South Eastern European Mathematical Olympiad for University Students
Iaşi, România - March 7, 2014

$\boxed{1.}$ Fie n un număr natural nenul şi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$ o funcţie satisfăcând $f(2014) = 1 - f(2013)$. Fie $x_1, \ldots, x_n$ numere naturale distincte. Dacă

$$\begin{vmatrix} 1+f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) & & f(x_n) \\ f(x_1) & 1+f(x_2) & f(x_3) & & f(x_n) \\ f(x_1) & f(x_2) & 1+f(x_3) & & f(x_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) & & 1+f(x_n) \end{vmatrix} = 0$$

arătaţi că f nu este continuă.

$\boxed{2.}$ Se consideră şirul (x_n) definit de

$$x_1 = 2,\ x_{n+1} = \frac{x_n + 1 + \sqrt{x_n^2 + 2x_n + 5}}{2},\ n \geq 2.$$

Demonstraţi că şirul $y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k^2 - 1}$, $n \geq 2$ este convergent şi calculaţi limita sa.

$\boxed{3.}$ Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ şi $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ astfel încât $A - A^* = 2aI_n$, .unde A^* este transpusa conjugatei matricei A (adică $A^* = (\bar{A})^t$).

a) Arătaţi că $|\det A| \geq |a|^n$.

b) Arătaţi că dacă $|\det A| = |a|^n$ atunci $A = aI_n$.

$\boxed{4.}$ a) Arătaţi că $\lim_{n\to\infty} n \displaystyle\int_0^n \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{n}}{x(x^2+1)}\, dx = \frac{\pi}{2}$.

b) Calculaţi $\lim_{n\to\infty} n \left(\displaystyle\int_0^n n\frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{n}}{x(x^2+1)}\, dx - \frac{\pi}{2} \right)$.

Soluţii.

(neoficiale; am decis postarea lor întrucât din păcate soluţiile oficiale nu au fost difuzate).

$\boxed{1.}$ Determinantul se calculează simplu adunând ultimele $n-1$ coloane la prima coloană obţinând

$$(1 + f(x_1) + \cdots + f(x_n)) \begin{vmatrix} 1 & f(x_2) & f(x_3) & \ldots & f(x_n) \\ 1 & 1+f(x_2) & f(x_3) & \ldots & f(x_n) \\ 1 & f(x_2) & 1+f(x_3) & \ldots & f(x_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & f(x_2) & f(x_3) & \ldots & 1+f(x_n) \end{vmatrix} =$$

$$(1 + f(x_1) + \cdots + f(x_n)) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1 + f(x_1) + \cdots + f(x_n).$$

(S-a adunat prima coloană înmulţită cu $-f(x_2)$ la a doua coloană etc.)

Din condiţia $1 + f(x_1) + \cdots + f(x_n) = 0$ deducem că există $k \in \{1, \ldots n\}$ astfel încât $f(x_k) < 0$, iar din condiţia $f(2013) + f(2014) = 1$ obţinem că $f(2013) > 0$ sau $f(2014) > 0$. Dacă f ar fi continuă, din proprietatea lui Darboux ar rezultă că f ia şi valoarea 0 ceea ce contrazice ipoteza $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$\boxed{2.}$ Notăm $f : [0, \infty) \to [\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty)$, $f(x) = \frac{x+1+\sqrt{x^2+2x+5}}{2}$.

Avem $f(x) > x + 1 \implies x_{n+1} > x_n + 1 \implies x_n \geq n + 1 \implies x_n \to \infty$.

Se constată uşor că f este bijectivă şi că $f(x) = y \iff x = \frac{y^2-y-1}{y}$.

Din relaţia $x = \frac{y^2-y-1}{y} \implies x + 1 = \frac{y^2-1}{y} \implies \frac{1}{x+1} = \frac{y}{y^2-1} = \frac{y-1+1}{y^2-1} = \frac{1}{y+1} + \frac{1}{y^2-1}$.

Deci $\frac{1}{y^2-1} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{y+1}$. Înlocuind aici $x = x_k$ şi $y = f(x_k) = x_{k+1}$ obţinem

$$\frac{1}{x_{k+1}^2 - 1} = \frac{1}{x_k + 1} - \frac{1}{x_{k+1} + 1}$$

Prin însumare („telescopică”) obţinem $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{x_k^2-1} = \frac{1}{x_1+1} - \frac{1}{x_n+1}$ şi deci

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k^2-1} = \frac{1}{x_1^2-1} + \frac{1}{x_1+1} - \frac{1}{x_n+1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{x_n+1} = \frac{2}{3} - \frac{1}{x_n+1}$.
Dar $x_n \to \infty \implies \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k^2-1} \to \frac{2}{3}$.

$\boxed{3.}$ $A - A^* = 2aI_n \implies A^* = A - 2aI_n \implies AA^* = A^*A$.

Aşadar matricea A este normală şi deci există o matrice unitară U (adică $UU^* = I_n$) şi o matrice diagonală D astfel încât $A = U^{-1}DU$.

Rezultă $A^* = U^*D^*(U^{-1})^* = U^{-1}D^*(U^*)^* = U^{-1}D^*U$.

Avem deci $A - A^* = 2aI_n \iff U^{-1}(D - D^*)U = 2aI_n \iff D - D^* = U(2aI_n)U^{-1} \iff D - D^* = 2aI_n$.

Dacă notăm cu d_k elementele de pe diagonala matricei D rezultă $d_k - \overline{d_k} = 2a$, $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$.

Egalând părţile reale şi imaginare obţinem $0 = 2\operatorname{Re} a$, $2\operatorname{Im} d_k = 2\operatorname{Im} a$. Aşadar există $\alpha_k \in \mathbb{R}$ şi $\beta \in \mathbb{R}$ astfel încât $a = i\beta$ şi $d_k = \alpha_k + i\beta$.

a) Avem $|\det A| = |d_1 \cdots d_n| = |\alpha_1 + i\beta| \cdots |\alpha_n + i\beta| = \sqrt{\alpha_1^2 + \beta^2} \cdots \sqrt{\alpha_n^2 + \beta^2}$
$\geq |\beta| \cdots |\beta| = |\beta|^n = |a|^n$

b) În inegalităţile precedente avem „=” ddacă $\alpha_k = 0$, $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$
$\implies d_k = i\beta = a \implies D = aI_n \implies A = U^{-1}aI_nU = aU^{-1}U = aI_n$.

$\boxed{4.}$ a) Considerăm funcţia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(t) = \begin{cases} \frac{\operatorname{arctg} t}{t}, & 0 < t \leq 1 \\ 1, & t = 0 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$.

Avem $0 \leq f \leq 1$ şi f este continuă pe $[0, 1]$.

Obţinem $n \displaystyle\int_0^n \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{n}}{x(x^2+1)}\, \mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{f(\frac{x}{n})}{x^2+1}\, \mathrm{d}x$.

Avem $\left|\frac{f(\frac{x}{n})}{x^2+1}\right| \leq \frac{1}{x^2+1}$ şi funcţia $x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$ este integrabilă pe $[0, \infty)$.

Cu teorema convergenţei dominate, utilizând $f(\frac{x}{n}) \to f(0) = 1$ obţinem:
$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{f(\frac{x}{n})}{x^2+1}\, \mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}\, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.

b) Folosind notaţia de la a), cu schimbarea de variabilă $x/n = t$ avem:
$a_n = n \displaystyle\int_0^n \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{n}}{x(x^2+1)}\, \mathrm{d}x - \frac{\pi}{2} = \int_0^n \frac{f(\frac{x}{n})}{x^2+1}\, \mathrm{d}x - \int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}\, \mathrm{d}x = \int_0^n \frac{f(\frac{x}{n})}{x^2+1}\, \mathrm{d}x - \int_0^n \frac{1}{x^2+1}\, \mathrm{d}x - \int_n^\infty \frac{1}{x^2+1}\, \mathrm{d}x$
$= \int_0^n \frac{f(\frac{x}{n})-1}{x^2+1}\, \mathrm{d}x - \operatorname{arctg} \frac{1}{n} = n \int_0^1 \frac{f(t)-1}{n^2t^2+1}\, \mathrm{d}t - \operatorname{arctg} \frac{1}{n}$.

Definim funcţia $g(t) = \frac{f(t)-1}{t^2} = \frac{\operatorname{arctg} t - t}{t^3}$, $(0 < t \leq 1)$ şi $g(0) = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{arctg} t - t}{t^3} = -\frac{1}{3}$.

g este continuă pe $[0, 1]$.

Rezultă $a_n = \int_0^1 \frac{nt^2 g(t)}{n^2t^2+1}\, \mathrm{d}t - \operatorname{arctg} \frac{1}{n}$ şi deci
$na_n = \int_0^1 \frac{n^2t^2 g(t)}{n^2t^2+1}\, \mathrm{d}t - n \operatorname{arctg} \frac{1}{n}$.

Dar $\left|\frac{n^2t^2g(t)}{n^2t^2+1}\right| \leq |g(t)|$ şi $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2t^2g(t)}{n^2t^2+1} = g(t)$ pentru $0 < t \leq 1$.

Aplicând din nou teorema convergenţei dominate rezultă
$\lim_{n\to\infty} na_n = \int_0^1 g(t)\, \mathrm{d}t - 1 = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} t - t}{t^3}\, \mathrm{d}t - 1 = \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) - 1 = -\frac{\pi+2}{4}$
(ultima integrală s-a calculat simplu prin părţi).

V. Anisiu (UBB Cluj)