

Concursul „Traian Lalescu”  
Universitatea „Babeş-Bolyai”, Cluj-Napoca, 6 mai 2008

*Rezolvați la alegere 5 din cele 8 probleme propuse, fiecare pe o foaie separată.*

*Timp de lucru: 3 ore.*

**1.** Se consideră în  $\mathbb{R}^2$  o mulțime  $P$  formată din 2008 puncte distincte. Arătați că există un disc deschis  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  astfel încât  $P \cap D$  să conțină exact 1004 puncte.

**2.** Fie șirul  $a_n = \prod_{k=1}^{2n} (n^2 + k^2)$ . Calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{a_n}}{n^4}$ .

**3.** Fie  $a > 0$  un număr real fixat și

$$S = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n > 0 \forall n \in \mathbb{N} \text{ și } \sum_{n=1}^{\infty} x_n = a\}$$

Arătați că mulțimea de numere reale  $I = \{\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 : (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in S\}$  este un interval și precizați care sunt capetele acestuia.

**4.** Fie  $f$  un polinom cu coeficienți reali cu proprietatea că  $f(x) \geq 0, \forall x \in [0, \infty)$ . Notăm

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}, \text{ unde } f^{(n)} \text{ reprezintă derivata de ordin } n.$$

Arătați că  $F(x) \geq 0, \forall x \in [0, \infty)$ .

**5.** Pentru  $n \in \mathbb{N}$ , fie  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  astfel încât matricea  $A + B$  este inversabilă. Arătați că

$$A(A + B)^{-1}B = B(A + B)^{-1}A$$

**6 a)** Arătați că inelul  $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$  este euclidian.

**b)** Folosind (eventual) punctul **a)** găsiți toate soluțiile întregi ale ecuației

$$y^2 + 2 = x^3.$$

**7.** Există funcții analitice  $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$  astfel încât  $|f(z)| \geq \frac{1}{\sqrt{|z|}}, \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ?

**8.** Fie  $(X, d)$  un spațiu metric compact și  $f : X \rightarrow X$  o izometrie (adică  $d(f(x), f(y)) = d(x, y), \forall x, y \in X$ ). Arătați că  $f(X) = X$ .

(Se poate eventual presupune că  $X$  este mulțime compactă din  $\mathbb{R}^n$  iar  $d$  este metrica euclidiană  $d(x, y) = \|x - y\|$ .)

## Soluții

**1.** Considerăm un punct  $a \in \mathbb{R}^2$  astfel încât pentru  $p, q \in P$  distincte să avem  $d(a, p) \neq d(a, q)$ . Un astfel de punct există ( $a \in \mathbb{R}^2 \setminus M$  unde  $M$  este reuniunea mediatoarelor tuturor perechilor de puncte din  $P$ ). Rezultă că  $\{d(a, p) : p \in P\}$  conține 2008 elemente  $r_1 < r_2 < \dots < r_{2008}$ . Luăm  $D$  discul de centru  $a$  și rază  $r = (r_{1004} + r_{1005})/2$ .

**2.**  $b_n = \frac{\sqrt[n]{a_n}}{n^4} = \left( \prod_{k=1}^{2n} \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right) \right)^{1/n}$ .  
 $\ln b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} \ln\left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right) = \frac{2}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \ln\left(1 + 4\frac{k^2}{(2n)^2}\right)$ . Rezultă  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln b_n = 2 \int_0^1 \ln(1 + 4x^2) dx = 2 \ln 5 + 2 \arctan 2 - 4$ . Deci  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{a_n}}{n^4} = e^{2 \ln 5 + 2 \arctan 2 - 4}$ .

**3.** Răspuns:  $I = (0, a^2)$ .

Fie  $y_n = x_n/a$ . Rezultă  $\sum y_n = 1 \implies 0 < \sum y_n^2 < \sum y_n = 1$  deci  $\sum y_n^2 \in (0, 1) \implies \sum x_n^2 \in (0, a^2)$  adică  $I \subseteq (0, a^2)$ .

Fie acum  $t \in (0, 1)$ . Există  $y_n > 0$  a.î.  $\sum y_n = 1, \sum y_n^2 = t$ ; este suficient să luăm o progresie geometrică  $y_n = p \cdot q^{n-1}$ . Revine la  $p/(1-q) = 1, p^2/(1-q^2) = t$ . Ecuația  $(1-q)^2/q^2 = t$  are soluție dacă  $t \in (0, 1)$ .

**4.** Presupunem  $f$  neconstant (altfel este evident).  $F$  are un minim în  $x_0$  (căci  $F(\infty) = \infty$ ). Dacă  $x_0 \neq 0$  atunci  $F'(x_0) = 0$ . Dar  $F'(x) = F(x) - f(x)$ , deci  $F(x_0) = f(x_0) \geq 0 \implies F \geq 0$  pe  $[0, \infty)$ .

Dacă  $x_0 = 0$  atunci  $F'(0) \geq 0$  (căci 0 e punct de minim) și  $F(0) = F'(0) + f(0) \geq f(0) \geq 0$ .

**5.** Se consideră întâi cazul când  $A, B$  sunt inversabile. Avem:  $A(A+B)^{-1}B = (B^{-1}(A+B)A^{-1})^{-1} = (B^{-1} + A^{-1})^{-1}$  și similar  $B(A+B)^{-1}A = (B^{-1} + A^{-1})^{-1}$ .

În cazul general, există  $\delta > 0$  astfel încât  $A + \lambda I$  și  $B - \lambda I$  sunt inversabile pentru  $0 < \lambda < \delta$ . Se aplică cele de mai sus pentru  $A + \lambda I$  și  $B - \lambda I$  și se face  $\lambda \rightarrow 0$ .

**6. a)** Ca funcție  $\delta : \mathbb{Z}[\sqrt{-2}]^* \rightarrow \mathbb{N}_0$  care apare în definiția ineleului euclidian se poate lua  $\delta(m + n\sqrt{-2}) = m^2 + 2n^2$ .

**b)**  $U(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]) = \{-1, 1\}$ . Fie  $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$  soluție. Rezultă  $(y_0 + \sqrt{-2})(y_0 - \sqrt{-2}) = x_0^3$ . Fie  $a = m + n\sqrt{-2}$  un divizor ireductibil al lui  $x_0$ . Rezultă  $\bar{a} = m - n\sqrt{-2}$  divizor ireductibil al  $x_0$ . Dacă  $a|(y_0 + \sqrt{-2})$  avem  $\bar{a}|(y_0 - \sqrt{-2})$  și deci  $a^3|(y_0 + \sqrt{-2})^3, \bar{a}^3|(y_0 - \sqrt{-2})^3$  (căci  $a$  nu poate divide ambii factori  $y_0 \pm \sqrt{-2}$ ). Putem deci presupune  $y_0 + \sqrt{-2} = (m + n\sqrt{-2})^3$  (cub perfect).

Deci  $y_0 = m^3 - 6mn^2, 1 = 3m^2n - 2n^3 = n(3m^2 - 2n)$ . De aici,  $n = 1, m = \pm 1$  și  $(x_0 = 3, y_0 = \pm 5)$ .

**7.** Nu.  $g = 1/f$  ar fi analitică pe  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  și  $|g(z)| \leq \sqrt{|z|}$ .  $g$  ar avea singularitate eliminabilă în  $z = 0$ , deci  $g$  ar fi întregă. Din inegalitățile lui Cauchy ar rezulta că pentru  $|z| < R$ ,  $|g'(z)| \leq \frac{\sqrt{R}}{R}$ . S-ar obține că  $g' = 0$  (pentru  $R \rightarrow \infty$ ) și deci  $g$  constantă,  $f$  constantă, contradicție.

**8.** Fie prin reducere la absurd  $\exists x_0 \in X \setminus f(X)$ .  $f(X)$  fiind închisă,  $d(x_0, f(X)) = \varepsilon > 0$ . Șirul iterațiilor  $x_n = f(x_{n-1}), n \geq 1$ , verifică  $d(x_n, x_m) = d(x_{n-m}, x_0) \geq \varepsilon$  pentru  $n > m$ .

Deci șirul  $(x_n)$  nu are subșiruri fundamentale (deci convergente), contradicție.