

ÎN LEGĂTURĂ CU PROBLEMA E:17189 DIN GAZETA MATEMATICĂ 4/2025

Petru Marian Braica

Abstract. În această notă vom prezenta modalități de abordare pentru problema **E:17189 GMB 4/2025**, considerând că soluțiile diverse asigură valențe didactice deosebite.

Metoda construcțiilor auxiliare din geometria euclidiană prefigurează tehnici de rezolvare din algebră și analiza matematică, alegera unor funcții auxiliare prin studiul cărora soluția urmează natural, cazul rezolvărilor de ecuații, sau metoda multiplicatorilor lui Lagrange care folosește funcția atașată numită lagangianul:

$$\mathcal{L}(x, \lambda) \equiv f(x) + \langle \lambda, g(x) \rangle,$$

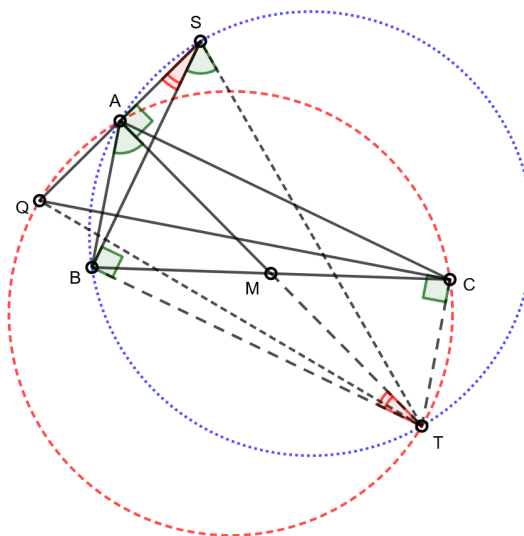
sunt doar câteva exemple. Această problemă se dovedește foarte provocatoare pentru multe din tehnicile clasice și moderne folosite în soluționarea problemelor de concurs. Avem soluții care folosesc construcții geometrice. Ce ne facem însă dacă nu vine ideea creatoare care luminează drumul spre rezolvarea problemei? Prezentăm și soluții în care nu avem nevoie de completarea figurii cu elemente revelatoare. Cele cinci soluții prezentate în continuare împreună cu observațiile finale în care se relevă sursa ideii de formulare, contribuie la dezvoltarea culturii matematice de *problem solving*, utilă juniorilor și nu numai. Un pasionat al matematicii elementare, la finalul lecturii acestei note va ști să abordeze acet gen de probleme, un dascăl de matematică va ști să îndrume elevul în direcția potrivită, iar un competitor va câștiga timp în timpul probei. Aceste soluții sunt preluate de pe grupul **Facebook, Comunitatea profesorilor de matematică din România**.

PROBLEMA SURSĂ

Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC oarecare cu punctul M , mijlocul laturii BC . Dreapta perpendiculară pe mediana AM ce trece prin vârful A al triunghiului taie dreptele suport ale înălțimilor duse din B și C în punctele S și Q . Demonstrați că are loc $MS = MQ$.

(Petru Braica - Satu Mare)

SOLUȚIA 1(PETRU BRAICA)



Comentariu Prima soluție, cea a autorului, folosește o construcție auxiliară urmată de identificarea de patrulatere inscriptibile utile în finalizarea acesteia.

Descrierea soluției Fie punctul T , simetricul vârfului A față de mijlocul laturii (BC) . Întrucât, patrulaterul $ABTC$ are diagonalele cu același mijloc, pe M , deducem că este paralelogram. De aici avem paralelismul imediat al dreptelor TB și AC respectiv TC și AB . Cum BS perpendiculară pe dreapta AC , deducem că TB și BS sunt perpendiculare. Analog se demonstrează că CQ și TC sunt drepte perpendiculare. Acum din congruența $\angle TBS \equiv \angle TAS$ (unghiuri de 90°) deducem inscriptibilitatea patrulaterului $TCAQ$ de unde avem de asemenea congruențele:

$$(1) \quad \angle ASB \equiv \angle ATB \quad \text{și} \quad \angle BST \equiv \angle BAT$$

Din $\angle TAQ \equiv \angle TCQ(90^\circ)$ deducem inscriptibilitatea patrulaterului TCAQ de unde avem de asemenea congruențele:

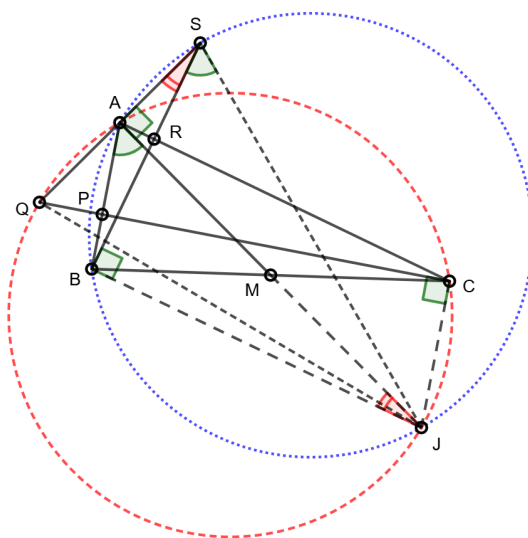
$$(2) \quad \angle TQC \equiv \angle TAC \quad \text{și} \quad \angle AQC \equiv \angle ATC$$

Din relațiile (1) și (2) prin însumarea măsurilor unghiurilor obținem că:

$$(3) \quad \angle TQA = \angle TQC + \angle CQS = \angle QSB + \angle BST = \angle TSQ$$

adică triunghiul $\triangle TQS$ este isoscel cu baza (QS) . De aici înălțimea TA a $\triangle TQS$ devine mediatoarea iar $M \in TA$. Din proprietatea mediatoarei rezultă concluzia problemei, punctul M este egal depărtat de capetele segmentului (QS) , adică $MS = MQ$.

SOLUȚIA 2(ALIN CREȚU)



Comentariu Soluția 2 folosește aceeași construcție auxiliară, însă nuanțează diferit raționamentul geometric.

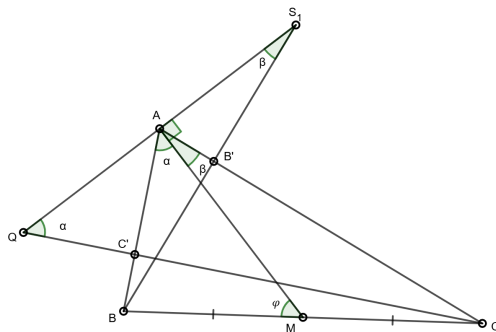
Descrierea soluției Fie $D = AM \cap BS$ și simetricul punctului A față de punctul M notat cu J . Avem ca mai sus că patrulaterul $ABJC$ este paralelogram deci au loc congruențele:

$$\angle AJB \equiv \angle JAK \equiv \angle DAR \equiv \angle ASR \equiv \angle ASB$$

, de unde punctele J, B, A, S sunt conciclice. Analog se probează că J, C, A, Q sunt conciclice. Cum are loc congruența $\triangle ACJ \equiv \triangle ABJ$ rezultă că

echivalent cu $AQ = AS$ sau dreapta MA este mediatoarea segmentului $[QS]$, de unde are loc concluzia.

SOLUȚIA 4(DAN ȘTEFAN MARINESCU ȘI ALIN POP)



Comentariu Ca un tribut adus superiorității trigonometriei, următoarea soluție folosește teorema sinusurilor.

Descrierea soluției facem următoarele notații utile:

$$(1) \quad \angle BAM \stackrel{\text{not}}{=} \alpha, \angle BAC \stackrel{\text{not}}{=} \beta, AQ \stackrel{\text{not}}{=} x, AS \stackrel{\text{not}}{=} y$$

Deoarece au același complement, pe $\angle QAB$, unghiurile $\angle AQC$ și $\angle BAM$ sunt congruente, deci $\angle AQC = \alpha$. Analog $\angle ASB = \beta$. Mai notăm $\angle BMA \stackrel{\text{not}}{=} \alpha$.

Aplicând teorema sinusurilor pentru $\triangle ABM$: avem $\frac{c}{\sin \varphi} = \frac{\frac{a}{2}}{\sin \alpha}$ apoi aceeași teoremă în $\triangle ACM$: $\frac{b}{\sin(\pi - \varphi)} = \frac{\frac{a}{2}}{\sin \beta}$. Deducem imediat că: $b = \frac{c \sin \alpha}{\sin \beta}$. De aici:

$$(2) \quad x = \frac{b \cos A}{\sin \alpha} = \frac{c \sin \alpha \cos A}{\sin \beta \sin \alpha} = \frac{c \cos A}{\sin \beta} = y$$

, unde $AB' = c \cos A$, $AC' = b \cos A$. De aici, concluzia.

Remarcăm viteza soluției folosind trigonometria în detrimentul intuiției pentru a găsi configurații și proprietăți noi.

SOLUȚIA 5(PETRU BRAICA)

Comentariu În lipsa ideilor din soluțiile precedente în timpul probelor de concurs mai rămâne abordarea folosind geometria analitică. Cu această metodă efortul de raționament se compensează prin calcul laborios.

Riscul abordării folosind această metodă este acela că s-ar putea să nu se poată finaliza calculul în timpul scurt alocat probei de concurs.

Descrierea soluției Vom alege reperul cu originea în piciorul înălțimii din A a triunghiului ABC iar $Ox = BC$. Astfel, punctele $A(0; a)$, $B(-b; 0)$, $C(c; 0)$ cu $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ și $a, b, c \in \mathbb{R}$. Deducem imediat că $M(\frac{c-b}{2}; 0)$. Vom determina coordonatele punctelor S și Q din enunțul problemei. Panta dreptei AC : $m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = -\frac{a}{c}$, deci înălțimea dusă din B , BS va avea panta: $m_{h_b} = \frac{c}{a}(x - x_B)$ sau $y = \frac{c}{a}(x + b)$.

Analog, panta laturii AB $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{a}{b}$, deci panta înălțimii duse din C : $m_{h_c} = -\frac{b}{a}$, de unde ecuația dreptei CQ : $y - y_C = -\frac{b}{a}(x - x_C)$, $y = -\frac{b}{a}(x - c)$ sau CQ : $y = \frac{b}{a}(c - x)$.

Dreapta AM are panta $m_{AM} = \frac{y_A - y_M}{x_A - x_M} = \frac{2a}{b-c}$, deci panta dreptei $QS = \frac{c-b}{2a}$, deoarece $QS \perp AM$. Deci AM : $y - y_A = \frac{2a}{b-c}(x - x_A)$ sau AM : $y - a = \frac{2a}{b-c}x$ sau $AM = y = \frac{2a}{b-c}x + a$.

Dreapta QS : $y - y_A = \frac{c-b}{2a}(x - x_A)$ sau QS : $y - a = \frac{c-b}{2a}x$.
Intersecții:

$$\{S\} = BS \cap QS : \begin{cases} y = \frac{c}{a}(x + b) \\ y = \frac{c-b}{2a}x + a \end{cases}$$

De aici avem:

$$\begin{aligned} \frac{cx + bc}{a} &= \frac{cx - bx + 2a^2}{2a} \mid \cdot 2a \Leftrightarrow \\ 2cx + 2bc &= cx - bx + 2a^2 \\ x(b + c) &= 2a^2 - 2bc \end{aligned}$$

De aici extragem soluția:

$$\begin{aligned}
x_s &= \frac{2a^2 - 2bc}{b + c} \Rightarrow \\
y_s &= \frac{c}{a} \left(\frac{2a^2 - 2bc}{b + c} + b \right) \\
&= \frac{c}{a} \cdot \frac{2a^2 - 2bc + b^2 + bc}{b + c} \\
&= \frac{c(2a^2 - bc + b^2)}{ab + ac} \\
S &\left(\frac{2a^2 - 2bc}{b + c}; \frac{c(2a^2 - bc + b^2)}{ab + ac} \right)
\end{aligned}$$

Analog, se obțin coordonatele punctului Q :

$$Q\left(-\frac{2a^2 - 2bc}{b + c}; -\frac{c(2a^2 - bc + b^2)}{ab + ac}\right)$$

În final, verificăm că A este mijlocul segmentului QS :

$$\frac{x_Q + x_S}{2} = x_A = 0 \text{ și } \frac{y_Q + y_S}{2} = y_A = a.$$

Astfel soluția analitică e completă.

Observația 1. Parte din această problemă se poate regăsi în problema 4, clasa a VII-a, OJM 2025, scrisă de același autor.

Observația 2. Dacă vom comuta ortocentrul triunghiului ABC cu vârful în A se poate obține problema 4, clasa a IX-a, OJM 2024, autor Mihaela Berindeanu.

Observația 3. Problema se pretează la formulări de reciproce. De exemplu:

Reciproca 1. Fie M mijlocul laturii BC a triunghiului ABC . Dreapta perpendiculară în A pe AM taie înălțimea din B în S . Simetricul lui S față de A se notează cu Q . Demonstrați că $CQ \perp AB$.

Demonstrație. Fie Q_0 intersecția prelungirii înălțimii din C a triunghiului ABC cu perpendiculara din A pe mediana AM . Din problema directă avem că $AS = AQ_0$, deci Q_0 este simetricul punctului S în raport cu A , adică $Q_0 = Q$, deci $CQ \perp AB$, adică are loc concluzia.

Reciproca 2. Fie AM mediana triunghiului ABC , iar punctele Q și M sunt situate pe prelungirile înălțimilor duse din C și B astfel încât Q , A și S sunt coliniare și $AQ = AS$. Dovediți că $AM \perp QS$.

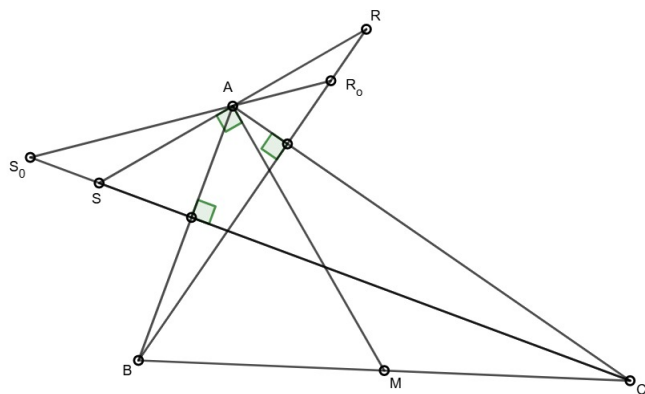
Demonstrație. Vom demonstra folosind metoda reducerii la absurd.

Astfel notăm cu d_0 dreapta perpendiculară pe AM ce conține vârful A al triunghiului ABC și cu R_0 și Q_0 intersecțiile acesteia cu înălțimile triunghiului duse din B , respectiv C . Din problema directă $AR_0 = AQ_0$. Presupunem acum că mai există o dreaptă d pentru care $A \in d$ care taie dreapta suport ale înălțimilor din B și C după punctele $R \neq R_0$ și $Q \neq Q_0$ încât $AR = AQ$.

Avem imediat că $\triangle ARR_0 \equiv \triangle AQ_0Q$ în cazul (L.U.L.). Notăm acum cu $\alpha = \angle AQ_0Q = \angle ARR_0$ și cu $\beta = \angle AQQ_0 = \angle ARR_0$.

Avem $\alpha > 90^\circ$, egalitatea ar conduce la A, Q_0, B coliniare și simultan A, R, C coliniare, fals.

În triunghiul AQQ_0 , $\alpha = \angle AQQ_0 > 90^\circ \implies \beta > 90^\circ$, $\beta = \angle ARR_0$ în triunghiul ARR_0 , deci $\alpha + \beta > 90^\circ$, dar $180^\circ = \alpha + \beta + \angle QAR_0 > 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, fals. Deci presupunerea este falsă. Rămâne că $\angle QAR_0 = 0^\circ$ și unicitatea este dovedită.



Bibliografie:

- [1] rms.unibuc.ro
- [2] Comunitatea profesorilor de matematică din România.(Grup de Facebook)
- [3] GM Nr. 4/2025.