$\boxed{\textbf{1.}}$ **a)** Definiţi spaţiul topologic Hausdorff. Definiţi convergenţa unui şir într-un spaţiu topologic.

b) Demonstraţi unicitatea limitei în spaţii Hausdorff.

$\boxed{\textbf{2.}}$ **a)** Definiţi mulţimile boreliene. Definiţi funcţia măsurablă.

b) Enunţaţi teorema de caracterizare a funcţiilor măsurabile prin mulţimi de nivel şi demonstraţi una din implicaţii.

$\boxed{\textbf{3.}}$ Fie $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $d(x, y) = \left|x^2 - x - y^2 + y\right|$.

a) Arătaţi că $(\mathbb{R}, d)$ este un spaţiu semimetric dar nu este metric.

b) Determinaţi cel mai mare număr $a > 0$ pentru care d este metrică pe mulţimea $[0, a]$.

$\boxed{\textbf{4.}}$ Calculaţi (cu justificare)

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{[-2,2]} \frac{x^{2n}}{1 + x^{2n}} d\lambda(x)$

b) $\lambda\left(([0, 10] \setminus \mathbb{Q}) \cup ([0, 20] \cap \mathbb{Q})\right)$

$\boxed{\textbf{5.}}$ Furnizaţi exemple (justificând afirmaţiile) pentru:

a) Şir de numere reale având punctele limită $0, 1, -\infty$.

b) Mulţime închisă din $\mathbb{R}$ care nu este precompactă

c) Mulţime măsurabilă Lebesgue în $\mathbb{R}$ care nu este nici închisă nici deschisă.

d) Funcţie $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuă λ-a.p.t care nu este continuă.
