

Concursul „Traian Lalescu” - anul II
Universitatea „Babeş-Bolyai”, Cluj-Napoca, 5 mai 2009

Rezolvați la alegere 5 din cele 8 probleme propuse, fiecare pe o foaie separată.

Timp de lucru: 3 ore.

1. Fie $(G, \cdot)$ un grup finit având elementul neutru e pentru care există un automorfism f cu proprietățile

(1) Pentru $x \in G$, $f(x) = x \iff x = e$

(2) $f(f(x)) = x$, $\forall x \in G$.

a) Găsiți un exemplu de grup și un automorfism care să verifice condițiile (1) și (2).

b) Demonstrați că grupul G este comutativ.

2. Fie $n \geq 2$ un număr natural fixat și

$$D = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n, x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 = 1\}.$$

Găsiți minimul funcției $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$.

3. Fie (a_n) un șir de numere reale pentru care seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ converge.

Arătați că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = 0$.

4. Fie f o funcție analitică în discul unitate $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Arătați că există un șir (z_n) în U astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = 1$ și șirul $(f(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent în $\mathbb{C}$.

5. Fie (X, d) un spațiu metric compact și A o submulțime a acestuia cu proprietatea că orice funcție continuă $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ este mărginită. Arătați că mulțimea A este compactă.

6. Fie matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, având elementele $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dacă } |i - j| = 1 \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$. Arătați că mulțimea valorilor proprii este simetrică față de origine.

7. La un turneu de tenis participă n jucători, fiecare doi jucători jucând un singur meci împreună. Notând cu $a_1, a_2, \dots, a_n$ numărul victoriilor celor n participanți și cu $b_1, b_2, \dots, b_n$ numărul înfrângerilor, arătați că $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2$.

8. Fie P un punct din interiorul tetraedrului $ABCD$ cu proprietatea că suma distanțelor la vârfurile tetraedrului $(PA + PB + PC + PD)$ este minimă. Arătați că unghiurile $\widehat{APB}$ și $\widehat{CPD}$ sunt congruente.