

EXEMPLE SI CONTRAEXEMPLE PRIVING LIMITE CU FUNȚIA PUTERE

Cristina-Lorena COMAN, Anca GRAD

Abstract. This article addresses a number of exercises aimed at strengthening the understanding of some difficult problems involving limits of sequences of both real numbers and functions, formulated with power functions. They are particularly interesting to students attending mathematical competitions and to educators, due to the fact that in many cases the non-trained reader might jump to the incorrect conclusion that such a limit does not exist.

Exercițiul 1

Fie $f_n(x)$ un șir de funcții, unde:

$$f_n(x) = \sqrt[n]{3^n x^{2n} + x^n}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Aflați convergența șirului și limita sa.

Rezolvare

Pasul I Pentru a putea calcula limita $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ va trebui mai întâi să determinăm cazurile în care vom studia limita. Aceste cazuri le vom determina prin intermediul studierii argumentelor aflate sub radical. Sub radical găsim: $3^n x^{2n}$ și x^n pe care le comparăm:

$$|3^n x^{2n}| = |x^n| \implies |3x^2| = |x| \implies 3|x| = 1 \implies |x| = \frac{1}{3}$$

Astfel am determinat cazurile pe care lucrăm:

$$|x| > \frac{1}{3}, |x| = \frac{1}{3} \text{ și } |x| < \frac{1}{3}$$

Pasul II Pentru fiecare caz vom da factor comun forțat de sub radical argumentul cel mai puternic (deci vom folosi metoda factorului comun).

[label=]

(1) Cazul: $|x| > \frac{1}{3}$. Adică: $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \infty\right)$.

Dacă $|x| > \frac{1}{3} \implies 3x^2 > |x| \implies$ evident argumentul mai

puternic de sub radical va fi $3^n x^{2n}$. Scoatem factor comun forțat și rescriem pe $f_n(x)$:

$$f_n(x) = \sqrt[n]{3^n x^{2n} \left(1 + \frac{1}{3^n x^n}\right)} = 3x^2 \sqrt[n]{1 + \frac{1}{(3x)^n}}$$

Acum calculăm limita din $f_n(x)$: $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 3x^2 \sqrt[n]{1 + \frac{1}{(3x)^n}}$

știm că: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(3x)^n} = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 3x^2$

(2) Cazul: $x = \frac{1}{3} \implies f_n(x) = f_n\left(\frac{1}{3}\right)$. Calculăm $f_n\left(\frac{1}{3}\right)$:

$$f_n\left(\frac{1}{3}\right) = \sqrt[n]{3^n \left(\frac{1}{3}\right)^{2n} + \left(\frac{1}{3}\right)^n} = \sqrt[n]{3^n \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{3^n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^n}} = \sqrt[n]{\frac{2}{3^n}} = \frac{\sqrt[n]{2}}{3}$$

Calculăm limita lui $f_n(x)$ în acest caz.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n\left(\frac{1}{3}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{2}}{3} = \frac{2^0}{3} = \frac{1}{3}$$

(3) Cazul: $x = -\frac{1}{3}$. Calculăm $f_n\left(-\frac{1}{3}\right)$:

$$\begin{aligned} f_n\left(-\frac{1}{3}\right) &= \sqrt[n]{3^n \left(-\frac{1}{3}\right)^{2n} + \left(-\frac{1}{3}\right)^n} = \sqrt[n]{3^n \frac{(-1)^{2n}}{3^{2n}} + \frac{(-1)^n}{3^n}} = \\ &= \sqrt[n]{\frac{(-1)^{2n}}{3^n} + \frac{(-1)^n}{3^n}} \\ &= \sqrt[n]{\frac{(-1)^{2n} + (-1)^n}{3^n}} = \frac{\sqrt[n]{1 + (-1)^n}}{3} \end{aligned}$$

Deoarece avem $(-1)^n$ funcția oscilează continuu și nu va avea limită.

(4) Cazul: $|x| < \frac{1}{3} \implies x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Vom împărții din nou în 2 cazuri: atunci când x va fi pozitiv și atunci când va fi negativ. Vom avea:

[label=d)]

(a) Cazul $x \in \left[0, \frac{1}{3}\right) \implies 0 < x < \frac{1}{3} \implies 3x^2 < x$, deci vom proceda ca și la cazul i dar de data aceasta vom da factor comun pe x^n .

Rescriem pe $f_n(x)$:

$$f_n(x) = \sqrt[n]{x^n(3^n x^n + 1)} = x \sqrt[n]{(3x)^n + 1}$$

Calculăm acum limita din $f_n(x)$ știind că $\lim_{n \rightarrow \infty} (3x)^n = 0$ (deoarece dacă $0 < x < \frac{1}{3} \implies 3x < 1 \implies (3x)^n < 1$).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x \sqrt[n]{(3x)^n + 1} = x$$

- (b) Cazul: $x \in (-\frac{1}{3}, 0) \implies |x| > 3x^2$, putem scoate factor comun pe x^n dar din cauză că lucrăm cu numere negative semnul lui x^n va alterna continuu iar aceasta implică inexistența limitei.

Pasul III Astfel am obținut că limita șirului de funcții f_n este:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 3x^2 & , \text{ dacă } |x| > \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & , \text{ dacă } x = \frac{1}{3} \\ x & , \text{ dacă } x \in \left[0, \frac{1}{3}\right) \\ \nexists & , \text{ dacă } x \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right) \end{cases}$$

Deci șirul este convergent punctual pe $\mathbb{R} \setminus (-\frac{1}{3}, 0)$.

Exercițiul 2

Fie $f_n(x)$ un șir de funcții, unde:

$$f_n(x) = \sqrt[n]{a^n x^{2n} + x^n}, \quad x \in \mathbb{R} \text{ și } a > 0$$

Aflați convergența șirului și limita sa.

Rezolvare

Acest exercițiu reprezintă o generalizare a exercițiului anterior deci rezolvarea va fi una asemănătoare.

Pasul I Precum în exercițiul 1 pentru a calcula limita șirului de funcții f_n vom căuta cazurile pe care vom lucra prin comparația argumentelor de sub radical.

Sub radical găsim: $a^n x^{2n}$ și x^n . Le comparăm pentru a obținem:

$$|a^n x^{2n}| = |x^n| \implies (a > 0) \quad a^n |x^{2n}| = |x^n| \implies a^n |x^n| = 1 \implies a|x| = 1 \implies |x| = \frac{1}{a}$$

Astfel cazurile pe care vom lucra sunt:

$$|x| > \frac{1}{a}, |x| < \frac{1}{a} \text{ și } |x| < \frac{1}{a}.$$

Pasul II Pentru fiecare caz vom da factor comun forțat de sub radical argumentul cel mai puternic (deci vom folosi metoda factorului comun).

[label=)]

- (1) Cazul: $|x| > \frac{1}{a}$ adică: $x \in (-\infty, -\frac{1}{a}) \cup (\frac{1}{a}, \infty)$

Dacă $|x| > \frac{1}{a} \implies ax^2 > |x| \implies a^n x^{2n}$ va fi argumentul mai puternic de sub radical. Atunci rescriem $f_n(x)$ astfel:

$$f_n(x) = \sqrt[n]{a^n x^{2n} \left(1 + \frac{1}{(ax)^n}\right)} = ax^2 \sqrt[n]{1 + \frac{1}{(ax)^n}}$$

Acum calculăm limita șirului de funcții:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} ax^2 \sqrt[n]{1 + \frac{1}{(ax)^n}} = ax^2$$

- (2) Cazul: $x = \frac{1}{a} \implies f_n(x) = f_n(\frac{1}{a})$. Calculăm $f_n(\frac{1}{a})$:

$$f_n\left(\frac{1}{a}\right) = \sqrt[n]{a^n \left(\frac{1}{a}\right)^{2n} + \left(\frac{1}{a}\right)^n} = \sqrt[n]{a^n \frac{1}{a^{2n}} + \frac{1}{a^n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^n} + \frac{1}{a^n}} = \sqrt[n]{\frac{2}{a^n}} = \frac{\sqrt[n]{2}}{a}$$

Calculăm limita lui f_n în acest caz.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n\left(\frac{1}{a}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{2}}{a} = \frac{2^0}{a} = \frac{1}{a}$$

- (3) Cazul: $x = -\frac{1}{a}$. Calculăm $f_n(-\frac{1}{a})$:

$$\begin{aligned} f_n\left(-\frac{1}{a}\right) &= \sqrt[n]{a^n \left(-\frac{1}{a}\right)^{2n} + \left(-\frac{1}{a}\right)^n} = \sqrt[n]{a^n \frac{(-1)^{2n}}{a^{2n}} + \frac{(-1)^n}{a^n}} = \\ &= \sqrt[n]{\frac{(-1)^{2n}}{a^n} + \frac{(-1)^n}{a^n}} \\ &= \sqrt[n]{\frac{(-1)^{2n} + (-1)^n}{a^n}} = \frac{\sqrt[n]{1 + (-1)^n}}{a} \end{aligned}$$

Deoarece avem $(-1)^n$ funcția oscilează continuu și nu va avea limită.

- (4) Cazul: $|x| < \frac{1}{a} \implies x \in (-\frac{1}{a}, \frac{1}{a})$. Vom împărții din nou în 2 cazuri, și anume atunci când x va fi pozitiv și atunci când va fi negativ. Deci vom avea:

[label=d)]

- (a) Cazul $x \in [0, \frac{1}{a}) \implies 0 < x < \frac{1}{a} \implies ax^2 < x$. Vom proceda ca și la cazul i dar de data aceasta vom da factor comun pe x^n .

Rescriem pe $f_n(x)$:

$$f_n(x) = \sqrt[n]{x^n(ax^n + 1)} = x \sqrt[n]{(ax)^n + 1}$$

Calculăm acum limita din $f_n(x)$ știind că $\lim_{n \rightarrow \infty} (ax)^n = 0$ (deoarece dacă $0 < x < \frac{1}{a} \implies ax < 1 \implies (ax)^n < 1$).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x \sqrt[n]{(ax)^n + 1} = x$$

- (b) Cazul: $x \in (-\frac{1}{a}, 0) \implies |x| > ax^2$, putem scoate factor comun pe x^n dar din cauză că lucrăm cu numere negative semnul lui x^n va alterna continuu iar aceasta implică inexistența limitei.

Pasul III Astfel am obținut că limita șirului de funcții f_n este:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} ax^2 & , \text{ dacă } |x| > \frac{1}{a} \\ \frac{1}{a} & , \text{ dacă } x = \frac{1}{a} \\ x & , \text{ dacă } x \in \left[0, \frac{1}{a}\right) \\ \nexists & , \text{ dacă } x \in \left[-\frac{1}{a}, 0\right) \end{cases}$$

Deci șirul este convergent punctual pe $\mathbb{R} \setminus (-\frac{1}{3}, 0)$.

1. STUDIUL CONVERGENȚEI PUNCTUALE ȘI UNIFORME A ȘIRURILOR DE FUNCȚII

Exercițiul 3

Fie șirul de funcții:

$$f_n(x) = \frac{\arctan\left(\frac{1}{n^2x}\right)}{x^2}.$$

Determinați convergența punctuală și uniformă pentru $x \in (0, 1)$ și $x \in [1, \infty)$.

Rezolvare

Pasul I Calculăm limita punctuală a șirului de funcții.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{n^2x}\right)}{x^2} = \frac{\arctan 0}{x^2} = \frac{\pi}{2x^2}.$$

Conform definiției convergenței punctuale [?, Capitolul 5] putem afirma că șirul de funcții $f_n(x)$ converge punctual la $\frac{\pi}{2x^2}$.

Notăm:

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \quad , \text{ unde } f(x) = \frac{\pi}{2x^2}$$

Pasul II Verificăm dacă șirul de funcții este convergent uniform, iar pentru aceasta avem nevoie de eroare (conform definiției convergenței uniforme [?, Cap. 5]).

$$\text{err} = |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{x^2} \left| \arctan\left(\frac{1}{n^2x}\right) - \frac{\pi}{2} \right|$$

Pentru a calcula eroarea ne vom folosi de formula:

$$\arctan \frac{1}{y} + \arctan y = \frac{\pi}{2} \implies \arctan \frac{1}{y} = \frac{\pi}{2} - \arctan y.$$

Astfel obținem:

$$\text{err} = \frac{1}{x^2} \left| \frac{\pi}{2} - \arctan n^2x - \frac{\pi}{2} \right| = \frac{|\arctan n^2x|}{x^2}.$$

Pasul III După ce am calculat eroarea vom verifica convergența uniformă pentru cazul $x \in (0, 1)$.

În acest interval x este subunitar deci putem alege un $x_0 = \frac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$, deoarece $\forall x \in (0, 1)$, $\exists n \in \mathbb{N}$ a.î. $\frac{1}{n^2} = x$.

Vom verifica proprietatea convergenței uniforme:

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| = \left| \frac{\arctan\left(n^2 \frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} \right| = n^2 \arctan 1 = \frac{\pi}{4} n^2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \pi}{4} = \infty \implies \forall x \in (0, 1), \quad |f_n(x) - f(x)| \text{ nu e mai mic decât } \epsilon, \quad \forall \epsilon > 0$$

Atunci rezultă că șirul de funcții nu converge uniform când $x \in (0, 1)$.

Notăm: $f_n \not\Rightarrow f \quad \forall x \in (0, 1)$

Pasul IV Acum verificăm dacă șirul de funcții converge uniform când $x \in [1, \infty)$.

Prima dată vom verifica monotonia lui $f_n(x)$ (Conform criteriului supremului pentru convergența uniformă [?, Cap. 5])

$$f'_n(x) = \frac{-\frac{x^2}{n^4 x^2 + 1} - 2x \arctan(n^2 x)}{x^4} < 0 \quad (\text{evident}) \implies f_n(x) \text{ este descrescătoare}$$

$$f_n(x) \text{ descrescătoare} \implies \forall x \in [1, \infty) : f_n(x) \leq f_n(1).$$

Calculăm $f_n(1)$ pentru a găsi maximul.

$$f_n(1) = \arctan \frac{1}{n^2}$$

Deasemenea verificăm și monotonia lui $f(x) = \frac{\pi}{2x^2}$, care evident este descrescătoare, deci $f(x) \leq f(1)$, iar $f(1) = \frac{\pi}{2}$.

Pentru a putea verifica convergența uniformă vom calcula maximul erorii.

$$\begin{aligned} \max_{x \in [1, \infty)} |f_n(x) - f(x)| &= |f_n(1) - f(1)| = \left| \arctan \frac{1}{n^2} - \frac{\pi}{2} \right| = 0 \quad (\text{atunci când } n \rightarrow \infty) \\ \implies \forall \epsilon > 0, \quad |f_n(x) - f(x)| &< \epsilon, \quad \forall x \in [1, \infty) \end{aligned}$$

Deci conform definiției convergenței punctuale șirul de funcții converge uniform când $x \in [1, \infty)$.

Notăm: $f_n \Rightarrow f \quad \forall x \in [1, \infty)$

Exercițiul 4

Fie șirul de funcții:

$$f_n(x) = \frac{\arctan\left(\frac{1}{n^a x}\right)}{x^k}, \text{ unde } a > 1 \text{ și } k \in \mathbb{N}$$

Determinați convergența punctuală și uniformă pentru $x \in (0, 1)$ și $x \in [1, \infty)$.

Rezolvare

Acest exercițiu reprezintă o generalizare a exercițiului anterior iar rezolvarea sa va fi una asemănătoare.

Pasul I Calculăm limita punctuală a șirului de funcții.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{n^a x}\right)}{x^k} = \frac{\arctan 0}{x^k} = \frac{\pi}{2x^k}.$$

Conform definiției convergenței punctuale [?, Capitolul 5] putem afirma că șirul de funcții $f_n(x)$ converge punctual la $\frac{\pi}{2x^k}$.

Notăm:

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \quad , \text{ unde } f(x) = \frac{\pi}{2x^k}$$

Pasul II Verificăm dacă șirul de funcții este convergent uniform, iar pentru aceasta avem nevoie de eroare (conform definiției convergenței uniforme [?, Cap. 5]).

$$\text{err} = |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{x^k} \left| \arctan\left(\frac{1}{n^a x}\right) - \frac{\pi}{2} \right|$$

Pentru a calcula eroarea ne vom folosi de formula:

$$\arctan \frac{1}{y} + \arctan y = \frac{\pi}{2} \implies \arctan \frac{1}{y} = \frac{\pi}{2} - \arctan y.$$

Astfel obținem:

$$\text{err} = \frac{1}{x^k} \left| \frac{\pi}{2} - \arctan n^a x - \frac{\pi}{2} \right| = \frac{|\arctan n^a x|}{x^k}.$$

Pasul III După ce am calculat eroarea vom verifica convergența uniformă pentru cazul $x \in (0, 1)$.

În acest interval x este subunitar deci putem alege un $x_0 = \frac{1}{n^a}$, $n \in \mathbb{N}$, deoarece $\forall x \in (0, 1) \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \text{a.i.} \quad \frac{1}{n^a} = x$.

Vom verifica proprietatea convergenței uniforme:

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| = \left| \frac{\arctan\left(n^a \frac{1}{n^a}\right)}{\frac{1}{n^{ak}}} \right| = n^{ak} \arctan 1 = \frac{\pi}{4} n^{ak}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{ak} \pi}{4} = \infty \implies \forall x \in (0, 1), \quad |f_n(x) - f(x)| \text{ nu e mai mic decât } \epsilon, \quad \forall \epsilon > 0$$

Atunci rezultă că șirul de funcții nu converge uniform când $x \in (0, 1)$.

Notăm: $f_n \not\Rightarrow f \quad \forall x \in (0, 1)$

Pasul IV Acum vom verifica dacă șirul de funcții converge uniform când $x \in [1, \infty)$.

Prima dată vom verifica monotonia lui $f_n(x)$ (Conform criteriului supremului pentru convergența uniformă [?, Cap. 5])

$$f'_n(x) = \frac{-\frac{x^{k-2}}{n^a(1+\frac{1}{n^{2a}x^2})} - kx^{k-1} \arctan(\frac{1}{n^ax})}{x^{2k}} = \frac{-\frac{x^{k-2}}{n^{3a}x^2+n^a} - kx^{k-1} \arctan \frac{1}{n^ax}}{x^{2k}}$$

$$f'_n(x) = \frac{\frac{-x^k n^a}{n^{2a}x^2+1} - kx^{k-1} \arctan \frac{1}{n^ax}}{x^{2k}} < 0 \quad (\text{evident}) \implies f_n(x) \text{ este descrescătoare}$$

$$f_n(x) \text{ descrescătoare} \implies \forall x \in [1, \infty) : f_n(x) \leq f_n(1).$$

Calculăm $f_n(1)$ pentru a găsi maximul.

$$f_n(1) = \arctan \frac{1}{n^a}$$

Deasemenea verificăm și monotonia lui $f(x) = \frac{\pi}{2x^k}$, care evident este descrescătoare, deci $f(x) \leq f(1)$, iar $f(1) = \frac{\pi}{2}$.

Pentru a putea verifica convergența uniformă vom calcula maximul erorii.

$$\max_{x \in [1, \infty)} |f_n(x) - f(x)| = |f_n(1) - f(1)| = \left| \arctan \frac{1}{n^a} - \frac{\pi}{2} \right| = 0 \quad (\text{atunci când } n \rightarrow \infty)$$

$$\implies \forall \epsilon > 0, \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \quad \forall x \in [1, \infty)$$

Deci conform definiției convergenței punctuale șirul de funcții converge uniform când $x \in [1, \infty)$.

Notăm: $f_n \Rightarrow f \quad \forall x \in [1, \infty)$

2. STUDIUL CONVERGENȚEI PUNCTUALE ȘI UNIFORME A SERIILOR DE PUTERI

Exercițiul 5

Fie S o serie de puteri, unde

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{x^4 + n^5 x}}.$$

Să se studieze convergența punctuală și uniformă a seriei pentru $x \in (0, a)$ și $x \in [b, \infty)$, unde $a, b > 0$.

Rezolvare

Pasul I Stabilim care este termenul general al seriei:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt[4]{x^4 + n^5 x}} = \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt[4]{1 + \frac{n^5}{x^3}}}.$$

Pasul II Mărginim termenul general.

$$a_n < \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt[4]{n^5}} = \frac{1}{x n \sqrt[4]{n}} = \frac{1}{x n^{\frac{5}{4}}} = b_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x n^{\frac{5}{4}}} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$$

Știm că:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ - converge } \iff p > 1 \quad [?, \text{Cap.3}]$$

Avem: $\frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$, iar $\frac{5}{4} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă.

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă pe ambele cazuri

Pasul III Mergem pe cazul $x \in (0, a)$ și studiem convergența uniformă.

Conform criteriul de caracterizare a convergenței uniforme ([?, Cap. 5]) calculăm mai întâi eroarea:

$$\text{err} = |S(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right|, \quad \text{unde } S_n = \sum_{k=1}^n a_k.$$

Știm că: $|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k| > a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt[4]{x^4 + (n+1)^5 x}}.$

Suntem în cazul: $x \in (0, a)$, deci alegem un x_0 astfel încât să $\in (0, a)$.

Alegem $x_0 = \frac{1}{(n+1)^5}$. Calculăm err pentru $x_0 \Rightarrow$

$$|S(x_0) - S_n(x_0)| > a_{n+1}(x_0) = \frac{1}{\sqrt[4]{(\frac{1}{(n+1)^5})^4 + 1}} = \frac{(n+1)^5}{\sqrt[4]{(n+1)^{20} + 1}} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$\Rightarrow \forall \epsilon > 0 : |S(x) - S_n(x)| \not< \epsilon \quad \forall x \in (0, a)$$

Concluzionăm că S nu converge uniform când $x \in (0, a)$.

Pasul IV Mergem pe cazul $x \in [b, \infty)$ și verificăm convergența uniformă.

Alegem $x \in [b, \infty)$, $b > 0$. Verificăm monotonia termenului general a_n , care este evident descrescător. $\Rightarrow \forall x \in [b, \infty) : a_n(x) \leq a_n(b)$.

$$a_n(b) = \frac{1}{\sqrt[4]{b^4 + n^5 b}} = \frac{1}{b} \frac{1}{\sqrt[4]{1 + \frac{n^5}{b^3}}} < \frac{1}{b} \frac{1}{\sqrt[4]{n^5}} = \frac{1}{bn^{\frac{5}{4}}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{bn^{\frac{5}{4}}} \text{ este convergentă } a_n(x) < \frac{1}{bn^{\frac{5}{4}}} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ este uniform convergentă}$$

(conform teoremei lui Weirtrass[?])

Exercițiul 6

Fie S o serie de puteri, unde

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x}{1 + x^3 + n^3} \arctan \frac{x}{n}.$$

Să se studieze convergența punctuală și uniformă a seriei pentru $x \in (0, 1)$ și $x \in [1, \infty)$.

Rezolvare

Pasul I Stabilim care este termenul general al seriei și încercăm să-l

mărginim.

$$a_n = \frac{n^2 x}{1 + x^3 + n^3} \arctan \frac{x}{n} \quad - \quad \text{termenul general}$$

$$\frac{n^2 x}{1 + x^3 + n^3} < \frac{n^2 x}{x^3 + n^3} < \frac{n^2 x}{n^3} = \frac{x}{n} \arctan \frac{x}{n} \sim \frac{x}{n} \implies a_n < \frac{x^2}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n^2} = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{-convergentă} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{-convergentă}$$

Pasul II Mergem pe cazul $x \in (0, 1)$ și studiem convergența uniformă cu ajutorul criteriului Weierstrass de majorare. Notăm: $f_n(x) = a_n$, vrem să aflăm ce fel de funcție este $f_n(x)$.

$$f'_n(x) = \frac{(n^5 - 2x^3 n^2 + n^2) \arctan \frac{x}{n}}{(1 + x^3 + n^3)^2} + \frac{n^2 x}{1 + x^3 + n^3} \frac{n^2}{x^2 + n^2}$$

$f'_n(x) > 0 \implies f_n$ funcție crescătoare pe $(0, 1) \implies f_n(x) \leq f_n(1), \quad \forall x \in (0, 1)$.

$$f_n(1) = \frac{n^2}{2 + n^3} \arctan \frac{1}{n} < \frac{n}{2 + n^3} < \frac{1}{n^2}$$

Atunci:

$$f_n(x) < \frac{1}{n^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{-convergentă} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{uniform convergentă}$$

Pasul III Mergem pe cazul $x \in [1, \infty)$ și studiem convergența uniformă cu ajutorul abaterii (erorii).

Calculăm eroarea: $|S(x) - S_n(x)|$, unde $S_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k$. Știm că:

$$|S(x) - S_n(x)| > a_{n+1} \implies \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right| > \frac{(n+1)^2 x}{1 + x^3 + (n+1)^3} \arctan \frac{x}{n+1}$$

$$\text{Alegem } x_0 = n+1 \text{ (punct critic)} \implies f_n(x_0) = \frac{(n+1)^3}{1 + 2(n+1)^3} \frac{\pi}{4} \rightarrow$$

$$\frac{\pi}{8} \quad (n \rightarrow \infty)$$

$\implies \forall \epsilon > 0 : |f_n(x) - f(x_0)| \not< \epsilon \implies S$ nu converge uniform pe $[1, \infty)$.

3. CALCULUL SUMELOR SERIILOR

Exercițiul 6

Fie S serie de puteri. Calculați suma seriei.

[label=c]

$$\begin{aligned}
 (1) \quad S &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+2)(n+2)} \\
 (2) \quad S &= \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^3 x^{n+1} \\
 (3) \quad S &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1} \\
 (4) \quad S &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n(n+2)}{(n+1)!} \\
 (5) \quad S &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+2)(n+2)}
 \end{aligned}$$

Rezolvare

$$a) \quad S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+2)(n+2)}$$

Pasul I Notăm $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+2}}{(3n+2)(n+2)}$ - serie de puteri.

Pasul II Verificăm care este intervalul de convergență.

Aflăm raza de convergență $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$, unde $a_n = \frac{1}{(3n+2)(n+2)}$.

$$\Rightarrow R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+5)(n+3)}{(3n+2)(n+2)} = 1 \quad \Rightarrow \text{intervalul de convergență este: } (-1, 1)$$

Verificăm dacă $f(x)$ este convergent când $x = 1$.

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = S; \quad a_n = \frac{1}{(3n+2)(n+2)} = \frac{1}{3n^2 + 8n + 4} < \frac{1}{n^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ -convergentă} \Rightarrow S \text{ -convergentă.}$$

Verificăm dacă $f(x)$ este convergent când $x = -1$. Cum -1 este punct de discontinuitate(evident) intervalul de convergență este: $(-1, 1]$.

Pasul III Calculăm $f(x)$.

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{n+2} \Rightarrow x^5 f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+6}}{n+2} := g(x)$$

$$g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 3x^{3n+5} = 3x^5 \sum_{n=0}^{\infty} (x^3)^n := 3x^5 T$$

$$\begin{aligned}
& \text{Știm că } x \in (-1, 1] \text{ deci } T \text{ este o serie geometrică} \implies T = \frac{1}{1-x^3} \\
& \implies g'(x) = \frac{3x^5}{1-x^3} \quad \Big| \int \implies g(x) = \int x^2 \frac{3x^3}{1-x^3} dx = \int x^2 \left[\frac{3(x^3-1)}{1-x^3} + \frac{3}{1-x^3} \right] dx \\
& = \int \left[-3x^2 + \frac{3x^2}{1-x^3} \right] dx = -x^3 - \ln|1-x^3| \implies x^5 f'(x) = -x^3 - \ln|1-x^3| \quad \Big| : x^5 \\
& \implies f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{\ln|1-x^3|}{x^5} \quad \Big| \int dx \\
& \implies f(x) = \frac{1}{x} - \int \ln|1-x^3| x^{-5} dx = \frac{1}{x} - \left[\ln|1-x^3| \frac{x^{-4}}{-4} - \int \frac{-3x^2}{1-x^3} \frac{x^{-4}}{-4} dx \right] \\
& = \frac{1}{x} + \frac{\ln|1-x^3|}{4x^4} + \int \frac{3}{4x^2(1-x^3)} dx = \frac{1}{x} + \frac{\ln|1-x^3|}{4x^4} + \frac{3}{4} \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{x}{1-x^3} \right) dx \\
& = \frac{1}{x} + \frac{\ln|1-x^3|}{4x^4} + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{x} + \int \frac{x}{1-x^3} dx \right)
\end{aligned}$$

Notăm $I = \int \frac{x}{1-x^3} dx$ și calculăm.

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{3} \int \frac{3x}{(1-x)(1+x+x^2)} dx = \frac{1}{3} \int \left[\frac{1}{1-x} - \frac{1-x}{1+x+x^2} \right] dx \\
&= -\frac{1}{3} \ln|1-x| - \frac{1}{3} \int \frac{1-x}{1+x+x^2} dx = -\frac{1}{3} \ln|1-x| + \frac{1}{6} \int \frac{2x+1-3}{1+x+x^2} dx \\
&= -\frac{1}{3} \ln|1-x| + \frac{1}{6} \ln(1+x+x^2) - \frac{1}{2} \int \frac{1}{(\frac{1}{2}+x)^2 + \frac{3}{4}} dx \\
&\implies I = -\frac{1}{3} \ln|1-x| + \frac{1}{6} \ln(1+x+x^2) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \\
&\implies f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln|1-x^3|}{4x^4} + \frac{3}{4} \left[-\frac{1}{x} - \frac{1}{3} \ln|1-x| + \frac{1}{6} \ln(1+x+x^2) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right] \\
&\implies S = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)
\end{aligned}$$

$$S = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[\frac{1}{4x} + \frac{\ln(1+x+x^2)}{4x^4} + \frac{\ln(1-x)}{4x^4} - \frac{1}{4} \ln(1-x) + \frac{1}{8} \ln(1+x+x^2) - \frac{\sqrt{3}}{4} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right]$$

$$S = \frac{1}{4} + \frac{\ln 3}{4} + 0 + \frac{\ln 3}{8} - \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{1}{4} + \frac{3 \ln 3}{8} - \frac{\pi \sqrt{3}}{12}$$

Deci obținem că $S = \frac{1}{4} + \frac{3 \ln 3}{8} - \frac{\pi \sqrt{3}}{12}$

$$\text{b) } S = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^3 x^{n+1}$$

Pasul I Aflăm intervalul de convergență. $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$, unde $a_n =$

$$(n+1)^3$$

$\Rightarrow R = 1 \Rightarrow$ intervalul de convergență $= (-1, 1)$

Verificăm dacă 1 și -1 sunt în intervalul de convergență. Dacă $x = 1$ atunci seria va tinde la ∞ deci 1 nu e în interval, iar -1 este punct de discontinuitate.

Pasul II Calculăm S .

Prima dată notăm $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1}$.

$$\Rightarrow f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n \Rightarrow xf'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^{n+1} := g(x)$$

$$\Rightarrow g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^2 x^n \Rightarrow xg'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^2 x^{n+1} := h(x)$$

$$\Rightarrow xh'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^3 x^{n+1} = S$$

Prima dată calculăm pe $f(x)$ după care putem obține pe S . $x \in (-1, 1)$ deci $f(x)$ este o serie geometrică.

$$f(x) = x \sum_{n=1}^{\infty} x^n = x \frac{1}{1-x} = \frac{x}{1-x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow g(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{1-3x}{(1-x)^3} \Rightarrow h(x) = \frac{x-3x^2}{(1-x)^3} \Rightarrow h'(x) = \frac{(15x^2-10x+1)}{(1-x)^4}$$

$$\text{Deci } S = \frac{x(15x^2-10x+1)}{(1-x)^4}$$

$$\text{c) } S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1}$$

Pasul I Notăm $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+1}}{4n+1}$

Pasul II Aflăm intervalul de convergență cu ajutorul razei de convergență.
 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$, unde $a_n = \frac{1}{4n+1} \implies R = 1 \implies (-1, 1) \subset$ intervalul de convergență.

Dacă $x = 1 \implies f(1) = S, a_n \rightarrow 0, a_n > 0, a_n$ -descrescătoare $\implies S$ -convergență.

Iar -1 este punct de discontinuitate. Deci intervalul de convergență este $(-1, 1]$.

Pasul III Calculăm $f(x)$.

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{4n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-x^4)^n.$$

$$\text{Cum } x \in (-1, 1] \implies f'(x)\text{-serie geometrică.} \implies f'(x) = \frac{x_0}{1-q} = \frac{-x^4}{1+x^4}$$

$$\implies f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{-x^4}{1+x^4} dx = \int \frac{-x^4 - 1 + 1}{1+x^4} dx = \int \left(-1 + \frac{1}{1+x^4} \right) dx$$

$$\implies f(x) = -x + \int \frac{1}{1+x^4} dx$$

Pentru calcularea lui $\int \frac{1}{1+x^4} dx$ vom folosi metoda descompunerii cu ajutorul ecuației:

$$1+x^4 = (1+x^2)^2 - 2x^2 = (1+x^2-\sqrt{2}x)(1+x^2+\sqrt{2}x)$$

$$\implies \frac{1}{1+x^4} = \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

$$\implies Ax^3 - \sqrt{2}Ax^2 + Ax + Bx^2 - \sqrt{2}Bx + B + Cx^3 + \sqrt{2}Cx^2 + Cx + Dx^2 + \sqrt{2}Dx + D = 1$$

$$\implies x^3(A+C) + x^2(-\sqrt{2}A + \sqrt{2}C + B + D) + x(A - \sqrt{2}B + C + \sqrt{2}D) + B + D = 1$$

$$\implies A = -C; \quad B + D = 1; \quad 2\sqrt{2}C + B + D = 0; \quad D - B = 0$$

$$\Rightarrow D = B = \frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{1}{2\sqrt{2}}; C = -\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Deci } \Rightarrow \frac{1}{1+x^4} &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{x + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} - \frac{x - \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right) \\ \Rightarrow \int \frac{1}{1+x^4} dx &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\int \frac{x + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx - \int \frac{x - \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx \right) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} \int \frac{2x + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{2x - \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx \right) \end{aligned}$$

Ne folosim de faptul că $(x^2 \pm \sqrt{2}x + 1)' = 2x \pm \sqrt{2}$ și obținem:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x^4} &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \left[\ln |x^2 + \sqrt{2}x + 1| + \int \frac{\sqrt{2}}{(x + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{1}{2}} dx - \ln |x^2 - \sqrt{2}x + 1| - \int \frac{\sqrt{2}}{(x - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{1}{2}} dx \right] \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \left[\ln \left| \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right| + 2 \arctan \left(\frac{x + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \right) - 2 \arctan \left(\frac{x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \right) \right] \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right| + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\arctan(\sqrt{2}x + 1) - \arctan(\sqrt{2}x - 1) \right] \\ \Rightarrow f(x) &= -x + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right| + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\arctan(\sqrt{2}x + 1) - \arctan(\sqrt{2}x - 1) \right] \\ \Rightarrow S = f(1) &= -1 + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \right| + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\arctan(\sqrt{2} + 1) - \arctan(\sqrt{2} - 1) \right] \\ \Rightarrow S &= -1 + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{6 + 4\sqrt{2}}{2} \right| + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\arctan \left(\frac{1}{\sqrt{2} - 1} \right) - \arctan(\sqrt{2} - 1) \right] \end{aligned}$$

Ne folosim de proprietatea că $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.

$$\Rightarrow S = -1 + \frac{\ln(3 + 2\sqrt{2})}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\frac{\pi}{2} - \arctan(\sqrt{2} - 1) \right]$$

$$d) S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n(n+2)}{(n+1)!}$$

Pasul I Ne formăm seria de puteri: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n(n+2)}{(n+1)!}$

Pasul II Construim intervalul de convergență cu ajutorul razei de convergență.

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|, \text{ unde } a_n = \frac{n+2}{(n+1)!}$$

$$\Rightarrow R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{(n+1)!} \frac{(n+2)!}{n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^2}{n+3} = \infty$$

$\Rightarrow$ seria este convergentă pe $\mathbb{R}$

Pasul III Calculăm $f(x)$.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n(n+2)}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n(n+1)}{(n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$$

$$\text{Știm că } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{x} (e^x - 1) = \frac{e^x - 1}{x}$$

$$\Rightarrow f(x) = e^x + \frac{e^x - 1}{x} = e^x \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow S = \frac{4e^3 - 1}{3}$$

$$e) S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+2)(n+2)}$$

Pasul I Ne formăm seria de puteri: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{3n+2}}{(3n+2)(n+2)}$, cu

$$a_n = \frac{1}{(3n+2)(n+2)}.$$

Pasul II Construim intervalul de convergență cu ajutorul razei de convergență.

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 \implies (-1, 1) \subset \text{intervalul de convergență}.$$

Verificăm dacă 1 și -1 sunt în intervalul de convergență.

Dacă $x = -1$ seria este divergentă, deci -1 punct de divergență.

Dacă $x = 1 \implies a_n > 0, a_n$ -descrescătoare, $a_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty) \implies$ serie convergentă.

Deci intervalul de convergență = $(-1, 1]$.

Pasul III Aflăm suma seriei.

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{3n+1}}{n+2} \Big| x^5 \implies x^5 f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{3n+6}}{n+2} := g(x)$$

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 3(-1)^n x^{3n+5} = 3x^5 \sum_{n=1}^{\infty} (-x^3)^n = 3x^5 T$$

$$x \in (-1, 1] \implies T\text{-serie geometrică} \implies T = \frac{x_0}{1-q} = \frac{-x^3}{1+x^3} \implies$$

$$g'(x) = \frac{-3x^8}{1+x^3}$$

$$g(x) = \int \frac{-3x^8}{1+x^3} dx = \int \frac{-3x^8 - 3x^5 + 3x^5}{1+x^3} dx = \int \left(-3x^5 + 3 \frac{x^5 + x^2 - x^2}{1+x^3} \right) dx$$

$$= -\frac{x^6}{2} + \int \left(3x^2 - \frac{3x^2}{1+x^3} \right) dx = -\frac{x^6}{2} + x^3 - \ln |1+x^3| : x^5$$

$$\implies f'(x) = -\frac{x}{2} + \frac{1}{x^3} - \frac{\ln |1+x^3|}{x^5}$$

$$\implies f(x) = -\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2x^2} - \int \frac{\ln |1+x^3|}{x^5} dx = -\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2x^2} - \int \left(\frac{-x^{-4}}{4} \right)' \ln |1+x^3| dx$$

$$= -\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2x^2} - \left[-\frac{1}{4x^4} \ln |1+x^3| + \int \frac{1}{4x^4} \frac{3x^2}{1+x^3} dx \right]$$

$$= -\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2x^2} - \left[-\frac{1}{4x^4} \ln |1+x^3| + \frac{3}{4} \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{x}{1+x^3} \right) dx \right]$$

$$= -\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2x^2} - \left[-\frac{1}{4x^4} \ln |1+x^3| - \frac{3}{4} \frac{1}{x} - \frac{3}{4} \int \frac{x}{1+x^3} dx \right].$$

Se rezolvă integrala $\int \frac{x}{1+x^3} dx$ cu metoda aplicată la punctul c.

$$\frac{x}{1+x^3} = \frac{x}{(1+x)(1-x+x^2)} = \frac{A}{1+x} + \frac{Bx+C}{1-x+x^2}$$

$$\Rightarrow A - Ax + Ax^2 + Bx + Bx^2 + C + Cx = x$$

$$\Rightarrow A + C + x(B + C - A) + x^2(A + B) = x$$

$$\Rightarrow C = -A, B = -A \Rightarrow B = C \Rightarrow A = -\frac{1}{3}, B = C = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \int \frac{x}{1+x^3} dx = -\frac{1}{3} \int \frac{1}{1+x} dx + \frac{1}{3} \int \frac{x+1}{x^2-x+1} dx = -\frac{1}{3} \ln|1+x| + \frac{1}{6} \int \frac{2x-1+3}{x^2-x+1} dx$$

$$= -\frac{1}{3} \ln|1+x| + \frac{1}{6} \ln|x^2-x+1| + \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dx$$

$$= -\frac{1}{3} \ln|1+x| + \frac{1}{6} \ln|x^2-x+1| + \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2x^2} - \left[-\frac{1}{4x^4} \ln|1+x^3| - \frac{3}{4} \frac{1}{x} - \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3} \ln|1+x| + \frac{1}{6} \ln|x^2-x+1| + \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) \right) \right]$$

$$= -\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2x^2} - \left[-\frac{1}{4x^4} \ln|1+x^3| - \frac{3}{4x} - \left(-\frac{1}{4} \ln|1+x| + \frac{1}{8} \ln|x^2-x+1| + \frac{\sqrt{3}}{4} \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) \right) \right]$$

$$= -\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2x^2} - \left[-\frac{1}{4x^4} \ln|1+x^3| - \frac{3}{4x} + \frac{1}{4} \ln|1+x| - \frac{1}{8} \ln|x^2-x+1| - \frac{\sqrt{3}}{4} \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) \right]$$

$$= -\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{4x^4} \ln|1+x^3| + \frac{3}{4x} - \frac{1}{4} \ln|1+x| + \frac{1}{8} \ln|x^2-x+1| + \frac{\sqrt{3}}{4} \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{4x^4} \ln|1+x^3| + \frac{3}{4x} - \frac{1}{4} \ln|1+x| + \frac{1}{8} \ln|x^2-x+1| + \frac{\sqrt{3}}{4} \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$$

În final obținem:

$$S = f(1) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{1} + \frac{1}{4} \ln|1+1| + \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \ln|1+1| + \frac{1}{8} \ln|1| + \frac{\sqrt{3}}{4} \arctan\left(\frac{2-1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\implies S = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{\pi}{6}$$

Departamentul de Mateamtică
Facultatea de Matematică și Informatică,
Universitatea "Babeș-Bolyai", Cluj-Napoca
e-mail: `anca.grad@ubbcluj.ro`