

PRODUSUL CAUCHY PENTRU SERII - EXEMPLE ȘI CONTRAEXEMPLE

Patricia-Iulia CELSIE, Anca GRAD

Abstract. Studiul seriilor convergente necesită înțelegerea modului în care acestea se comportă și în cadrul operațiilor aritmetice. O proprietate importantă a seriilor convergente se referă la posibilitatea de a grupa termenii fără a afecta convergența sau suma seriei. Aceasta este o extindere a proprietății de asociativitate de la sumele finite.

1. DIVERSE APLICAȚII

Problemele selectate în această secțiune aduc modificări substanțiale soluțiilor originale, optând pentru refacerea demonstrațiilor în cazurile în care acestea erau prezentate succint sau doar sub formă de indicații. Totodată, am utilizat exemple alternative, rezolvările fiind adaptate în manieră proprie.

Exercițiul 1. Să se studieze convergența seriei

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{\log\left(\frac{m^3 + m}{m}\right)}.$$

Rezolvare:

Dorim să aplicăm Criteriul 2 de comparație, astfel vom studia termenul general:

$$\log\left(\frac{m^3 + m}{m}\right) = \log\left(1 + \frac{1}{m^2}\right)$$

Datorită faptului că $\frac{1}{n^2} \rightarrow 0$ vom apela la formula:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Avem:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\ln(1 + \frac{1}{m^2})}{\frac{1}{m^2}}} = 1$$

Deoarece limita $l \in (0, \infty)$, concluzionăm faptul că seria noastră are aceeași natură precum $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}$, deci divergentă (serie p unde puterea este mai mică sau egală cu 1).

Exercițiul 2. Să se studieze convergența seriei

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{m}} (1 - \cos \frac{1}{\sqrt{m}}).$$

Rezolvare:

Vom utiliza formula trigonometrică:

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$$

Deci, termenul general a_m devine $\frac{1}{\sqrt{m}} 2 \sin^2 \frac{1}{2\sqrt{m}}$ Considerăm $x_m = \frac{1}{\sqrt{m}} 2 \sin^2 \frac{1}{2\sqrt{m}}$ și $y_m = \frac{1}{\sqrt{m} 4m}$. Astfel,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{x_m}{y_m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{m}} 2 \sin^2 \left(\frac{1}{2\sqrt{m}} \right)}{\frac{1}{\sqrt{m} 4m}}$$

În concluzie,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{x_m}{y_m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{1}{\sqrt{m}}}{\frac{1}{\sqrt{m}}} \cdot 2 \cdot \frac{\sin \left(\frac{1}{2\sqrt{m}} \right)}{\frac{1}{2\sqrt{m}}} \cdot \frac{\sin \left(\frac{1}{2\sqrt{m}} \right)}{\frac{1}{2\sqrt{m}}} \right)$$

Folosind faptul că $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, avem $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{x_m}{y_m} = 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2 \in (0, \infty)$ deci (utilizând criteriul 2 de convergență) seria noastră are aceeași natură precum $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4\sqrt{m}^3}$, adică este convergentă (serie p unde puterea este mai mare decât 1).

Exercițiul 3. Să se studieze convergența seriei

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^2 + (-1)^m}$$

Rezolvare:

Remarcăm modul în care paritatea termenului general influențează direct comportamentul seriei. Să studiem separat cele 2 cazuri particulare: Fie $k \in \mathbb{Z}$

- (1) $m = 2k \Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2+1}$ În acest caz, termenii sunt strict pozitivi, deci putem compara cu seria p-de tipul:

$$\sum \frac{1}{k^2},$$

unde $p = 2 > 1$, deci este convergentă.

Deoarece

$$0 < \frac{1}{4k^2+1} < \frac{1}{4k^2},$$

și seria $\sum \frac{1}{4k^2}$ este convergentă, rezultă, prin criteriul 1 de comparație că și seria

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 + 1}$$

este convergentă.

$$(2) \quad m = 2k + 1 \Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-1}{4k(k+1)}$$

Aici termenii sunt negativi, dar vom începe prin studiul convergenței absolute, fapt pentru care avem nevoie de modulul termenului general:

$$\left| \frac{-1}{4k(k+1)} \right| = \frac{1}{4k(k+1)}.$$

Putem observa că:

$$\frac{1}{4k(k+1)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right),$$

deci seria este telescopică. Suma parțială de rang n devine:

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k(k+1)} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$S_n = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right]$$

$$S_n = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)$$

Deci,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{4k(k+1)} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4}.$$

Deoarece modulul seriei este convergent, rezultă că seria inițială este absolut convergentă și, prin urmare, seria studiată este convergentă.

Exercițiul 4. Fie $\sum_{n \geq 1} a_n$ o serie cu termeni pozitivi și fie

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} = g \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Să se arate că seria converge pentru $g > 1$, diverge pentru $g < 1$, iar cazul $g = 1$ este indecisiv.

*Observație: Exercițiul este adaptat după *, fiind inclus pentru a completa rezolvarea exercițiului următor.*

Rezolvare:

a) Cazul $g > 1$. Vrem să arătăm că seria $\sum a_n$ este convergentă. Avem inegalitatea:

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1}$$

Aceasta se obține direct din două estimări clasice pentru funcția logaritm natural, care este concavă:

$$\ln(1+x) < x \quad \text{și} \quad \ln(1+x) > \frac{x}{1+x}, \quad x > 0.$$

Pentru $x = \frac{1}{n}$, prima inegalitate devine

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e^1 = e$$

iar a doua conduce la

$$1 < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > e^1 = e.$$

Astfel, e este încadrat între cele două puteri succesive ale lui $\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

Fie $\varepsilon > 0$ suficient de mic astfel încât

$$g - \varepsilon > 1,$$

Atunci există n_0 astfel încât pentru orice $n \geq n_0$ avem

$$n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} > g - \varepsilon > n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

(Comentariu: aici folosim faptul că $\ln(1 + \frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$, deci produsul $n \ln(1 + \frac{1}{n})$ tinde către 1, iar $g - \varepsilon > 1$).

Rezultă deci, folosind prima parte a inegalității:

$$\ln \frac{a_n}{a_{n+1}} > \frac{g - \varepsilon}{n} \Rightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} > e^{\frac{g - \varepsilon}{n}} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < e^{-\frac{g - \varepsilon}{n}}$$

Datorită faptului că $e^{\frac{1}{n}} \sim 1 + \frac{1}{n}$, rezultă:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{g - \varepsilon}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{g - \varepsilon}$$

Astfel, concluzionăm:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{\frac{1}{(n+1)^{g - \varepsilon}}}{\frac{1}{n^{g - \varepsilon}}} := \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

Prin inducție avem că, pentru n suficient de mare,

$$a_n \leq C \frac{1}{n^{g - \varepsilon}}.$$

Cum $g > 1$ și ε se alege astfel încât $g - \varepsilon > 1$, seria

$$\sum \frac{1}{n^{g - \varepsilon}}$$

este convergentă (serie de tip p , cu $p > 1$).

Prin criteriul de comparație rezultă imediat că și seria $\sum a_n$ este convergentă.

b) Cazul $g < 1$. Divergența seriei.

Argumentul este similar, dar în sens invers: dacă $g < 1$, atunci pentru n suficient de mare avem

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 + \delta$$

pentru un anumit $\delta > 0$.

Cum $a_{n+1} > (1 + \delta)a_n$, se obține că a_n nu poate tinde la 0, iar o serie cu termeni pozitivi ale cărei termeni nu tind la 0 este divergentă. Deci:

$$\sum a_n \text{ diverge.}$$

c) Cazul $g = 1$. Testul raportului nu decide.

Exemple clasice arată că testul nu se poate folosi:

- Dacă $a_n = \frac{1}{n}$, atunci $g = 1$, dar seria diverge.
- Dacă $a_n = \frac{1}{n(\ln n)^2}$, atunci $g = 1$, dar seria converge.

Prin urmare, în cazul $g = 1$, **testul nu oferă nicio concluzie** și trebuie folosit un alt criteriu (criteriul lui Cauchy, Raabe, Bertrand etc.).

Exercițiul 5. Să se studieze convergența următoarelor serii:

- a) $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\ln(m)}}$
- b) $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{3^{\ln(m)}}$
- c) $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{a^{\ln(m)}}$, unde $a > 0$

Rezolvare:

Vom aborda aceste subpuncte în două moduri distincte. În prima parte dorim să aplicăm criteriul de condensare al lui Cauchy, urmând să încercăm ideea inovativă inspirată din * la Exercițiul 4.

Este suficient să ne axăm asupra subpunctului c) deoarece ne va oferi o soluție generală care va rezolva și primele subpuncte.

Varianta 1: Folosind criteriul de condensare al lui Cauchy, avem:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{a^{\ln(m)}} \sim \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^m}{a^{\ln 2^m}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^m}{a^{m \ln 2}}$$

Dorim să utilizăm criteriul raportului, deci analizăm limita:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2^m \cdot 2}{a^{(m+1) \ln 2}} \cdot \frac{a^{m \ln 2}}{2^m} = 2 \lim_{m \rightarrow \infty} a^{m \ln 2 - (m+1) \ln 2} = \frac{2}{a^{\ln 2}}.$$

Dacă $\frac{2}{a^{\ln 2}} < 1 \Leftrightarrow 2 < a^{\ln 2} \Leftrightarrow \sqrt[2]{2} < a \Leftrightarrow e < a$, seria este convergentă. Dacă $\frac{2}{a^{\ln 2}} > 1 \Leftrightarrow e > a$, seria este divergentă. Pentru $a = \sqrt[2]{2}$ avem

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^m}{a^{\ln 2^m}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^m}{2^{\frac{1}{\ln 2} m \ln 2}} = \sum_{m=1}^{\infty} 1 \text{ divergentă.}$$

Varianta 2 Calculăm limita

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m \ln \left(\frac{\frac{1}{a^{\ln m}}}{\frac{1}{a^{\ln(m+1)}}} \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} m \ln a^{\ln(1 + \frac{1}{m})} = \lim_{m \rightarrow \infty} m \ln(1 + \frac{1}{m}) \cdot \ln a = \ln a \cdot \lim_{m \rightarrow \infty} \ln(1 + \frac{1}{m})^m = \ln a$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{C: } a > e, \\ \text{D: } a < e, \\ \text{D: } a = e \left(\sum \frac{1}{m} \right). \end{cases}$$

Astfel, pentru subpunctul a) seria diverge în timp ce la b) converge.

Exercițiul 6. Să se studieze convergența seriei:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sin\left(\pi \cdot \frac{m^2 + 1}{m}\right)$$

Rezolvare:

Avem că

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sin\left(\pi \cdot \frac{m^2 + 1}{m}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \sin\left(m\pi + \frac{\pi}{m}\right)$$

Dorim să apelăm la formula trigonometrică:

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} \sin(\pi m) \cos\left(\frac{\pi}{m}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{m}\right) \cos(\pi m)$$

Datorită faptului că $\sin(\pi m) = 0$ și $\cos(\pi m) = (-1)^m$, rămâne să studiem seria

$$\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \sin\left(\frac{\pi}{m}\right).$$

Notăm

$$a_m = \sin\left(\frac{\pi}{m}\right), \quad m \geq 1.$$

Observăm mai întâi că $a_m > 0$ pentru orice m și

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{\pi}{m}\right) = \sin 0 = 0.$$

Ne întrebăm dacă șirul a_m este descrescător. Pentru a afla răspunsul, să analizăm comportamentul următoarei funcții:

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right), \quad x > 0.$$

Atunci

$$f'(x) = \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) \cdot \left(-\frac{\pi}{x^2}\right) = -\frac{\pi}{x^2} \cos\left(\frac{\pi}{x}\right).$$

Pentru x suficient de mare avem $0 < \frac{\pi}{x} < \frac{\pi}{2}$, deci $\cos\left(\frac{\pi}{x}\right) > 0$ și rezultă că $f'(x) < 0$. Prin urmare, șirul $a_m = f(m)$ este descrescător pentru m suficient de mare.

Avem deci:

- $a_m > 0$ pentru orice m ;
- (a_m) este descrescător de la un anumit rang;
- $\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = 0$.

Prin criteriul lui Leibniz, seria

$$\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \sin\left(\frac{\pi}{m}\right)$$

este convergentă.

În plus, seria **nu** este absolut convergentă:

$$\sum_{m=1}^{\infty} |(-1)^m \sin\left(\frac{\pi}{m}\right)| = \sum_{m=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{m}\right).$$

Pentru m suficient de mare avem $0 < \frac{\pi}{m} < 1$, iar din $\sin x \sim x$ când $x \rightarrow 0$ obținem

$$\sin\left(\frac{\pi}{m}\right) \sim \frac{\pi}{m}.$$

Prin urmare, seria $\sum \sin(\pi/m)$ se comportă ca seria armonică $\sum \frac{1}{m}$ și este divergentă.

Concluzionăm că seria inițială este *convergentă, dar nu absolut*, adică este convergentă condiționat.

Exercițiul 7. Avem o serie $\sum a_m$ divergentă. Să se studieze comportamentul seriei

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{1 + ma_m}$$

Rezolvare:

Considerăm două exemple diferite pentru seria $\sum a_m$

Exemplul 1. Fie

$$a_m = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{m}}, & m \text{ impar}, \\ \frac{1}{m^2}, & m \text{ par}. \end{cases}$$

Atunci seria

$$\sum_{m \text{ impar}} \frac{1}{\sqrt{m}}$$

este divergentă, deoarece sumele parțiale cresc fără limită. Deci și seria $\sum a_m$ este divergentă.

Pentru seria

$$\sum \frac{a_m}{1 + a_m},$$

avem:

$$\frac{a_m}{1 + ma_m} = \begin{cases} \frac{\frac{1}{\sqrt{m}}}{1 + m\frac{1}{\sqrt{m}}} = \frac{1}{\sqrt{m} + m} \sim \frac{1}{\sqrt{m}}, & m \text{ impar}, \\ \frac{\frac{1}{m^2}}{1 + m\frac{1}{m^2}} = \frac{1}{m^2 + m} \sim \frac{1}{m^2}, & m \text{ par}. \end{cases}$$

Prin urmare,

$$\frac{a_m}{1 + ma_m} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{m}}, & m \text{ impar}, \\ \frac{1}{m^2}, & m \text{ par}, \end{cases}$$

și deoarece termenii impari sunt de forma $\frac{1}{\sqrt{m}}$, seria este divergentă.

Exemplul 2. Fie

$$a_m = \begin{cases} 1, & m = 2^k, \\ \frac{1}{m^3}, & \text{altfel}. \end{cases}$$

Seria $\sum a_m$ este divergentă, deoarece termenii egali cu 1 nu tind la zero.

Pentru seria

$$\sum \frac{a_m}{1 + ma_m},$$

obținem:

$$\frac{a_m}{1 + ma_m} = \begin{cases} \frac{1}{1 + 2^k} = \frac{1}{2^k}, & m = 2^k, \\ \frac{\frac{1}{m^3}}{1 + m\frac{1}{m^3}} = \frac{1}{m^3 + m} \sim \frac{1}{m^3}, & \text{altfel}. \end{cases}$$

Seria termenilor din a doua ramură este convergentă ($p = 3 > 1$), iar termenii de forma $m = 2^k$ formează seria

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k},$$

care este o serie geometrică unde $q = 1/2 < 1$, deci tot convergentă.

Putem deci concluziona faptul că pentru o serie divergentă $\sum a_n$, seria studiată poate atât să convergă, cât și să divergă.

Exercițiul 8. Fie $(a_m)_{m \geq 1}$ și $(b_m)_{m \geq 1}$ două șiruri descrescătoare, cu $a_m \rightarrow 0$ și $b_m \rightarrow 0$. Presupunem că seriile

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m, \quad \sum_{m=1}^{\infty} b_m$$

sunt divergente. Definim

$$c_m = \min(a_m, b_m).$$

Stabiliți natura seriei $\sum_{m=1}^{\infty} c_m$

Rezolvare:

Observație: Dacă $a_m \leq b_m$ pentru orice m , atunci $c_m = a_m$ și seria $\sum c_m$ diverge, deoarece coincide cu seria divergentă $\sum a_m$.

Pentru $k \in \mathbb{N}$ definim blocurile

$$I_k = [2^k, 2^{k+1}),$$

și două șiruri descendente

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n \in I_k, \text{ } k \text{ impar,} \\ \frac{1}{n^2}, & n \in I_k, \text{ } k \text{ par,} \end{cases} \quad b_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2}, & n \in I_k, \text{ } k \text{ impar,} \\ \frac{1}{n}, & n \in I_k, \text{ } k \text{ par.} \end{cases}$$

• **Monotonia:**

Pe fiecare interval I_k , funcțiile $\frac{1}{n}$ și $\frac{1}{n^2}$ sunt strict descrescătoare. În plus, pentru $n = 2^{k+1}$ avem:

$$\frac{1}{2^{k+1}} < \frac{1}{2^k}, \quad \frac{1}{(2^{k+1})^2} < \frac{1}{(2^k)^2},$$

deci a_n și b_n sunt descrescătoare la trecerea între intervale.

Prin urmare, (a_n) și (b_n) sunt descrescătoare pe toată mulțimea $\mathbb{N}$.

• **Divergența seriilor:**

Pe blocurile I_k cu k impar, avem $a_n = \frac{1}{n}$

Există infinit de multe astfel de blocuri, deci $\sum a_n$ diverge. Un argument identic demonstrează și divergența lui $\sum b_n$.

• **Convergența lui $c_n = \min(a_n, b_n)$.**

Pentru orice $n \in I_k$:

$$(a_n, b_n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2} \right), & k \text{ impar,} \\ \left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n} \right), & k \text{ par,} \end{cases}$$

de unde rezultă

$$c_n = \min(a_n, b_n) = \frac{1}{n^2}.$$

Prin urmare,

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

este convergentă (serie p, unde $p = 2 > 1$).

Concluzie. Deși șirurile (a_n) și (b_n) sunt descrescătoare, tind la 0 și seriile $\sum a_n$ și $\sum b_n$ sunt divergente, seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n)$$

este convergentă.

Exercițiul 9.

Testul lui Kummer. Fie $(a_m)_{m \geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ și $(b_m)_{m \geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ două șiruri. Presupunem că există o constantă $C > 0$ astfel încât

$$b_m \frac{a_m}{a_{m+1}} - b_{m+1} \geq C \quad (*)$$

pentru orice m suficient de mare.

- 1) Dacă (b_m) este convergent, atunci $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ este convergentă.
- 2) Dacă (b_m) este divergent, atunci $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ este divergentă.

Rezolvare:

1) Din $(*)$ avem

$$b_m \frac{a_m}{a_{m+1}} - b_{m+1} \geq C.$$

Înmulțind cu $a_{m+1} > 0$ obținem

$$a_m b_m - a_{m+1} b_{m+1} \geq C a_{m+1}.$$

Dacă însumăm pe rând termenii, observăm faptul că termenul din stânga devine o sumă telescopică:

$$\sum_{m=1}^N (a_m b_m - a_{m+1} b_{m+1}) = a_1 b_1 - a_2 b_2 + a_2 b_2 + a_3 b_3 - \dots + a_N b_N - a_{N+1} b_{N+1} = a_1 b_1 - a_{N+1} b_{N+1}.$$

Prin urmare,

$$a_1 b_1 - a_{N+1} b_{N+1} \geq C \sum_{m=1}^N a_{m+1}.$$

Avem că $a_{N+1} b_{N+1} \geq 0$, deci

$$a_1 b_1 \geq C \sum_{m=1}^N a_{m+1}.$$

Cum partea dreaptă este suma parțială a unei serii pozitive și aceasta este mărginită $\Rightarrow$

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m \text{ converge.}$$

2) Presupunem că:

$$b_m \frac{a_m}{a_{m+1}} - b_{m+1} \leq 0.$$

Rescriem:

$$b_m \frac{a_m}{a_{m+1}} \leq b_{m+1}.$$

Prin urmare,

$$\frac{a_{m+1}}{a_m} \geq \frac{b_m}{b_{m+1}} \Leftrightarrow \frac{a_{m+1}}{a_m} \geq \frac{1}{\frac{b_{m+1}}{b_m}}.$$

Dar, din ipoteză seria

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{b_m}$$

este divergentă. Folosind criteriul 3 de comparație, avem $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ este divergentă.

Exercițiul 10. Demonstrați următoarele afirmații:

a) Fie $k \in \mathbb{N}^*$ și $(a_m)_{m \geq 1}$ un șir de numere strict pozitive, pentru care

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a_{m+k}}{a_m} = l.$$

Dacă $l < 1$, atunci seria $\sum_{m \geq 1} a_m$ este convergentă; dacă $l > 1$, atunci seria

$\sum_{m \geq 1} a_m$ este divergentă.

b) Fie $k \in \mathbb{N}^*$ și $(a_m)_{m \geq 1}$ un șir strict pozitiv, pentru care

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m \left(\frac{a_m}{a_{m+k}} - 1 \right) = g.$$

Dacă $g > k$, atunci seria $\sum_{m \geq 1} a_m$ este convergentă; dacă $g < k$, atunci seria

$\sum_{m \geq 1} a_m$ este divergentă.

Rezolvare:

a) Împărțim seria (a_m) în k serii intercalate (grupăm termenii după restul împărțirii lui m la k):

$$\sum_{m \geq 1} a_m = \sum_{m \geq 1} a_{km} + \sum_{m \geq 1} a_{1+km} + \cdots + \sum_{m \geq 1} a_{(k-1)+km}.$$

Astfel, fie resturile $r \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ și $u_m = a_{r+km}$.

Raportul termenilor succesivi pentru una dintre aceste serii este:

$$\frac{u_{m+1}}{u_m} = \frac{a_{r+k(m+1)}}{a_{r+km}} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} l,$$

limita fiind aceeași pentru toate seriile și independentă de r .

Aplicăm **testul lui d'Alembert** pentru fiecare dintre cele k serii:

$$\begin{cases} \text{C: } l < 1 \Rightarrow \text{fiecare dintre cele } k \text{ serii intercalate este convergentă} \Rightarrow \sum_{m \geq 1} a_m \text{ convergentă,} \\ \text{D: } l > 1 \Rightarrow \sum_{m \geq 1} a_m \text{ divergentă,} \\ \text{? : } l = 1. \end{cases}$$

b) Vom folosi decompunerea de la punctul (a):

$$\sum_{m \geq 1} a_m = \sum_{m \geq 1} a_{km} + \sum_{m \geq 1} a_{1+km} + \cdots + \sum_{m \geq 1} a_{(k-1)+km}.$$

Pentru fiecare dintre aceste k serii aplicăm testul lui Raabe:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m \left(\frac{a_{r+mk}}{a_{r+(m+1)k}} - 1 \right).$$

Fie $n = r + mk$, deci pentru $m \rightarrow \infty$ avem $n \rightarrow \infty$. Atunci

$$\frac{n-r}{k} = m$$

și, prin ipoteză,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m \left(\frac{a_{r+mk}}{a_{r+(m+1)k}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-r}{k} \left(\frac{a_n}{a_{n+k}} - 1 \right) \right) \rightarrow \frac{g}{k}.$$

(termenul $\frac{r}{k}$ este constant și nu influențează limita. Astfel, $\frac{n-r}{k} \sim \frac{n}{k}$, pentru $n \rightarrow \infty$)

Aplicând testul lui Raabe fiecărei subserii, obținem:

$$\begin{cases} \sum a_m \text{ convergentă,} & \text{dacă } \frac{g}{k} > 1 \iff g > k, \\ \sum a_m \text{ divergentă,} & \text{dacă } \frac{g}{k} < 1 \iff g < k, \\ \text{caz indecis,} & g = k. \end{cases}$$

Exercițiul 11. Studiați pentru ce valori ale lui $a \in \mathbb{R}$ seria

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m+1} \left(\frac{a^2 - 4a - 8}{a^2 + 6a - 16} \right)^m, a \in \mathbb{R} \setminus \{-8, 2\}$$

este absolut convergentă, convergentă condiționat sau divergentă.

Rezolvare:

$$\text{Notăm } r(a) = \frac{a^2 - 4a - 8}{a^2 + 6a - 16}.$$

$$\Rightarrow \text{seria noastră devine: } \sum_{m \geq 1} \frac{1}{m+1} r^m.$$

a) Studiem seria

Cazul 1: $|r| < 1$. Atunci studiem

$$\sum_{m \geq 1} \frac{|r|^m}{m+1}.$$

Vrem să aplicăm criteriul raportului, deci vom analiza limita:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a_{m+1}}{a_m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\frac{|r|^{m+1}}{(m+2)}}{\frac{|r|^m}{(m+1)}} = |r|.$$

$|r| < 1$ deci seria este absolut convergentă.

Cazul 2: $r = 1$ Seria devine:

$$\sum_{m \geq 1} \frac{1}{m+1}$$

divergentă (armonică).

Cazul 3: $r = -1$.

$$\sum_{m \geq 1} \frac{(-1)^m}{m+1}$$

este convergentă condiționat:

- Pentru studiul convergenței absolute se utilizează cazul 2.
- Considerăm șirul $\frac{1}{m+1}$: descrescător, tinde la 0, are termeni pozitivi pentru $m \geq 1$ deci putem aplica criteriul lui Leibnitz

Cazul 4: $|r| > 1$. Atunci

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a_{m+1}}{a_m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\frac{|r|^{m+1}}{(m+2)}}{\frac{|r|^m}{(m+1)}} = |r|.$$

$|r| > 1$ deci seria este divergentă.

$$\Rightarrow \sum a_n \text{ convergentă} \iff -1 \leq r < 1.$$

b) Studiem valorile lui a : $\rightarrow r < 1$:

$$\frac{a^2 - 4a - 8}{a^2 + 6a - 16} < 1 \iff \frac{a^2 - 4a - 8}{(a-2)(a+8)} < 1$$

Fie

$$D(a) = (a-2)(a+8),$$

- Dacă $D(a) > 0 \iff a < -8$ sau $a > 2 \Rightarrow -4a - 8 < 6a - 16 \Rightarrow a > \frac{4}{5}$
Deci $a \in (2, +\infty)$
- Dacă $D(a) < 0 \iff -8 < a < 2 \Rightarrow -4a - 8 > 6a - 16 \Rightarrow a < \frac{4}{5}$ Deci
 $a \in (-8, \frac{4}{5}) \cup (2, +\infty)$

$$\Rightarrow r < 1 \Leftrightarrow a \in (-8, \frac{4}{5}) \cup (2, +\infty)$$

$$\rightarrow r \geq 1 :$$

$$\frac{a^2 - 4a - 8}{a^2 + 6a - 16} \geq 1 \Leftrightarrow a^2 - 4a - 8 \geq -a^2 - 6a + 16$$

$$\Leftrightarrow a^2 + a - 12 \geq 0 \Leftrightarrow (a + 4)(a - 3) \geq 0 \Rightarrow a \leq -4 \text{ sau } a \geq 3$$

$$\Rightarrow a \in (-\infty, -4] \cup [3, +\infty)$$

c) Concluzie finală

$$\sum a_n \text{ absolut convergentă} \iff a \in (-4, \frac{4}{5}) \cup (3, \infty).$$

$$\sum a_n \text{ convergentă condiționat} \iff a \in \{-4, 3\}.$$

$$\sum a_n \text{ covergentă} \iff a \in [-4, \frac{4}{5}) \cup [3, \infty).$$

Exercițiul 12. Fie $\sum a_m$ o serie convergentă condiționat. Fie

$$p_m = \frac{|a_m| + a_m}{2}, \quad q_m = \frac{|a_m| - a_m}{2}.$$

Să se demonstreze că

$$\sum_{m=1}^{\infty} p_m, \quad \sum_{m=1}^{\infty} q_m$$

sunt ambele divergente.

Rezolvare:

Observăm că

$$p_m = \begin{cases} a_m, & a_m > 0, \\ 0, & a_m < 0, \end{cases} \quad (\text{partea pozitivă a lui } a_m),$$

$$q_m = \begin{cases} 0, & a_m > 0, \\ -a_m, & a_m < 0, \end{cases} \quad (\text{partea negativă a lui } a_m).$$

Astfel, $p_m, q_m \geq 0$ pentru orice m și avem:

$$a_m = p_m - q_m,$$

și, implicit,

$$|a_m| = p_m + q_m.$$

Din ipoteză, $\sum a_m$ este convergentă, iar $\sum |a_m|$ este divergentă.

Presupunem prin reducere la absurd că seria $\sum p_m$ este convergentă.

Atunci,

$$\sum q_m = \sum a_m - \sum p_m.$$

Cum $\sum a_m$ este convergentă și $\sum p_m$ este (prin ipoteza absurdă) convergentă, rezultă că $\sum q_m$ este convergentă.

Dar avem:

$$\sum |a_m| = \sum p_m + \sum q_m.$$

Dacă ambele ar fi convergente, atunci $\sum |a_m|$ ar fi convergentă, astfel am avea o contradicție cu ipoteza din enunț.

Prin urmare, seriile $\sum p_m$ și $\sum q_m$ nu pot fi convergente, deci ambele sunt divergente.

Exercițiul 13. Determinați dacă seriile de mai jos sunt absolut convergente sau convergente condiționat.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[n]{n} - 1)^n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[n]{a} - 1), \quad a > 1$

Rezolvare:

a) Din Capitolul 2, exemplul 3. de șiruri nule știm că

$$\sqrt[n]{n} - 1 \rightarrow 0$$

Vom considera seria termenilor în modul, iar dacă aplicăm testul radicalului avem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|(\sqrt[n]{n} - 1)^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} |\sqrt[n]{n} - 1| = 0 < 1.$$

Prin urmare, seria este **absolut convergentă**.

b) Observăm mai întâi că, pentru $a > 1$,

$$\sqrt[n]{a} - 1 \sim \frac{\ln a}{n}.$$

Deci termenii se comportă într-o oarecare măsură precum termenii seriei armonice.

Studiem convergența absolută:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n (\sqrt[n]{a} - 1)| = \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a} - 1) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln a}{n}.$$

Seria armonică diverge, deci seria nu este absolut convergentă.

Pentru convergența simplă dorim să aplicăm criteriul lui Leibnitz, deci vom verifica următoarele condiții:

- termenii $\sqrt[n]{a} - 1$ sunt pozitivi pentru $a > 1$,
- termenii sunt descrescători pentru n suficient de mare,
- $\sqrt[n]{a} - 1 \rightarrow 0$ (demonstrat în Capitolul 2, exemplul 1. de șiruri nule).

Toate condițiile sunt îndeplinite.

Prin urmare, seria este **convergentă condiționat**.

Exercițiul 14. Fie $a \in \mathbb{R}$. Să se studieze convergența seriei

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(ma) \cos(m^2a)}{m}.$$

Rezolvare:

Vom aplica formula trigonometrică

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)),$$

cu $\alpha = ma$, $\beta = m^2a$ în cazul nostru. Obținem

$$\sin(ma) \cos(m^2a) = \frac{1}{2} [\sin(m^2a + ma) + \sin(ma - m^2a)] = \frac{1}{2} [\sin(m(m+1)a) + \sin(m(1-m)a)].$$

Cum $\sin(m(1-m)a) = \sin(-m(m-1)a) = -\sin(m(m-1)a)$, rezultă

$$\sin(ma) \cos(m^2a) = \frac{1}{2} [\sin(m(m+1)a) - \sin(m(m-1)a)].$$

Pentru a analiza suma parțială

$$S_N = \sum_{m=1}^N \sin(ma) \cos(m^2a)$$

ne vom folosi de forma obținută mai sus:

$$S_N = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^N [\sin(m(m+1)a) - \sin(m(m-1)a)].$$

Aceasta este o sumă telescopică:

$$S_N = \frac{1}{2} (\sin(2a) - \sin 0 + \sin(6a) - \sin(2a) + \dots + \sin(N(N+1)a) - \sin(N(N-1)a)) = \frac{1}{2} \sin(N(N+1)a).$$

Prin urmare,

$$|S_N| = \frac{1}{2} |\sin(N(N+1)a)| \leq \frac{1}{2},$$

deci sumele parțiale ale șirului

$$u_m = \sin(ma) \cos(m^2a)$$

sunt mărginite.

Notăm acum

$$u_m = \sin(ma) \cos(m^2a), \quad v_m = \frac{1}{m}.$$

Șirul (v_m) este descrescător și $v_m \rightarrow 0$ când $m \rightarrow \infty$. Cum sumele parțiale ale lui (u_m) sunt mărginite, putem aplica criteriul lui Dirichlet pentru seria

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m v_m = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(ma) \cos(m^2a)}{m}.$$

Rezultă că această serie este **convergentă** pentru orice $a \in \mathbb{R}$.

Exercițiul 15. Produsul Cauchy a două serii divergente poate fi divergent?

Rezolvare:

Considerăm seria lui Grandi, definită prin:

$$\sum_{M=0}^{\infty} (-1)^M = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

1. Natura seriei

Seria este **divergentă** deoarece șirul sumelor parțiale (s_n) oscilează între valorile 0 și 1, deci nu are o limită unică.

2. Determinarea produsului Cauchy

Calculăm produsul Cauchy al seriei cu ea însăși. Termenul general c_M al seriei rezultat este dat de formula de convoluție:

$$c_M = \sum_{k=0}^M a_k \cdot a_{M-k} = \sum_{k=0}^M (-1)^k \cdot (-1)^{M-k}$$

Utilizând proprietățile exponenților, $(-1)^k \cdot (-1)^{M-k} = (-1)^M$. Deci, suma devine:

$$c_M = \sum_{k=0}^M (-1)^M = (M+1)(-1)^M$$

3. Natura seriei produs

Seria produs rezultată are următoarea formă:

$$\sum_{M=0}^{\infty} (M+1)(-1)^M = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \dots$$

Șirul sumelor parțiale oscilează între valorile -1 și 1, astfel seria obținută este la rândul ei divergentă.

Exercițiul 16. Produsul Cauchy a două serii divergente poate fi convergent?

Rezolvare:

Considerăm seriile divergente:

$$a_0 = 1, \quad a_m = -1, \quad m \geq 1, \quad \sum_{m \geq 0} a_m = 1 - 1 - 1 - 1 - \dots \text{ divergentă.}$$

$$b_0 = 1, \quad b_m = \left(\frac{1}{2}\right)^m + (b_0 + b_1 + \dots + b_{m-1}) = \left(\frac{1}{2}\right)^m + B_{m-1},$$

unde notăm

$$B_{m-1} = \sum_{j=0}^{m-1} b_j.$$

Deoarece $b_m \geq B_{m-1}$ rezultă că $\sum b_m$ este divergentă.

Produsul Cauchy. Termenul c_m este:

$$c_m = \sum_{k=0}^m a_k b_{m-k} = a_0 b_m + \sum_{k=1}^m (-1) b_{m-k}.$$

Observăm că

$$\sum_{k=1}^m b_{m-k} = \sum_{j=0}^{m-1} b_j = B_{m-1}.$$

Deci

$$c_m = b_m - B_{m-1}.$$

Dar din definiția lui b_m avem

$$b_m = \left(\frac{1}{2}\right)^m + B_{m-1}.$$

Prin urmare:

$$c_m = b_m - B_{m-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^m.$$

Produsul Cauchy devine seria geometrică:

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_m = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^m = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1.$$

Concluzie. Există două serii divergente al căror *produs Cauchy* este convergent:

$$\sum a_m \text{ divergentă, } \sum b_m \text{ divergentă, } \sum c_m \text{ convergentă,}$$

dar, potrivit exercițiului anterior se poate ca produsul Cauchy a două serii divergente să rămână divergent.

Exercițiul 17. Fie seria armonică alternată $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, unde $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$. Să se calculeze termenul general c_n al produsului său Cauchy cu ea însăși și să se studieze natura seriei obținute.

Rezolvare:

Ne interesează seria armonică alternată de ordinul $1/2$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$$

Această serie este convergentă conform criteriului lui Leibniz, deoarece șirul $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ este descrescător și are limita zero.

Calculăm produsul Cauchy al seriei cu ea însăși, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$. Termenul general c_n este dat de:

$$c_n = \sum_{k=1}^n a_k a_{n-k+1} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} \cdot \frac{(-1)^{n-k+1}}{\sqrt{n-k+1}}$$

$$c_n = (-1)^{n-1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k(n-k+1)}}$$

Pentru a studia convergența seriei $\sum c_n$, vom verifica dacă este îndeplinită condiția necesară de convergență ($\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$). Ane vom folosi de inegalitatea mediilor (media geometrică $\leq$ media aritmetică) pentru numitorul fiecărui termen din sumă:

$$\sqrt{k(n-k+1)} \leq \frac{k + (n-k+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

Inversăm inegalitatea:

$$\frac{1}{\sqrt{k(n-k+1)}} \geq \frac{2}{n+1}$$

Aplicăm această estimare pentru fiecare dintre cei n termeni ai sumei:

$$|c_n| = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k(n-k+1)}} \geq \sum_{k=1}^n \frac{2}{n+1} = \frac{2n}{n+1}$$

Deoarece:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1} = 2$$

putem afirma faptul că produsul Cauchy al seriei $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ cu ea însăși este o serie divergentă.

Observație: Rezultatul exercițiului anterior este extrem de important pentru teoria seriilor numerice, deoarece servește drept contraexemplu pentru convergența produsului Cauchy în absența convergenței absolute.

Deși seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ este convergentă conform criteriului lui Leibniz, aceasta este doar **condiționat convergentă**, deoarece seria modulelor sale, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, este o serie p divergentă ($\alpha = 1/2 \leq 1$).

Acest exemplu subliniază importanța **Teoremei lui Mertens**, care afirmă că produsul Cauchy a două serii convergente este garantat convergent dacă **cel puțin una dintre serii este absolut convergentă**. În cazul de față, deoarece ambele serii factor sunt doar condiționat convergente, produsul lor a devenit divergent, termenul general c_n tinzând la o valoare diferită de zero ($|c_n| \rightarrow 2$).

Exercițiul 18. Fie $\sum a_n$ și $\sum b_n$ două serii convergente.

Atunci produsul lor Cauchy este convergent $\Leftrightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m a_k (b_m + b_{m-1} + \dots + b_{m-k+1}) = 0$.

Rezolvare:

Termenul general al produsului Cauchy este:

$$c_m = \sum_{k=0}^m a_m b_{m-k}.$$

Notăm sumele parțiale:

$$A_m = a_0 + a_1 + \cdots + a_m \longrightarrow A,$$

$$B_m = b_0 + b_1 + \cdots + b_m \longrightarrow B.$$

$$C_m = a_0 B_m + a_1 B_{m-1} + \cdots + a_m B_0 = \sum_{k=0}^m a_k B_{m-k}$$

- Demonstrăm **condiția necesară**:

Observăm că

$$b_m + b_{m-1} + \cdots + b_{m-k+1} = B_m - B_{m-k}.$$

Pentru suma parțială a produsului Cauchy:

$$S_m = \sum_{k=1}^m a_k (b_{m-k+1} + \cdots + b_m) = \sum_{k=1}^m a_k (B_m - B_{m-k}).$$

Dezvoltăm:

$$S_m = B_m \sum_{k=1}^m a_k - \sum_{k=1}^m a_k B_{m-k}.$$

Împărțim suma:

$$S_m = B_m (A_m - a_0) - (C_m - a_0 B_m) = B_m A_m - C_m.$$

Cum, din ipoteză, $A_m \rightarrow A$ și $B_m \rightarrow B$, $C_m \rightarrow AB$, rezultă:

$$S_m = B_m A_m - C_m \longrightarrow AB - AB = 0.$$

Astfel,

$$\boxed{\lim_{m \rightarrow \infty} S_m = 0}$$

- Demonstrăm condiția suficientă: Avem că:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^m a_k (b_m + b_{m-1} + \cdots + b_{m-k+1}) = \\ & = a_1 b_m + a_2 (b_m + b_{m-1}) + \cdots + a_m b_1 = \end{aligned}$$

$$= a_1 (B_m - B_{m-1}) + a_2 (B_m - B_{m-2}) + \cdots + a_m (B_m - B_0) =$$

$$= B_m (a_1 + a_2 + \cdots + a_m) - (a_1 B_{m-1} + a_2 B_{m-2} + \cdots + a_m B_0) = .$$

Folosim înlocuirile:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_m = A_m - a_0$$

și

$$a_1 B_{m-1} + a_2 B_{m-2} + \cdots + a_m B_0 = C_m - a_0 B_m.$$

Astfel,

$$\sum_{k=1}^m a_k(b_m + \cdots + b_{m-k+1}) = B_m A_m - C_m.$$

Trecând la limită:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m a_k(b_m + b_{m-1} + \cdots + b_{m-k+1}) = \lim_{m \rightarrow \infty} (B_m A_m - C_m).$$

Cum, din ipoteză, $A_m \rightarrow A$ și $B_m \rightarrow B$, iar :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m a_k(b_m + b_{m-1} + \cdots + b_{m-k+1}) = 0.$$

Atunci,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (AB - C_m) = 0, \text{ deci } C_m \rightarrow AB$$

Deci produsul Cauchy este convergent

Observație: Acest exercițiu ne oferă o condiție mai tare pentru convergența produsului Cauchy a două serii simplu convergente.

*Departamentul de Mateamtică
Facultatea de Matematică și Informatică,
Universitatea "Babeș-Bolyai", Cluj-Napoca
e-mail: anca.grad@ubbcluj.ro*