothing ejections and fractures of interpolant*, Vestn. YuUrGU. Ser. Vych. Matem. Inform., **10** (1) (2021), 5–19 (in Russian).
- [11] MARSDEN, M., *Quadratic spline interpolation*, Bull. Amer. Math. Soc., **80** (5) (1974), 903–906.
- [12] POPOVICIU, T., *Sur le prolongement des fonctions convexes d'ordre superieur*, Bull. Math. Soc. Roumaine des Sc., **36** (1934), pp. 75–108.
- [13] SCHOENBERG, I.J., *Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions, Part A: on the problem of smoothing or graduation, a first class of analytic approximation formulas*, Quart. Appl. Math., **4** (1946), 45–99.
- [14] VOLKOV, YU. S., *Best error bounds for the derivative of a quartic interpolation spline*, Siberian Adv. Math., **9** (2) (1999), 140–150

Școala Gimnazială "Dacia" Oradea, Catedra de Matematică
 Bulevardul Dacia 25, Oradea 410464, România
 e-mail: curila.diana@yahoo.com