SINTEZE MATEMATICE

Adrian Stan

ALGEBRĂ
GEOMETRIE
ANALIZĂ MATEMATICĂ

Editura Rafet 2007

1. Mulțimea numerelor reale

1.. Scrierea în baza zece:

$$\overline{abcd}=a\cdot 10^3+b\cdot 10^2+c\cdot 10+d$$

a-cifra miilor; b-cifra sutelor; c-cifra zecilor; d-cifra unităților;

$$\overline{a,efg}=a\cdot 10+e\cdot 10^{-1}+f\cdot 10^{-2}+g\cdot 10^{-3}=$$

$$=a\cdot 10+e\cdot 0.1+f\cdot 0.01+g\cdot 0.001$$

e-cifra zecimilor; f-cifra sutimilor; g-cifra miimilor.

2. Fracții

-Fracții zecimale finite: $\overline{a,b}=\dfrac{\overline{ab}}{10}$; $\overline{a,bc}=\dfrac{\overline{abc}}{100}$;

-Fracții zecimale periodice:-

simple: $\overline{a,(b)}=\dfrac{\overline{ab}-a}{9}$; $\overline{a,(bc)}=\dfrac{\overline{abc}-a}{99}$;

mixte: $\overline{a,b(c)}=\dfrac{\overline{abc}-\overline{ab}}{90}$; $\overline{a,b(cd)}=\dfrac{\overline{abcd}-\overline{ab}}{990}$;

3.. Rapoarte şi proporții

$$\frac{a}{b}\ \ se\ \ numeste\ \ raport\ \forall b\neq 0;\ \ \frac{a}{b}=\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=k,\ \ n\in Q^*,$$

k se numeşte coeficient de proporționalitate ;

Proprietatea fundamentală a proporțiilor:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow a\cdot d=b\cdot c$$

4. Proporții derivate:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{b}{a}=\dfrac{d}{c}\ sau\ \dfrac{d}{b}=\dfrac{c}{a}\ sau\ \dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}\\ \dfrac{a}{a\pm b}=\dfrac{c}{c\pm d}\ sau\ \dfrac{a\pm b}{b}=\dfrac{c\pm d}{d}\\ \dfrac{a}{b}=\dfrac{a+c}{b+d}\ sau\ \dfrac{a}{b}=\dfrac{a-c}{b-d}\ sau\ \dfrac{a^2}{b^2}=\dfrac{c^2}{d^2}.\end{cases}$$

5. Sir de rapoarte egale:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n};$$

$(a_1, a_2, a_3, ... a_n)$ și $(b_1, b_2, b_3, ... b_n)$ sunt direct proporționale $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = .. = \dfrac{a_n}{b_n} = k$.

$(a_1, a_2, a_3, ... a_n)$ și $(b_1, b_2, b_3, ... b_n)$ sunt invers proporționale $\Leftrightarrow a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2 = .. = a_n \cdot b_n$

6. Modulul numerelor reale Proprietăți:

$$|a| \overset{def}{=\!=} \begin{cases} a, & a \rangle 0 \\ 0, & a = 0 \\ -a, & a \langle 0 \end{cases}$$

1. $|a| \geq 0, \quad \forall a \in R$; **2**. $|a| = 0, \quad \Leftrightarrow a = 0$;

3. $|a| = |-a|, \quad \forall a \in R$; **4**. $|a| = |b|, \quad \Leftrightarrow a = \pm b$;

5. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$; **6**. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$;

7. $||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$;

8. $|x| = a, \quad \Rightarrow x = \pm a, \quad a \rangle 0$;

9. $|x| \leq a, \quad \Leftrightarrow x \in [-a, a], \quad a \rangle 0$;

10. $|x| \geq a, \quad \Leftrightarrow x \in [-\infty, -a] \cup [a, +\infty], \quad a \rangle 0$.

7. Reguli de calcul în R

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;

3. (a+b)(a-b= a ^{2} -b ^{2} ;

4. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

5. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;

6. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;

7. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$;

8. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$.

8. Puteri cu exponent întreg

$$a^n \underset{=\!=}{def} \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot ...... \cdot a}_{n \ \ factori}$$

1. $a^o = 1; a^1 = a; 0^n = 0;$
2. $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$
3. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
4. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}; a \neq 0$
5. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
6. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}, a \neq 0$
7. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}, b \neq 0$
8. $a^m = a^n \Leftrightarrow m = n.$

9. Proprietățile radicalilor de ordinul doi

1. $\sqrt{a^2} = |a| \geq 0, \forall a \in R$
2. $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$
3. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}, b \neq 0$
4. $\sqrt{a^n} = (\sqrt{a})^n = a^{\frac{n}{2}}$,
5. $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\dfrac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$

   unde a^2-b=k^2 .

10. Medii

Media aritmetică $m_a = \dfrac{x+y}{2}$

Media geometrică $m_g = \sqrt{x \cdot y}$

Media ponderată $m_p = \dfrac{p \cdot x + q \cdot y}{p+q}; p, q - ponderile$

Media armonică $m_h = \dfrac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = \dfrac{2xy}{x+y}$.

Inegalitatea mediilor

$$\frac{2xy}{x+y} \le \sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$$

11. Ecuații

$$a \cdot x + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}, a \neq 0$$

$$x^2 = a \Rightarrow x = \pm\sqrt{a}, \quad a \ge 0 \quad ;$$

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

$$a \neq 0, b^2 - 4ac \ge 0.$$

$$|x| = a, \quad a \ge 0 \Rightarrow x = \pm a.$$

$$\sqrt{x} = a, a \ge 0 \Rightarrow x = a^2$$

$$[x] = a \Rightarrow a \le x \langle a + 1 \Leftrightarrow x \in [a, a+1) \ .$$

12. Procente

p % din N = $\dfrac{p}{100} \cdot N$

D = $\frac{S\cdot p\cdot n}{100\cdot 12}$ …. **Dobânda** obținută prin depunerea la bancă a unei sume **S** de bani pe o perioadă de **n** luni cu procentul **p** al dobândei anuale acordate de bancă .

Cât la sută reprezintă numărul a din N.

x % din N =a $\Rightarrow x=\frac{a\cdot 100}{N}$ **.**

13. **Partea întreagă**

1. $x=[x]+\{x\}$, $\forall x\in R$, $[x]\in Z$ și $\{x\}\in[0,1)$

2. $[x]\le x<[x]+1$ $\quad [x]=a\Rightarrow a\le x<a+1$

3. $[x]=[y]$ $\Leftrightarrow$ $\exists K\in Z$ a. î. $x,y\in[k,k+1]\Leftrightarrow|x-y|<1$

4. $[x+k]=k+[x]$, $\forall k\in Z$, $x\in R$

5. $\{x+k\}=\{x\}$, $\forall x\in R$, $\forall k\in Z$

6. Dacă $\{x\}=\{y\}\Rightarrow x-y\in Z$

7. Dacă $x\in R$ $\Rightarrow$ $[[x]]=[x]\in Z$
$[\{x\}]=0$, $\{[x]\}=0$, $\{\{x\}\}=\{x\}$

8. Identitatea lui Hermite $[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]$, $\forall x\in R$

9. $[x+y]\ge[x]+[y]$, $\forall x,y\in R$

10. Prima zecimală, după virgulă, a unui număr N este dată de $[10\cdot\{N\}]$ sau $[(N-[N])\cdot 10]$

2. Inegalități

1. $a > 1 \quad a^{k-1} < a^k \quad \forall\ k \geq 1$

   $a \in (0,1)\ a^k < a^{k-1} \quad \forall\ k \geq 1$

2. $0 < a \leq b \ \Rightarrow (a^m - b^m)(a^n - b^n) \geq 0 \ \ \forall\ m, n \in N$

3. $a + \dfrac{1}{a} \geq 2\ (\forall)\ a > 0 \quad a + \dfrac{1}{a} \leq -2\ \ \forall\ \ a < 0.$

4. $\dfrac{1}{2\sqrt{k}} < \dfrac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} = \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$

   $\dfrac{1}{2\sqrt{k}} > \dfrac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}\ .$

5. $\dfrac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab\ \forall\ a, b \in R$

6. $\dfrac{a^2 + b^2}{a+b} \geq \dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \dfrac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}, \forall\ a, b > 0$

7. $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca\ \forall\ a, b, c \in R$

8. $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2 \ \ \forall a, b, c \in R$

9. $\dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{a+b+c} \geq \dfrac{1}{3}(a + b + c)\ \ \forall\ a, b, c \in R$

10. $\sqrt{a+b+c} \geq \dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}\right) \forall a, b, c \geq 0$

11. $(n-1)(a_1^2 + ... + a_n^2) \geq 2(a_1a_2 + ...a_1a_n + a_2a_3 + ... + a_{n-1}a_n)$

12. $n(a_1^2 + ... + a_n^2) \geq (a_1 + ... + a_n)^2, \forall\ n \in N$

13. $\dfrac{a^n + b^n}{2} \geq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2, \forall n \in N, a, b > 0.$

14. $0 < \dfrac{a}{b} < 2 \Rightarrow \dfrac{a}{b} < \dfrac{a+r}{b+r}, \forall r > 0.$

    $1 < \dfrac{a}{b} \Rightarrow \dfrac{a}{b} > \dfrac{a+r}{b+r}, \forall r > 0$

15. $|x| \le a \ \ (a > 0) \Leftrightarrow -a \le x \le a.$

16. $|a \pm b| \le |a| + |b|$, $a, b \in R \ \ sau C$.

17. $|a_1 \pm a_2 \pm ... \pm a_n| \le |a_1| + ... + |a_n|$, $in \ R \ sau \ C$.

18. $||a| - |b|| \le |a - b| \ in \ R \ sau \ C$.

19. $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n \cdot n} \le \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$

$\frac{1}{n!} < \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$

20. $a, b \in Z \ \ , m, n \in Z \ \ , \sqrt{\frac{m}{n}} \notin Q \Rightarrow |ma^2 - nb^2| \ge 1.$

21. Numerele pozitive a, b, c pot fi lungimile laturilor unui triunghi dacă şi numai dacă $\exists \ \ x, y, z \in R_+^* \ a.i$
$a = y + z, \ b = x + z, \ c = x + y.$

22. $\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b} \ge 1 \ \ a \ne b \ \ \forall \ a, b > 0$,

23. $a, b, c \in R_+^* \Rightarrow \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \ge 6.$

24. Dacă $x_1, ..., x_n \ge 0$ si $x_1 + ... + x_n = k$ constant atunci produsul $x_2 \cdot x_2 ... x_n$ e maxim când $x_1 = ... = x_n = \frac{k}{n}.$

25. Dacă. $x_1, ..., x_n < 0$ si $\prod_{i=1}^{n} x_i = k$ constant $\Rightarrow x_1 + ... + x_n$ e minimă atunci când $x_1 = ... = x_n = \sqrt[n]{k}.$

26. Dacă $x_1, ..., x_n \ge 0$ si $x_1 + ... + x_n = k =$ constant atunci $x_2^{p_1} \cdot x_2^{p_1} ... x_n^{p_n}$ este maxim când

$\frac{x_1}{p_1} = \frac{x_2}{p_2} = ... \frac{x_n}{p_n} = \frac{k}{p_1 + ... + p_n}, p_i \in N^*, i = \overline{1, n}$

27. Teorema lui Jensen:

Dacă $f: \mathrm{I} \to R$, (I interval) si $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq_{(\geq)} \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$

$\forall x_1, x_2 \in \mathrm{I} \Rightarrow f\left(\frac{x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \leq_{(\geq)} \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n}$

$\forall x_i \in \mathrm{I}$, $i = \overline{1, n}.$

28. Inegalitatea mediilor $\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}.$

29. $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.\ \forall\ a_i \geq 0, i = \overline{1, n}.$

egalitate când $a_i = aj, \forall i, j = \overline{1, n}.$

30. Inegalitatea lui Cauchy-Buniakowsky-Schwartz.

$(a_1^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + \ldots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n)^2 \quad \forall a_i, b_i \in R.$

31. Inegalitatea mediilor generalizate: $"=" \Leftrightarrow \frac{ai}{bi} = \frac{aj}{bj}.$

$$\left(\frac{a_1^\alpha + \ldots + a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \geq \left(\frac{a_1^\beta + \ldots + a_n^\beta}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}, \forall a_i, b_i \in R_+, \alpha \geq \beta,$$

$\alpha, \beta \in R.$

$\Downarrow$

32. $\left(\frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$

33.Inegalitatea lui Bernoulli:

$(1 + a)^n \geq 1 + na, a \geq -1, \forall n \in N.$

3.Mulțimi. Operații cu mulțimi.

1. Asociativitatea reuniunii si a intersecției:
   $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$ $\qquad$ $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$
2. Comutativitatea reuniunii si a intersecției:
   $A\cup B=B\cup A$ $\qquad$ $A\cap B=B\cap A$
3. Idempotența reuniunii si intersecției:
   $A\cup A=A$ $\qquad$ $A\cap A=A$
4. $A\cup\varnothing=A$ $\qquad$ $A\cap\varnothing=\varnothing$
5. Distributivitatea reuniunii față de intersecție:
   $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
6. Distributivitatea intersecției față de reuniune:
   $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
7. $A,B\subset E$, $C_E(A\cup B)=C_EA\cap C_EB$
   $C_E(A\cap B)=C_EA\cup C_EB$
8. $A\subset E$, $C_E(C_EA)=A$
9. $A\setminus B=C_A(A\cap B)$
10. $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\setminus C$
    $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$
    $(A\cup B)\setminus C=(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$
    $(A\cap B)\setminus C=A\cap(B\setminus C)=(A\setminus C)\cap B$
11. $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$
    $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$
    $A\times(B\setminus C)=(A\times B)\setminus(A\times C)$
    $A\times B\neq B\times A$

$A\subset B \Leftrightarrow (\forall x)\ (x\in A \Rightarrow x\in B)$

$A\not\subset B \Leftrightarrow (\exists x)((x\in A)\wedge(x\notin B))$

$x\in A\cup B \Leftrightarrow (x\in A)\vee(x\in B)$

$x\in A\cap B \Leftrightarrow (x\in A)\wedge(x\in B)$

$x\in C_EA \Leftrightarrow (x\in E)\wedge(x\notin A)$

$x\in A\setminus B \Leftrightarrow (x\in A)\wedge(x\notin B)$

12. Relațiile lui **de Morgan**

1. $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$, $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$.
2. $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$, $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.
3. $\neg p \vee p = A$, $\neg p \wedge p = F$.
4. $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$.
5. $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$.
6. $p \wedge A = p$, $p \vee A = A$
7. $p \vee q = q \vee p$, $p \wedge q = q \wedge p$
8. $\neg(\neg p) = p$
9. $p \wedge \neg p = F$, $p \wedge \neg p = A$
10. $(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$
    $(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$
11. $p \vee F = p \qquad p \wedge F = F$

4. Progresii

1. Şiruri

Se cunosc deja şirul numerelor naturale 0,1,2,3,4,…….,şirul numerelor pare 2,4,6,…… Din observaţiile directe asupra acestor şiruri, un şir de numere reale este dat în forma $a_1, a_2, a_3,.....$ unde a_1, a_2, a_3 sunt termenii şirului iar indicii 1,2,3, reprezintă poziţia pe care îi ocupă termenii în şir.
Definiţie: Se numeşte **şir de numere reale** o funcţie **f: N*→R** , definită prin **f(n)=a** $_n$

Notăm $(a_n)_{n\in N^*}$ **şirul de termen general , a** $_n$
Observaţie: Numerotarea termenilor unui şir se mai poate face începând cu zero: $a_0, a_1, a_2,.....$

a_i , i≥ 1 se numeşte termenul de rang **i**.

Un şir poate fi definit prin :

a) descrierea elementelor mulţimii de termeni. 2,4,6,8,……..

b) cu ajutorul unei formule **a** $_n$ **=2n**

c) printr-o relaţie de recurenţă. $a_{n+1} = a_n + 2$

Un şir constant este un şir în care toţi termenii şirului sunt constanţi : 5,5,5,5,…..
Două şiruri $(a_n)_n, (b_n)_n$ sunt egale dacă $a_n = b_n, \forall n \in N$
Orice şir are o infinitate de termeni.

2. Progresii aritmetice

Definiție: Se numeşte **progresie aritmetică** un şir în care diferența oricăror doi termeni consecutivi este un număr constant r, numit rația progresiei aritmetice.

1. **Relația de recurență între doi termeni consecutivi**:

$$a_{n+1} = a_n + r, \forall n \geq 1$$

2. $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}, a_n, a_{n+1}$ sunt termenii unei progresii aritmetice $\Leftrightarrow$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

3. **Termenul general** este dat de :

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

4. Suma oricăror doi termeni egal departați de extremi este egal cu suma termenilor extremi :

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n$$

5. Suma primilor n termeni :

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

6. Şirul termenilor unei progresii aritmetice:

$$a_1, a_1 + r, a_1 + 2r, a_1 + 3r, \ldots\ldots.$$

$$a_m - a_n = (m-n)r$$

7. Trei numere x_1, x_2, x_3 se scriu în progresie aritmetică de forma :

$x_1 = u - v \quad x_2 = u \quad x_3 = u + v \quad \forall\ u, v \in \Re$.

8. Patru numere x_1, x_2, x_3, x_4 se scriu în progresie aritmetică astfel:

$x_1 = u - 3v,\ x_2 = u - v,\ x_3 = u + v,\ x_4 = u + 3v,\ \forall\ u, v \in \Re$.

9. Dacă $\div a_i \Rightarrow \dfrac{a_k}{a_{k+1}} \langle \dfrac{a_{k+1}}{a_{k+2}}$

4. Progresii geometrice

Definiție : Se numeşte **progresie geometrică** un şir în care raportul oricăror doi termeni consecutivi este un număr constant q, numit rația progresiei geometrice.

1. **Relația de recurență :** $b_{n+1} = b_n \cdot q, \forall n \geq 1$

2. **$b_1, b_2, \dots b_{n-1}, b_n, b_{n+1}$** sunt termenii unei progresii geometrice cu termeni pozitivi $\Leftrightarrow$ $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$

3. Termenul general este dat de : $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

4. Produsul oricaror doi termeni egal departati de extremi este egal cu produsul extremilor

$$b_k \cdot b_{n-k+1} = b_1 \cdot b_n$$

5. Suma primilor n termeni ai unei progresii geometrice :

$$S_n = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

6. Şirul termenilor unei progresii geometrice :

$$b_1, b_1 \cdot q, b_1 \cdot q^2, \dots b_1 \cdot q^n, \dots.$$

7. Trei numere x_1, x_2, x_3 se scriu în progresie geometrică de forma :

$x_1 = \frac{u}{v}$ $\quad$ $x_2 = u$ $\quad$ $x_3 = u \cdot v, \ \forall u, v \in R^*_+$

8. Patru numere x_1, x_2, x_3, x_4 se scriu în progresie geometrică astfel :

$x_1 = \frac{u}{v^3}$

$x_2 = \frac{u}{v}$

$x_3 = u \cdot v$

$x_4 = u \cdot v^3 \quad \forall u, v \in R^*_+$

5. Funcţii

I. Fie f: A→B.

1**) Funcţia f este injectivă**,dacă

$\forall$ x,y $\in$A, x$\neq$ y=>f(x)$\neq$ f(y).

2) Funcţia f este injectivă,dacă din f(x)=f(y) =>x=y.

3) Funcţia f este injectivă, dacă orice paralelă la axa 0x intersectează graficul funcţiei în cel mult un punct.

II.

1)**Funcţia f este surjectivă**, dacă $\forall$ y $\in$ B, există cel puţin un punct x $\in$A, a.î. f(x)=y.

2) Funcţia f este surjectivă, daca f(A) =B.

3) Funcţia f este surjectivă, dacă orice paralelă la axa 0x, dusă printr-un punct al lui B, intersectează graficul funcţiei în cel puţin un punct.

III.

1) **Funcţia $f$este bijectivă** dacă este injectivă şi surjectivă.

2) Funcţia f este bijectivă dacă pentru orice y $\in$ B există un singur x $\in$ A a.î. f(x) =y (ecuaţia f(x)=y,are o singură soluţie,pentru orice y din B)

3) Funcţia f este bijectivă dacă orice paralelă la axa 0x, dusă printr-un punct al lui B, intersectează graficul funcţiei într-un punct şi numai unul.

IV.

1_A: A→A prin 1_A(x) =x, $\forall$ x $\in$ A.

1) **Funcţia f: A→B este inversabilă** , dacă există o funcţie g:B→A astfel încât g o f = 1_A si f o g =1_B, funcţia g este inversa funcţiei f şi se notează cu f^{-1}.

2) f(x) = y <=> x= f^{-1}(y)

3) f este bijectivă <=> f este inversabilă.

V. Fie f:A→B si g: B→C, două funcții.

1) Dacă f si g sunt injective, atunci g o f este injectivă.
2) Dacă f si g sunt surjective,atunci g o f este surjectivă.
3) Dacă f si g sunt bijective, atunci g o f este bijectivă.
4) Dacă f si g sunt (strict) crescatoare,atunci g o f este (strict) crescatoare.
5) Dacă f si g sunt (strict) descrescatoare, atunci g o f este (strict) descrescatoare.
6) Dacă f si g sunt monotone, de monotonii diferite,atunci g o f este descrescatoare.
7) Dacă f este periodică, atunci g o f este periodică.
8) Dacă f este pară, atunci g o f este pară.
9) Dacă f si g sunt impare, atunci g o f este impară,
10) Dacă f este impară si g pară, atunci g o f este pară.

VI. Fie f: A→ B si g:B→C, două funcții.

Dacă g o f este injectivă, atunci f este injectivă.
Dacă g o f este surjectivă, atunci g este surjectivă.
Dacă g o f este bijectivă, atunci f este injectivă si g surjectivă.
Dacă f,g: A → B iar h: B→ C bijectivă si h o f = h o f, atunci f = g.

VII. Fie f: A→B si X,Y mulțimi oarecare.

Funcția f este bijectivă, dacă şi numai dacă oricare ar fi funcțiile
u,v: X→A,din f o u =f o v, rezultă u=v.

Funcția f este surjectivă, daca şi numai dacă oricare ar fi funcțiile *u,v* :B→Y, din u o f = v o f, rezultă u=v

VIII.

1)Dacă f :A→B este strict monotonă,atunci f este injectivă.

2) Daca f : R→R este periodic şi monotonă, atunci f este constantă.

3) Daca f : R→R este bijectivă şi impară,atunci f^{-1} este impară.

4) Fie A finită şi f :A→A. Atunci f este injectivă <=> este surjectivă.

IX. Fie f: E → F, atunci

1)f injectivă <=> (∃) g : F →E (surjectivă) a.i. g o f=$1_{E.}$

2) f surjectivă <=>(∃) g : E→F (injectivă) a.i. f o g =1_F

3) f bijectivă <=> inversabilă.

X. Fie f : E → F.

1)Funcția f este injectivă dacă şi numai dacă (∀) A,B ⊂ E

$$f(A \cap B) = f\,(A) \cap (B).$$

2) Funcția f este surjectivă dacă şi numai dacă (∀) B ⊂ F există A ⊂ E, astfel încât f(A)=B.

3) Funcția f este injectivă dacă f(A— B)=f(A) — f(B),
∀ A, B ⊂ E.

XI. Fie f : E → F si A⊂ E, B ⊂ E, atunci

$$f(A) = \{y \in F \mid \exists\, x \in A \text{ a.i. } f(x)=y\}$$
$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

1.Fie f: E→ F si A,B ⊂ E, atunci

a) A ⊂ B => f(A) ⊂ f(B),

b) f(A ∪ B)= f(A) ∪ f(B),

c) f(A ∩ B) ⊂ f(A) ∩ f(B),

d) f(A) — f(B) ⊂ f(A — B).

2.Fie f: E $\rightarrow$ F si A,B $\subset$ F atunci

a) A $\subset$ B => f^{-1} (A) $\subset f^{-1}$ (B),
b)f^{-1} (A) $\cup f^{-1}$ (B) $\subset f^{--1}$ (A $\cup$ B),
c)f^{-1} (A) $\cap f^{-1}$ (B) = f^{-1} (A $\cap$ B),
d) f^{-1} (A) — f^{-1} (B) = f^{-1} (A— B),
e) f^{-1} (F) = E.

Funcția de gradul al doilea

Forma canonică a funcției f:R→R,

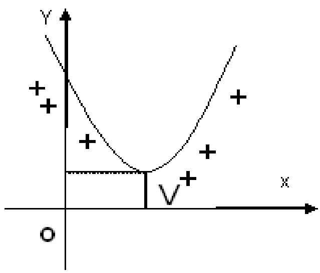
$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a,b,c \in R, a \neq 0$ este

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}, \forall x \in R;$$

Graficul funcției este o parabolă de vârf $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$, unde

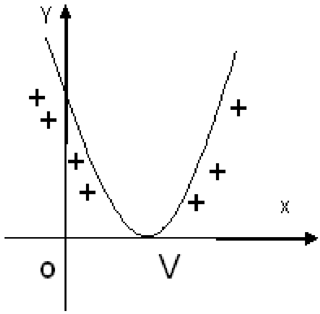
$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$a \rangle 0$ **f este convexă;**



$\Delta \langle 0$; $\mathbf{x_1, x_2} \in$ **C**
f(x) >0, $\forall x \in R$;

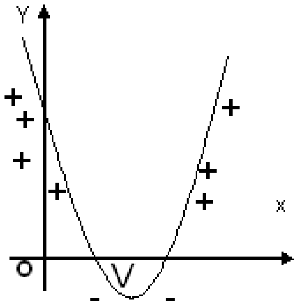
$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ - punct de minim;



$\Delta = 0$, $\mathbf{x_1=x_2 \in R}$

f(x) ≥ 0, $\forall x \in R$;

f(x)=0 $\Leftrightarrow x = -\dfrac{b}{2a}$



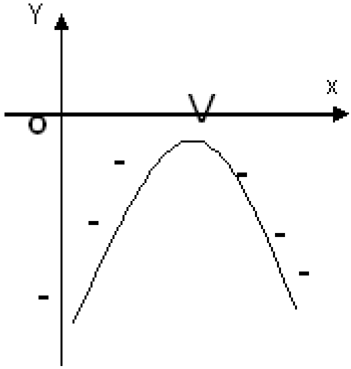
$\Delta \rangle 0, x_1 \neq x_2 \in R$ f(x) ≥ 0, $\forall x \in (-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty)$;

f(x)<0, $\forall x \in (x_1, x_2)$

Pentru $x \in \left(-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right)$ funcția este strict descrescătoare;

Pentru $x \in [-\dfrac{b}{2a}, +\infty)$, funcția este strict crescătoare

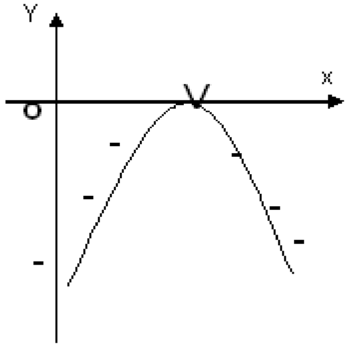
a<0 funcția este concavă



$\Delta\langle 0$; $\mathbf{x_1,x_2} \in$ **C**

f(x) <0, $\forall x \in R$;

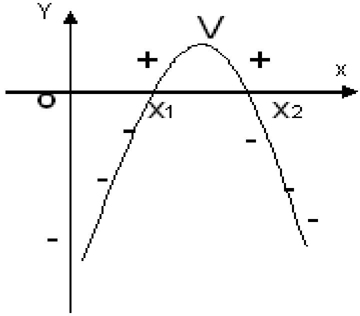
$V\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$ - punct de maxim



$\Delta = 0$, $\mathbf{x_1=x_2 \in R}$

f(x) ≤ 0, $\forall x \in R$;

f(x)=0 $\Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$



$\Delta\rangle 0, x_1 \neq x_2 \in R$

f(x) ≥ 0, $\forall x \in [x_1, x_2]$;

f(x)<0,

$\forall x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$

Pentru $x \in \left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ funcția este strict crescătoare;

Pentru $x \in [-\frac{b}{2a}, +\infty)$, funcția este strict descrescătoare.

6. NUMERE COMPLEXE

1. NUMERE COMPLEXE SUB FORMĂ ALGEBRICĂ

$$C = \left\{ z \middle| z = a + ib,\ \ a, b \in R,\ \ i^2 = -1 \right\}$$

- mulțimea numerelor complexe.

z=a+ib=Re z+Im z

OPERAȚII CU NUMERE COMPLEXE

Fie $z_1 = a + ib, \quad z_2 = c + id$. Atunci:

1. $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a = c \quad si \quad b = d$.

2. $z_1 + z_2 = (a + c) + i(b + d)$.

3. $z_1 \cdot z_2 = (a \cdot c - b \cdot d) + i(a \cdot d + b \cdot c)$.

4. $\overline{z_1} = a - ib,$ conjugatul lui z_1

5. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a \cdot c + b \cdot d}{c^2 + d^2} + i \frac{b \cdot c - a \cdot d}{c^2 + d^2}$

6. $\frac{1}{z_1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}$.

PUTERILE LUI i

1. $i^{4k} = 1$;
2. $i^{4k+1} = i$;
3. $i^{4k+2} = -1$;
4. $i^{4k+3} = -i$;
5. $i^{-n} = \frac{1}{i^n}, i^{-1} = \frac{1}{i} = -i$;
6. $i^{-n} = (-i)^n = (-1)^n \cdot i^n = \begin{cases} i^n, n \quad par \\ -i^n, n \quad impar \end{cases}$

PROPRIETĂȚILE MODULULUI

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ - modulul nr. complexe

1. $|z| \geq 0, |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ **2.** $z \cdot \overline{z} = |z|^2$ **3.** $|z| = |\overline{z}|$

4. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

5. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, z_2 \neq 0$

6. $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ **7.** $|z^n| = |z|^n$

8. $z \in C; \quad z \in R \Leftrightarrow \operatorname{Im} z = 0 \Leftrightarrow z = \overline{z}$

ECUAȚII:

$$z^2 = a + ib \Rightarrow \quad z_{1,2} = \pm\sqrt{a+ib} \Rightarrow$$

$$z_{1,2} = \pm\left[\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \pm i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right]$$

‚+' dacă b pozitiv; ‚-‚ dacă b negativ

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$daca \quad \Delta = b^2 - 4ac \geq 0 \quad sau$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad daca \quad \Delta\langle 0$$

NUMERE COMPLEXE SUB FORMĂ GEOMETRICĂ

Forma trigonometrică a numerelor complexe:

z= $\rho(\cos\ \varphi + i \sin\ \varphi)$,

$$\varphi = arctg\ \frac{b}{a} + k\pi, \quad k = \begin{cases} 0, & (a,b) \in I \\ 1, & (a,b) \in II, III \\ 2, & (a,b) \in IV \end{cases}$$

$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ se numeşte raza polară a lui z

Fie $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ şi $z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$;

$z_1 = z_2 \quad \rho_1 = \rho_2, si \quad exista \quad k \in Z \quad a.i \quad \varphi_1 = \varphi_2 + k\pi$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)$$
$$\overline{z_1} = \rho_1(\cos\varphi_1 - i\sin\varphi_1)$$

$$\frac{1}{z_1}=\frac{1}{\rho_1}[\cos(-\varphi_1)+i\sin(-\varphi_1)]$$

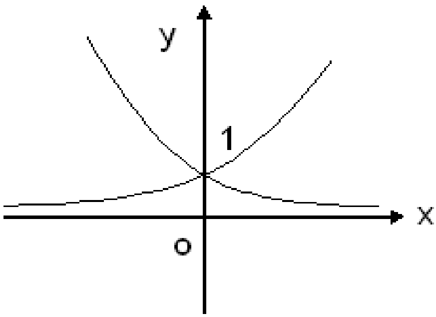
$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{\rho_2}{\rho_1}\left[\cos(\varphi_2-\varphi_1)+i\sin(\varphi_2-\varphi_1)\right]$$

$$z_1{}^n=\rho_1{}^n(\cos n\varphi_1+i\sin n\varphi_1), n\in R$$

$$\sqrt[n]{z_1}=\sqrt[n]{\rho_1}(\cos\frac{\varphi_1+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi_1+2k\pi}{n}), k\in\overline{0,n-1}$$

7. FUNCTIA EXPONENTIALĂ

Def. f: R→ (0,∞), f(x)= $a^x, a\rangle 0, a\neq 1$



Dacă a $\rangle 1 \Rightarrow$ f este strict crescătoare

$x_1\langle x_2 \Rightarrow a^{x_1}\langle a^{x_2}$

Dacă a $\in (0,1) \Rightarrow$ f este strict descrescătoare

$x_1\langle x_2 \Rightarrow a^{x_1}\rangle a^{x_2}$

Proprietăți:

Fie a,b $\in (0,\infty), a,b\neq 1, x,y\in R \Rightarrow$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot a^y$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, a \neq 0$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}, b \neq 0$$

$$a^0 = 1$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}, a \neq 0$$

pentru $a \langle 0$, *nu se defineste* a^x

Tipuri de ecuații:

1. a$^{f(x)} = b, a \rangle 0, a \neq 1, b \rangle 0 \Rightarrow f(x) = \log_a b$

2. a$^{f(x)} = a^{g(x)}, a \rangle 0, a \neq 1 \Rightarrow f(x) = g(x)$

3. a$^{f(x)} = b^{g(x)}, a, b \rangle 0, a, b \neq 1 \Rightarrow f(x) = g(x) \cdot \log_a b$

4. ecuații exponențiale reductibile la ecuații algebrice printr-o substituție.

5. ecuații ce se rezolvă utilizând monotonia funcției exponențiale.

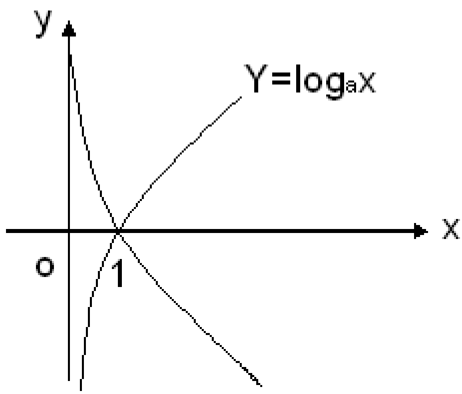
Inecuații

a>1, $a^{f(x)} \leq a^{g(x)} \Rightarrow f(x) \leq g(x)$

a$\in (0,1)$ $a^{f(x)} \leq a^{g(x)} \Rightarrow f(x) \geq g(x)$

FUNCTIA LOGARITMICĂ

Def: **f:(0,∞) →R, f(x)=** $\log_a x$, $a\rangle 0, a \neq 1$ **,x>0**



Dacă a $\rangle 1 \Rightarrow$ f este strict crescătoare

$x_1 \langle x_2 \Rightarrow \log_a x_1 \langle \log_a x_2$

Dacă a $\in (0,1) \Rightarrow$ f este strict descrescătoare

$x_1 \langle x_2 \Rightarrow \log_a x_1 \rangle \log_a x_2$

Proprietăți:

Fie a,b $c \in (0,\infty), a,b,c \neq 1, x,y \in (0,\infty), m \in R \Rightarrow$

$$a^y = x \rangle 0 \Rightarrow y = \log_a x$$

$$\log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a a^m = m, \quad \log_a b^m = m \log_a b$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \quad \frac{1}{\log_a b} = \log_b a$$

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}, \quad x = a^{\log_a x}$$

$$\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1.$$

Tipuri de ecuații:

1. $\log_{f(x)} g(x) = b, f, g\rangle 0, f \neq 1 \Rightarrow g(x) = f(x)^b$

2. $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Rightarrow f(x) = g(x)$

3. $\log_a f(x) = \log_b g(x) \Rightarrow f(x) = a^{\log_b g(x)}$

4. ecuații logaritmice reductibile la ecuații algebrice printr-o substituție.

5. ecuații ce se rezolvă utilizând monotonia funcției logaritmice.

Inecuații

a>1, $\log_a f(x) \leq \log_a g(x) \Rightarrow f(x) \leq g(x)$

a $\in (0,1) \log_a f(x) \leq \log_a g(x) \Rightarrow f(x) \geq g(x)$

8. BINOMUL LUI NEWTON

În 1664 **Isaac Newton** (1643-1727) a găsit următoarea formulă pentru dezvoltarea binomului $\mathbf{(a+b)^n}$. Deşi formula era cunoscută încă din antichitate de către matematicianul arab **Omar Khayyam** (1040-1123), **Newton** a extins-o şi pentru coeficienți raționali.

TEOREMĂ: Pentru orice număr natural n şi a şi b numere reale există relația:

$$\boxed{(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}\cdot b + C_n^2 a^{n-2}\cdot b^2 + \ldots\ldots + C_n^k a^{n-k}\cdot b^k + \ldots + C_n^n b^n}$$

(1)

Numerele $C_n^{\ 0}, C_n^{\ 1}, \ldots, C_n^{\ n}$ se numesc coeficienții binomiali ai dezvoltării;

Este necesar să se facă distincție între coeficientul unui termen al dezvoltării şi coeficientul binomial al acelui termen. Exemplu: $(a+2b)^4 = a^4 + 4a^3 \cdot 2b + \ldots$

Coeficientul celui de-al doilea termen este 8 iar coeficientul binomial este $C_4^1 = 4$;

Pentru $(a-b)^n$ avem următoarea formă a binomului lui Newton:

$$\boxed{(a-b)^n = C_n^0 a^n - C_n^1 a^{n-1}\cdot b + C_n^2 a^{n-2}\cdot b^2 - \ldots\ldots + (-1)^k C_n^k a^{n-k}\cdot b^k + \ldots + (-1)^n C_n^n b^n}$$

(1')

Proprietăți:

1. Numărul termenilor dezvoltării binomului $(a+b)^n$ este n+1;

Dacă $n=2k \Rightarrow$ coeficientul binomial al termenului din mijloc al dezvoltării este C_n^k şi este cel mai mare.

Dacă $n=2k+1 \Rightarrow C_n^k$ şi C_n^{k+1} sunt egali şi sunt cei mai mari;

$C_n^o < C_n^1 < \ldots\ldots < C_n^k > C_n^{k+1} > \ldots\ldots > C_n^n$ daca n este par, n=2k

$C_n^o < C_n^1 < \ldots\ldots < C_n^k = C_n^{k+1} > \ldots\ldots > C_n^n$ daca n este impar, n=2k+1.

2. Coeficienții binomiali din dezvoltare, egal depărtați de termenii extremi ai dezvoltării sunt egali între ei.

$$\boxed{C_n^k = C_n^{n-k}}$$

(2)

3. Termenul de rang k+1 al dezvoltării (sau termenul general al dezvoltării) este

$$\boxed{T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} \cdot b^k, \quad k = 0,1,2,\ldots,n}$$

(3)

$\Rightarrow$ Formula binomului lui Newton scrisă restrâns are forma:

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k}.$$

(4)

4. Relația de recurență între termenii succesivi ai dezvoltării este următoarea:

$$\boxed{\frac{T_{k+2}}{T_{k+1}} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{b}{a}}$$

(5)

5. Pentru a=b=1 se obține

$$\boxed{C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots\ldots\ldots + C_n^n = (1+1)^n}$$

(6)

ceea ce înseamnă că **numărul tuturor submulțimilor unei mulțimi cu n elemente este** $\mathbf{2^n}$.

9. Vectori şi operaţii cu vectori

Definiţie:

Se numeşte segment orientat, o pereche ordonată de puncte din plan;

Se numeşte **vector**, mulţimea tuturor segmentelor orientate care au aceeaşi direcţie, aceeaşi lungime şi acelaşi sens cu ale unui segment orientat.

Observaţii:

Orice vector $\overrightarrow{AB}$ se caracterizează prin:

- **modul**(lungime,normă), dat de lungimea segmentului AB;
- **direcţie**, dată de dreapta AB sau orice dreaptă paralelă cu aceasta;
- **sens**, indicat printr-o săgeată de la originea A la extremitatea B.

Notaţii: $\overrightarrow{AB}$ vectorul cu originea A şi extremitatea B;

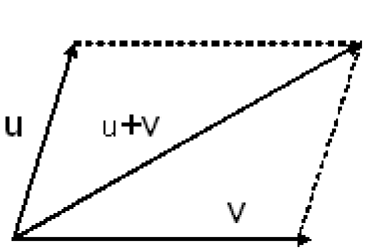
$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ - modulul vectorului $\overrightarrow{AB}$ unde $A(x_0,y_0)$, B(x.y).

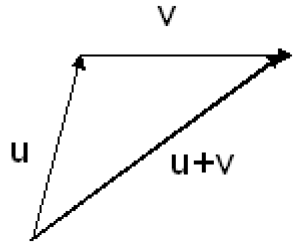
Definiţie:

Se numesc vectori egali, vectorii care au aceeaşi direcţie, acelaşi sens şi acelaşi modul. Doi vectori se numesc opuşi dacă au aceeaşi direcţie, acelaşi modul şi sensuri contrare:

$-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.

Adunarea vectorilor se poate face după regula triunghiului sau după regula paralelogramului:



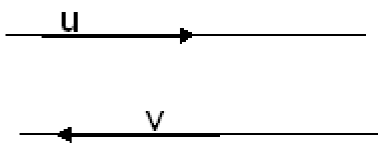


$\lambda \cdot \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0 \quad sau \quad \vec{v} = \vec{0}, \forall \lambda \in R$

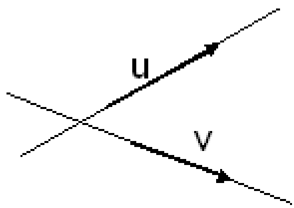
$Daca \quad \lambda \neq 0, \vec{v} \neq \vec{0} \Rightarrow \left| \lambda \cdot \vec{v} \right| = |\lambda| \cdot \left| \vec{v} \right|, \lambda \cdot \vec{v}$ are direcţia şi sensul vectorului $\vec{v}$ dacă $\lambda \rangle 0$ şi sens opus lui $\vec{v}$ dacă $\lambda \langle 0$.

Definiţie:

Doi vectori se numesc **coliniari** dacă cel puţin unul este nul sau dacă amândoi sunt nenuli şi au aceeaşi direcţie. În caz contrar se numesc necoliniari.



vectori coliniari



vectori necoliniari

Teoremă:

Fie $\vec{u} \neq \vec{0}$ şi $\vec{v}$ un vector oarecare.

Vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ sunt **coliniari** $\Leftrightarrow \exists \lambda \in R \quad a.i. \quad \vec{v} = \lambda \cdot \vec{u}$.

Punctele A, B, C sunt coliniare

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ si $\overrightarrow{AC}$ $sunt\ coliniari \Leftrightarrow \exists \lambda \in R a.i. \overrightarrow{AB} = \lambda \cdot \overrightarrow{AC}$.

$AB \| CD \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ si $\overrightarrow{CD}$ sunt coliniari;

Dacă $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ sunt vectori necoliniari atunci

$\exists x, y \in R$ $a.i.$ $x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow x = y = 0$.

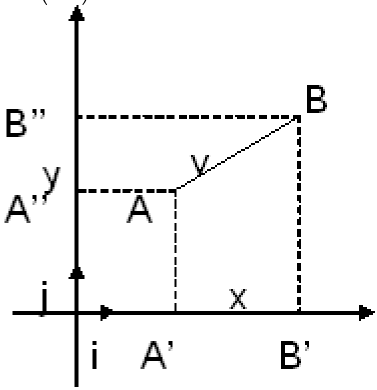
Teoremă: Fie $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ doi vectori necoliniari. Oricare ar fi vectorul $\vec{v}$, există $\alpha, \beta \in R(unice)$ astfel încât $\vec{v} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$.

Vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ formează o bază.

α, β se numesc coordonatele vectorului $\vec{v}$ în baza $\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$.

Definiție:
Fie XOY un reper cartezian. Considerăm punctele A(1,0), B(0,1). Vectorii $\vec{i} = \overrightarrow{OA}$ si $\vec{j} = \overrightarrow{OB}$ se numesc versorii axelor de coordonate. Ei au modulul egal cu 1, direcțiile axelor şi sensurile semiaxelor pozitive cu OX şi OY.

Baza $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ se numeşte bază ortonormată.



$\vec{v} = \overline{A'B'} + \overline{A''B''} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$ x=x_B- x_A, y=y_B- y_A

$\vec{v} = pr_{OX}\vec{v} \cdot \vec{i} + pr_{OY}\vec{v} \cdot \vec{j}$ $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Teoremă:

Fie $\vec{u}(x, y), \vec{v}(x', y')$. Atunci:

1) $\vec{u} + \vec{v}$ are coordonatele (x+x'.y+y');

2) $\forall \lambda \in R, \lambda \cdot \vec{v}$ are coordonatele (λ x', λ y');

3) $\vec{u}(x, y), \vec{v}(x', y')$ sunt coliniari

$\Leftrightarrow \frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = k, x', y' \neq 0. \Leftrightarrow xy' - x'y = 0.$

4) Produsul scalar a doi vectori nenuli.

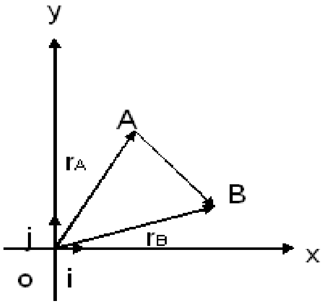
$\vec{u} \cdot \vec{v} = \left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{v}\right| \cdot \cos\alpha \quad unde\, \alpha = m(\vec{u}, \vec{v}), \alpha \in [0, \pi].$

$$\cos\alpha = \frac{x \cdot x' + y \cdot y'}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x')^2 + (y')^2}}$$

$\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} \geq 0; \alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi] \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} \langle 0$

Fie $\vec{u}(x, y), \vec{v}(x', y')$ nenuli. Atunci:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow x \cdot x' + y \cdot y' = 0.$



$\vec{u} \cdot \vec{u} = \left|\vec{u}\right|^2 \geq 0, \forall \vec{u}.$

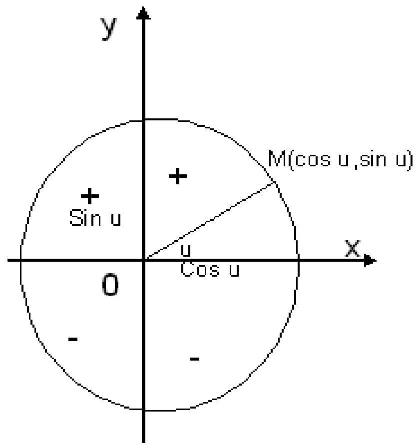
$\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = 0.$

$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = 1; \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = 0.$

Vectori de poziție. Dacă $\overrightarrow{r_A}, \overrightarrow{r_B}$ sunt vectori de poziție, atunci: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{r_B} - \overrightarrow{r_A}$

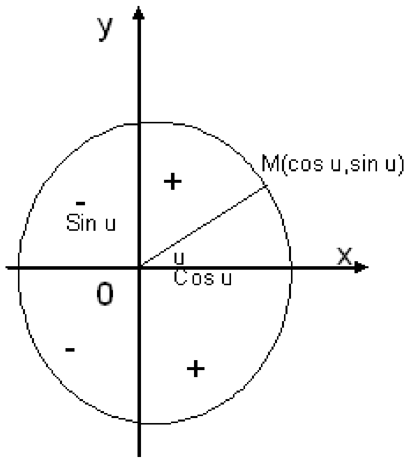
10. Funcții trigonometrice

Semnul funcțiilor trigonometrice:



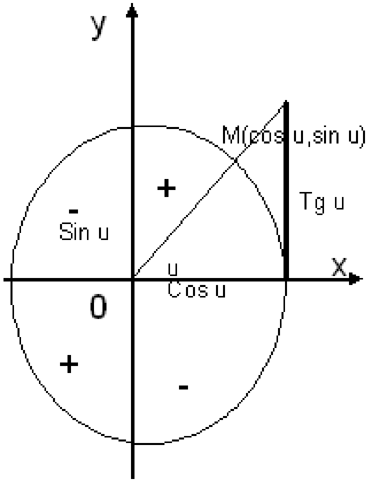
Sin: $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$

arcsin:[-1,1]→ $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$



Cos: $[0,\pi]\to[-1,1]$

arccos:[-1,1] $\to[0,\pi]$



Tg: $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \to R$

arctg:R→ $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

Reducerea la un unghi ascuțit

Fie u$\in (0,\frac{\pi}{2})$ Notăm sgn f= semnul funcției f; cof = cofuncția lui f

$$\sin\left(k\frac{\pi}{2}\pm u\right)=\begin{cases}\operatorname{sgn} f(k\frac{\pi}{2}\pm u)\cdot\sin u, k=par\\ \operatorname{sgn} f(k\frac{\pi}{2}\pm u)\cdot\cos u, k=impar\end{cases}$$ Analog pentru celelalte;

În general, $$f(k\frac{\pi}{2}\pm u)=\begin{cases}\operatorname{sgn} f(k\frac{\pi}{2}\pm u)\cdot f(u), k=par\\ \operatorname{sgn} f(k\frac{\pi}{2}\pm u)\cdot cof(u), k=impar\end{cases}$$

Ecuații trigonometrice

Fie x un unghi, a un număr real şi k $\in Z$.

$$\sin x = a, |a| \le 1 \Rightarrow x = (-1)^k \arcsin a + k\pi, dacă \quad a \in [0,1]$$

$$= (-1)^{k+1} \arcsin |a| + k\pi, dacă \quad a \in [-1,0]$$

$$\cos x = a, |a| \le 1 \Rightarrow x = \pm \arccos a + 2k\pi, dacă \quad a \in [0,1]$$

$$= \pm \arccos a + (2k+1)\pi, dacă \quad a \in [-1,0]$$

$$tgx = a, a \in R \Rightarrow x = arctga + k\pi$$

$$\arcsin(\sin x) = a \Rightarrow x = (-1)^k a + k\pi$$
$$\arccos(\cos x) = a \Rightarrow x = \pm a + 2k\pi$$
$$arctg(tgx) = a \Rightarrow x = a + k\pi$$

$$\sin f(x) = \sin g(x) \Rightarrow f(x) = (-1)^k g(x) + k\pi$$
$$\cos f(x) = \cos g(x) \Rightarrow f(x) = \pm g(x) + 2k\pi$$
$$tgf(x) = tgg(x) \Rightarrow f(x) = g(x) + k\pi, k \in Z$$

Ecuații trigonometrice reductibile la ecuații care conțin aceeaşi funcție a aceluiaşi unghi;
Ecuații omogene în sin x şi cos x de forma: asin x+bcos x=0; $a\sin^2 x+b\sin x .\cos x+ c\cos^2 x=0$
Ecuații trigonometrice care se rezolvă prin descompuneri în factori;
Ecuații simetrice în sin x şi cos x;
Ecuații de forma:

$$a\sin x + b\cos x + c = 0 \,|:a \Rightarrow \sin x + tg\varphi \cos x = -\frac{c}{a} \Rightarrow$$

$$x + \varphi = (-1)^k \arcsin(-\frac{c}{a}\cos\varphi) + k\pi$$

$$|a\sin x + b\cos x| \le \sqrt{a^2 + b^2}$$

Observație importantă: Prin ridicarea la putere a unei ecuații trigonometrice pot apărea soluții străine iar prin împărțirea unei ecuații trigonometrice se pot pierde soluții;

FORMULE TRIGONOMETRICE

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$; $\quad \alpha \in R$

$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$

2.

$$tg\alpha = \pm\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \pm\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} \Rightarrow \quad tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha};$$

3. $\cos\alpha = \pm\dfrac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$; $\quad \sin\alpha = \pm\dfrac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$;

4. $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$;

5. $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$;

6. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$;

7. $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$;

8. $tg(\alpha+\beta) = \dfrac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\cdot tg\beta}$; $\quad tg(\alpha-\beta) = \dfrac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha\cdot tg\beta}$;

9.

$$ctg(\alpha+\beta) = \frac{ctg\alpha\cdot ctg\beta - 1}{ctg\alpha + ctg\beta}; \quad ctg(\alpha-\beta) = \frac{ctg\alpha\cdot ctg\beta + 1}{ctg\alpha - ctg\beta};$$

10. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$;

11. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

12. $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$; $\quad \sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$;

13. $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$; $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$;

14. $tg\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$; $\quad ctg\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$

15. $tg 2\alpha = \dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$; $\quad ctg 2\alpha = \dfrac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha}$;

16. $tg\alpha = \dfrac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}$; $\quad ctg\alpha = \dfrac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{2tg\frac{\alpha}{2}}$;

17.

$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$; $\qquad tg3\alpha = \dfrac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1-3tg^2\alpha}$

$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$; $\qquad ctg3\alpha = \dfrac{ctg^3\alpha - 3ctg\alpha}{3ctg^2\alpha - 1}$;

18. $tg\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{1}{ctg\frac{\alpha}{2}}$;

19. $\sin\alpha = \dfrac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$; $\quad \cos\alpha = \dfrac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$;

$$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cdot\cos\frac{a-b}{2}$$

$$\sin a - \sin b = 2\sin\frac{a-b}{2}\cdot\cos\frac{a+b}{2}$$

$$\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}\cdot\sin\frac{a-b}{2}$$

$$\cos a + \cos b = 2\sin\frac{a-b}{2}\cdot\cos\frac{a+b}{2}$$

$$tga + tgb = \frac{\sin(a+b)}{\cos a\cdot\cos b}$$

$tga - tgb = \dfrac{\sin(a-b)}{\cos a\cdot\cos b}$ $\qquad ctga + ctgb = \dfrac{\sin(a+b)}{\sin a\cdot\sin b}$

$$ctga - ctgb = \frac{\sin(b-a)}{\sin a\cdot\sin b}$$

$$\sin a \cdot \cos b = \frac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2}$$

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}$$

$$\sin a \cdot \sin b = \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}$$

$$\arcsin x + \arcsin y = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})$$

arcsin x+arccos x=$\frac{\pi}{2}$ arctg x +arcctg x=$\frac{\pi}{2}$

arctg x+arctg$\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ arccos(-x)=π -arccos x

11. ECUAȚIILE DREPTEI ÎN PLAN

1. Ecuația carteziană generală a dreptei:

ax+by+c=0 (d)

Punctul M(x_0,y_0) $\in d \Leftrightarrow a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c = 0$

2. Ecuația dreptei determinată de punctele A(x_1,y_1), B(x_2,y_2):

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

3. Ecuația dreptei determinată de un punct M(x_0,y_0) şi o direcție dată(are panta **m**)

y-y_0=m(x-x_0)

4. Ecuația explicită a dreptei (ecuația normală):

y=mx+n, unde $m = tg\varphi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ este panta dreptei şi n este ordonata la origine.

5. Ecuația dreptei prin tăieturi: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,\ \ a,b \neq 0.$

6. Fie (d): y=mx+n şi (d'): y=m'x+n'

Dreptele d şi d' sunt paralele $\Leftrightarrow$ m=m'şi n $\neq$ n'.

Dreptele d şi d' coincid $\Leftrightarrow$ m=m'şi n=n'.

Dreptele d şi d' sunt perpendiculare $\Leftrightarrow$ mm'= **-1.**

Tangenta unghiului φ a celor două drepte este $tg\varphi = \left|\frac{m - m'}{1 + m \cdot m'}\right|$

7. Fie d: **ax+by+c=0** şi d': **a'x+b'y+c'=0** cu a',b',c' $\neq 0$. şi $\theta = m(\langle d, d')$

Dreptele d şi d' sunt paralele $\Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$

Dreptele d şi d’ coincid $\Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

Dreptele d şi d’ sunt concurente $\Leftrightarrow \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \Leftrightarrow$

ab’-ba’ $\neq$ 0.

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v'}}{\left|\overrightarrow{v}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v'}\right|} = \frac{a \cdot a' + b \cdot b'}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2}}$$ unde

$\overrightarrow{v}(-b, a), \overrightarrow{v'}(-b', a')$ sunt vectorii directori ai dreptelor d şi d’.

Dreptele d şi d’ sunt perpendiculare,
$d \perp d' \Leftrightarrow a \cdot a' + b \cdot b' = 0$

8. Fie punctele A(x_1,y_1), B(x_2,y_2), C(x_3,y_3), D(x_4,y_4) în plan.

Dreptele AB şi CD sunt paralele, AB|| CD $\Leftrightarrow \exists \alpha \in R^*, a.î\, \overrightarrow{AB} = \alpha \overrightarrow{CD}$ sau $m_{AB} = m_{CD}$.

Dreptele AB şi CD sunt perpendiculare, $AB \perp CD \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$

Condiția ca punctele A(x_1,y_1), B(x_2,y_2), C(x_3,y_3) să fie coliniare este:

$$\frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}$$

9. Distanța dintre punctele **A(x_1,y_1)** şi **B(x_2,y_2)** este

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

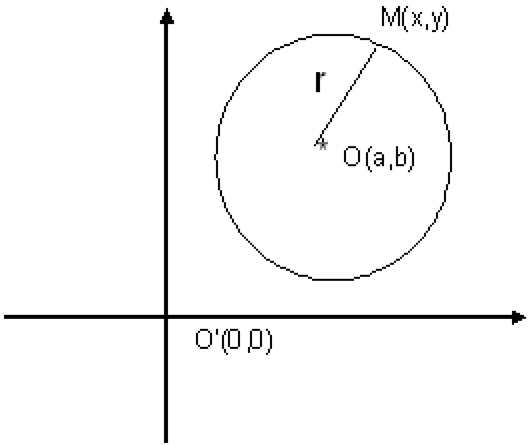
Distanța de la un punct M_0(x_0,y_0) la o dreaptă h de ecuație (h): ax+by+c=0 este dată de:

$$d(M_0, h) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

12. CONICE

1.CERCUL

Definiție: Locul geometric al tuturor punctelor din plan egal depărtate de un punct fix, numit centru se numeşte cerc.



$$C(O,r) = \{M(x,y) \mid OM = r\}$$

1. Ecuația generală a cercului

$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$

2. Ecuația cercului de centru: O(a, b) respectiv O(0, 0) si raza „r”

$(x - a)^2 + (y + b)^2 = r^2$; $x^2 + y^2 = r^2$

3. Ecuația cercului de diametru $A(x_1;y_1)$, $B(x_2; y_2)$

$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$

4. Ecuația tangentei după o direcție

$O(0,0) : y = mx \pm r\sqrt{1 + m^2}$

$O(a,b) : y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{1 + m^2}$

5. Ecuația tangentei în punctul $M(x_0, y_0)$

$(x \cdot x_0) + (y \cdot y_0) = r^2$ respectiv

$(x - a)(x_0 - a) + (y - b)(y_0 - b) = r^2$

6. Ecuatia normala a cercului

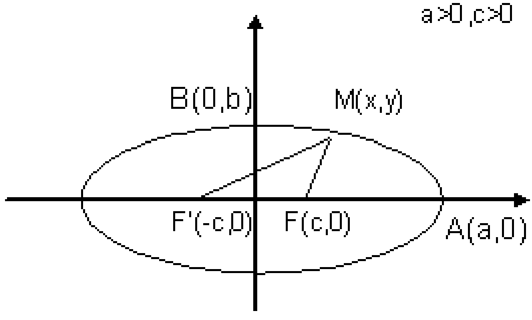
$x^2 + y^2 + 2mx + 2ny + p = 0$ cu
$O(-m; -n)$ şi $r^2 = m^2 + n^2 - p$
7. Ecuaţia tangentei în punctul $M(x_0,y_0)$
$x \cdot x_0 + y \cdot y_0 + m(x + x_0) + n(y + y_0) + p = 0$
8. Distanta de la centrul cercului O(a, b) la dreapta de ecuaţie
$y = mx + n$ este

$$d(0,d) = \frac{|ma - b + n|}{\sqrt{m^2+1}} \quad \text{sau} \quad \left(d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$$

9. Ecuaţiile tangentelor din punctul exterior $M(x_0, y_0)$
I. Se scrie ecuaţia 4 şi se pune condiţia ca M să aparţină cercului de ecuaţie 4.
II. $y - y_0 = m(x - x_0)$
$x^2 + y^2 = r^2$, $\Delta=0$

2. ELIPSA

Definiţie: Locul geometric al punctelor din plan care au suma distanţelor la două puncte fixe, constantă, se numeşte elipsă.



F,F'- focare, FF' distanţa focală
$E=\{M(x,y) \mid MF + MF' = 2a\}$
MF,MF'- raze focale
1. Ecuaţia elipsei

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad , \quad b^2 = a^2 - c^2$$

2. Ecuația tangentei la elipsă

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2+b^2}$$

3. Ecuația tangentei în punctul $M(x_0, y_0)$ la elipsă

$$\frac{x \cdot x_0}{a^2}+\frac{y \cdot y_0}{b^2}=1 \quad , \quad m=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_0}{y_0}$$

4. Ecuațiile tangentelor dintr-un punct exterior $M(x_0, y_0)$ la elipsă

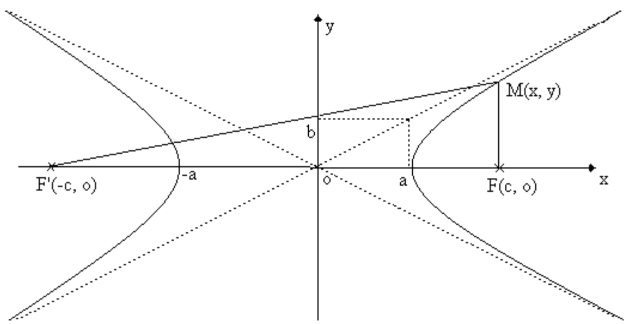
VAR I Se scrie ecuația 2 şi se pune condiția ca M să aparțină elipsei de ecuație 2 de unde rezultă m

VAR II Se rezolvă sistemul $y - y_0 = m(x-x0)$,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{cu conditia } \Delta = 0$$

3. HIPERBOLA

Definiție: Locul geometric al punctelor din plan a căror diferență la două puncte fixe este constantă, se numeşte hiperbolă



H: = { M(x,y) | |MF – MF’| = 2a }

$y = \pm \frac{b}{a}x$ --ecuația asimptotelor

1. Ecuația hiperbolei

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad , \quad b^2 = c^2 - a^2 \quad ;$$

Daca a = b => hiperbola echilaterală

2.Ecuația tangentei la hiperbolă

$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$

3. Ecuația tangentei în punctul $M(x_0, y_0)$

$$\frac{x \cdot x_0}{a^2} - \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1 \quad , \quad m = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0}$$

4. Ecuațiile tangentelor dintr-un punct exterior $M(x_0, y_0)$

VAR I. Se scrie ecuația 2 si se pune condiția ca M să aparțină hiperbolei de ecuație 2, de unde rezultă m.

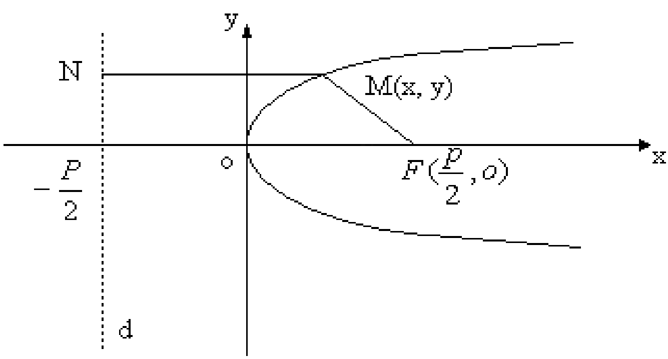
VAR II. Se rezolva sistemul

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad , \quad \text{cu } \Delta = 0$$

4. PARABOLA

Definiție: Locul geometric al punctelor egal depărtate de un punct fix, (numit focar) şi o dreaptă fixă (numită directoare), se numeşte parabolă.



P: = { M(x, y) | MF = MN }

(d): $x = -\frac{p}{2}$ (locul geometric al punctelor din plan de unde putem duce tangente la o parabolă).

1. Ecuația parabolei

$y^2 = 2px$

2. Ecuația tangentei la parabolă

$y = mx + \frac{P}{2m}$

3. Ecuația tangentei în M (x_0, y_0)

$y \cdot y_0 = p(x + x_0)$

4. Ecuatia tangentelor dintr-un punct exterior $M(x_0, y_0)$

VAR I. Se scrie ecuația 2 şi se pune condiția ca $M \in$ (ecuatia 2) => m

VAR II. Se rezolvă sistemul

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$y^2 = 2px$ cu $\Delta = 0$

13. ALGEBRA LINIARĂ

1. MATRICE.

Adunarea matricelor $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+t \end{pmatrix}$

$$a \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x & a \cdot y \\ a \cdot z & a \cdot t \end{pmatrix}$$

Înmulțirea matricelor

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x + b \cdot z & a \cdot y + b \cdot t \\ c \cdot x + d \cdot z & c \cdot y + d \cdot t \end{pmatrix}$$

Transpusa unei matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

2. DETERMINANȚI.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c;$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \cdot e \cdot i + d \cdot h \cdot c + g \cdot b \cdot f - c \cdot e \cdot g - f \cdot h \cdot a - i \cdot b \cdot d$$

Proprietăți:

1. Determinantul unei matrice este egal cu determinantul matricei transpuse;
2. Dacă toate elementele unei linii (sau coloane) dintr-o matrice sunt nule, atunci determinantul matricei este nul;
3. Dacă într-o matrice schimbăm două linii(sau coloane) între ele obținem o matrice care are determinantul egal cu opusul determinantului matricei inițiale.
4. Dacă o matrice are două linii (sau coloane) identice atunci determinantul său este nul;

5. Dacă toate elementele unei linii(sau coloane) ale unei matrice sunt înmulțite cu un element a, obținem o matrice al cărei determinant este egal cu a înmulțit cu determinantul matricei inițiale.
6. Dacă elementele a două linii(sau coloane) ale unei matrice sunt proporționale atunci determinantul matricei este nul;
7. Dacă la o matrice pătratică A de ordin n presupunem că elementele unei linii i sunt de forma $a_{ij} = a_{ij}' + a_{ij}''$
atunci det A = det A’ +det A’’;
8. Dacă o linie (sau coloană) a unei matrice pătratice este o combinație liniară de celelate linii(sau coloane) atunci determinantul matricei este nul.
9. Dacă la o linie (sau coloană) a matricei A adunăm elementele altei linii (sau coloane) înmulțite cu acelaşi element se obține o matrice al cărei determinant este egal cu determinantul matricei inițiale;
10. Determinantul Vandermonde:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b);$$

11. Dacă într-un determinant toate elementele de deasupra diagonalei principale sau de dedesubtul ei sunt egale cu zero, atunci determinantul este egal cu $a \cdot c \cdot f$;

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{vmatrix} = a \cdot c \cdot f$$

12. Factor comun

$$\begin{vmatrix} a\cdot x & a\cdot y & a\cdot z \\ b\cdot m & b\cdot n & b\cdot p \\ u & v & r \end{vmatrix} = a\cdot b\cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ m & n & p \\ u & v & r \end{vmatrix}$$

3. Rangul unei matrice

Fie A $\in M_{m,n}(C)$, r$\in$N, $1 \le r \le \min(m,n)$.

<u>Definiție</u>: Se numeşte minor de ordinul r al matricei A, determinantul format cu elementele matricei A situate la intersecția celor r linii şi r coloane.

<u>Definiție</u>: Fie A$\neq O_{m,n}$ o matrice . Numărul natural r este rangul matricei A $\Leftrightarrow$ există un minor de ordinul r al lui A, nenul iar toți minorii de ordin mai mare decât r+1 (dacă există) sunt nuli.

<u>Teorema</u>: Matricea A are rangul r $\Leftrightarrow$ există un minor de ordin r al lui A iar toți minorii de ordin r+1 sunt zero.

<u>Teorema</u>: Fie A $\in M_{m,n}(C), B \in M_{n,s}(C)$. Atunci orice minor de ordinul k , $1 \le k \le \min(m,s)$ al lui AB se poate scrie ca o combinație liniară de minorii de ordinul k al lui A (sau B).

<u>Teorema</u>: Rangul produsului a două matrice este mai mic sau egal cu rangul fiecărei matrice.

<u>Definiție</u>: $\in M_n(C)$. A este inversabilă $\Leftrightarrow$ det A$\neq$ 0.(A este nesingulară).

<u>Teorema</u>: Inversa unei matrice dacă există este unică.

Observații: 1) det (A·B) =det A· det B.

2) $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot A^*$

$$\left(A \to A^t \to A^* = ((-1)^{i+j} d_{ij})_{i,j} \to A^{-1} \right)$$

3) $A^{-1} \in M_n(Z) \Leftrightarrow \det A = \pm 1$.

Stabilirea rangului unei matrice:

Se ia determinantul de ordinul k-1 şi se bordează cu o linie (respectiv cu o coloană). Dacă noul determinant este nul rezultă că ultima linie(respectiv coloană)este combinație liniară de celelalte linii (respectiv coloane).

<u>Teorema</u>: Un determinant este nul $\Leftrightarrow$ una din coloanele (respectiv linii) este o combinație liniară de celelalte coloane(respectiv linii).
<u>Teorema</u>: Rangul r al unei matrice A este egal cu numărul maxim de coloane(respectiv linii) care se pot alege dintre coloanele (respectiv liniile) lui A astfel încât nici una dintre ele să nu fie combinație liniară a celorlalte.

4. Sisteme de ecuații liniare

Forma generală a unui sistem de m ecuații cu n necunoscute este:

$$(1\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots\dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad \text{sau}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$$

Unde A (a_{ij}) $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ - matricea coeficienților necunoscutelor.

Matricea $\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ & \dots & & \\ a_{m1} & \dots. & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ se numeşte matricea extinsă a sistemului.

<u>Definiție:</u> Un sistem de numere $\alpha_1, \alpha_2, \dots\dots\alpha_n$ se numeşte soluție a sistemului (1) $\Leftrightarrow$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j = b_i, i = \overline{1,m} .$$

<u>Definiție:</u>
- Un sistem se numeşte incompatibil $\Leftrightarrow$ nu are soluție;
- Un sistem se numeşte compatibil $\Leftrightarrow$ are cel puțin o soluție;
- Un sistem se numeşte compatibil determinat $\Leftrightarrow$ are o singură soluție;

- Un sistem se numeşte compatibil nedeterminat $\Leftrightarrow$ are o infinitate de soluții;

Rezolvarea matriceală a unui sistem

Fie $A, B \in M_n(C)$.

$$A^{-1}\Big|\ A \cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X_j = \frac{1}{\det A} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot b_i, \overline{j = 1, n}.$$

Rezolvarea sistemelor prin metoda lui Cramer:

Teorema lui Cramer: Dacă det A $\underset{=}{not}$ $\Delta \neq 0$, atunci sistemul AX=B are o soluție unică $X_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$.

Teorema lui Kronecker- Capelli: Un sistem de ecuații liniare este compatibil $\Leftrightarrow$ rangul matricei sistemului este egal cu rangul matricei extinse.

Teorema lui Rouche: Un sistem de ecuații liniare este compatibil $\Leftrightarrow$ toți minorii caracteristici sunt nuli.

Notăm cu m-numărul de ecuații;
n- numărul de necunoscute;
r -rangul matricei coeficienților.

I	m=n=r	Sistem compatibil determinat	$\Delta \neq 0$
II	$m=r\langle n$	Sistem compatibil nedeterminat	Minorul principal este nenul
III	$n=r\langle m$	Sistem compatibil determinat sau	Dacă toți minorii caracteristici sunt nuli

		Sistem incompatibil	Există cel puțin un minor caracteristic nenul
IV	$r\langle n,r\langle m$	Sistem compatibil nedeterminat sau	Dacă toți minorii caracteristici sunt nuli
		Sistem incompatibil	Există cel puțin un minor caracteristic nenul

<u>**Teorema**</u>: Un sistem liniar şi omogen admite numai soluția banală $\Leftrightarrow$ $\Delta \neq 0$

14. SIRURI DE NUMERE REALE

1. Vecinătăți. Puncte de acumulare.

Definiția 1 : Se numeşte şir , o funcție f : N → R definită prin f(n) = a_n .

Notăm $(a_n)_{n\in N}$: $a_0, a_1, a_2, ... sau\ a_1, a_2, a_3, ...$

Orice şir are o infinitate de termeni; a_n este termenul general al şirului $(a_n)_{n\in N}$.

Definiția 2 : Două şiruri $(a_n)_{n\in N}$, $(b_n)_{n\in N}$ sunt egale $\Leftrightarrow a_n = b_n, \forall n \geq k \in N$

Definiția 3: Fie a $\in$R. Se numeşte vecinătate a punctului a$\in$R, o mulțime V pentru care $\exists$ ε >0 şi un interval deschis centrat în a de forma (a- ε , a+ ε) $\subset$ V.

Definiția 4: Fie D $\subseteq$R. Un punct α $\in \overline{R}$ se numeşte punct de acumulare pentru D dacă în orice vecinătate a lui α există cel puțin un punct din D-$\{\alpha\}$ $\Leftrightarrow$ V ∩(D-$\{\alpha\}$) ≠ Ǿ. Un punct x$\in$D care nu e punct de acumulare se numeşte punct izolat.

2. Şiruri convergente

Definiția 5 : Un şir $(a_n)_{n\in N}$ este convergent către un număr a $\in \overline{R}$ dacă în orice vecinătate a lui a se află toți termenii şirului cu excepția unui număr finit şi scriem $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ sau $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

a se numeşte limita şirului .

Teorema 1: Dacă un şir e convergent , atunci limita sa este unică.

Teorema 2: Fie $(a_n)_{n\in N}$ un şir de numere reale. Atunci:

$(a_n)_{n\in N}$ este monoton crescător $\Leftrightarrow$ $a_n \leq a_{n+1}, \forall n \in N$ sau $a_{n+1} - a_n \geq 0, sau \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$;

$(a_n)_{n\in N}$ este stict crescător $\Leftrightarrow$ $a_n \langle a_{n+1}, \forall n \in N$ sau $a_{n+1} - a_n \rangle 0, sau \frac{a_{n+1}}{a_n} \rangle 1$;

$(a_n)_{n\in N}$ este monoton descrescător $\Leftrightarrow$ $a_n \geq a_{n+1}, \forall n \in N$ sau $a_{n+1} - a_n \leq 0, sau \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$;

$(a_n)_{n\in N}$ este strict descrescător $\Leftrightarrow$ $a_n \rangle a_{n+1}, \forall n \in N$ sau $a_{n+1} - a_n \langle 0, sau \frac{a_{n+1}}{a_n} \langle 1$.

Definiția 6. Un şir $(a_n)_{n\in N}$ este mărginit $\Leftrightarrow$ $\exists$ M $\in$ R astfel încât $|a_n| \leq M$ sau

$\exists \alpha, \beta \in R \quad astfel \quad încât \quad \alpha \leq a_n \leq \beta$.

Teorema 3: Teorema lui Weierstrass: Orice şir monoton şi mărginit este convergent.

Definiția 7: Dacă un şir are limită finită $\Rightarrow$ şirul este convergent.

Dacă un şir are limită infinită $+\infty \quad sau \quad -\infty$ $\Rightarrow$ şirul este divergent.

Teorema 4: Orice şir convergent are limită finită şi este mărginit dar nu neapărat monoton.

Teorema 5: Lema lui Cesaro:

Orice şir mărginit are cel puțin un subşir convergent.

Definiția 8: Un şir e divergent fie dacă nu are limită, fie dacă are o limită sau dacă admite două subşiruri care au limite diferite.

OBS: Orice şir crescător are limită finită sau infinită.

Teorema 6: Dacă $(a_n)_{n\in N} \in R_+^*$ este un şir strict crescător şi nemărginit atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad \Rightarrow \lim \frac{1}{a_n} = 0$. Un şir descrescător cu termenii pozitivi este mărginit de primul termen şi de 0.

3. Operații cu şiruri care au limită

Teorema 7: Fie $(a_n)_{n\in N}$, $(b_n)_{n\in N}$ şiruri care au limită:
a $_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$, b $_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$.
Dacă operațiile
a+b,ab
$\frac{a}{b}, a^b$ *au sens atunci şirurile*

$a_n + b_n, a_n - b_n, \alpha \cdot a_n, a_n \cdot b_n, \frac{a_n}{b_n}, a_n^{\,b_n}$ *au* lim*ită*

lim($a_n + b_n$)= lim a_n +lim b_n ;
lim($a_n \cdot b_n$)=lim a_n .lim b_n ;
n $\to \infty$ n $\to \infty$ n $\to \infty$

lim($\alpha \cdot a_n$)=α·lim a_n ; lim $\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$

$\lim a_n^{\,b_n} = (\lim a_n)^{\lim b_n}$

$\lim(\log_a a_n) = \log_a(\lim a_n)$
$\lim \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim a_n}$

Prin **convenție** s-a stabilit: ∞+∞=∞ ; a+∞=∞,a $\in$ **R**; a+(-∞)=-∞; -∞+(-∞)=-∞; a·∞=∞ ,a>0;
a·∞=-∞,a<0; ∞·(-∞)=-∞; -∞·(-∞)=∞; $\infty^{\infty} = \infty; \infty^{-\infty} = 0$;

$$0^{\infty} = 0; \quad \infty^{a} = \begin{cases} \infty, \text{dacă} \quad a > 0 \\ 0, \text{dacă} \quad a < 0 \end{cases}$$

Nu au sens operațiile: ∞-∞, 0·(±∞); $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, 1^{∞}, $1^{-\infty}$, ∞^{0}.

Teorema 8: Dacă $|a_n - a| \le b_n$ *şi* $b_n \to 0 \Rightarrow a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$

Dacă $a_n \ge b_n$ *şi* $b_n \to \infty \Rightarrow a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

Dacă $a_n \le b_n$ $\quad$ *şi* $\quad b_n \to -\infty \Rightarrow a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$

Dacă $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \Rightarrow \quad |a_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} |a|$.

Dacă $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \quad |a_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} |0|$.

Teorema 9: Dacă şirul $(a_n)_{n\in N}$ este convergent la zero, iar $(b_n)_{n\in N}$ este un şir mărginit, atunci şirul produs $a_n \cdot b_n$ este convergent la zero.

4. Limitele unor şiruri tip

$$\underbrace{\lim}_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, \, dac\breve{a} \quad q \in (-1,1) \\ 1, \, dac\breve{a} \quad q = 1 \\ \infty, \, dac\breve{a} \quad q \rangle 1 \\ nu \quad exist\breve{a}, \, dac\breve{a} \quad q \le -1 \end{cases}$$

$$\underbrace{\lim}_{n\to\infty} \left(a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \ldots + a_p\right) = \begin{cases} \infty, \quad a_0 \rangle 0 \\ -\infty, \, a_0 \langle 0 \end{cases}$$

$$\underbrace{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_0 \cdot n^p + a_1 \cdot n^{p-1} + \ldots\ldots + a_p}{b_0 \cdot n^q + b_1 \cdot n^{q-1} + \ldots + b_q} = \begin{cases} 0, dac\breve{a} \; p \langle q \\ \dfrac{a_0}{b_0}, dac\breve{a} \quad p = q \\ \infty, dac\breve{a} \quad p \rangle q \quad şi \dfrac{a_0}{b_0} \rangle 0 \\ -\infty, dac\breve{a} \quad p \rangle q \quad şi \dfrac{a_0}{b_0} \langle 0. \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e \approx 2{,}71\ldots\ldots \qquad \lim_{x_n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$$

$$\lim_{x_n\to 0}\left(1+x_n\right)^{\frac{1}{x_n}} = e \qquad \lim_{x_n\to 0}\frac{\sin x_n}{x_n} = 1$$

$$\lim_{x_n\to 0}\frac{\arcsin\ x_n}{x_n} = 1 \qquad \lim_{x_n\to 0}\frac{tgx_n}{x_n} = 1$$

$$\lim_{x_n\to 0}\frac{arctgx_n}{x_n} = 1 \qquad \lim_{x_n\to 0}\frac{\ln(1+x_{n)}}{x_n} = 1$$

$$\lim_{x_n\to 0}\frac{a^{x_n}-1}{x_n} = \ln a \qquad \lim_{x_n\to 0}\frac{\left(1+x_n\right)^{r}-1}{x_n} = r$$

$$\lim_{x_n\to\infty}\frac{e^{x_n}}{x_n^{\,p}} = \infty \qquad \lim_{x_n\to\infty}\frac{\ln x_n}{x_n^{\,p}} = 0$$

15. LIMITE DE FUNCȚII

Definiție: O funcție f:D$\subseteq R \to R$ are limită laterală la stânga (respectiv la dreapta) în punctul de acumulare $x_0 \Leftrightarrow$ *există* $l_s \in$R (respectiv $l_d \in$R) a. î. lim f(x)= l_s, (respectiv lim f(x) = l_d).

$$x \to x_0 \qquad\qquad x \to x_0$$
$$x \langle x_0 \qquad\qquad x \rangle x_0$$

Definiție: Fie f:D$\subseteq R \to R$, $x_0 \in D$ un punct de acumulare. Funcția f are limită în $x_0 \Leftrightarrow l_s(x_0) = l_d(x_0)$

Proprietăți:

1. Dacă lim f(x) există, atunci această limită este unică.
$x \to x_0$

2. Dacă lim f(x) =l atunci $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = |l|$.

$x \to x_0$ Reciproc nu.

3. Dacă $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim f(x) = 0$

4. Fie f,g:D $\subseteq R \to R$, $\exists$ U o vecinătate a lui $x_0 \in D$ astfel încât f(x)$\leq$ g(x) $\forall x \in D \bigcap U - \{x_0\}$ și dacă există

$$\lim_{x \to x_0} f(x), \lim_{x \to x_0} g(x) \quad \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) \ \langle \ \lim_{x \to x_0} g(x)$$

5. Dacă $f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in D \cap U - \{x_0\}$ *şi*

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = l \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} g(x) = l.$$

6.

$$|f(x) - l| \leq g(x) \quad \forall \ x \in D \cap U - \{x_0\} \ \text{şi}$$

Dacă $\lim g(x) = 0 \Rightarrow \lim f(x) = l$

7. *Dacă* $\lim f(x) = 0$ *şi* $\exists M \rangle 0$ *a.î.* $|g(x)| \leq M$.

$\Rightarrow \lim f(x) \cdot g(x) = 0$

8.

Dacă $f(x) \geq g(x)$ *şi* $\lim g(x) = +\infty$

$\Rightarrow \lim f(x) = +\infty.$

Dacă $f(x) \leq g(x)$ *şi* $\lim g(x = -\infty$

$\Rightarrow \lim f(x) = -\infty.$

OPERAŢII CU FUNCŢII

Dacă există $\lim f(x) = l_1, \lim g(x) = l_2$ *şi au sens operatiile* $l_1 + l_2, l_1 - l_2, l_1 \cdot l_2, \frac{l_1}{l_2}, l_1^{l_2}, \sqrt{l_1}$

atunci:

1. lim(f(x) $\pm$ g(x))= $l_1 \pm l_2$.

2. limf(x)g(x)= $l_1 \cdot l_2$

$\mathbf{3}.\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l_1}{l_2}$

$\mathbf{4}.\lim f(x)^{g(x)} = l_1^{\,l_2}$

$\mathbf{5}.\lim \sqrt{f(x)} = \sqrt{l_1}$

P(X)=$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_n$,$a_0 \neq 0$

$$\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} P(x) = a_0(\pm\infty)^n$$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \mathbf{q^x} = \begin{cases} \mathbf{0}, & \textbf{dacă}\quad \mathbf{q} \in (-1,1) \\ \mathbf{1}, & \textbf{dacă}\quad \mathbf{q=1} \\ \infty, & \textbf{dacă}\quad \mathbf{q>1} \\ \textbf{nu există,} & \textbf{dacă}\quad \mathbf{q} \leq -1 \end{cases}$$

$$\underbrace{\lim}_{x\to\infty}\frac{a_0\cdot x^p+a_1\cdot x^{p-1}+.......+a_p}{b_0\cdot x^q+b_1\cdot x^{q-1}+.....+b_q}=\begin{cases}0,\, dacă\ p\langle q\\ \dfrac{a_0}{b_0},\, dacă\quad p=q\\ \infty,\, dacă\quad p\rangle q\quad şi\ \dfrac{a_0}{b_0}\rangle 0\\ -\infty,\, dacă\quad p\rangle q\quad şi\ \dfrac{a_0}{b_0}\langle 0.\end{cases}$$

a>1 $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} a^x=\infty$ $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} a^x=0$

a $\in(0,1)$ $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} a^x=0$ $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} a^x=\infty$

a>1 $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\log_a x=\infty$ $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\log_a x=-\infty$

a $\in(0,1)$ $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\log_a x=-\infty$ $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\log_a x=\infty$

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \lim_{u(x)\longrightarrow 0}\frac{\sin u(x)}{u(x)}=1$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{tgx}{x}=1 \qquad \lim_{u(x)\longrightarrow 0}\frac{tgu(x)}{u(x)}=1$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\arcsin x}{x}=1 \qquad \lim_{u(x)\longrightarrow 0}\frac{\arcsin u(x)}{u(x)}=1$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{arctgx}{x}=1 \qquad \lim_{u(x)\longrightarrow 0}\frac{arctgu(x)}{u(x)}=1$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e \qquad \lim_{u(x)\longrightarrow 0}(1+u(x))^{\frac{1}{u(x)}}=e$$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e \qquad \lim_{u(x) \longrightarrow \infty} \left(1+\frac{1}{u(x)}\right)^{u(x)} = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \qquad \lim_{u(x) \longrightarrow 0} \frac{\ln(1+u(x))}{u(x)} = 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{a^{x}-1}{x} = \ln a \qquad \lim_{u(x) \longrightarrow 0} \frac{a^{u(x)}-1}{u(x)} = \ln a$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{(1+x)^{r}-1}{x} = r \qquad \lim_{u(x) \longrightarrow 0} \frac{(1+u(x))^{r}-1}{u(x)} = r$$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^{k}}{a^{x}} = 0 \qquad \lim_{u(x) \longrightarrow \infty} \frac{u(x)^{k}}{a^{u(x)}} = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^{k}} = 0 \qquad \lim_{u(x) \longrightarrow \infty} \frac{\ln u(x)}{u(x)^{k}} = 0$$

16. FUNCȚII CONTINUE

DEFINIȚIE. O funcție $f : D \subset R \to R$ se numeşte continuă în punctul de acumulare $x_0 \in D \Leftrightarrow$ oricare ar fi vecinătatea V a lui $f(x_0)$, există o vecinătate U a lui x_0, astfel încât pentru orice

$$x \in U \cap D \Rightarrow f(x) \in V.$$

DEFINIȚIE. $f : D \subset R \to R$ este continuă în $x_0 \in D \Leftrightarrow f$ are limită în x_0 şi $\lim f(x) = f(x_0)$

sau $l_s(x_0) = l_d(x_0) = f(x_0)$.

x_0 se numeşte punct de continuitate.

Dacă funcția nu este continuă în $x_0 \Rightarrow$ f.se numeşte discontinuă în x_0 şi x_0 se numeşte punct de discontinuitate. Acesta poate fi:

- punct de discontinuitate de prima speță dacă $l_s(x_0)$, $l_d(x_0)$ finite, dar $\neq f(x_0)$;
- punct de discontinuitate de a doua speță dacă cel puțin o limită laterală e infinită sau nu există.

DEFINIȚIE. f este continuă pe o mulțime (interval) $\Leftrightarrow$ este continuă în fiecare punct a mulțimii (intervalului).

- Funcțiile elementare sunt continue pe domeniile lor de definiție.

Exemple de funcții elementare: funcția constantă c, funcția identică x, funcția polinomială $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ...a_n$, funcția rațională $f(x)/g(x)$, funcția radical $\sqrt[n]{f(x)}$, funcția logaritmică $\log f(x)$, funcția putere x^a, funcția exponențială a^x, funcțiile trigonometrice $\sin x$, $\cos x$, $tg\, x$, $ctg\, x$.

PRELUNGIREA PRIN CONTINUITATE A UNEI FUNCȚII ÎNTR-UN PUNCT DE ACUMULARE

DEFINIȚIE. Fie $f : D \subset R \to R$. Dacă f are limita $l \in R$ în punctul de acumulare $x_0 \notin D \Rightarrow$

$$f: D \cup \{x_0\} \to R,\ f(x) = \begin{cases} f(x), x \in D \\ l, x = x_0 \end{cases}$$

este o funcție continuă în x_0 şi se numeşte prelungirea prin continuitate a lui f în x_0.

OPERAȚII CU FUNCȚII CONTINUE

T_1. Dacă $f,g:D\to R$ sunt continue în x_0 (respectiv pe D) atunci $f+g$, αf, $f\bullet g$, f/g, f^g, $\sqrt{f}$ sunt continue în x_0 (respectiv pe D); $\alpha \in R$, $g \neq 0$.

T_2. Dacă $f:D\to R$ e continuă în $x_0 \in D$ (respectiv pe D) $\Rightarrow$ $|f(x)|$ e continuă în $x_0 \in$ (respectiv pe D).
Reciproca nu e valabilă.

T_3. Fie $f:D\to R$ continuă în în $x_0 \in A$ şi $g:B \to A$ continuă în $x_0 \in B$, atunci $g\bullet f$ e continuă în $x_0 \in A$.

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(g (x) = f(\lim_{x\to x0} g(x))}$$

Orice funcție continuă comută cu limita.

PROPRIETĂȚILE FUNCȚIILOR CONTINUE PE UN INTERVAL

LEMĂ. Dacă f este o funcție continuă pe un interval [a,b] şi dacă are valori de semne contrare la extremitățile intervalului
$(f(a) \bullet (f(b) <0)$ atunci există cel puțin un punct c $\in$ (a,b)
astfel încât $f(c) = 0$.

• Dacă f este strict monotonă pe [a,b] $\Rightarrow$ ecuația f(x) = 0 are cel mult o rădăcină în intervalul (a, b).

f este strict monotonă $\Leftrightarrow$ $f: I \to J$ - continuă
$f(I) = J$ - surjectivă
f - injectivă

Orice funcție continuă pe un interval compact este mărginită şi îşi atinge marginile.

STABILIREA SEMNULUI UNEI FUNCȚII

PROP. O funcție continuă pe un interval, care nu se anulează pe acest interval păstrează semn constant pe el.
DEFINIȚIE. Fie $f : I \subset R \to R$ (I = interval) f are proprietatea lui Darboux.

$\Leftrightarrow \forall\, a,b \in I$ *cu* $a < b$ *şi* $\forall\, \lambda \in (f(a), f(b))$ *sau* $\lambda \in (f(b), f(a)) \Rightarrow \exists\, c \in (a,b)$, *a.î.* $f(c) = \lambda$.

TEOREMĂ. *Orice funcție continuă pe un interval are P.D.*
Dacă $f : I \to R$ are P.D. atunci $\Rightarrow f(I)$ e interval.
(Reciproca e în general falsă).

CONTINUITATEA FUNCȚIILOR INVERSE

T_1. Fie $f : I \subset R \to R$ o funcție monotonă a.î. $f(I)$ e interval. Atunci f este continuă.

T_2. Orice funcție continuă şi injectivă pe un interval este strict monotonă pe acest interval.

T_3. Fie $f : I \to R$, $I, J \subset R$ intervale.
Dacă f e bijectivă şi continuă atunci inversa sa f^{1} e continuă şi strict monotonă.

17. DERIVATE

FUNCȚIA	DERIVATA
C	0
x	1
x^n	nx^{n-1}
x^a	ax^{a-1}
a^x	$a^x \ln a$
e^x	e^x
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
sin x	cosx
cos x	-sinx
tg x	$\frac{1}{\cos^2 x}$
ctg x	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
arcsin x	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

arccos x $\qquad -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

arctg x $\qquad \frac{1}{1+x^2}$

arcctg x $\qquad -\frac{1}{1+x^2}$

lnx $\qquad \frac{1}{x}$

$\log_a$ x $\qquad \frac{1}{x\ln a}$

$(u^v)' =$ $\qquad v.\,u^{v-1}.u' + u^v.v'.\ln u$

f(x)= $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $\qquad$ f'(x)= $\dfrac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$

REGULI DE DERIVARE

(f.g)'=f'g+fg'

$$(\chi f)' = \chi f'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$\left(f^{-1}\right)'\left(f(x_0)\right) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

18. STUDIUL FUNCȚIILOR CU AJUTORUL DERIVATELOR

Proprietăți generale ale funcțiilor derivabile .

1.Punctele de extrem ale unei funcții.

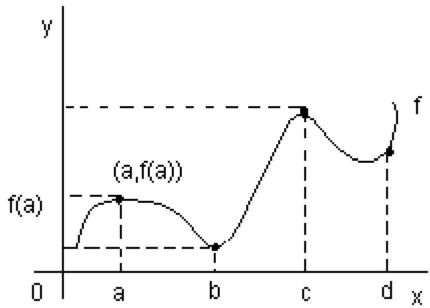
Fie I un interval şi f:I$\rightarrow$R.

Definiție. Se numeşte punct de maxim (respectiv de minim)(local) al funcției f , un punct $a \in$I pentru care există o vecinătate V a lui a astfel încât $f(x) \leq f(a)(respectiv.f(x)) \geq f(a) \forall\ x \in$V.

- Un punct de maxim sau de minim se numeşte punct de extrem.
- a se numeşte punct de maxim(respectiv de minim) global dacă $f(x) \leq f(a)(resp.f(x) \geq f(a))$. $\forall\ x \in$I.

Obs.1.O funcție poate avea într-un interval mai multe puncte de extrem.(vezi desenul).

Obs.2.O funcție poate avea într-un punct a un maxim (local), fără a avea în a cea mai mare valoare din interval.(vezi desenul $f(a) < f(c)$).



$(a,f(a)),(c,f(c))$ -puncte de maxim

$(b,f(b)),(d,f(d))$ -puncte de minim

TEOREMA LUI FERMAT

Dacă f este o funcție derivabilă pe un interval I si $x_0 \in \overset{0}{I}$ un punct de extrem,atunci $f'(x_0)=0$.

Interpretare geometrică:

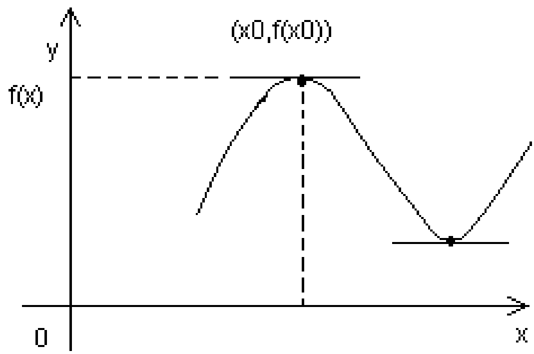
• Deoarece $f'(x_0)=0 \Rightarrow$ tangenta la grafic în punctul $(x_0, f(x_0))$ este paralelă cu OX.

Obs.1. Teorema este adevărată şi dacă funcția este derivabilă numai în punctele de extrem.

Obs.2. Condiția ca punctul de extrem x_0 să fie interior intervalului este esențială.

(dacă ar fi o extremitate a intervalului I atunci s-ar putea ca $f'(x_0) \neq 0$). Ex. $f(x)=x$.

Obs.3. Reciproca T. lui FERMAT nu este adevărată.(se pot găsi funcții astfel încât $f'(x_0)=0$ dar x_0 să nu fie punct de extrem).



• Soluțiile ecuației $f'(x)=0$ se numesc puncte critice . Punctele de extrem se găsesc printre acestea.

• Teorema lui Fermat dă condiții suficiente (dar nu si necesare) pentru ca derivata într-un punct să fie nulă.

O altă teoremă care dă condiții suficiente pentru ca derivata să se anuleze este :

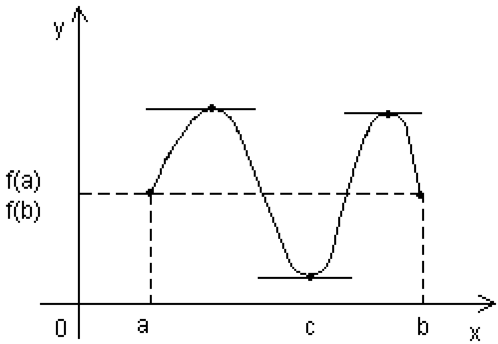
TEOREMA LUI ROLLE.

Fie $f : I \to R,\ a, b \in I, a < b.$ Dacă:

1. f este continuă pe $[a, b]$;
2. f este derivabilă pe (a, b);
3. $f(a) = f(b)$, atunci $\exists$ cel puțin un punct $c \in (a, b)$ a.î $f^{'}(c) = 0.$

INTEPRETAREA GEOMETRICA

Dacă funcția f are valori egale la extremitățile unui interval $[a, b]$, atunci există cel puțin un punct în care tangenta este paralelă cu axa ox.



Consecința 1. Între două rădăcini ale unei funcții derivabile se află cel puțin o rădăcină a derivatei.
Consecința 2. Între două rădăcini consecutive ale derivatei se află cel mult o rădăcină a funcției.

TEOREMA LUI LAGRANGE (sau a creşterilor finite)

Fie $f : I \to R, I$ (interval, $a, b \in I,\ a < b.$ Dacă:

1. f este continuă pe $[a, b]$

2. f este derivabilă pe (a,b), atunci există cel puțin un punct $c \in (a,b)$ a.î să avem

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f^{'}(c).$$

INTERPRETAREA GEOMETRICĂ

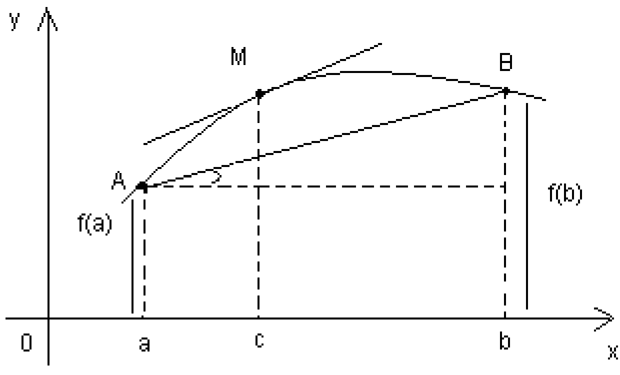
Dacă graficul funcției f admite tangentă în fiecare punct(cu excepția eventual,a extremităților) există cel puțin un punct de pe grafic(care nu coincide cu extremitățile), în care tangenta este paralelă cu coarda care uneşte extremitățile.

$tg\alpha = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ tangenta la grafic în M are coeficientul.

unghiular $f^{'}(c)$dar

$$f^{'}(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Obs.1. Daca $f(a) = f(b) \Rightarrow$ Teorema lui Rolle.



Consecința 1. Dacă o funcție are derivata nula pe un interval,atunci ea este constanta pe acest interval.

• Dacă o funcție are derivata nula pe o reuniune disjuncta de intervale proprietate nu mai rămâne adevărată în general.

Expl. $f : (0,1) \cup (2,3)$ $f(x) = \begin{cases} 1, x \in (0,1) \\ 2, x \in (2,3) \end{cases}$

Consecința 2. Dacă f si g sunt două funcții derivabile pe un interval I şi dacă au derivatele egale $f^{'} = g^{'}$ atunci ele diferă printr-o constantă. $f - g = c. \quad c \in R$

• Dacă f si g sunt definite pe o reuniune disjunctă de intervale, proprietatea e falsă în general. Expl. $f(x) = tgx$

$$, g(x) = \begin{cases} tgx + 1, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ tgx - 1, x \in \left(\frac{\pi}{2} \pi\right) \end{cases}$$

Consecința 3.

Daca $f^{'}(x) > 0$ pe I $\Rightarrow f$ e strict crescătoare pe I.

Daca $f^{'}(x) < 0$ pe I $\Rightarrow$ f e strict descrescătoare I.

Consecința 4. $f : i \to R, \ x_0 \in I$ Daca $f_s^{'}(x_0) = f_d^{'}(x_0) = l \in \overline{R}$.

$\Rightarrow f$ are derivata în x_0 şi $= f^{'}(x_0)$.

Dacă $l < \infty \Rightarrow f$ e derivabila in x_0.

Consecința 5. Daca $f^{'}(x) \neq 0$ pe I $\Rightarrow f^{'}$ păstrează semn constant pe I.

ETAPELE REPREZENTĂRII GRAFICULUI UNEI FUNCȚII

1. Domeniul de definiție;

2. Intersecția graficului cu axele de coordonate :

Intersectia cu axa Ox conține puncte de forma{x,0},unde x este o rădăcină a ecuației f(x)=0 {daca există}.

Intersecția cu axa Oy este un punct de forma {0,f{0}} {dacă punctul 0 aparține domeniului de definitie}

3. Studiul continuității funcției pe domeniul de definiție :

Dacă funcția este definită pe R se studiază limita funcției la $\pm\infty$ iar dacă este definită pe un interval se studiază limita la capetele intervalului.

4.Studiul primei derivate :

a. Calculul lui f'.

b. Rezolvarea ecuației f'(x)=0.Rădăcinile acestei ecuații vor fi eventuale puncte de maxim sau de minim ale functiei ;

c. Stabilirea intervalelor pe care semnul lui f este constant. Acestea reprezinta intervalele de monotonie pentru f.

5.Studiul derivatei a doua :

a.Se calculează f''

b.Se rezolva ecuatia f''(x)=0. Rădăcinile acestei ecuații vor fi eventuale puncte de inflexiune ale graficului

c.Determinarea intervalelor pe care semnul lui f este constant. Astfel,pe intervalele pe care f''>0 functia este convexă şi pe cele pe care f''<0, funcția eate concavă.

6.Asimptote :

a. Asimptotele orizontale sunt drepte de forma y=a, unde a= $\underbrace{\lim}_{x\to\pm\infty} f(x)$ dacă cel puțin una din aceste limite are sens şi există în R.

b) Asimptotele verticale sunt drepte de forma $x=x_0$, dacă există cel puțin o limită laterală a funcției în x_0, infinită.

c) Asimptotele oblice sunt drepte de forma y=mx+n, unde $m=\underbrace{\lim}_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\in R si \quad n=\underbrace{\lim}_{x\to\infty}(f(x)-mx)\in R$, analog şi pentru -∞.

7. Tabelul de variație;

8. Trasarea graficului.

19. PRIMITIVE

Primitive. Proprietăți.

Fie I un interval din R.

<u>Definiția 1</u>. **Fie f: I → R. Se spune că f admite primitive pe I dacă $\exists$ F : I →R astfel încât**

a) F este derivabilă pe I;

b) F'(x) =f(x), $\forall$ x ε I.

F se numeşte primitiva lui f. (I poate fi şi o reuniune finită disjunctă de intervale).

Teorema 1.1 **Fie f : I → R. Dacă $F_1, F_2 : I \to R$ sunt două primitive ale funcției f, atunci există o constantă c $\in$ R astfel încât $F_1(x) = F_2(x) + c, \forall$ x $\in$ I.**

Demonstrație : Dacă F_1, F_2 sunt primitive atunci F_1, F_2 sunt derivabile $\Rightarrow F_1'(x) = F'_2(x) = f(x)$ $\forall$ x ε I

$\Leftrightarrow (F_1 - F_2)'(x) = F_1'(x) - F'_2(x) = 0$, x ε I.

$\Rightarrow F_1(x) - F_2(x) = c$, c= constantă

OBS 1. Fiind dată o primitivă F_0 a unei funcții, atunci orice primitivă F a lui f are forma F = F_0 + c , c= constantă

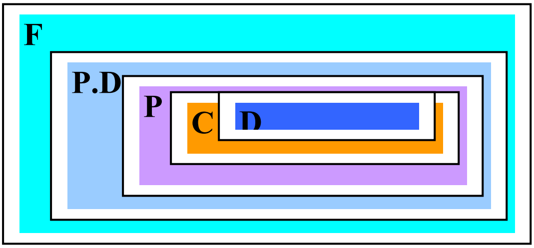
$\Rightarrow$ f admite o infinitate de primitive.

OBS 2. Teorema nu mai rămâne adevărată dacă I este o reuniune disjunctă de intervale Expl: f: R-$\{0\}$, f(x) = x²

$$F = \frac{x^3}{3}, \quad G = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + 1 \\ \frac{x^3}{3} + 2 \end{cases}$$

F, G sunt primitive ale lui f dar F-G nu e constantă . Contradicție cu T 1.1

OBS 3. Orice funcție care admite primitive are **Proprietatea lui Darboux**. Se ştie că derivata oricărei funcții are Proprietatea lui Darboux , rezultă că f are Proprietatea lui Darboux**. F' =f.**



OBS 4. Dacă I este interval şi f(I) $\underline{\underline{def}}\{f(x)/x \in I\}$ nu este interval atunci f nu admite primitive.
Dacă presupunem că f admite primitive atunci din OBS 3 rezultă că f are P lui Darboux, rezultă f(I) este interval ceea ce este o contradicţie.
OBS 5. Orice funcţie continuă definită pe un interval admite primitive.

<u>Definiţia 2</u>. Fie f: I →R o funcţie care admite primitive. Mulţimea tuturor primitivelor lui f se numeşte **integrala nedefinită** a funcţiei f şi se notează prin simbolul $\int f(x)$ dx. Operaţia de calculare a primitivelor unei funcţii(care admite primitive) se numeşte **integrare**.

Simbolul $\int$ a fost propus pentru prima dată de Leibniz, în 1675.

Fie F(I)= $\{f : I \to R\}$ Pe această mulţime se introduc operaţiile :

(f+g)(x) =f(x)+ g(x) ,

(αf)(x)=α.f(x) ∀ $x \in R$,α constantă

C= $\{f : I \to R / f \in R\}$

$\int f(x)$ dx = $\{F \in F(I)/F \quad \textit{primitivă} \quad a \quad lui \quad f\}$.

Teorema 1.2 Dacă f,g:I→ R sunt funcții care admit primitive şi $\alpha \in R$, $\alpha \neq 0$, atunci funcțiile f+g, αf admit de asemenea primitive şi au loc relațiile:
$\int(f+g) = \int f + \int g$, $\int \alpha f = \alpha \int f$, $\alpha \neq 0$, $\int f = \int f + C$

Formula de integrare prin părți.

Teorema 1.1 Dacă f,g:R→R sunt funcții derivabile cu derivatele continue, atunci funcțiile fg, f'g, fg' admit primitive şi are loc relația:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Formula schimbării de variabilă
(sau metoda substituției).
Teoremă: Fie I,J intervale din R şi

$\varphi : I \to J, f : J \to R$, *functii cu proprietatile*:
1) φ este derivabilă pe I;
2) f admite primitive. (Fie F o primitivă a sa.)
Atunci funcția $(f \circ \varphi)\varphi'$ admite primitive, iar funcția $F \circ \varphi$ este o primitivă a lui $(f \circ \varphi)\varphi'$ adică:

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = F \circ \varphi + C$$

5. Integrarea funcțiilor trigonometrice

Calculul integralelor trigonometrice se poate face fie folosind **formula integrării prin părți**, fie **metoda substituției**. În acest caz se pot face substituțiile:
1. Dacă funcția este impară în sin x,
R(-sin x,cos x)=-R(sin x,cos x) atunci cos x=t.
2. Dacă funcția este impară în cos x,
R(sin x,-cos x)=-R(sin x,cos x) atunci sin x=t.
3. Dacă funcția este pară în raport cu ambele variabile R(-sin x,-cos x) atunci tg x=t.

4. Dacă o funcție nu se încadrează în cazurile 1,2,3,atunci se utilizează substituțiile universale:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad unde \quad t = tg\frac{x}{2}$$

5. Se mai pot folosi şi alte formule trigonometrice:

sin 2x=2sin x .cos x,

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

Integrarea funcțiilor raționale

Definiție: O funcție f:I→R , I interval, se numeşte rațională dacă R(x)= $\frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0, x \in I$, **unde f,g sunt funcții polinomiale.**

Dacă grad f $\geq$ grad g, atunci se efectuează împărțirea lui f la g $\Rightarrow$ f=gq+r, 0 $\leq$ grad r<grad g şi deci

$$R(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}. \quad Pentru \quad R(x) \quad se \quad face$$

scrierea ca suma de functii rationale simple .

PRIMITIVELE FUNCȚIILOR CONTINUE SIMPLE

1. $\boxed{\int c dx = c \cdot x + C, \quad c \in R}$

2. $\boxed{\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C}$

3. $\boxed{\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C}$

4. $\boxed{\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C}$

5. $\boxed{\int e^{x}dx = e^{x} + C}$

6. $\boxed{\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C}$

7. $\boxed{\int \frac{1}{\sin^{2}x}dx = -ctgx + C}$

8. $\boxed{\int \frac{1}{\cos^{2}x}dx = tgx + C}$

9. $\boxed{\int \sin x dx = -\cos x + C}$

10. $\boxed{\int \cos x dx = \sin x + C}$

11. $\boxed{\int \frac{1}{x^{2}+a^{2}}dx = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C}$

12. $\boxed{\int \frac{1}{x^{2}-a^{2}}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C}$

13. $\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{x^{2}+a^{2}}}dx = \ln(x+\sqrt{a^{2}+x^{2}}) + C}$

14. $\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{x^{2}-a^{2}}}dx = \ln\left|x+\sqrt{x^{2}-a^{2}}\right| + C}$

15. $\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{a^{2}-x^{2}}}dx = \arcsin\frac{x}{a} + C}$

16. $\boxed{\int tgxdx = -\ln|\cos x| + C}$

17. $\boxed{\int ctgxdx = \ln|\sin x| + C}$

18. $\boxed{\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}dx = \sqrt{x^2 + a^2} + C}$

19. $\boxed{\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}dx = \sqrt{x^2 - a^2} + C}$

20. $\boxed{\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = -\sqrt{a^2 - x^2} + C}$

21. $\boxed{\int \sqrt{x^2 + a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C}$

22. $\boxed{\int \sqrt{x^2 - a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C}$

23. $\boxed{\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C}$

24. $\boxed{\int \frac{1}{ax + b}dx = \frac{1}{a}\ln|ax + b| + C}$

25. $\boxed{\int \frac{1}{(ax + b)^n}dx = -\frac{1}{(n - 1)(ax + b)^{n-1}} \cdot \frac{1}{a} + C}$

26. $$\boxed{\begin{aligned} &\int \frac{1}{(x^2 + a^2)^2}dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2 + a^2 - x^2}{\left(x^2 + a^2\right)^2} + C = \\ &\frac{1}{a^2}\int \frac{1}{x^2 + a^2}dx - \frac{1}{a^2}\int x \cdot \left(\frac{-1}{2\left(x^2 + a^2\right)}\right)' dx \end{aligned}}$$

27. $$\boxed{\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx = \begin{cases} \int \dfrac{1}{a[(x+\frac{b}{2a})^2-(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a})^2]}dx, & \Delta\rangle 0 \\ \int \dfrac{1}{a[(x+\frac{b}{2a})^2+(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a})^2]}dx, & \Delta\langle 0 \end{cases}}$$

28. $$\boxed{\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx = \ln\left|ax^2+bx+c\right| + C}$$

29. $$\boxed{\begin{aligned} &\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx = \int \frac{m(2ax+b)+n}{ax^2+bx+c}dx = \\ &m\cdot\ln\left|ax^2+bx+c\right| + n\cdot\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx \end{aligned}}$$

Bibliografie:

- Arno Kahane. Complemente de matematică, Editura Tehnică, București, 1958.
- C. Năstăsescu,C. Niță, Gh. Rizescui:"Matematică-Manual pentru clasa a IX-a", E.D.P., Bucureşti, 1982.
- C. Năstăsescu, C Niță, I. Stănescu: Matematică-Manual pentru clasa a X-a-Algebră", E.D.P., Bucureşti,1984.
- E. Beju, I. Beju:"Compendiu de matematică", editura Științifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1996.
- E. Rogai,"Tabele şi formule matematice",Editura tehnică,1983.
- „Mică enciclopedie matematică", Editura tehnică, Bucureşti,1980.
- Luminița Curtui," Memorator de Matematică-Algebra, pentru clasele 9-12", Editura Booklet,2006.

Probleme propuse şi rezolvate

1.Să se determine numerele întregi a şi b astfel încât

$\sqrt{4\sqrt{6}+14}=a\sqrt{2}+b\sqrt{3}$;

Rezolvare:

Ridicăm la puterea a doua expresia dată:

$4\sqrt{6}+14=2a^2+2\sqrt{6}ab+3b^2$;

Din egalarea termenilor asemenea între ei rezultă : ab=2 şi $2a^2+3b^2=14$ rezultă: a=1 şi b=2.

2.Dacă $a-\frac{1}{a}$ =7, să se calculeze $a^4+\frac{1}{a^4}$.

Rezolvare:

Ridicăm la puterea a doua relația dată: $(a-\frac{1}{a})^2=49$,

$a^2+\frac{1}{a^2}=51$ procedând analog se obține

$a^4+\frac{1}{a^4}=51^2-2\Rightarrow a^4+\frac{1}{a^4}=2599$.

3.Aflați X din X.3 ^{2008} = (3 ^{2008} – 1) : (1+ $\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+.......+\frac{1}{3^{2007}}$)

Rezolvare:

$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+........+\frac{1}{3^{2007}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{3^{2008}-1}{3^{2008}}$, după formula

$$1+X+X^2+.........+X^n=\frac{X^{n+1}-1}{X-1}$$

$$\Rightarrow X\cdot 3^{2008}=[3^{2008}-1]\frac{2}{3}\cdot\frac{3^{2008}}{3^{2008}-1}\Rightarrow X=\frac{2}{3}$$

4. Să se calculeze: $\dfrac{2a-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-a}$ **unde** $a=\sqrt{\sqrt{7}-\sqrt{11-4\sqrt{7}}}$

Rezolvare:

$$\sqrt{11-4\sqrt{7}}=\sqrt{\frac{11+3}{2}}-\sqrt{\frac{11-3}{2}}=\sqrt{7}-2\Rightarrow a=\sqrt{2}$$

$$\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{3-\sqrt{2}}}=\frac{(2\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{3-2}=2\sqrt{6}+4-3-\sqrt{6}=\sqrt{6}+1$$

5. Ştiind că $\dfrac{a}{b}=\sqrt{3}-1$ **să se calculeze partea întreagă a numărului** $\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$

Rezolvare:

$$\frac{a}{b}=\sqrt{3}+1\Rightarrow a=\sqrt{3}+1, b=1\Rightarrow\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2+1}{\left(\sqrt{3}+1\right)^2-1}=\frac{3+2\sqrt{3}+1+1}{3+2\sqrt{3}+1-1}=$$

$$=\frac{5+2\sqrt{3}}{3+2\sqrt{3}}=\frac{\left(5+2\sqrt{3}\right)\left(3-2\sqrt{3}\right)}{9-12}=$$

$$=\frac{15-10\sqrt{3}+6\sqrt{3}-12}{-3}=\frac{3-4\sqrt{3}}{-3}=\frac{4\sqrt{3}-3}{3}$$

$$\left[\frac{4\sqrt{3}-3}{3}\right]=1$$

6.Se dă numarul x = $\sqrt{6-2\sqrt{5}}-\sqrt{6+2\sqrt{5}}$

Să se arate ca $x^2=4$

Să se calculeze $(X+2)^{2007}$

Rezolvare:

a)

x = $\sqrt{\left(1-\sqrt{5}\right)^2}-\sqrt{\left(1+\sqrt{5}\right)^2}=$

$$\left|1-\sqrt{5}\right|-\left|1+\sqrt{5}\right|=-1+\sqrt{5}-1-\sqrt{5}=-2 \Rightarrow x^2=4$$

b. x = $-2 \Rightarrow x+2=0 \Rightarrow (x+2)^{2007}=0$

7. Dacă $\frac{a}{b}=\sqrt{2007}$, să se calculeze $\frac{66b}{a\sqrt{223}-9b}$.

Rezolvare:

$$a=b\sqrt{2007} \Rightarrow \frac{66b}{b\sqrt{2007}\cdot\sqrt{223}-9b}=\frac{66}{223\cdot 3-9}=\frac{66}{660}=\frac{1}{10}$$

8.Să se calculeze suma

S = $\sqrt{2}+\sqrt{2^2}+\sqrt{2^3}+\ldots\ldots\ldots+\sqrt{2^{2007}}$ **.**

Rezolvare: S=

$$=\left(\sqrt{2}+\sqrt{2^3}+\sqrt{2^5}+\ldots\ldots\ldots+\sqrt{2^{2007}}\right)+$$
$$+\left(\sqrt{2^2}+\sqrt{2^4}+\ldots\ldots\ldots+\sqrt{2^{2006}}\right)=$$
$$=\sqrt{2}\left(1+2+2^2+\ldots\ldots\ldots+2^{1003}\right)+$$
$$+2+2^2+2^3+\ldots\ldots\ldots+2^{1003}+1-1=$$
$$=\left(1+2+2^2+\ldots\ldots\ldots+2^{1003}\right)\left(\sqrt{2}+1\right)-1=$$
$$=[\left(2^{1004}\right)-1]\left(\sqrt{2}+1\right)-1.$$

Am adăugat şi am scăzut 1.

9.Calculați: $E = \sqrt{4+2\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}} + \left(\left|2^{68} - 3^{51}\right| + 2^{68}\right) : 3^{50}$

Rezolvare:

$$\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4+2}{2}} + \sqrt{\frac{4-2}{2}} = \sqrt{3} + 1$$

$$\sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{7+1}{2}} - \sqrt{\frac{7-1}{2}} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\left(2^4\right)^{17} - \left(3^3\right)^{17} < 0 \Rightarrow E = \sqrt{3} + 1 + 2 - \sqrt{3} + \left(-2^{68} + 3^{51} + 2^{68}\right) : 3^{50}$$

$$= 3 + 3^{51} : 3^{50} = 3 + 3 = 6.$$

10.Determinati $n \in Z$ **astfel încât** $\dfrac{\sqrt{14-6\sqrt{5}} + \sqrt{6-2\sqrt{5}}}{n} \in Z.$

Rezolvare

$$\frac{\sqrt{\left(3-\sqrt{5}\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}}{n} = \frac{\left|3-\sqrt{5}\right| + \left|\sqrt{5}-1\right|}{n} = \frac{3-\sqrt{5}+\sqrt{5}-1}{n}$$

$$= \frac{2}{n} \in Z \Leftrightarrow n \in \{-2,-1,1,2\}$$

11. Să se rezolve ecuația: (2x-4)(2x-3)(2x+1)(2x+2)=-6

Rezolvare:

Ecuația dată este echivalentă cu:

$(2x-4)(2x+2)(2x-3)(2x+1)=-6 \Leftrightarrow (4x^2-4x-8)(4x^2-4x-3)=-6$

Notam $4x^2-4x-8=t$

$\Rightarrow$ $t(t-5)=-6$ $\Rightarrow t^2-5t+6=0$ $\Rightarrow t_1=2$ si $t_2=3$

$\Rightarrow 4x^2-4x-8=2 \Rightarrow x_{1,2}=\dfrac{1 \pm \sqrt{11}}{2}$ $4x^2-4x-$

$8=3 \Rightarrow x_{3,4}=\dfrac{1 \pm 2\sqrt{3}}{2}$.

12 . Se dă ecuația:

$x^2 + 18x + 1 = 0$. Se cere să se calculeze $\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}$, unde x_1, x_2 sunt soluțiile ecuației .

Rezolvare :

Fie A = $\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}$. Se ridică la puterea a treia

$A^3 = x_1 + x_2 + 3\sqrt[3]{x_1 x_2} \cdot A$

Cum $x_1 + x_2 = -18$ $x_1 + x_2 = 1$ (Relațiile lui Viete)

$A^3 - 3A + 18 = 0$; Soluția reală a acestei ecuații este A = -3 ; restul nu sunt reale

$A^3 + 3A^2 - 3A^2 - 9A + 6A + 18 = 0$

$A^2(A+3) - 3A(A+3) + 6(A+3) = o$

$(A+3)(A^2 - 3A + 6) = 0$

$A = -3$

13. Doua drepte perpendiculare între ele în punctul M(3;4) intersectează axa OY în punctual A si OX în punctual B.

a) să se scrie ecuația dreptei AB

b) să se arate ca diagonalele patrulaterului AOBM sunt perpendiculare ,unde 0 este originea sistemului.

Rezolvare :

Scriem ecuațiile dreptelor AM si MB

$(1) AM : y - 4 = m(x - 3)$ cum AM $\perp MB$

$$(2) MB : y - 4 = -\frac{1}{m}(x - 3)$$

Aflam coordonatele lui A:

- din (1) când $x = 0 \Rightarrow y = 4 - 3m$

Aflam coordonatele lui B:

- din (2) când $y = 0 \Rightarrow x = 4m + 3$

Fie P(x,y) mijlocul lui AB

$$\Rightarrow X = \frac{4M+3}{2}, y = \frac{4-3m}{2} \Rightarrow x = \frac{2x-3}{4}$$

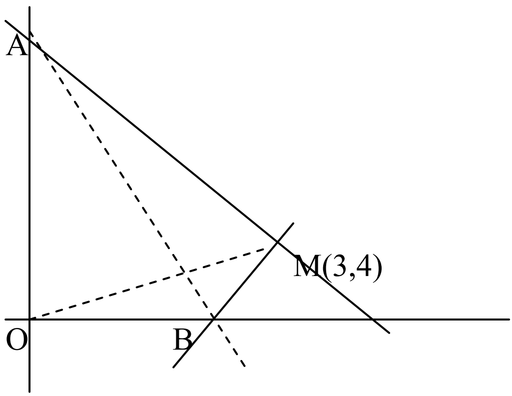
$$\Rightarrow 2y = 4 - 3\cdot\frac{2x-3}{4} \Rightarrow 8y = 16 - 6x + 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x + 8y - 25 = 0 (ec.drepteiAB)$$

$\Rightarrow$ panta dreptei AB este $m = -\frac{3}{4}$.

Panta dreptei OM este evident

$$\frac{4-0}{3-0} = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow m_{AB} \cdot m_{om} = -1 \Rightarrow OM \perp AB.$$



14. Se dau punctele A (2,6), B(-4,3), C(6,-2). Se cere:
a) perimetrul triunghiului ABC şi natura sa ;
b) coordonatele centrului de greutate;
c) ecuația dreptei BC;
d) ecuația medianei AM şi lungimea sa;
e) ecuația înălțimii din A pe BC şi lungimea sa ;
f) ecuația dreptei care trece prin A şi face un unghi de 30^0 cu axa OX;

g) ecuația dreptei care trece prin A şi este paralelă cu BC;
h) ecuația bisectoarei din A şi lungimea ei
i) aria triunghiului ABC.

Rezolvare:
a) Aplicând formula distanței pentru cele trei laturi ale triunghiului $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ obținem:
AB = $3\sqrt{5}$, BC = $5\sqrt{5}$,AC = $4\sqrt{5}$ $\Rightarrow P=12\sqrt{5}$;
Se verifică cu reciproca teoremei lui Pitagora că triunghiul este dreptunghic cu unghiul de 90^0 în vârful A.
b) Coordonatele centrului de greutate sunt date de formula:
$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right) \Rightarrow G\left(\frac{4}{3},\frac{7}{3}\right);$$
c) Ecuația dreptei BC se scrie folosind formula:
$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \Rightarrow$$
$$\frac{y-3}{-5}=\frac{x+4}{10} \Rightarrow \text{5x+10y-10=0 x+2y-2=0}$$
(forma generală a dreptei)sau $y=-\frac{1}{2}x+1$ (forma normală);

d) Coordonatele mijlocului segmentului BC sunt : M$(1,\frac{1}{2})$ $\Rightarrow$

ecuația medianei este:
$\frac{x-2}{1-2}=\frac{y-6}{\frac{1}{2}-6} \Rightarrow$ 11x-2y-10 =0; Pentru calculul lungimii medianei AM se poate folosi faptul că într-un triunghi dreptunghic mediana corespunzătoare ipotenuzei este jumătate din ipotenuză:

$\Rightarrow$ AM = $\frac{BC}{2}=\frac{5\sqrt{5}}{2}$, altfel se poate aplica formula distanței.
e) Fie AD înălțimea din A $\Rightarrow$ AD şi BC sunt perpendiculare ceea ce înseamnă că produsul pantelor este egal cu -1. Cum

panta dreptei BC este $-\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ panta lui AD este 2. Rămâne să scriem ecuația dreptei care trece prin A şi are panta 2 :
y-6=2(x-2) $\Rightarrow$ 2x-y+2=0 este ecuația înălțimii din A;
Pentru calculul înălțimii (într-un triunghi dreptunghic) este convenabil să aplicăm formula:

AD = $\frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{3\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5}}{5\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$;

Altfel, trebuia rezolvat sistemul format din ecuațiile dreptelor BC şi AD pentru a determina coordonatele lui D.

f) y-6=$\frac{\sqrt{3}}{3}$(x-2); Am aplicat formula $y-y_0=m(x-x_0)$ în condițiile în care panta este $tg30^0$

g) y-6= $-\frac{1}{2}$(x-2) unde $-\frac{1}{2}$ este panta dreptei BC .

h) Fie AE bisectoarea unghiului A.

Din teorema bisectoarei k= $\frac{BE}{EC} = \frac{AB}{AC}$ $\Rightarrow$k= $\frac{3}{4}$.Folosindu-ne de raportul în care un punct împarte un segment rezultă coordonatele lui E$\left(\frac{2}{7}, \frac{6}{7}\right)$. Atunci ecuația bisectoarei este:

$\frac{x-2}{\frac{2}{7}-2} = \frac{y-6}{\frac{6}{7}-6} \Rightarrow$ 21x-7y=0. Pentru a calcula lungimea bisectoarei ne putem folosi şi de formula $AE = \frac{2AB \cdot AC \cos\frac{A}{2}}{AB+AC}$ care este utilizată de obicei când se cunoaşte măsura unghiului a cărei bisectoare se calculează. $\Rightarrow$ AE =$\frac{12\sqrt{10}}{7}$.

i) Aria triunghiului dreptunghic ABC este dată de formula A = $\frac{AB \cdot AC}{2} = 30$.

Se va insista pe faptul că dacă triunghiul nu ar fi fost dreptunghic ar fi trebuit să se calculeze distanța de la A la dreapta BC adică tocmai lungimea înălțimii iar aceasta s-ar putea face mai simplu folosind formula :

Distanța de la un punct $M_0(x_0,y_0)$ la o dreaptă h de ecuație (h): ax+by+c=0 este dată de:

$$d(M_0,h)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

15. Sa se rezolve ecuația :

$$2006^x-2005^x=6\cdot 2005^{\frac{x}{2}}+4\left(2005^{\frac{x}{4}}+2005^{3\frac{x}{4}}\right)+1$$

Rezolvare : Ecuația dată este echivalentă cu :

$$2006^x=\left(2005^{\frac{x}{4}}+1\right)^4$$

Ridicăm la puterea

$$\frac{1}{4}\Rightarrow 2006^{\frac{x}{4}}=2005^{\frac{x}{4}}+1\Rightarrow 2006^{\frac{x}{4}}-2005^{\frac{x}{4}}=1 \qquad (x)$$

Din monotonia funcției $f(x)=(1+a)^x-a^x$ care e strict crescătoare $\Rightarrow$ ecuația (x) are soluție unică $\Rightarrow x=4$

16 . Să se rezolve ecuația:

$$\mathbf{2007^{x}-2006^{x}=3\left(2006^{\frac{2x}{3}}+2006^{\frac{x}{3}}\right)+1}$$

Rezolvare:
Ecuația dată este echivalentă cu:

$$2007^{x} = \left(2006^{\frac{x}{3}} + 1\right)^{3}$$. Ridicăm la puterea 1/3 =>

$$2007^{\frac{x}{3}} = 2006^{\frac{x}{3}} + 1$$ =>

$$2007^{\frac{x}{3}} - 2006^{\frac{x}{3}} = 1 \quad (*)$$

Din monotonia funcției $f(x) = (1+ a)^x - a^x$ care e strict crescătoare => ecuația (*) are soluție unică: x = 3

17. Să se determine numărul de cifre din care este compus numărul 7^{2007}.
Rezolvare:

$10^2 < abc < 10^3$; $p = 3$

$10^3 < \overline{abcd} < 10^4$; $p = 4$

(*) $10^{p-1} \le N < 10^p$, unde *p* reprezintă numărul de cifre ale lui N.

Din (*) => $\lg 10^{p-1} \le \lg N < \lg 10^p$ => $p-1 \le \lg N < p$.

Pentru $N = 7^{2007}$ => $\lg N = 2007 \lg 7 \approx 1696$ de cifre.

18. Să se arate că matricea A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(Z)$ **e inversabilă , unde :**

$a = 2005^{2006}$

$b = 6 + 6^2 + 6^3 + ... + 6^{2006}$

$c = 1 + 11 + 111 + ... + \underbrace{111...11}_{\textbf{2006 ori de 1}}$

$d = 2006^{2005}$

Rezolvare :

A e inversabilă $\Leftrightarrow$ det $A \neq 0 \Leftrightarrow$ ultima cifră a numărului det A $e \neq 0$

$$\left.\begin{aligned} u(a) &= 5 \\ u(d) &= 6 \\ u(b) &= 6 \\ u(c) &= 6 \end{aligned}\right\} \Rightarrow u(\det A) = 5 \cdot 6 - 6 \cdot 6 = 0 - 6 = 4 \neq 0 \Rightarrow \det A \neq 0.$$

Probleme - sinteze

I. NUMERE REALE. APLICAȚII.

1. Să se calculeze:

a) $\sqrt{98}-\sqrt{44}-\sqrt{50}+\sqrt{99}$.

b) $(7\sqrt{2}-8\sqrt{3})-(5\sqrt{2}-6\sqrt{3})+(-\sqrt{2}+2\sqrt{3})$.

$c)$ $(\sqrt{20}-\sqrt{18})\cdot(\sqrt{45}+\sqrt{50})-\sqrt{10}$.

$d)$ $(5^{20}+\left|3^{30}-5^{20}\right|):9^{14}$.

$e)$ $(\left|2^{87}-3^{58}\right|-3^{58}):16^{20}$.

$f)$ $\left|\dfrac{3}{2\sqrt{3}}-\dfrac{2}{3\sqrt{2}}\right|\cdot\dfrac{12}{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}$.

$g)$ $5\sqrt{2}+3\cdot\left\{-8\sqrt{3}+4\cdot\left[3\sqrt{2}+2\cdot\left(\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right)\right]\right\}:2^2$.

$h)$ $\dfrac{12-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}-\dfrac{12+3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}+\dfrac{2\sqrt{6}-6}{\sqrt{6}}$.

$i)$ $\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}-\dfrac{1}{\sqrt{20}}\right):\left(\dfrac{1}{2\sqrt{5}}\right)^{-1}$.

$j)\quad \sqrt{6561}+\sqrt{1225}-\sqrt{5184}.$

$k)\quad \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{32}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right):\left(3\sqrt{2}\right)^{-1}$

$l)\quad \sqrt{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}.$

$m)\quad \sqrt{\left(3-\sqrt{7}\right)^2}+\sqrt{\left(2-\sqrt{7}\right)^2}.$

$n)\quad \sqrt{\left(3-\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\left(2\sqrt{2}-3\right)^2}-\sqrt{\left(3\sqrt{2}-5\right)^2}.$

$o)\quad \sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{6-4\sqrt{2}}-\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}.$

$p)\quad \frac{\sqrt{\sqrt{\sqrt{16x^{16}}}}}{\sqrt{\sqrt{25y^{24}}}}.$

$q)\quad \sqrt{3+\sqrt{7}}\cdot(\sqrt{13-\sqrt{7}}-\sqrt{5-\sqrt{7}}).$

$r)\quad \sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot(\sqrt{6}-\sqrt{2})\cdot(2+\sqrt{3}).$

$s)\quad \sqrt{11-6\sqrt{2}}+\sqrt{6-4\sqrt{2}}+\sqrt{9+4\sqrt{2}}.$

$t)\quad \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}+\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}.$

$u)\quad \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{3}}}}.$

$v)\quad \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right).$

2. Dacă a=2006.2007, arătați că $\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}\langle 2007.$

3. Să se calculeze numărul $\sqrt{a^2-b^2}\ pentru\quad a=242{,}5\quad şi\quad b=46{,}5$

4. Comparați numerele:

$$a=\sqrt{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2}+2\sqrt{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2}+4\left(6-\sqrt{5}\right).$$

$$b=\sqrt{6-2\sqrt{5}}+\sqrt{6+2\sqrt{5}}+2\sqrt{14-6\sqrt{5}}.$$

5. Dacă $\dfrac{a}{b}=\sqrt{1996},\quad calculati\quad \dfrac{3b}{a\cdot\sqrt{499}+3b}.$

6. Arătați că numărul

$a=\left|1{,}41-\sqrt{2}\right|+\left(\left|2^{51}-3^{34}\right|+2^{51}\right):3^{2^5}+1{,}41-\sqrt{2}$ e pătrat perfect.

7. Să se arate că expresia

$$E=\frac{2a-b}{a+2b}\in Q\quad stiind\quad ca\quad a=\sqrt{3-\sqrt{5}+\sqrt{9-4\sqrt{5}}}$$

$$b=\sqrt{\sqrt{7}-1-\sqrt{11-4\sqrt{7}}}$$

8. Să se aducă la o formă mai simplă expresia:

$$E(a)=\sqrt{6a^4+\sqrt{6a^8+\sqrt{5a^{16}+\sqrt{16a^{32}}}}},a\rangle 0.$$

9. Care număr este mai mare: $\sqrt{2}^{\sqrt{3}}sau\sqrt{3}^{\sqrt{2}}$.

10*. Să se arate că: a) $a)\sqrt{5n+7}\in R-Q$

$b)\sqrt{5n+13}\in R-Q$

11. Să se arate că: $a)\sqrt{3^{2n+2}\cdot 4^{2n+3}-2^{2n+1}\cdot 6^{2n+3}}\in Q,\forall n\in N$

$b)\sqrt{2^{2n}\cdot 9^{n+1}+4^{n+2}\cdot 3^{2n}}\in N,\forall n\in N$.

12. Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției: $\sqrt{1\cdot 2\cdot 3\cdot ....\cdot 31+32}\in Q.$

13. Să se afle x știind că $\sqrt{2^x}=1+2^0+2^1+2^2+2^3+.......+2^{999}.$

14. Să se afle numerele întregi x pentru care $\sqrt{\dfrac{2x-4}{x+5}}\in Z.$

15. Să se verifice egalitățile:

$a)\quad \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=2$

$b)\quad \sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}=3$

16. Să se ordoneze crescător numerele: $\sqrt{2},\sqrt[3]{3},\sqrt[6]{6}$.

17. Să se raționalizeze numitorii fracțiilor:

$a)\frac{1}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}$. $b)\frac{1}{\sqrt[3]{2}+1}$; $c)\frac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{5}}$; d) $\frac{2-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$; e) $\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt[3]{3}}}$.

18. Să se determine rădăcina pătrată a numărului a= $6+2\sqrt{3}-2\sqrt{2}-2\sqrt{6}$

19. Să se determine cel mai mare număr natural n cu proprietatea:

$$\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{15}}}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{\sqrt{2n+\sqrt{4n^2-1}}}\leq 3\sqrt{2}.$$

20. Fie a,b,c numere raționale astfel încât ab+ac+bc=1. Să se demonstreze că: $\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)}\in Q$.

21. Să se demonstreze că $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ nu este un număr rațional.

II. PROGRESII ARITMETICE

1. Să se scrie primii patru termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_n$ dacă :

a) a_1 =-3 ; r=5 b) a_1 =7 ;r=2 c) a_1 = 1,3 ; r= 0,3

2. Să se găsească primii doi termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_n$ **:**

a) $a_1, a_2, 15, 21, 27, \ldots\ldots$ b) $a_1, a_2, -9, -2, 5, \ldots\ldots\ldots$

3. Să se calculeze primii cinci termeni ai şirului cu termenul general a_n

a) a_n =3n+1 ; b) a_n = 3 + (-1)^n c) a_n = n$^2+n+1$

4. Fie $(a_n)_n$ o progresie aritmetică . Dacă se dau doi termeni ai progresiei să se afle ceilalți :

$$a)a_3=7, a_5=13, a_9=?, a_{15}=?$$
$$b)a_8=40, a_{20}=-20, a_7=?, a_{10}=?$$
$$c)a_6=2, a_{10}=36, a_9=?, a_{11}=?$$
$$d)a_2=-5, a_9=-125, a_7=?, a_{19}=?$$

5. Fie $(a_n)_n$ o progresie aritmetică. Se dau :

$a) a_1 = -2, r = 0,5$ se cere a_{12}

b) $a_1 = 3, r = -1,5$ se cere a_{19}

c) $a_{10} = 131, r = 12$ se cere a_1

d) $a_{200} = 0, r = -3$ se cere a_1

6. Să se găsească primul termen şi rația unei progresii aritmetice dacă :

$a) a_5 = 27, a_{27} = 60$

$b) a_{20} = 0, a_{60} = -92$

$c) a_1 + a_7 = 42, a_{10} - a_3 = 21$

$d) a_2 + a_4 = 16, a_1 \cdot a_5 = 28$

$e) S_{10} = 8S_5, S_3 = -3$

$f) a_1 + a_2 + a_3 = a_7, a_3 + a_4 + a_5 = a_{12} + 2$

7. Şirul $(x_n)_n$ este dat prin formula termenului general.

a) x_n =2n-5 ; b) x_n =10-7n. Să se arate că $(x_n)_n$ e o progresie aritmetică. Să se afle primul termen şi rația.

8. $\div\ a_i$. Să se afle S_{100} dacă : $a) a_1 = 10, a_{100} = 150$

$b) a_1 = 2, r = -5$

$c) a_1 = 5,5, a_{100} = 7,5$

9.Cunoscând Sn să se găsescă :

a) primii cinci termeni ai progresiei aritmetice dacă Sn $=5n^2+3n$; Sn $=3n^2$; Sn = $\frac{n^2}{4} - n$.

b) a_1 **= ?, r= ?** dacă Sn = $2n^2+3n$;

10. Este progresie aritmetică un şir pentru care :

a) Sn = n^2-2n ; b) Sn= 7n-1 ; c) Sn = $-4n^2+11$.

11. $\div\ a_i$, S10 = 100, S30 =900 . Să se calculeze S50.

12. Determină x $\in$ **R** astfel încât următoarele numere să fie în progresie aritmetică.

a) x-3, 9, x+3 ; b) $x^2+2,(3x)^2,4-2x+x^2$ c) $\sqrt{x+2},18,\sqrt{x-2}$

13. Să se rezolve ecuațiile :
a) 1+7+13+….+x =280 ;
b) 1+3+5+…..+x = 169 ;
c) (x+1)+(x+4)+(x+7)+…..+(x+28) = 155 ;
d) (x+1)+(x+3)+(x+5)+ ……..+(x+25) = 338 ;
e) x+(x+5)+(x+10)+………+(x+100) = 2100.

14. Să se arate că următoarele numere sunt în progresie aritmetică :
a) $(a+b)^2$, a^2+b^2 , $(a-b)^2$;
b) $\frac{a}{b(a-b)},\frac{a+b}{2ab},\frac{b}{a(b-a)}$;
c) $\frac{a}{x+1},\frac{x+a-1}{2x},\frac{x^2+a-1}{x(x+1)},x\neq -1,x\neq 0.$

15. Să se arate că dacă numerele $\frac{1}{b+c},\frac{1}{c+a},\frac{1}{b+a}$ sunt în progresie aritmetică atunci numerele a^2,b^2,c^2 sunt în progresie aritmetică.

16. Fie $(a_n)_n$ o progresie aritmetică.
Să se arate că : $\frac{1}{a_1\cdot a_2}+\frac{1}{a_2\cdot a_3}+......+\frac{1}{a_{n-1}\cdot a_n}=\frac{n-1}{a_1\cdot a_n},\forall n\geq 2$.

17. Fie ecuația $ax^2+bx+c=0$ cu soluțiile x_1,x_2. Dacă numerele a,b,c sunt în progresie aritmetică atunci există relația : $2(x_1+x_2)+x_1.x_2+1=0$

18. Să se demonstreze : a) $\div a^2-bc,b^2-ca,c^2-ab \Leftrightarrow \div a,b,c$
b)
$$\div a^2+2bc,b^2+2ca,c^2+2ab \Leftrightarrow \div\frac{1}{b-c},\frac{1}{c-a},\frac{1}{a-b}$$
c)
$$\div a\sqrt[3]{\frac{a^2}{bcd}},b\sqrt[3]{\frac{b^2}{acd}},c\sqrt[3]{\frac{c^2}{abd}},d\sqrt[3]{\frac{d^2}{abc}} \Rightarrow \div a^2,b^2,c^2,d^2$$

III. PROGRESII GEOMETRICE

1. Să se scrie primii cinci termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_n$ dacă :

a) $b_1 = 6, q = 2$ b) $b_1 = -24, q = -0{,}5$

c) $b_2 = -10, q = \frac{1}{2}$ d) $b_2 = 0{,}5, q = \sqrt{3}$

e) $b_1 = 1, q = 5$

2. Să se găsească primii doi termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_n$:

a) $b_1, b_2, 24, 36, 54, \ldots\ldots.$ b) $b_1, b_2, 225, -135.81, \ldots\ldots, \ldots\ldots.$

3. Dacă se cunosc doi termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_n$

a) $b_3 = 6, b_5 = 24$, să se găsească b_7, b_9, b_{10}

b) $b_5 = 10, b_8 = -10, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots b_6, b_{12}, b_3.$

4. Să se scrie formula termenului al n-lea al progresiei geomertice date prin :

a) $b_1 = 2, b_{n+1} = 3b_n$ b) $b_1 = 4, b_{n+1} = -3b_n$

c) $b_1 = 9, b_{n+1} = 2b_n$ d) $b_1 = 10, b_{n+1} = \frac{1}{5}b_n$

5. Este progresie geometrică un şir pentru care suma primilor n termeni este :

a) Sn = $n^2 - 1$; b) Sn = $2^n - 1$; c) Sn = $3^n + 1$

6. Să se determine x a.î. numerele următoare să fie în progresie geometrică :

a) a+x, b+x, c+x ; b) $2x^2, x^4, 32$; c) $1, x^2, 6 - x^2$;

7. Să se găsească primul termen b_1 şi rația q a progresiei geometrice $(b_n)_n$ dacă :

a) $\begin{cases} b_2 - b_1 = -4 \\ b_3 - b_1 = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} b_3 - b_2 = 12 \\ b_4 - b_2 = 48 \end{cases}$ c) $\begin{cases} b_6 = 25 \\ b_8 = 9 \end{cases}$

8.Să se calculeze sumele :

a) $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots\dots\dots + 2^{2008}$

b) $1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \dots\dots\dots + 2^{2008}$

c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots\dots + \frac{1}{2^{2008}}$

d) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \dots\dots - \frac{1}{2^{2008}}$

e) 1+11+111+1111+………111111…1 (de n ori 1)

f) 3+33+333+……..33333…..3

g) 7+77+777+…..7777…7(de n ori 7)

h) $1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \dots..100 \cdot 2^{2007}$

9. Să se rezolve ecuațiile :

a) $1 + x + x^2 + x^3 + \dots..x^{2007} = 0, x \neq 1$

b) $1 + (1 + x) + (1 + x)^2 + \dots\dots.. + (1 + x)^{2007} = 0, x \neq 0$

IV. LOGARITMI

1. Să se logaritmeze expresiile în baza **a** : a) E=a^2 $\sqrt[7]{ab^6}$.

b) E=$\sqrt[4]{\frac{a^3}{b^5}}$.

c) E=$\frac{a \cdot \sqrt[3]{b}}{\sqrt{a} \cdot b^2}$

2. Să se determine expresia E ştiind că : lg E=2 lga-$\frac{1}{2}$ lgb-3 lg3.

3. Să se arate că $\log_2 6 + \log_6 2 > 2$.

4. Să se calculeze expresiile: a) $11^{\log_{121} 25}$

b) $7^{\frac{1}{\log_4 49}}$

c) E=$\log_2 25-\log_2\left(\frac{20}{3}\right)+\log_2\left(\frac{4}{21}\right)$.

d) $\log_5(\log_3(\log_6 216))$

e) $\log_2(\log_5(\log_3 243))$

f) $\dfrac{\log_5 125-\log_3\sqrt[3]{9}}{64^{\log_8 2}+\log_2\sqrt{2}}$

g) $\dfrac{49^{\log_7 3}+\log_3 81}{\log_2\sqrt[3]{2}-\log_3\sqrt{3}}$

5. Să se arate că expresia: E=$\dfrac{\log_2 x+\log_2\sqrt{y}+\log_2\sqrt[3]{z}}{\log_3 x+\log_3\sqrt{y}+\log_3\sqrt[3]{z}}$ este independentă de valorile strict mai mari ca 1 ale variabilelor x,z,y.

6. Să se calculeze expresiile: a) E= $\dfrac{\log_2 24}{\log_{96} 2}-\dfrac{\log_2 192}{\log_{12} 2}$.

b) E= $3^{1+\log_3 7}-2^{\log_4 121}$

7.Să se calculeze suma:

$$\frac{1}{\log_2 1+\log_2 2+...+\log_2 n}+\frac{1}{\log_3 1+\log_3 2+....+\log_3 n}+...+\frac{1}{\log_n 1+\log_n 2+...+\log_n n}$$

8. Să se arate că dacă a,b,c sunt în progresie geometrică atunci are loc egalitatea:

$$\frac{2}{\log_b x}=\frac{1}{\log_a x}+\frac{1}{\log_c x} \quad \forall a,b,c\in R^*_+-\{1\}, x\rangle 0$$

9. Să se arate că dacă x, y, z sunt în progresie geometrică atunci $\log_a x, \log_b y, \log_c z$ sunt în progresie aritmetică.

PRIMITIVE

1. Să se calculeze primitivele următoarelor funcții.

1. $\int (3x^5 - 2x^3 + 3x - 2)dx$

2. $\int x(x-1)(x-2)dx$

3. $\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)dx$

4. $\int (\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x\sqrt[3]{x}})dx$

5. $\int \left(2\sqrt{x} - \sqrt[3]{x} + 4\sqrt[5]{x}\right)dx$

6. $\int \left(\frac{5}{\sqrt[5]{x}} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}} \right)dx$

7. $\int x\sqrt{(x-1)^3}dx$

8. $\int \left(2x + \frac{5}{x} - \frac{3}{x^2} \right)dx$

9. $\int (e^x + \frac{1}{e^x})dx$

10. $\int (x^5 + 5^x)dx$

11. $\int \left(\frac{5 + 4x}{x} \right)^2 dx$

12. $\int \frac{(x+2)^3}{x^3} dx$

13. $\int \sqrt{x^2 + 4}dx$

14. $\int \sqrt{x^2 - 9}dx$

15. $\int \sqrt{4 - x^2}dx$

16. $\int \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} dx$

17. $\int \frac{x^2 + 3}{\sqrt{x^2 + 2}}dx$

18. $\int \frac{x^2 - 2}{\sqrt{x^2 - 3}}dx$

19. $\int \frac{1}{\sin^2 x.\cos^2 x}dx$

20. $\int \frac{1}{\sin x.\cos x}dx$

21. $\int \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}dx$

2..Să se calculeze primitivele următoarelor funcții compuse.

1. $\int 5\cdot 2^{5x}dx$ **2.** $\int 3^{4x}dx$ **3.** $\int 4\sin 4x dx$

4. $\int 3\cos 3x dx$ **5.** $\int \frac{1}{5x+3}dx$ **6.** $\int \frac{1}{4x^2+9}dx$

7. $\int \frac{1}{4x^2-16}dx$ **8.** $\int \frac{1}{25-9x^2}dx$ **9.** $\int \frac{1}{\cos^2 3x}dx$

10. $\int \frac{1}{\sin^2 5x}dx$ **11.** $\int tg 4x dx$ **12**. $\int 2ctg 2x dx$

13. $\int \frac{1}{\sqrt{16x^2+4^2}}dx$ **14**. $\int \frac{1}{\sqrt{9-16x^2}}dx$

3. Să se calculeze primitivele următoare utilizând metoda integrării prin părți:

1. $\int \ln x dx$ 2. $\int x \ \ln x dx$ 3. $\int x^2 \cdot \ln x dx$

4. $\int \frac{1}{x}\ln x dx$ 5. $\int \frac{1}{x^2}\ln x dx$ 6. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x}dx$

7. $\int \ln^2 x dx$ 8. $\int \ln(1+\frac{2}{x})dx$ 9. $\int \frac{\ln^3 x}{x^2}dx$

10. $\int \frac{\ln^2 x}{x^2}dx$ 11. $\int \cos(\ln x)dx$ 12. $\int \sin(\ln x)dx$

13. $\int (x^2-2x+3)\ln x dx$ 14. $\int x\ln(x-1)dx$

15. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\ln(1+\sqrt{x^2+1})dx$ 16. $\int x\ln\frac{x-1}{x+1}dx$

17. $\int \left(x^2+1\right)\cdot e^x dx$ 18. $\int x\cdot e^{-x}dx$

19. $\int \left(x^2+2x\right)\cdot e^{3x}dx$ 20. $\int x^2\cdot e^x dx$

21. $\int x^2\cdot e^{2x}dx$ 22. $\int (x^3+5x^2-2)\cdot e^{2x}dx$

23. $\int x^2\cdot e^{-x}dx$ 24. $\int \frac{3\cdot 2^x+2\cdot e^x}{2^x}dx$

25. $\int e^x \cdot \sin x dx$

26. $\int e^x \cdot \cos x dx$

27. $\int e^x \cdot \sin 2x dx$

28. $\int e^x \cdot \cos 2x dx$

29. $\int x \cdot \sin x dx$

30. $\int x \cdot \cos x dx$

31. $\int x^2 \cdot \sin x dx$

32. $\int x^2 \cdot \cos x dx$

33. $\int x^2 \cdot \sin 2x dx$

34. $\int x^2 \cdot \cos 2x dx$

35. $\int x \cdot \sin^2 x dx$

36. $\int x \cdot \cos^2 x dx$

37. $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$

38. $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$

39. $\int \frac{x \cdot \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

40. $\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx$

41. $\int e^{-x} \cdot \sin^2 x dx$

42. $\int \cos^2 (\ln x) dx$

43. $\int x \cdot \sqrt{x^2 - 9} dx$

44. $\int x \cdot \sqrt{x^2 + 16} dx$

45. $\int x \cdot \sqrt{4 - x^2} dx$

46. $\int \sqrt{x} \ \ln x dx$

47. $\int \frac{x^2 - 2x + 5}{e^x} dx$

3. Să se calculeze integralele prin metoda substituției

1. $\int (ax+b)^n dx$

2. $\int (2x-1)^9 dx$

3. $\int x(2x-1)^9 dx$

4. $\int x(5x^2-3)^7 dx$

5. $\int x^2(x^3+1)^6 dx$

6. $\int x^k (x^{k+1}+1)^n dx$

7. $\int x \cdot 7^{x^2} dx$

8. $\int \frac{e^x}{e^x+1} dx$

9. $\int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx$

10. $\int e^{\sqrt{x}} dx$

11. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

12. $\int \frac{e^{2x}}{e^x-1} dx$

13. $\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}-1}dx$ 14. $\int x\sqrt{x-1}dx$

15. $\int \sqrt{2x+5}dx$ 16. $\int x\sqrt{1+x^2}dx$

17. $\int x^3\sqrt{1-x^4}dx$ 18. $\int x^2\sqrt[5]{x^3+2}dx$

19. $\sqrt[3]{2x+5}dx$ 20. $\int \sqrt{x^2-6x-7}dx$

21. $\int \sqrt{-x^2-x+2}dx$ 22. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$

23. $\int \frac{\ln\sqrt{x}}{x}dx$ 24. $\int \sqrt{x}\ln x dx$

25. $\int \frac{x-2\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$ 26. $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}dx$

27. $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2+2x-3}}dx$ 28. $\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+3x+4}}dx$

29. $\int \frac{x}{\sqrt[4]{x+1}}dx$ 30. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

31. $\int \frac{1}{x(1+\ln x)^4}dx$ 32. $\int \frac{1}{x(\ln^2 x+8)}dx$

33. $\int \frac{1}{x\sqrt{3-\ln^2 x}}dx$ 34. $\int \frac{1}{x\ln x}dx$

35. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}dx$ 36 . $\int x^3\sqrt{x^2+2}dx$

37. $\int \frac{1}{x(2005+\ln x)^{2006}}dx$ 38. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$

4. Să se calculeze primitivele următoarelor funcții trigonometrice:

1. $\int \sin^3 x\cdot\cos x dx$ 2. $\int \cos^3 x\cdot\sin 2x dx$

3. $\int \sin(2x+5)dx$ 4. $\int \sin^3 x\cdot\cos^2 x dx$

5. $\int\left(tgx+tg^3x\right)dx$ 6. $\int\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx$

7. $\int\frac{\sin^3 x}{\cos x}dx$ 8. $\int\frac{1}{\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}dx$

9. $\int\frac{x}{1-\cos x}dx$ 10. $\int\sin^3 xdx$

11. $\int\cos^3 xdx$ 12. $\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

13. $\int\frac{\sin x}{\cos^2 x-4}dx$ 14. $\int\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\left(\cos^2 x\right)^2}}dx$

15. $\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin^2 x}dx$ 16. $\int\frac{1}{\sin x}dx$

17. $\int\frac{1}{\cos x}dx$ 18. $\int\sin^{10}x\cdot\cos^3 xdx$

19. $\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\cdot(2005+\arcsin x)^{2006}}dx$ 20. $\int\frac{\left(arctgx\right)^{2006}}{1+x^2}dx$

5.Să se calculeze primitivele următoarelor funcții raționale:

1. $\int\frac{1}{3x+5}dx$ 2. $\int\frac{2x+3}{2x+1}dx$ 3. $\int\frac{x}{x+4}dx$

4. $\int\frac{1-3x}{2x+3}dx$ 5. $\int\frac{1}{\left(2x+3\right)^{2005}}dx$ 6. $\int\frac{1}{x^2-9}dx$

7. $\int\frac{1}{x^2+4}dx$ 8. $\int\frac{x^2}{x^2-2}dx$ 9. $\int\frac{x^2}{x^2+1}dx$

10. $\int\frac{1}{3x^2+5}dx$ 11. $\int\frac{1}{\left(x-1\right)\left(x-2\right)}dx$

12. $\int\frac{1}{\left(x+1\right)\left(x+2\right)}dx$ 13. $\int\frac{1}{x\left(x+2\right)}dx$

14. $\int \frac{1}{x^2 - 3x + 2} dx$

15. $\int \frac{1}{2x^2 - x - 3} dx$

16. $\int \frac{1}{3x^2 + x + 1} dx$

17. $\int \frac{1}{x^2 - 2x + 5} dx$

18. $\int \frac{4x - 3}{2x^2 - 3x + 1} dx$

19. $\int \frac{6x - 2}{3x^2 - 2x + 5} dx$

20. $\int \frac{3x - 2}{x^2 - 5x + 6} dx$

21. $\int \frac{5x - 2}{x^2 + 4} dx$

22. $\int \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 10} dx$

23. $\int \frac{x^2}{x^6 - 3} dx$

24. $\int \frac{x}{x^4 + \frac{1}{4}} dx$

25. $\int \frac{2x}{1 + x^4} dx$

26. $\int \frac{x^3}{1 + x^8} dx$

27. $\int \frac{x^3}{(x - 1)^{12}} dx$

28. $\int \frac{x}{(x - 1)^{10}} dx$

29. $\int \frac{x^2}{x^6 + 4} dx$

- **Sec. 18 î.e.n**. mesopotamienii creează primele tabele de înmulțire;
- **sec. 6 î.e.n.** este cunoscută asemănarea triunghiurilor de către **Thales**;
- **Sec. 5 î.e.n.** pitagorienii introduc noțiunile de număr prim, număr compus, numere relativ prime, numere prime perfecte;
- **Sec. 4 î.e.n.**

  Aristotel (384-322 î.e.n) filozof grec a introdus noțiunile de perimetru, teoremă, silogism.
- **Sec. 3 î.e.n.**
  - Matematicianul grec **Euclid**(330-275 î.e.n) cel care a întemeiat celebra şcoală din Alexandria (în 323 î.e.n) a introdus noțiunile de semidreaptă, tangentă la o curbă, puterea unui punct față de un cerc sau sferă, sau denumirile de paralelogram, poliedru, prismă, tetraedru. A enunțat teorema catetei şi a înălțimii pentru un triunghi dreptunghic şi a demonstrat concurența mediatoarelor unui triunghi;
  - **Apolonius din Perga**(262-200 î.e.n), unul din cei mai mari geometri ai antichității introduce pentru prima dată denumirile pentru conice, de elipsă, hiperbolă, parabolă şi noțiunile de focare, normale şi defineşte omotetia şi inversiunea şi dă o aproximare exactă a lui π cu patru zecimale.
  - este dată aria triunghiului în funcție de laturi sau în funcție de raza cercului înscris şi semiperimetru;
  - **Eratostene din Cyrene**(275-195 î.e.n) introduce metoda de determinare a tuturor numerelor prime mai mici decât un număr dat, metodă cunoscută sub numele de „Ciurul lui Eratostene”

- în prima carte din „Elementele” lui Euclid este cunoscută teorema împărțirii cu rest şi „algoritmul lui Euclid” pentru aflarea c.m.m.d.c. a două numere întregi
- **85-168** matematicianul grec **Ptolemeu** prezintă în cartea sa „Almagest”, pe lângă vaste cunoştințe de astronomie şi trigonometrie şi diviziunea cercului în 360 de părți congruente şi exprimarea acestora în fracții sexagesimale.
- **Sec. 3** s-a dat formularea teoremei celor trei perpendiculare de către **Pappos**; acesta a mai dat şi definiția conicelor precum şi teorema despre volumul corpurilor de rotație
- **Sec. 7**
  - sunt cunoscute regulile de trei directă şi inversă de către **Bragmagupta**, matematician indian;
  - **Arhimede**(287-212 î.e.n) precursor al calculului integral, a determinat aria şi volumul elipsoidului de rotație şi ale hiperboloidului de rotație cu pânze.
- **1202- Leonardo Fibonacci** (1170-1240) matematician italian introduce notația pentru fracția ordinară;
- **1228-** Fibonacci introduce denumirea pentru numărul zero, precum şi sistemul de numerație zecimal. Tot prin opera sa „Liber abaci” sunt introduse pentru dată în Europa numerele negative, fiind interpretate ca datorii;
- **1150-** este descrisă extragerea rădăcinii pătrate şi a celei cubice în cartea „ Lilavati” a matematicianului indian **Bhaskara**(1114-1185), tot el prezintă şi operațiile de înmulțire şi împărțire cu numere negative;
- **1515-** rezolvarea ecuațiilor de gradul al treilea cu o necunoscută de către Scipio del Fero, iar mai târziu de **Niccolo Tartaglia** în 1530, şi pe acelea de gradul al patrulea de Ludovico Ferrari în 1545. Acestea au fost făcute cunoscute abia în 1545 de către Girolamo Cardano(1502-1576) în lucrările sale, deşi promisese autorilor lor să nu le divulge;

- **1591-**matematicianul francez **Francois Viete**(1540-1603) introduce formulele cunoscute sub numele de relațiile lui Viete;
- **1614-** inventarea logaritmilor naturali de către **John Neper**(1550-1617);
- **1637-** este introdusă noțiunea de variabilă de către **Rene Descartes**(1596-1650), cel care a introdus literele alfabetului latin pentru notații şi a folosit coordonatele carteziene (definite după numele său), reducând problemele de geometrie la probleme de algebră;
- **1640-** este introdusă denumirea pentru cicloidă de către **Galileo Galilei** (1564-1642);
- **1654-** începutul creării teoriei probabilităților datorat corespondenței dintre **Pierre Fermat**(1601-1665) şi **Blaise Pascal**(1623-1662) şi dezvoltarea combinatoricii odată cu apariția lucrării lui Pascal, „Combinaționes";
- **1656-** matematicianul englez **John Wallis**(1616-1703) introduce simbolul ∞ cu notațiile $\frac{1}{0}=\infty, \frac{1}{\infty}=0$ şi a denumirilor de interpolare respectiv mantisă
- **1670-** este determinat semnul sinusului şi desenată sinusoida respectiv secantoida de către John Wallis);
- **1678-** este dată teorema lui Ceva de către **Ceva Giovani**(1648-1734);
- **1679-** în „Varia opera mathematica" apărută postum, a lui Pierre Fermat(1601-1665), a fost dată „Marea teoremă a lui Fermat", reguli de integrare, definiția derivatei.
- **1692**- este scris primul manual de calcul integral de către matematicianul elvețian **Jean Bernoulli**(1667-1748)" Lectiones mathematicae de methodo integralium aliisque", tipărit abia în 1742 şi de asemenea a mai scris un manual de calcul diferențial, descoperit abia în 1920.
  „Regula lui l'Hospital" este dată de către Jean Bernoulli lui Guillaume de l'Hospital pe care acesta o publică în 1696;

- **1690-** este propusă denumirea de integrală de către **Jacques Bernoulli**(1654-1705)
- **1692-** sunt descoperite proprietățile spiralei logaritmice (Jacques Bernoulli)
- **1694-** este descoperită curba numită lemniscată, caracterizată de inegalitatea $(1+x)^n \geq 1+nx$ (Jacques Bernoulli);
- **1696-1697-** introducerea calculului variațional, punerea problemei izoperimetrelor de către Jean Bernoulli.
- **1705-** este dată „Legea numerelor mari" de către Jacques Bernoulli;
- **1711-** realizarea dezvoltării în serie a funcțiilor e^x, sinx, cosx,arcsinx, de către matematicianul englez **Isaac Newton**(1642-1727) cel care a pus bazele calculului diferențial şi integral concomitent cu **Gottfried Leibniz**(1646-1716);
- **1729-** este demonstrată existența rădăcinilor complexe în număr par a unei ecuații algebrice cu coeficienți reali de către **Mac Laurin Colin**(1698-1746;
- **1731-** utilizarea sistemului de axe perpendiculare pentru a determina poziția unui obiect în funcție de cele trei coordonate;
- **1733-** crearea trigonometriei sferoidale de către **Alexis Clairaut**(1713-1765);
- **1735-** Matematicianul elvețian Leonhard Euler(1707-1783) introduce şi calculează constanta $e = \lim(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\ln n)$ =0,577215..., n→∞;
- **1739-** introducerea conceptului de integrală curbilinie de către Alexis Clairaut;
- **1746-** relația lui Stewart este demonstrată de **Mathew Stewart** după ce în prealabil ea îi fusese comunicată de către Robert Simson în 1735;
- **1747**

  ► este enunțată problema celor trei corpuri de către Clairaut;

- introducerea metodei multiplicatorilor nedeterminați în studiul sistemelor de ecuații diferențiale de către **Jean Le Rond D'Alembert**(1717-1783);

- **1750- Gabriel Cramer** dă o regulă de rezolvare a sistemelor cunoscută sub denumirea de metoda lui Cramer;
- **1755-** sunt puse bazele calculului variațional de către Lagrange(1736-1813) concomitent cu Euler,
- **1765-** începutul creării geometriei descriptive de către **Gaspard Monge**(1746-1818);
- **1766-** crearea mecanicii analitice de către **Joseph Lagrange**(1736-1813) cu enunțarea principiului vitezelor virtuale şi a ecuațiilor Lagrange;
- **1767-** demonstrarea iraționalității lui π de către **Heinrich Lambert**(1728-1777);
- **1768-** demonstrarea existența factorului integrant la ecuațiile diferențiale de ordinul întâi de către **D'Alembert;**
- **1771-** a fost dată ecuația planului normal şi formula distanței dintre două puncte din spațiu de către matematicianul francez G. Monge;
- **1775-** introducerea noțiunilor de soluție generală şi soluție particulară în teoria ecuațiilor diferențiale de către **Leonhard Euler**; acesta a introdus şi funcția $\varphi(n)$ - indicatorul lui Euler, precum şi notațiile e, i, f(x)şi a creat teoria fracțiilor continue;
- **1780-** au fost introduse liniile de curbură ale suprafețelor(G. Monge);

  - sunt descoperite funcțiile automorfe de matematicianul francez Henri Poincare(1854-1912);
- **1785-** a fost dată ecuația planului tangent(G. Monge);
- **1796-** este dată „Teorema lui Fourier" de determinare a numărului rădăcinilor reale cuprinse într-un interval, de către Joseph Fourier(1768-183);
- **1797-** este dată formula creşterilor finite, cunoscută sub denumirea de „teorema lui Lagrange";

- **1798-** au fost considerate cosinusurile directoare ale unei drepte(G. Monge);
  este introdus simbolul [.], pentru partea întreagă de către Arien Marie Legendre
  (1752-1833);
- **1807-**, 1822 sunt date seriile Fourier care au contribuit la crearea teoriei analitice a căldurii.
- **1812-** este introdusă seria hipergeometrică de către Carl Friedrich Gauss(1777-1855) matematician german, cel care a demonstrat teorema fundamentală a algebrei;
- **1816-1835- Augustin Cauchy**(1789-1857), fondatorul analizei matematice moderne, a enunţat criteriul de convergenţă al seriilor, criteriu care-i poartă numele, a dat primele teoreme de existenţă din teoria ecuaţiilor diferenţiale şi al ecuaţiilor cu derivate parţiale, a introdus noţiunile de afix, modul al unui număr complex, numere conjugate, transpoziţie;
- **1820-** introducerea noţiunii de raport anarmonic de către **Chasles Michel**(1793-1880), fondatorul geometriei proiective alături de matematicianul francez Jean Poncelet;
- **1822**
  - introducerea funcţiilor Bessel de către **Friedrich Bessel**;
  - este introdusă notaţia pentru integrala definită $\int_a^b f(x)dx$, de către **Fourier.**;
  - este propusă denumirea de reprezentare conformă de către Gauss;
  - cercul lui Euler sau cercul celor nouă puncte este considerat pentru prima dată de către Charles Brianchon , Jean Poncelet şi Karl Feuerbach, atribuinduse din greşeală numele lui Euler acestei teoreme;

- **1823-1831-** începutul creării primei geometrii neeuclidiene de către **Janoş Bolyai**(1802-1860) concomitent şi independent de cea a lui Lobacevski.
- **1824-**
  - este dată denumirea de geometrie neeuclidiană de către Gauss;
  - **Niels Abel**(1802-1829) demonstrează imposibilitatea rezolvării cu ajutorul radicalilor, a ecuațiilor algebrice de grad mai mare decât patru;
- **1825-** Abel introduce integralele ce-i poartă numele;
- **1827-** este creată teoria funcțiilor eliptice de către Abel;
- **1828**
  - sunt introduse formele fundamentale ale suprafețelor şi curburii totală a unei suprafețe(curbura Gauss) de către Gauss;
  - demonstrarea teoremei lui Fermat pentru n=5 de către matematicianul german **Dirichlet** (1805-1859);
- **1830-** este propusă denumirea de grup cu înțelesul actual de către matematicianul francez Evariste Galois(1811-1832);
- **1831-** definitivarea calculului cu numere complexe de către Gauss ;
- **1834-** introducerea noțiunii de factor de discontinuitate, referitor la integralele
- **1837-** introducerea notațiilor pentru limite laterale de către Dirichlet şi a funcției care îi poartă numele, funcția Dirichlet;

  W. Hamilton introduce termenul de asociativitate a unei legi de compoziție;
- **1839-** introducerea noțiunii de integrale multiple(Dirichlet);
- **1840-** este dată o formă a eliminantului a două ecuații algebrice de către **James Sylvester**(1814-1897), matematician englez;
- **1841-** descoperirea invarianților de către matematicianul irlandez George Bole (1815-1864);

introducerea noțiunilor de margine inferioară și superioară ale unei funcții, de convergență uniformă de către **Weierstrass(**1815-1897);

- **1843-** descoperirea cuaternionilor de către **William Hamilton** (1805-1865);
- **1845-** „Teorema limită centrală” este dată de matematicianul rus **Pafnuti Cebâşev**;
- **1846-** Legea numerelor mari – **Cebâşev**;

introducerea variabilei complexe în teoria numerelor imaginare de către D’Alembert;

- **1847**
  - este introdus calculul logic de **George Boole**, creatorul algebrei booleene;
  - este introdusă noțiunea de ideal de către **Ernest Kummel**(1810-1893);
- **1851-** sunt introduse noțiunile de rang și signatură a unei forme pătratice și sunt propuse noțiunile de matrice și jacobian(J. Sylvester);

  introducerea sufrafețelor riemann de către matematicianul german Bernhard Riemann(1826-1866), lui datorându-se studiul integralei definite.
- **1852-** introducerea segmentelor orientate $\overrightarrow{AB}$ de către Chasles Michael(1793-188) care a formulat și proprietățile axei radicale a două cercuri precum și a conicelor și cuadricelor.
- **1853-** Kronecker(1823-1891) introduce notația $\left|a_{ij}\right| = \det(a_{ij})$;
- **1854-** este introdusă noțiunea de oscilație într-un punct de către Riemann care creează o nouă geometrie neeuclidiană, numită geometria sferică;
- **1858-** crearea calculului matriceal de către **Arthur Cayley**(1821-1895) matematician englez ;
- **1871 Dedekind** introduce noțiunile de corp și modul ceeace în limbajul actual exprimă noțiunile de subcorp și Z-submodul ale lui C. Tot el introduce mulțimea întregilor unui corp de numere algebrice, definind și

idealele acestei mulțimi şi demonstrează teorema fundamentală de descompunere unică a oricărui ideal în produs de ideale prime;

- **1872-**

  - introducerea structurilor de subinel şi modul de către **Dirichlet**;
  - introducerea numerelor raționale prin tăieturi de către **Dedekind**;

- **1873- Charles Hermite**(1822-1901) demonstrează transcendența numărului e= $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = 2,718281....$
- **1874-** este dată denumirea de subgrup de către **Sophus Lie**(1842-1899);
- **1874-1897-** crearea teoriei mulțimilor de către **Georg Cantor**(1845-1918). El a introdus noțiunile de mulțime deschisă, mulțime închisă, mulțime densă, mulțime bine ordonată, mulțime numărabilă, punct de acumulare, punct izolat, produs cartezian, reuniune, intersecție.
- **1878-** rezolvarea problemei celor patru culori pentru colorarea hărților de către Cayley;
- **1880-**sunt descoperite funcțiile automorfe de matematicianul francez Henri Poincare(1854-1912);
- **1882- Ferdinand Lindemann**(1852-1939) a demonstrat trascendența numărului π=3,141592......; (un număr se numeşte transcedent dacă nu este soluția niciunei ecuații algebrice cu coeficienți raționali); tot el demonstrează imposibilitatea cvadraturii cercului cu rigla şi compasul;

  1893- H. Weber, asociază conceptului de corp, sensul de astăzi, ca o structură cu o lege de grup aditiv şi o înmulțire asociativă, distributivă şi în care orice element e inversabil;
- **1897-** introducerea denumirii de inel de către **Hilbert(**1862-1943);
- **1899** -axiomatizarea geometriei de către **David Hilbert**;

- **1900-** introducerea axiomatică a numerelor întregi(D.Hilbert);
- **1905-** este introdusă noțiunea de distanță între două mulțimi închise de către matematicianul român Dimitrie Pompeiu(1873-1954);
- **1910-** este introdusă denumirea de funcțională de către **Jacques Hadamard** (1865-1963), unul din fondatorii analizei funcționale;
- **1912 -**este descoperită noțiunea de derivată areolară(Pompeiu)
- **1927-**s-a stabilit formula Onicescu referitoare la geodezice dată de **Octav Onicescu**(1892-1983);
- **1928 -**este introdusă funcția areolar-conjugată de către matematicianul român **Miron Nicolescu**(1903-1975);
- **1933** -introducerea funcțiilor convexe de ordin superior de către Tiberiu **Popoviciu**(1906-1975);
- **1936 -**Matematicianul român **Gheorghe Mihoc**(1906-1981) dă o metodă cunoscută sub numele de metoda Schulz-Mihoc, de determinare a legilor limită ale unui lanț Markov;
- **1941 -**teorema lui Moisil referitoare la geodezicele unui spațiu riemannian este introdusă de **Grigore Moisil**(1906-1973);
- **1944** -este introdusă în domeniul algebrei moderne noțiunea de signatură de către matematicianul român **Dan Barbilian**(1895-1961);
- **1950 -**este introdusă noțiunea de Δ- derivată de către Dan Barbilian;
- **1996 -**celebra conjectură a lui Fermat este demonstrată de către **Andrew Wiles** de la institutul Isaac Newton din Cambridge.
- **2000 -**este determinat cel mai mare număr prim $2^{6972593}$-1, având două milioane de cifre, obținut cu ajutorul a 20 de mii de calculatoare puse în rețea;

BIBLIOGRAFIE.

1: N. Mihăileanu- Istoria matematicii,vol.1,vol2.,Editura Ştiinţifică şi enciclopedică; Bucureşti,1974/ 1981;
2: Vasile Bobancu- Caleidoscop matematic, Editura Niculesu;
3. Neculai Stanciu, 100 de probleme rezolvate. Editura Rafet;
4. Mică enciclopedie matematică, Editura Tehnică, Bucureşti

Cuprins