Concursul „Traian Lalescu” - anul I
Universitatea „Babeş-Bolyai”, Cluj-Napoca, 5 mai 2009

Rezolvaţi la alegere 5 din cele 8 probleme propuse, fiecare pe o foaie separată.
Timp de lucru: 3 ore.

$\boxed{\textbf{1.}}$ Fie $(G, \cdot)$ un grup finit având elementul neutru e pentru care există un automorfism f cu proprietăţile

(1) Pentru $x \in G$, $f(x) = x \iff x = e$.
(2) $f(f(x)) = x$, $\forall x \in G$.
a) Găsiţi un exemplu de grup şi un automorfism care să verifice condiţiile (1) şi (2).
b) Demonstraţi că grupul G este comutativ.

$\boxed{\textbf{2.}}$ Fie $n \geq 2$ un număr natural fixat şi
$D = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n,\ x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 = 1\}$.
Găsiţi minimul funcţiei $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n$.

$\boxed{\textbf{3.}}$ Fie (a_n) un şir de numere reale pentru care seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ converge.

Arătaţi că $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots a_n}{n} = 0$.

$\boxed{\textbf{4}}$ Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ se notează cu $h(n)$ numărul k-uplelor $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, unde $k \in \mathbb{N}^*$, şi $a_1, \ldots a_k \in \mathbb{N}$ verifică
$a_1 \geq a_2 \geq \cdots a_k \geq 2$ şi $a_1a_2\cdots a_k = n$. (De exemplu $h(20) = 4$ deoarece există 4 astfel de k-uple: $(20), (10, 2), (5, 4)$ şi $(5, 2, 2)$). Calculaţi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^2}$.

$\boxed{\textbf{5.}}$ Fie (a_n) un şir descrescător cu termeni pozitivi cu proprietatea că există o infinitate de indici n pentru care $a_n \geq \dfrac{1}{n}$.
Arătaţi că există $N \in \mathbb{N}$ astfel încât $a_1 + a_2 + \cdots a_N > 2009$.

$\boxed{\textbf{6.}}$ Fie matricele $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ satisfăcând relaţia

$$ABC + AB + BC + AC + A + B + C = O$$

Arătaţi că A comută cu $B + C$ dacă şi numai dacă A comută cu BC.

$\boxed{\textbf{7.}}$ La un turneu de tenis participă n jucători, fiecare doi jucători jucând un singur meci împreună. Notând cu $a_1, a_2, ..., a_n$ numărul victoriilor celor n participanţi şi cu $b_1, b_2, ..., b_n$ numărul înfrângerilor, arătaţi că $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2$.

$\boxed{\textbf{8.}}$ Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă cu proprietatea că $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (f(x) + f'(x)) = 1$. Arătaţi că $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$.