

Concursul „Traian Lalescu”
Universitatea „Babeş-Bolyai”, Cluj-Napoca, 10 mai 2011

Rezolvați la alegere 5 din cele 7 probleme propuse, fiecare pe o foaie separată.

Timp de lucru: 2 ore.

1. Fie $(G, \cdot)$ un grup cu proprietatea că $\forall x, y, a, b, u \in G$ pentru care $xuy = aub$, rezultă $xy = ab$.

Arătați că grupul G este comutativ (abelian).

2. Fie $m \in \mathbb{N}$ ($m \geq 1$) și funcția $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ cu proprietatea că oricare ar fi elementele $x, y \in \mathbb{R}^m$ pentru care $\|x - y\| \in \mathbb{Q}$ rezultă $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$.

a) Pentru $m = 1$ găsiți un exemplu de funcție f discontinuă cu proprietatea de mai sus.

b) Arătați că pentru $m \geq 2$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^m \implies \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$.

($\|x\|$ notează norma euclidiană i.e. $\|(x_1, \dots, x_m)\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_m^2}$).

3. Se consideră șirul de numere reale $x_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^n$, $n > 1$. Arătați că șirul este convergent și calculați limita sa.

4. Se notează cu $\mathcal{I}$ mulțimea triunghiurilor isoscele din plan. Pentru $T \in \mathcal{I}$ se notează cu $h(T)$ lungimea înălțimii corespunzătoare bazei triunghiului T și cu $e(T)$ lungimea înălțimii corespunzătoare laturilor congruente.

Arătați că nu există nicio funcție $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $h(T) \leq f(e(T))$, $\forall T \in \mathcal{I}$.

5. Fie k, n numere întregi astfel încât $2 \leq k \leq n$. Se notează cu F mulțimea funcțiilor strict crescătoare $f : \{1, 2, \dots, k\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$.

Calculați $\max_{f \in F} \left(\min_{1 \leq i \leq k-1} (f(i+1) - f(i)) \right)$.

6. O matrice 3×3 are elemente aleatoare din corpul $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$. Care este probabilitatea ca matricea să fie inversabilă în inelul $M_3(\mathbb{Z}_2)$?

7. Pe mulțimea permutărilor de ordin n (notată cu S_n) definim funcția $f : S_n \times S_n \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f(\sigma, \tau) = \sum_{k=1}^n |\sigma(k) - \tau(k)|$. Precizați mulțimea valorilor funcției f , adică $f(S_n \times S_n)$.

Soluții.

1. Avem $xx^{-1}y = yx^{-1}x$. Rezultă $xy = yx$.

2. a) $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ x+1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$.

b) Fie x, y arbitrare. Notăm $z = (x+y)/2$ (mijlocul segmentului). Există $z_n \rightarrow z$ astfel încât $\|z_n - x\| = \|z_n - y\| \in \mathbb{Q}$.

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|f(x) - f(z_n)\| + \|f(z_n) - f(y)\| = \|x - z_n\| + \|z_n - y\|$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|x - z\| + \|z - y\| = \|x - y\|.$$

Așadar $\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|$.

Fie acum $y_n \rightarrow y$ cu $\|x - y_n\| \in \mathbb{Q}$ (e ușor de văzut folosind densitatea lui $\mathbb{Q}$ în $\mathbb{R}$ că astfel de y_n există).

$$\text{Avem } \|f(x) - f(y)\| \geq \|f(x) - f(y_n)\| - \|f(y_n) - f(y)\| = \|x - y_n\| - \|f(y_n) - f(y)\| \geq$$

$$\|x - y_n\| - \|y_n - y\| \rightarrow \|x - y\|. \text{ Deci are loc și } \|f(x) - f(y)\| \geq \|x - y\|. \text{ q.e.d.}$$

3. $x_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n$. Avem $\left(1 - \frac{k}{n}\right)^n \leq e^{-k}$ și deci $x_n \leq e^{-1} + e^{-2} + \dots + e^{-(n-1)}$. Rezultă $\limsup x_n \leq \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k} = 1/(e-1)$.

Pentru $p \in \mathbb{N}$ fixat și $n > p$ avem $x_n \geq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n + \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n + \dots + \left(1 - \frac{p}{n}\right)^n$. Rezultă

$\liminf x_n \geq e^{-1} + e^{-2} + \dots + e^{-p}$. Pentru $p \rightarrow \infty \implies \liminf x_n \geq 1/(e-1)$. Deci $\lim x_n = 1/(e-1)$.

4. Fie $T = \triangle ABC$ cu $[AB] \equiv [AB]$. Notând $a = \|BC\|$ și $u = m(\hat{B})$, rezultă $h(T) = a/2 \tan(u)$, $e(T) = a \sin(u)$.

Rezultă $a/2 \tan(u) \leq f(a \sin(u))$, $\forall a > 0, u \in (0, \pi/2)$. Luând $a = 1/\sin(u)$ se obține $\tan(u)/(2 \sin(u)) \leq f(1)$, iar pentru $u \rightarrow \pi/2 \implies \infty \leq f(1)$, contradicție.

5. Pentru $f \in F$, notăm $M_f = \min_{1 \leq i \leq k-1} (f(i+1) - f(i))$. Rezultă $(k-1)M_f \leq f(k) - f(1) \leq n-1$ și deci $M_f \leq \left[\frac{n-1}{k-1}\right]$.

Rezultă că pentru maximul căutat M avem $M \leq \left[\frac{n-1}{k-1}\right] =: h$. Arătăm $M = h$ deci că există $f \in F$ astfel încât $M_f = h = \left[\frac{n-1}{k-1}\right]$. Luăm $f(1) = 1$, $f(2) = 1 + h$, $f(3) = 1 + 2h, \dots, f(k) = 1 + (k-1)h$.

6. Matricea este inversabilă ddacă are coloanele liniar independente peste $\mathbb{Z}_2$. Prima coloană poate fi aleasă în $2^3 - 1$ moduri. A doua coloană în $2^3 - 2$ moduri (pentru a fi liniar independentă de prima). Pentru ultima coloană avem $2^3 - 4$ posibilități dacă primele două sunt deja alese. Probabilitatea este $7 \cdot 6 \cdot 4/2^9 = 21/64$.

7. $f(\sigma, \tau) = f(\tau^{-1}\sigma, e)$ unde e este permutarea identică deci e suficient a calcula $g(S_n)$, unde $g(\sigma) = \sum_{k=1}^n |\sigma(k) - k|$.

$g(\sigma)$ este număr par căci $g(\sigma) = \sum_{k=1}^n (\sigma(k) - k) = 0 \pmod{2}$ și $\max g$ se obține pentru permutarea $\sigma_0(k) = n+1-k$ ($k \in \{1, 2, \dots, n\}$); $g(\sigma_0) = \left[\frac{n^2}{2}\right]$. Se obține $g(S_n) = \left\{0, 2, \dots, \left[\frac{n^2}{2}\right]\right\}$, arătând că dacă $m = g(\sigma) \in g(S_n)$, $m > 0 \implies m-2 \in g(S_n)$, modificând convenabil permutarea σ .

Problema suplimentară (ne-propusă)

8. Găsiți un polinom monic $f(x)$ astfel încât ecuația $f(x) = 0$ nu are rădăcini în $\mathbb{Z}$ dar pentru orice p număr prim ecuația $f(x) = 0$ are soluții în $\mathbb{Z}_p$.

Soluție.

a) Dacă $p = 2$, $f_1(x) = x^2 + 1$ are rădăcini în $\mathbb{Z}_p$ (e.g. $x = 1$)

b) Dacă $p = 4k + 1$ atunci $f_1(z) = x^2 + 1$ are rădăcini în $\mathbb{Z}_p$ căci $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} = 1$

c) Dacă $p = 8k + 7$ atunci $f_2(z) = x^2 - 2$ are rădăcini în $\mathbb{Z}_p$ căci $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} = 1$

d) Dacă $p = 8k + 3$ atunci $f_3(z) = x^2 + 2$ are rădăcini în $\mathbb{Z}_p$

căci $\left(\frac{-2}{p}\right) = 1 \iff p = M8 + 1 \text{ sau } M8 + 3$

Deci se poate lua $f(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 2)(x^2 + 2)$.