

INTEGRALE ELIPTICE ȘI CALCULUL LOR LA CERCURILE DE MATEMATICĂ DIN LICEU

Alexandru Mihai Bica and Diana Curilă

Rezumat. Integralele eliptice de al doilea tip în sensul lui Legendre sunt abordate în contextul calculului lungimii arcului de elipsă. Deoarece astfel de integrale nu pot fi calculate exact, este prezentată o modalitate de aproximare a lor folosind integrarea numerică de tip Simpson, într-o manieră accesibilă elevilor din ultimul an de liceu.

MSC 2000. 33E05.

Cuvinte cheie. integrale eliptice, formule de cuadratură de tip Simpson.

1. INTEGRALE ELIPTICE

Metoda de calcul a lungimii graficului unei funcții netede este prezentată elevilor din clasa a XII-a ca o aplicație a integralei Riemann și printre exemplele care ilustrează modul de calcul al lungimii unor conice este prezentat doar cazul arcului finit de parabolă. Cazul elipsei și cel al arcului finit de hiperbolă sunt omise, iar elevii își pot pune întrebări asupra motivului acestei omisiuni. Pentru cazul lungimii arcului de elipsă, calculul conduce la o integrală eliptică de tipul al doilea în sensul stabilit de Legendre. Pentru elevii performanți de clasa a XII-a, noțiunea de integrală eliptică este un element de cultură matematică care merită cunoscut atât prin prisma originii sale cât și asupra modalității de calcul. Prima integrală eliptică a fost pusă în evidență în anul 1718 de către matematicianul italian Giulio Fagnano care încercând să calculeze lungimea arcului de lemniscată a ajuns la integrala eliptică

$$\int_0^r \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} dx, \quad r > 0.$$

Ulterior, în anul 1750, Leonhard Euler a ajuns la o integrală eliptică de al doilea tip încercând să calculeze lungimea arcului de elipsă. De aici provine și denumirea de integrală eliptică, de acest caz urmând să ne ocupăm în continuare.

Mai precis, considerăm elipsa de ecuație implicită

$$(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad a, b > 0, \quad a > b$$

cu excentricitatea $\epsilon = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$. Pentru a calcula lungimea arcului de elipsă cuprins în primul cadran putem folosi ecuația explicită $y(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$,

$x \in [0, a]$, la calculul integralei

$$l\left(\frac{E}{4}\right) = \int_0^a \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx.$$

Integrala aceasta conduce la o integrală eliptică de al doilea tip în sensul lui Legendre

$$l\left(\frac{E}{4}\right) = a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 t} dt.$$

Spre exemplu,

$$l\left(\frac{E}{4}\right) = \int_0^a \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx = \frac{1}{a} \int_0^a \sqrt{\frac{a^4 + (b^2 - a^2)x^2}{a^2 - x^2}} dx,$$

și cu substituția $x = a \sin t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ se obține

$$\begin{aligned} l\left(\frac{E}{4}\right) &= \frac{1}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{a^2 + (b^2 - a^2) \sin^2 t}{\cos^2 t}} \cdot a \cos t dt = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 + (b^2 - a^2) \sin^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \sqrt{1 - \frac{(a^2 - b^2)}{a^2} \sin^2 t} dt = \\ &= a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 t} dt. \end{aligned}$$

Folosind simetria față de axe, lungimea elipsei va fi

$$(1) \quad l(E) = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 t} dt$$

Integralele eliptice de tipul I, II și III după clasificarea stabilită de Adrien Legendre sunt respectiv,

$$\begin{aligned} K(k, \varphi) &= \int_0^{\varphi} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} \\ E(k, \varphi) &= \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt \end{aligned}$$

$$F(k, h, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{dt}{(1 + h \sin^2 t) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}},$$

pentru $k \in (0, 1)$, $h \in \mathbb{R}$ și $\varphi > 0$ constante, ele fiind obținute astfel în anul 1793 (a se vedea [2]). Ulterior, Joseph Liouville a demonstrat în 1833 (conform cu [3]) că pentru nici o integrală eliptică în sensul lui Legendre de primele două tipuri, primitiva nu se poate obține sub formă finită (este suma unei serii de puteri). Deci, integralele eliptice nu se pot calcula exact. Preocupări asupra integralelor eliptice au mai avut Johann Bernoulli, Carl Gustav Jacobi, Niels Henrik Abel și Karl Weierstrass.

2. MODALITATE DE APROXIMARE A INTEGRALELOR ELIPTICE

Deoarece valoarea exactă a integralei (1) nu poate fi obținută, singura alternativă rămâne aproximarea acesteia. Calculul aproximativ al integralelor definite se realizează folosind formule de cuadratură, iar manualul de analiză matematică prezintă unele formule de cuadratură precum formula dreptunghiului și formula trapezului folosindu-se de ilustrarea lor geometrică.

O altă abordare de aproximare a a integralei (1) este aceea de a folosi formula de cuadratură a lui Simpson ce presupune aproximarea arcului de elipsă printr-un arc de parabolă. Așadar, pentru a aproxima integrala $\int_a^b f(x) dx$ putem considera polinomul de gradul doi,

$$P(x) = Ax^2 + Bx + C$$

al cărui grafic intersectează graficul funcției f în punctele a , $\frac{a+b}{2}$ și b , adică

$$(2) \quad P(a) = f(a), \quad P\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) \text{ și } P(b) = f(b).$$

Aceste condiții conduc la rezolvarea sistemului

$$\begin{cases} Aa^2 + Ba + C = f(a) \\ A\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + B\left(\frac{a+b}{2}\right) + C = f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ Ab^2 + Bb + C = f(b) \end{cases}$$

în necunoscutele A , B , C . Se obține polinomul

$$\begin{aligned} P(x) = & \frac{(x-b)(2x-(a+b))}{(b-a)^2} \cdot f(a) + \frac{4(x-a)(b-x)}{(b-a)^2} \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \\ & + \frac{(x-a)(2x-(a+b))}{(b-a)^2} \cdot f(b) \end{aligned}$$

și astfel la aproximarea funcției f prin acest polinom va apărea o eroare reprezentată de termenul $R(x)$ în formula

$$(3) \quad f(x) = P(x) + R(x), \quad x \in [a, b].$$

Atunci,

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b P(x) dx + \int_a^b R(x) dx = \int_a^b \frac{(x-b)(2x-(a+b))}{(b-a)^2} dx \cdot f(a) + \\
 &+ \int_a^b \frac{4(x-a)(b-x)}{(b-a)^2} dx \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \int_a^b \frac{(x-a)(2x-(a+b))}{(b-a)^2} dx \cdot f(b) + R(f) = \\
 (4) \quad &= \frac{(b-a)}{6} \cdot \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) + R(f).
 \end{aligned}$$

Pentru a putea estima termenul de eroare $R(f)$ din formula (4) vom estima întâi termenul de eroare din formula (3). Astfel, vom considera funcția $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$u(x) = (x-a) \cdot \left(x - \frac{a+b}{2} \right) \cdot (x-b)$$

și pentru $x \in [a, b]$ fixat, $x \neq a$, $x \neq \frac{a+b}{2}$, $x \neq b$, definim $\varphi_x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, prin

$$\varphi_x(t) = \begin{vmatrix} u(t) & R(t) \\ u(x) & R(x) \end{vmatrix}, \quad \forall t \in [a, b].$$

Dacă $f \in C^3[a, b]$ și observând că $P \in C^3[a, b]$, deducem $R \in C^3[a, b]$ și atunci $\varphi_x \in C^3[a, b]$. De asemenea, condițiile (2) conduc la $R(a) = 0$, $R\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, $R(b) = 0$. Se observă că $u(a) = 0$, $u\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, $u(b) = 0$ și atunci $\varphi_x(a) = \varphi_x\left(\frac{a+b}{2}\right) = \varphi_x(b) = 0$. În plus, $\varphi_x(x) = 0$, deoarece cele două linii ale determinantului sunt identice în acest caz. Așadar, funcția φ_x are 4 rădăcini distincte, și în baza teoremei lui Rolle, în fiecare interval deschis determinat de acestea va exista câte o rădăcină pentru φ'_x , și atunci, în baza aceluiași argument, între aceste 3 rădăcini ale funcției φ'_x vor exista două rădăcini ale funcției φ''_x . Continuând în acest mod, vom deduce existența unei rădăcini pentru funcția $\varphi_x^{(3)}$, adică există $\eta \in (a, b)$ astfel încât $\varphi_x^{(3)}(\eta) = 0$. Întrucât $R^{(3)}(t) = f^{(3)}(t) - L_n(f)^{(3)}(t) = f^{(3)}(t)$ și $u^{(3)}(t) = 3!$, deducem că

$$\varphi_x^{(3)}(t) = \begin{vmatrix} 3! & f^{(3)}(t) \\ u(x) & R(x) \end{vmatrix}$$

și din $\varphi_x^{(3)}(\eta) = 0$ rezultă

$$R(x) = \frac{u(x) \cdot f^{(3)}(\eta)}{3!}, \quad \forall x \in [a, b].$$

Atunci,

$$R(f) = \int_a^b R(x) dx = \int_a^b \frac{u(x) \cdot f^{(3)}(\eta)}{3!} dx$$

și deci,

$$|R(f)| = \left| \int_a^b R(x) dx \right| \leq \int_a^b \left| \frac{u(x) \cdot f^{(3)}(\eta)}{3!} \right| dx = \frac{|f^{(3)}(\eta)|}{3!} \int_a^b |u(x)| dx.$$

Deoarece $\int_a^b |u(x)| dx =$

$$\begin{aligned} &= \int_a^b \left| (x-a) \cdot \left(x - \frac{a+b}{2} \right) \cdot (x-b) \right| dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a) \cdot \left(\frac{a+b}{2} - x \right) \cdot (b-x) dx \\ &\quad + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (x-a) \cdot \left(x - \frac{a+b}{2} \right) \cdot (b-x) dx = \frac{(b-a)^4}{32} \end{aligned}$$

deducem că

$$|R(f)| \leq \frac{(b-a)^4 \cdot \|f^{(3)}\|}{32 \cdot 3!} = \frac{(b-a)^4 \cdot \|f^{(3)}\|}{192}$$

unde $\|f^{(3)}\| = \max\{|f^{(3)}(x)| : x \in [a, b]\}$. Astfel,

$$(5) \quad \left| \int_a^b f(x) dx - \frac{(b-a)}{6} \cdot \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) \right| \leq \frac{(b-a)^4 \cdot \|f^{(3)}\|}{192}$$

reprezintă formula de cuadratură a lui Simpson cu estimarea erorii valabilă pentru funcții cu derivata a treia continuă.

Pentru o aproximare mai bună se consideră o diviziune echidistantă Δ a intervalului $[a, b]$

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

pentru care $x_i = a + \frac{i(b-a)}{n}$, $i = \overline{0, n}$, și se aplică formula de cuadratură a lui Simpson (4)-(5) pe fiecare subinterval $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$. Se obține astfel:

TEOREMA 1. (formula de cuadratură generalizată a lui Simpson): Dacă funcția $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ posedă derivate continue până la ordinul 3, adică $f \in C^3[a, b]$ atunci se poate construi o metodă de integrare numerică, numită formula de cuadratură generalizată a lui Simpson:

$$(6) \quad \int_a^b f(x) dx = \frac{(b-a)}{6n} \cdot [f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 4 \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) + f(b)] + R_n(f)$$

și

$$(7) \quad |R_n(f)| \leq \frac{(b-a)^4}{192n^3} \cdot \|f^{(3)}\|$$

unde $\|f^{(3)}\| = \max\{|f^{(3)}(x)| : x \in [a, b]\}$.

Demonstrație. Aplicând pe fiecare interval $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$, formula de cuadratură a Lui Simpson obținem

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = \frac{(x_i - x_{i-1})}{6} \cdot \left[f(x_{i-1}) + 4f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) + f(x_i) \right] + R_i(f)$$

și

$$|R_i(f)| \leq \frac{(x_i - x_{i-1})^4}{192} \cdot \|f^{(3)}\| = \frac{(b-a)^4}{192n^4} \cdot \|f^{(3)}\|.$$

Atunci,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - x_{i-1})}{6} \cdot \left[f(x_{i-1}) + 4f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) + f(x_i) \right] + \sum_{i=1}^n R_i(f) = \\ &= \frac{(b-a)}{6n} \cdot [f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 4 \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) + f(b)] + R_n(f) \end{aligned}$$

unde $R_n(f) \stackrel{\text{notatie}}{=} \sum_{i=1}^n R_i(f)$, și

$$|R_n(f)| \leq \sum_{i=1}^n |R_i(f)| \leq \sum_{i=1}^n \frac{(b-a)^4 \cdot \|f^{(3)}\|}{192n^4} = \frac{(b-a)^4 \cdot \|f^{(3)}\|}{192n^3}.$$

□

OBSERVAȚIA 1. Estimarea erorii din formula (7) a fost obținută pentru funcții $f \in C^3[a, b]$. În cazul $f \in C^1[a, b]$ se poate obține o estimare de forma $|R_n(f)| \leq \frac{5(b-a)^2 \cdot \|f'\|}{36n}$, iar pentru cazul $f \in C^2[a, b]$ estimarea erorii este $|R_n(f)| \leq \frac{(b-a)^3 \cdot \|f''\|}{81n^2}$ (a se vedea [1], pag. 231). Pentru formula de cuadratură a lui Simpson, cea mai bună estimare a erorii se obține în cazul $f \in C^4[a, b]$, fiind

$$|R_n(f)| \leq \frac{(b-a)^5 \cdot \|f^{(4)}\|}{2880n^4}.$$

Revenind la integralele eliptice, se poate aplica formula de cuadratură (6)-(7) pentru calculul integralei (1) luând în (6) intervalul $[a, b] = [0, \frac{\pi}{2}]$ și $f(x) = 4a\sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 x}$. Se va obține

$$\left| f^{(3)}(x) \right| \leq \frac{4a\epsilon^2(-\epsilon^4 + 2\epsilon^2 + 2)}{\sqrt{(1 - \epsilon^2)^5}}, \quad \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

și atunci eroarea comisă la aproximarea lungimii elipsei va fi estimată prin

$$|R_n(f)| \leq \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 a\epsilon^2(-\epsilon^4 + 2\epsilon^2 + 2)}{48n^3 \sqrt{(1 - \epsilon^2)^5}}.$$

BIBLIOGRAFIE

- [1] BRASS, H. and PETRAS, K., *Quadrature Theory. The Theory of Numerical Integration on a Compact Interval*, Mathematical Surveys and Monographs vol. **178**, AMS Providence, Rhode Island, 2011.
- [2] LEGENDRE, A.M., *Traite des fonctions elliptiques et des integrales Euleriennes*, 3 vols., Huzard-Courcier: Paris, 1825.
- [3] LIOUVILLE, J., *Memoire sur les transcendentes elliptiques de premiere et de seconde espece considerees comme fonctions de leur amplitude*, Journal de l'Ecole Polytechnique **23** (1833), 37–83.

*Universitatea din Oradea, Departamentul de Matematică-Informatică
Strada Universității 1, Oradea 410087, România
e-mail: abica@uoradea.ro*

*Școala Gimnazială "Dacia" Oradea, Catedra de Matematică
Bulevardul Dacia 25, Oradea 410464, România
e-mail: curila_diana@yahoo.com*