

IV. FEJEZET

KOMPLEX SZÁMOK ÉS ALKALMAZÁSAIK

IV.1. A komplex számok értelmezése

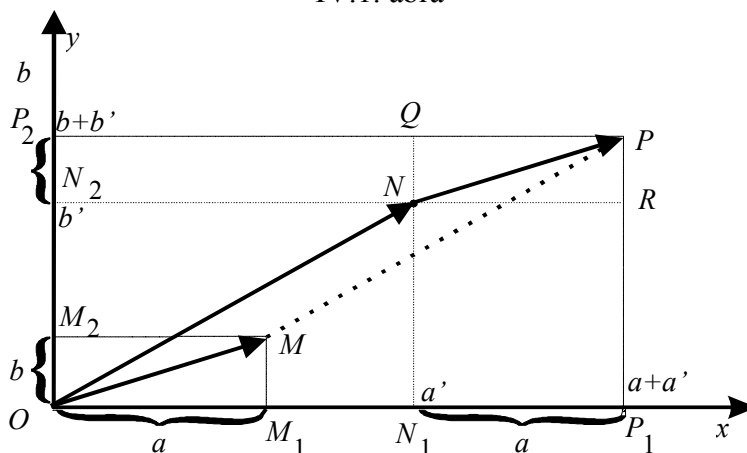
A kilencedik osztályban tanultatok, hogy a sík pontjait könnyen jellemezhetjük valós számpárok segítségével¹. Láttátok, hogy a számpárokkal különböző műveleteket is végezhetünk. Elevenítsük fel ezeket a műveleteket!

1.1. Értelmezés. Az (a, b) és (a', b') valós számpárok összegén az $(a + a', b + b')$ számpárt értjük, tehát

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b'), \quad \forall (a, b), (a', b') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Számpárok esetén már tudjuk, hogy ez a művelet a vektorok összeadásával hozható kapcsolatba. Szerkesszük meg az $(a, b) + (a', b')$ pontot a síkban, ha a, a', b és b' pozitív.

IV.1. ábra



Az $N(a', b')$ pont az OX és OY tengelyre eső vetületeit, jelöljük N_1 -gyel és N_2 -vel. Az $a + a'$ abszcisszát úgy kapjuk, hogy az ON_1 szakasz meghosszabbításában felmérjük az OM_1 hosszúságú szakaszt. Hasonlóan az OY tengelyen ON_2 meghosszabbításában felvesszük az OM_2 hosszúságú szakaszt. Jelöljük Q -val, illetve R -rel az NN_1 és PP_1 , illetve az NN_2 és PP_1 metszéspontját. A szerkesztés alapján $NR = OM_1$ és $PR = MM_1$, tehát $NRP_\Delta \equiv OM_1M_\Delta$. Ebből következik, hogy $OM \equiv NP$. Hasonlóan igazolható, hogy $ON \equiv NP$, tehát az

¹ Erre a jellemzésre az anekdoták szerint Descartes akkor jött rá, amikor lustasága és gyenge egészségi állapotának következtében délelőttönként szobája mennyezetén a pókok mozgását figyelte.

$OMPN$ paralelogramma. Így az $M(a, b)$ és $N(a', b')$ számpár összegének megfelelő P pont esetén $PNOM$ paralelogramma. Belátható, hogy ez akkor is érvényes, ha az a, a', b és b' nem mind pozitív számok.

1.2. Értelmezés. Az $(a, b) \in R \times R$ számpárnak és a $\lambda \in R$ valós számnak a szorzatán a $(\lambda a, \lambda b)$ valós számpárt értjük. Tehát

$$\lambda \cdot (a, b) = (\lambda a, \lambda b), \quad \forall \lambda \in R, \forall (a, b) \in R \times R.$$

1.3. Példák. 1. $(-1, 1) + (1, 0) = (0, 1)$;

2. $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) + (2\sqrt{2}, \sqrt{2}) = (3\sqrt{2}, 0)$;

3. $(1, 7) + (-2, -1) = (-1, 6)$;

4. $2 \cdot (1, 3) = (2, 6)$;

5. $\sqrt{2}(1, -1) = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

Geometriai ismereteink alapján az $N(\lambda a, \lambda b)$, $M(a, b)$ és $O(0, 0)$ pontok egy egyenesen vannak, és $\frac{ON}{OM} = |\lambda|$ (lásd a IV.2. ábrát).

Az előbbieket alapján ismerjük két számpár összegét és egy számpárnak egy valós számmal való szorzatát. A továbbiakban bevezetjük a következő műveletet:

1.4. Értelmezés. Az (a, b) és (c, d) valós számpár szorzatán az $(ac - bd, ad + bc)$ számpárt értjük. Ezt az $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$, $\forall (a, b), (c, d) \in R \times R$ egyenlőséggel jelöljük. (Ennek a műveletnek a geometriai jelentését később adjuk meg.)

1.5. Példák

1. $(1, 0)(2, 3) = (1 \cdot 2 - 0 \cdot 3, 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2) = (2, 3)$;

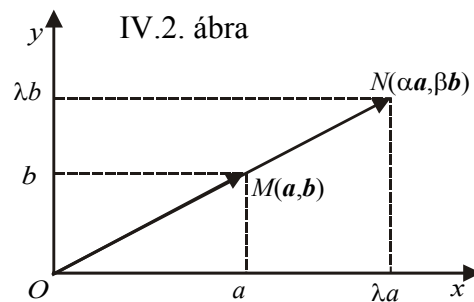
2. $(0, 1) \cdot (1, 2) = (0 \cdot 1 - 1 \cdot 2, 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1) = (-2, 1)$;

3. $(0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0)$;

4. $(1, 2) \cdot (-3, -2) = (1 \cdot (-3) - 2 \cdot (-2), 1 \cdot (-2) + 2 \cdot (-3)) = (1, -8)$.

1.6. Megjegyzés. Az értelmzésben szereplő képletek nem véletlenszerűen jelennek meg². Vizsgáljuk meg a $H = \left\{ f(x) = \frac{ax - b}{bx + a} \mid f: R \setminus \left\{ -\frac{a}{b} \right\} \rightarrow R \right\}$ halmaz elemeinek összetevését:

² A szorzásra vonatkozó „képletek” természetes módon levezethetők, de ez igen terjedelmes előkészítést igényelne. Úgy gondoljuk, hogy ennek hiánya nem befolyásolja a komplex szám fogalmának megértését, ezért csak az idézett analógiával utalunk arra, hogy az ilyen kifejezések természetszerűen összefüggnek a szorzással.



Ha $f(x) = \frac{ax-b}{bx+a}$, $\forall x \in R \setminus \left\{-\frac{b}{a}\right\}$ és $g(x) = \frac{cx-d}{dx+c}$, $\forall x \in R \setminus \left\{-\frac{c}{d}\right\}$, akkor

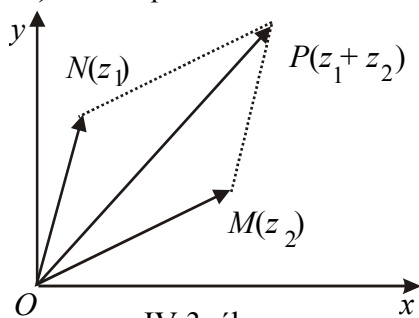
$$(f \circ g)(x) = \frac{a \cdot \frac{cx-d}{dx+c} - b}{b \cdot \frac{cx-d}{dx+c} + a} = \frac{(ac-bd)x - (ad+bc)}{(ad+bc)x + (ac-bd)}.$$

Tehát az (a, b) és (c, d) számpároknak megfelelő függvények összetétele (függvényszorzata) az $(ac-bd, ad+bc)$ számpárnak megfelelő függvény.

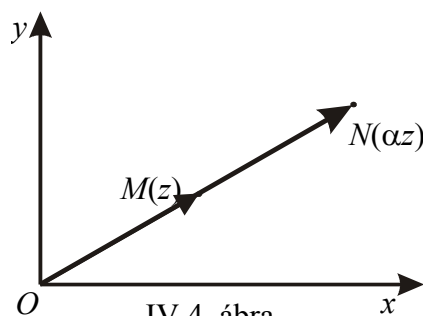
A továbbiakban az $R \times R$ elemeket, amelyekkel a bevezetett műveleteket végezzük, komplex számoknak nevezzük. Célunk, hogy egyszerűsítsük az írásmódot, és, hogy vizsgáljuk a komplex számokkal végzett műveletek tulajdonságait. A fogalmak rögzítése érdekében a következő értelmezést adjuk:

1.7. Értelmezés

- Az $(a, b) \in R \times R$ számpárokat **komplex számoknak** nevezzük, ha az összeadást és szorzást az 1.1. és 1.4. értelmezésekben megadott módon végezzük, és a két számpár egyenlőségét a megszokott módon értelmezzük, vagyis: $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c$ és $b = d$.
- A komplex számok halmazát C -vel jelöljük.



IV.3. ábra



IV.4. ábra

Az eddigiek alapján a komplex számok és egy sík pontjainak halmaza kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésbe hozható. Ez a megfeleltetés nagyon hasznos lesz a geometriai feladatok megoldásában. A kifejezésmód egyszerűsítésének céljából a továbbiakban azt mondjuk, hogy az $M(a, b)$ síkbeli pont affixuma a $z = (a, b)$ komplex szám és a $z = (a, b)$ komplex szám geometriai képe az $M(a, b)$ pont. A műveletek geometriai jelentését a IV.3. és IV.4. ábrákon ismét feltüntettük.

IV.2. A komplex számokkal végzett műveletek tulajdonságai

Azt vizsgáljuk, hogy az értelmezett műveletek segítségével a komplex számokkal tudunk-e a valós számokhoz hasonlóan dolgozni: felcserélhetjük-e a tagokat (tényezőket) összeadáskor (szorzáskor), csoportosíthatjuk-e a tagokat mi a műveletek sorrendje, valamilyen sajátos esetben visszakapjuk-e a valós számokkal végzett műveleteket stb. Ezekre kérdésekre a következő tételekben választ kapunk:

2.1. Tétel. $\forall (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) \in C$ esetén

- a) $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_2, b_2) + (a_1, b_1)$;
b) $[(a_1, b_1) + (a_2, b_2)] + (a_3, b_3) = (a_1, b_1) + [(a_2, b_2) + (a_3, b_3)]$;
c) $\lambda \cdot [(a_1, b_1) + (a_2, b_2)] = \lambda(a_1, b_1) + \lambda(a_2, b_2)$.

Bizonyítás

- a) $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) = (a_2 + a_1, b_2 + b_1) = (a_2, b_2) + (a_1, b_1)$.
b) $[(a_1, b_1) + (a_2, b_2)] + (a_3, b_3) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) + (a_3, b_3) =$
 $= (a_1 + a_2 + a_3, b_1 + b_2 + b_3) = (a_1 + (a_2 + a_3), b_1 + (b_2 + b_3)) =$
 $= (a_1, b_1) + (a_2 + a_3, b_2 + b_3) = (a_1, b_1) + [(a_2, b_2) + (a_3, b_3)]$;
c) $\lambda \cdot [(a_1, b_1) + (a_2, b_2)] = \lambda \cdot (a_1 + a_2, b_1 + b_2) = (\lambda \cdot (a_1 + a_2), \lambda \cdot (b_1 + b_2)) =$
 $= (\lambda \cdot a_1 + \lambda \cdot a_2, \lambda \cdot b_1 + \lambda \cdot b_2) = (\lambda a_1, \lambda b_1) + (\lambda a_2, \lambda b_2) = \lambda(a_1, b_1) + \lambda(a_2, b_2)$.

2.2. Tétel. $\forall (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) \in C$ esetén

- a) $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_2, b_2) \cdot (a_1, b_1)$;
b) $(a_1, b_1) \cdot [(a_2, b_2) \cdot (a_3, b_3)] = [(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2)] \cdot (a_3, b_3)$;
c) $(1, 0) \cdot (a, b) = (a, b) \cdot (1, 0) = (a, b), \forall (a, b) \in C$;
d) $(a_1, b_1) \cdot [(a_2, b_2) + (a_3, b_3)] = (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) + (a_1, b_1) \cdot (a_3, b_3)$.

Bizonyítás. Az 1.4. értelmezés alapján kiszámítjuk az egyenlőségek mindkét oldalán megjelenő kifejezéseket:

- a) $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1) = (a_2, b_2) \cdot (a_1, b_1)$, tehát
 $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_2, b_2) \cdot (a_1, b_1), \forall (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in C$.

b) Itt is kiszámítjuk külön-külön mindkét oldalt:

$$\begin{aligned} [(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2)] \cdot (a_3, b_3) &= (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1) \cdot (a_3, b_3) = \\ &= ((a_1 a_2 - b_1 b_2) a_3 - (a_1 b_2 + a_2 b_1) b_3, (a_1 a_2 - b_1 b_2) b_3 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) a_3) = \\ &= (a_1 a_2 a_3 - b_1 b_2 a_3 - a_1 b_2 b_3 - a_2 b_1 b_3, a_1 a_2 b_3 - b_1 b_2 b_3 + a_1 b_2 a_3 + a_2 a_3 b_1). \quad (1) \\ (a_1, b_1) \cdot [(a_2, b_2) \cdot (a_3, b_3)] &= (a_1, b_1) \cdot (a_2 a_3 - b_2 b_3, a_2 b_3 + b_3 a_2) = \\ &= (a_1 (a_2 a_3 - b_2 b_3) - b_1 (a_2 b_3 + a_3 b_2), a_1 (a_2 b_3 + a_3 b_2) + b_1 (a_2 a_3 - b_2 b_3)) = \\ &= (a_1 a_2 a_3 - a_1 b_2 b_3 - b_1 a_2 b_3 - b_1 b_2 a_3, a_1 a_2 b_3 + a_1 a_3 b_2 + b_1 a_2 a_3 - b_1 b_2 b_3). \quad (2) \end{aligned}$$

Az (1) és (2) összefüggések utolsó számpárja ugyanaz, tehát a tétel b) pontjának állítása igaz.

c) $(1, 0) \cdot (a, b) = (a, b) \cdot (1, 0)$ az a) pont alapján. Tehát csak az utolsó egyenlőséget kell bizonyítanunk. Az 1.4. értelmezés alapján:

$$(a, b) \cdot (1, 0) = (a \cdot 1 - b \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 1) = (a, b).$$

- d) $(a_1, b_1) \cdot [(a_2, b_2) + (a_3, b_3)] = (a_1, b_1) \cdot (a_2 + a_3, b_2 + b_3) =$
 $= (a_1 \cdot (a_2 + a_3) - b_1 \cdot (b_2 + b_3), a_1 \cdot (b_2 + b_3) + b_1 \cdot (a_2 + a_3)) =$
 $= (a_1 a_2 + a_1 a_3 - b_1 b_2 - b_1 b_3, a_1 b_2 + a_1 b_3 + b_1 a_2 + b_1 a_3).$

$$\begin{aligned}
 & (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) + (a_1, b_1) \cdot (a_3, b_3) = \\
 & = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2) + (a_1 a_3 - b_1 b_3, a_1 b_3 + b_1 a_3) = \\
 & = (a_1 a_2 - b_1 b_2 + a_1 a_3 - b_1 b_3, a_1 b_2 + b_1 a_2 + a_1 b_3 + b_1 a_3).
 \end{aligned}$$

Mivel az előbbi két egyenlőségsor utolsó tagjai egyenlők, az eredeti kifejezések is egyenlők, tehát

$$(a_1, b_1) \cdot [(a_2, b_2) + (a_3, b_3)] = (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) + (a_1, b_1) \cdot (a_3, b_3).$$

IV.2.3. Gyakorlatok

1. Végezd el a következő műveleteket!

a) $(1, 2) \cdot [(0, -1) + (3, 2)] =$

b) $(1, 2) \cdot (2, 1) =$

c) $(1, 2) \cdot (1, -2) =$

d) $(1, 2) + (-3, 1) + (2, -3) =$

e) $(1, 1) \cdot (2, 2) + (1, 1) \cdot (-2, -2) =$

f) $(a, b) \cdot (a, -b) =$

g) $2 \cdot [(a, b) \cdot (a, b) + (c, d) \cdot (c, d)] - [(a + c, b + d) \cdot (a + c, b + d) + (a - c, b - d) \cdot (a - c, b - d)] =$

2. Bizonyítsd be, hogy ha $(a, b) \neq (0, 0)$, akkor létezik olyan $(c, d) \in C$, amelyre $(a, b) \cdot (c, d) = (c, d) \cdot (a, b) = (1, 0)$.

3. Határozd meg az $(a, b) \in C$ komplex számot, amelyre

a) $(a, b) + (3, -5) = (1, 2);$

b) $(a, b) \cdot (1, 2) = (1, -3).$

4. Bizonyítsd be, hogy $(0, 1)^2 + (1, 0) = (0, 0)$. Van-e más megoldása C -ben az $x^2 + 1 = 0$ egyenletnek?

5. Ha $(a, b) \in \left\{ (1, 1), \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\}$. Számítsd ki az

$$(a, b)^n = \underbrace{(a, b) \cdot (a, b) \cdot \dots \cdot (a, b)}_{n\text{-szer}} - t!$$

IV.3. Komplex számok algebrai alakja

Az eddigiek alapján bármely z komplex szám felírható $z = a \cdot (1, 0) + b \cdot (0, 1)$ alakban. A $(0, 1)$ számpárt a továbbiakban i -vel jelöljük, és imaginárius egységnek nevezzük. A műveletek alapján belátható, hogy az $(a, 0)$ alakú számpárokkal úgy végzünk műveleteket, mint a valós számokkal, azaz $(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$ és $(a, 0) \cdot (b, 0) = (a \cdot b, 0)$, ráadásul ezeknek a számpároknak a geometriai képe a valós számtengelyen van, tehát ezeket a számpárokat valós számoknak is tekinthetjük.

Pontosabban az $(a, 0)$ számpárt (mint komplex számot) azonosítjuk az a valós számmal. Eszerint $\forall z \in C$ komplex számot felírhatunk $z = a + bi$ alakban, ahol $a, b \in R$. Ezt az alakot a z komplex szám algebrai alakjának nevezzük.

3.1. Értelmezés. A $z \in C$ komplex szám algebrai alakja $z = a + bi$, ahol $a, b \in R$. a -t a z valós részének és b -t a z imaginárius részének nevezzük. Ezt a $\operatorname{Re} z = a$ és $\operatorname{Im} z = b$ egyenlőségekkel fejezzük ki.

A IV.2. paragrafus 4. gyakorlata szerint $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$, tehát jelölésünk alapján $i^2 = -1$. Ezt használjuk a komplex számokkal végzett műveletek során, tehát:

$$\begin{aligned}(a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) &= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2) \cdot i \\ (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \cdot i.\end{aligned}$$

Az előbbieken alapján szorzáskor minden tagot minden más taggal szorzunk, míg összeadáskor a valós részt a valós résszel, az imaginárius részt az imaginárius résszel adjuk össze. A IV.2. paragrafus 2. gyakorlata alapján $(a + ib) \left(\frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2} \right) = 1$,

tehát az $\frac{a - ib}{a^2 + b^2}$ komplex szám az 1 és $a + ib$ komplex számok hányadosának

tekinthető. Így a $\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2}$ összefüggés segítségével értelmezhetjük két tetszőleges ($z_2 \neq 0$) komplex szám hányadosát is.

IV.3.2. Gyakorlatok

1. Végezd el az alábbi műveleteket!

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & (1+i)^2 = \\ \text{b)} & (1+2i)(1-3i) = \\ \text{c)} & (2+3i) + (2+3i)(1-3i) = \\ \text{d)} & i + i^2 + i^3 + i^4 = \\ \text{e)} & \frac{1+i}{1-i} = \\ \text{f)} & \frac{2+3i}{1-2i} = \end{array}$$

$$2. \text{ Bizonyítsd be, hogy } i^k = \begin{cases} 1, & k = 4v, & v \in N, \\ i, & k = 4v+1, & v \in N, \\ -1, & k = 4v+2, & v \in N, \\ -i, & k = 4v+3, & v \in N. \end{cases}$$

$$3. \text{ Bizonyítsd be, hogy } \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^n + \left(\frac{1-i}{1+i} \right)^n \in R, \text{ bármely } n \in N^* \text{ esetén!}$$

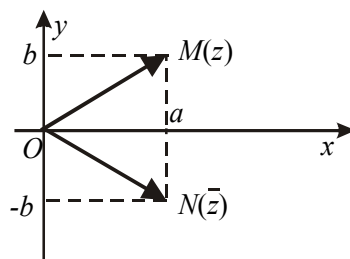
$$4. \text{ Bizonyítsd be, hogy } \left(\frac{19+i}{9-i} \right)^4 + \left(\frac{20+5i}{7+6i} \right)^4 = -14.$$

$$5. \text{ Bizonyítsd be, hogy a } z = 1 + 3i \text{ komplex szám megoldása a } z^3 - z^2 + 8z + 10 = 0 \text{ egyenletnek!}$$

IV.4. Komplex szám konjugáltja. Tulajdonságok

A $z = a + bi$ komplex számnak megfelelő M pont Ox tengely szerinti szimmetrikusának, N -nek, az affixumát a z konjugáltjának fogjuk nevezni, és $\bar{z}$ -sal jelöljük. A IV.5. ábrán látható, hogy ha $z = a + bi$, akkor $\bar{z} = a - bi$. Ezt az alábbi értelmezésbe foglaltuk:

4.1. Értelmezés. A $z = a + bi$ komplex szám konjugáltját $\bar{z}$ -sal jelöljük, és $\bar{z} = a - bi$.



IV.5. ábra

4.2. Példák. $\overline{1+i} = 1-i$, $\overline{2+3i} = 2-3i$, $\overline{(1+i)(2-3i)} = \overline{5-i} = 5+i$.

4.3. Gyakorlat. Számítsd ki az alábbi kifejezések értékét, majd hasonlítsd össze a bal oldali oszlop eredményeit a jobb oldali oszlop eredményeivel!

$$\begin{array}{ll} \overline{(1+2i) + (-3-i)} = & \overline{(1+2i) + (-3-i)} = \\ \overline{(1+i) \cdot (2-3i)} = & \overline{(1+i) \cdot (2-3i)} = \\ \overline{(1+i)^4} = & \overline{(1+i)^4} = \\ \overline{\left(\frac{2+3i}{1-i}\right)} = & \overline{\frac{2+3i}{1-i}} = \end{array}$$

Mit észlelsz?

Az előbbi gyakorlatban észlelt egyenlőségek nem véletlenszerűek. A konjugált képzés minden művelettel felcserélhető. Ezt fejezi ki az alábbi tétel:

4.4. Tétel. Ha $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, akkor igazak a következő egyenlőségek:

- a) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$;
- b) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$;
- c) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$;
- d) $\overline{z_1^n} = (\bar{z}_1)^n$.

Bizonyítás. Használjuk a $z_1 = a + ib$ és $z_2 = c + id$ jelölést!

- a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a+ib) + (c+id)} = \overline{(a+c) + i(b+d)} = (a+c) - i(b+d) = (a-ib) + (c-id) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.
- b) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(ac-bd) + i(ad+bc)} = (ac-bd) - i(ad+bc) = a(c-id) - ib(c-id) = (a-ib)(c-id) = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$.

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} &= \overline{\left(\frac{a+ib}{c+id}\right)} = \overline{(a+ib) \cdot \left(\frac{c}{c^2+d^2} - i \frac{d}{c^2+d^2}\right)} = \overline{(a+ib)} \cdot \\
 &\cdot \overline{\left(\frac{c}{c^2+d^2} - i \frac{d}{c^2+d^2}\right)} = (a-ib) \cdot \left(\frac{c}{c^2+d^2} + i \frac{d}{c^2+d^2}\right) = \frac{(a-ib)(c+id)}{c^2+d^2} = \\
 &= \frac{(a-ib)(c+id)}{(c-id)(c+id)} = \frac{a-ib}{c-id} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.
 \end{aligned}$$

A d) pont a b)-ből következik (a bizonyítás során a matematikai indukció módszerét használjuk).

A $z = a + bi$ és $\bar{z} = a - bi$ egyenlőségekből kifejezhetjük az a -t és a b -t, így az $a = \frac{z + \bar{z}}{2}$ és $b = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ egyenlőségekhez jutunk. Ezek alapján a következő két tulajdonságot jelenthetjük ki:

4.5. Tétel

- a) A $z \in C$ komplex szám akkor és csak akkor valós, ha $z = \bar{z}$ ($\text{Im } z = 0 \Leftrightarrow z = \bar{z}$).
- b) A $z \in C$ komplex szám valós része akkor és csak akkor nulla, ha $\bar{z} = -z$ ($\text{Re } z = 0 \Leftrightarrow z = -\bar{z}$).

4.6. Megoldott feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy ha $z_1, z_2 \in C$ és $z_2 \neq 0$, akkor

$$\left(\frac{\bar{z}_1}{z_2}\right)^n + \left(\frac{z_1}{\bar{z}_2}\right)^n \in R, \quad \forall n \in N^*.$$

Megoldás. Kiszámítjuk a $w = \left(\frac{\bar{z}_1}{z_2}\right)^n + \left(\frac{z_1}{\bar{z}_2}\right)^n$ komplex szám konjugáltját. A 4.4.

tétel alapján

$$\begin{aligned}
 \bar{w} &= \overline{\left(\frac{\bar{z}_1}{z_2}\right)^n} + \overline{\left(\frac{z_1}{\bar{z}_2}\right)^n} = \left[\overline{\left(\frac{\bar{z}_1}{z_2}\right)}\right]^n + \left[\overline{\left(\frac{z_1}{\bar{z}_2}\right)}\right]^n = \left(\frac{z_1}{\bar{z}_2}\right)^n + \left(\frac{\bar{z}_1}{z_2}\right)^n = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n + \\
 &+ \left(\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}\right)^n = w, \text{ tehát a 4.5. tétel értelmében } w \in R.
 \end{aligned}$$

2. Bizonyítsuk be, hogy ha a $z_1, z_2 \in C$ komplex számok esetén $z_1 \cdot \bar{z}_1 = z_2 \cdot \bar{z}_2 = 1$ és $z_1 z_2 \neq -1$, akkor

$$\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} \in R.$$

Bizonyítás. Kiszámítjuk a $w = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ komplex szám konjugáltját:

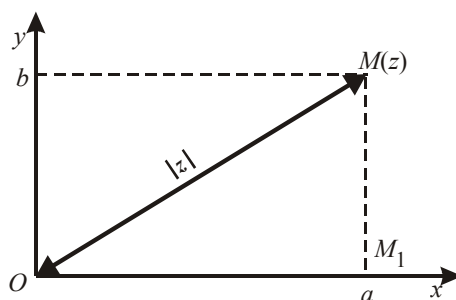
$$\overline{w} = \overline{\left(\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} \right)} = \frac{\overline{z_1 + z_2}}{\overline{1 + z_1 z_2}} = \frac{\overline{z_1} + \overline{z_2}}{\overline{1 + z_1 z_2}} = \frac{\overline{z_1} + \overline{z_2}}{\overline{1} + \overline{z_1 z_2}} = \frac{\overline{z_1} + \overline{z_2}}{1 + \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}} = \frac{\overline{z_1} + \overline{z_2}}{1 + \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}} = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} = w.$$

A 4.5. tétel alapján $w \in R$.

IV.5. Komplex szám modulusa

A valós számok halmazában a $|x|$ az x abszcisszájú pontnak az origótól vett távolságát jelenti. Ezt az értelmezést kiterjesztjük a komplex számokra is.

5.1. Értelmezés. A $z = a + bi$ komplex szám modulusa az (a, b) pont O -tól számított távolsága, tehát $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (lásd a IV.6. ábrát).



IV.6. ábra

Az ábra jelölései szerint $OM^2 = OM_1^2 + M_1M^2 = a^2 + b^2$, tehát

$$|z| = OM = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Akárcsak a konjugált képzéskor, itt is érdemes megvizsgálni, hogy milyen viszonyban van a moduluszámítás a többi művelettel.

Valós számok esetén ismerjük a

$$|x| \cdot |y| = |xy|, \quad \forall x, y \in R; \quad \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, \quad \forall y \neq 0 \text{ és } |x + y| \leq |x| + |y|, \quad \forall x, y \in R$$

tulajdonságokat. Vajon kiterjeszthetők-e ezek a komplex számokra is? Kevés számolás után rájöhethetünk, hogy ezek a tulajdonságok valóban igazak komplex számok esetén is. A következő tétel a modulus tulajdonságait foglalja össze.

5.2. Tétel. Ha $z_1, z_2, z_3 \in C$, akkor érvényesek az alábbi összefüggések:

- a) $|z_1| \cdot |z_2| = |z_1 z_2|, \quad \forall z_1, z_2 \in C;$
b) $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \forall z_2 \neq 0;$
c) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad \forall z_1, z_2 \in C$ és egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha az $O, M(z_1)$ és $N(z_2)$ pontok az O kezdőpontú félegyenesen vannak;
d) $|z|^2 = z \cdot \bar{z}, \quad \forall z \in C.$

Bizonyítás

a) A $z_1 = a_1 + b_1 i$ és $z_2 = a_2 + b_2 i$ jelölést használjuk. $z_1 \cdot z_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2) \cdot i$, tehát $|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{(a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2)^2}$. Másrészt $|z_1| \cdot |z_2| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}$. De $(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = a_1^2 a_2^2 + b_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 = a_1^2 a_2^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 + b_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_2^2 + 2a_1 b_2 a_2 b_1 + a_2^2 b_1^2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2$, tehát $|z_1| \cdot |z_2| = |z_1 z_2|, \quad \forall z_1, z_2 \in C.$

$$\text{b) } \left| \frac{z_1}{z_2} \right|^2 = \left| (a_1 + ib_1) \left(\frac{a_2}{a_2^2 + b_2^2} - i \frac{b_2}{a_2^2 + b_2^2} \right) \right|^2 = (a_1^2 + b_1^2) \left(\frac{a_2^2 + b_2^2}{(a_2^2 + b_2^2)^2} \right) = \frac{a_1^2 + b_1^2}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{|z_1|^2}{|z_2|^2}, \text{ tehát } \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \forall z_2 \neq 0.$$

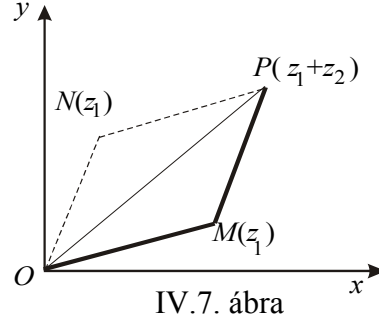
c) $|z_1 + z_2|^2 = (a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 + b_1^2 + b_2^2 + 2b_1 b_2$
 $(|z_1| + |z_2|)^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| = a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 + 2\sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}$
De $(a_1 a_2 + b_1 b_2)^2 \leq (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)$ (mert³ ekvivalens az $0 \leq (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2$ egyenlőtlenséggel), tehát $2a_1 a_2 + 2b_1 b_2 \leq 2\sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}$. Ebből következik, hogy $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad \forall z_1, z_2 \in C$. Az egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $a_1 b_2 = a_2 b_1$, vagyis $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}$. Ez épp a kívánt feltételt adja.

d) A $|z|^2 = a^2 + b^2$ és $z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2 i^2 - abi + bai = a^2 + b^2$ egyenlőségből következik, hogy $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$.

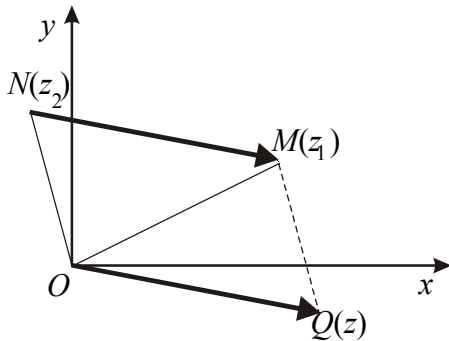
³ A Cauchy–Bunjakovki–Schwarz-egyenlőtlenség sajátos esete.

5.3. Megjegyzések

1. A geometriai értelmezés alapján a c) pont sokkal egyszerűbben és szemléletesebben is bizonyítható. Ábrázoljuk a z_1 , z_2 és $z_1 + z_2$ komplex számoknak megfelelő pontokat a síkban (lásd a IV.7. ábrát). Az esetleg elfajult $OMPN$ paralelogrammában $OM + MP \geq OP$, tehát $|z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2|$. Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha az O , M és N egy egyenesen van és O nincs az M és az N pontok közt.



IV.7. ábra



IV.8. ábra

2. Két, síkbeli pont távolsága kifejezhető a pontok affixumai segítségével. Húzzunk az MN -hez párhuzamost az O -n át, és szerkesszük meg az $MNOQ$ paralelogrammát (lásd a IV.8. ábrát). Ha z -vel jelöljük a Q pont affixumát, akkor $z_1 = z + z_2$, tehát $z = z_1 - z_2$. De $MN = OQ$, tehát $MN = |z| = |z_1 - z_2|$.

5.4. Következmények

1. A $z \in \mathbb{C}$ komplex szám modulusa akkor és csak akkor 1, ha $\bar{z} = \frac{1}{z}$.

2. Ha $z_1, z_2, \dots, z_k \in \mathbb{C}$, akkor $|z_1 + z_2 + \dots + z_k| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_k|$.
A bizonyítások azonnaliak, ezért nem végezzük el.

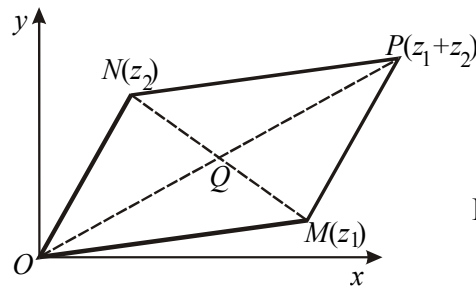
IV.5.5. Megoldott feladatok és gyakorlatok

1. Bizonyítsuk be, hogy $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$.

Bizonyítás. Az 5.2. tétel d) pontja alapján $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) = z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + z_1\overline{z_1} - z_1\overline{z_2} - z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} = 2z_1\overline{z_1} + 2z_2\overline{z_2} = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$.

Geometriai értelmezés

Ábrázoljuk a síkban az $M(z_1)$ és $N(z_2)$ és $P(z_1 + z_2)$ pontot! Az $OMPN$ paralelogrammában $OM^2 = NP^2 = |z_1|^2$ és $MP^2 = ON^2 = |z_2|^2$, tehát $2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 = OM^2 + MP^2 + PN^2 + NO^2$. Másrészt, $|z_1 + z_2|^2 = OP^2$ és $|z_1 - z_2|^2 = MN^2$, tehát $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = OM^2 + MN^2$.



IV.9. ábra

A feladatbeli egyenlőség ekvivalens a következő geometriai tulajdonsággal:

Valamely paralelogramma átlóinak négyzetösszege egyenlő az oldalhosszak négyzetösszegével.

Ez a tulajdonság azonnal igazolható geometriai eszközökkel is (ha az OMN_{Δ} -ben kiszámoljuk az OG oldalfelőző hosszát, vagy az általánosabb Euler-összefüggésből stb.), tehát geometriai bizonyítás is adható a kitűzött feladatra. Nagyon sok esetben a két megközelítés (az algebrai és a geometriai) közül az egyik sokkal egyszerűbb (és szemléletesebb), mint a másik. A természetesebb, rövidebb megoldás megtalálásához, mindkét megközelítés ismerete szükséges.

2. Bizonyítsuk be, hogy ha $|z^2 + 1| \leq 1$ és $|z + 1| \leq 1$, akkor $|z| \leq 1$.

Bizonyítás. $2z = (z + 1)^2 - (z^2 + 1)$, tehát

$$2|z| = |(z + 1)^2 - (z^2 + 1)| \leq |z + 1|^2 + |z^2 + 1| \leq 1 + 1.$$

Ebből következik, hogy $|z| \leq 1$.

3. Ha a , b és c páronként különböző valós számok, számítsd ki az

$$u = \frac{a^2 + ibc}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2 + iac}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2 + iab}{(c-a)(c-b)}$$

komplex szám modulusát!

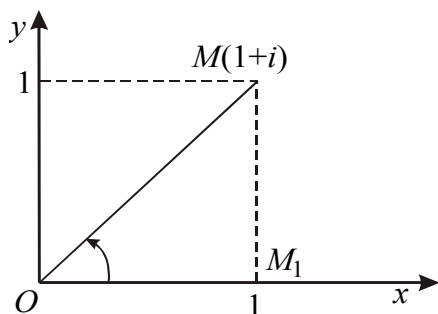
Megoldás. Érdemes előbb egyszerűsíteni a kifejezést:

$$\begin{aligned} u &= \left[\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} \right] + \\ &+ i \cdot \left[\frac{bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{ac}{(b-a)(b-c)} + \frac{ab}{(c-a)(c-b)} \right] = \\ &= \frac{a^2(c-b) + b^2(a-c) + c^2(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} + i \frac{bc(c-b) + ac(a-c) + ab(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 1 + i, \end{aligned}$$

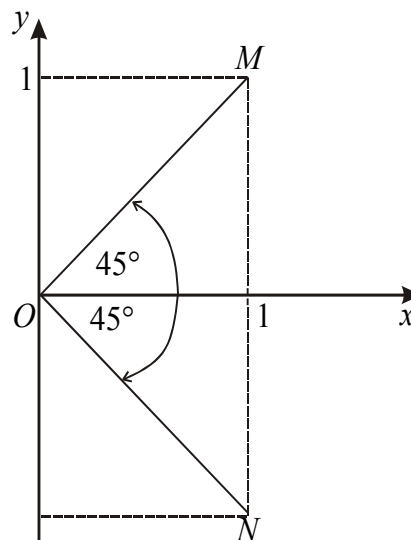
tehát $|u| = \sqrt{2}$.

IV.6. Poláris koordináták a síkban. Komplex számok trigonometriai alakja

6.1. Feladat. Ábrázoljuk a síkban az $1+i$ komplex számnak megfelelő M pontot! Számítsd ki az OM távolságot és az MOX szög mértékét! Létezik-e olyan $N(z)$ pont a síkban, amelyre $OM = ON$ és $m(\angle MOX) = m(\angle NOX)$?



IV.10. ábra

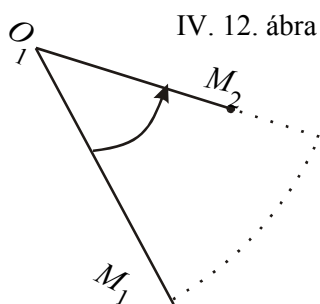


IV.11. ábra

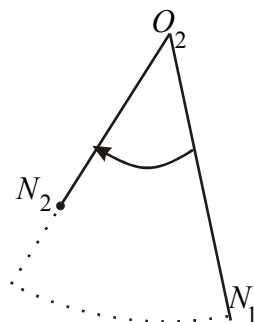
Megoldás. Az OMM_1 derékszögű háromszög mindkét befogója egységnyi hosszúságú, tehát a háromszög egyenlő szárú és derékszögű. Így az $\angle M_1OM$ mértéke 45° és $OM = \sqrt{2}$. Az $m(\angle MOX) = m(\angle NOX)$ egyenlőség alapján az OM és ON félegyenesek 45° -os szöget kell, hogy bezárjanak az OX tengellyel. A szög szerkesztésének axiómája alapján az OX által meghatározott két félsík mindegyikében van ilyen félegyenes (lásd a IV.10 és IV.11. ábrákat). Ha felmérjük ezen az ON szakaszt, akkor megkapjuk az N pontot. Ez az M -nek az OX szerinti szimmetrikusa.

Az előbbi feladatban láttuk, hogy az origótól való távolság és az $\angle MOX$ mértéke az M pont helyzetét nem határozza meg egyértelműen. Láttuk azonban a trigonometria felépítésekor, hogy ez a hátrány kiküszöbölhető, ha irányított szögekkel dolgozunk. Ezért a $\angle M_1OM_2$ és $\angle N_1ON_2$ szögek kongruenciáján azt értjük, hogy $m(\angle M_1OM_2) = m(\angle N_1ON_2)$ és az OM_1 , illetve az ON_1 szakaszokat O_1 , illetve O_2 körül azonos irányba kell elforgatnunk, ha az O_1M_2 -re, illetve az O_2N_2 -re a legkisebb forgatással akarjuk ráhelyezni (a szög mértékének a forgatáskor súrolt szög mértékét tekintjük).

A következő ábrák néhány ilyen esetet ábrázolnak. Az első szögpár esetében az O_1M_1 -et trigonometrikus irányba kell forgatnunk ahhoz, hogy az O_1M_2 -re kerüljön (a legkisebb forgatással), míg O_2N_1 -et inverz trigonometriai irányban kell forgatnunk ahhoz, hogy az O_2N_2 -re kerüljön. Így $m(M_1O_1M_2) \neq m(N_1O_2N_2)$.

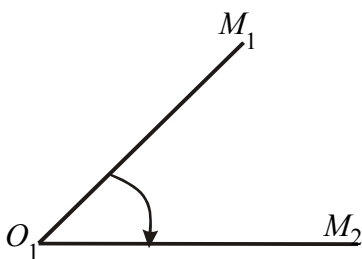


IV. 12. ábra

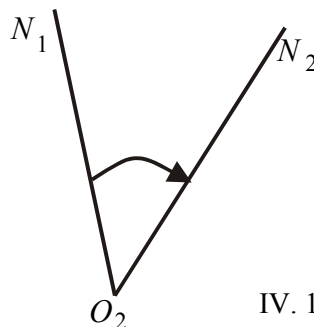


IV. 13. ábra

A második szögpár esetén látható, hogy az O_1M_1 -et és az O_2N_1 -et is inverz trigonometriai irányba kell elforgatnunk ahhoz, hogy az O_1M_2 -re, illetve az O_2N_2 -re kerüljön.



IV. 14. ábra



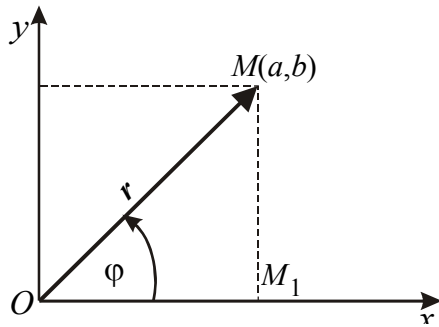
IV. 15. ábra

Így, ha $m(M_1O_1M_2) = m(N_1O_2N_2)$, akkor a két szög kongruens.

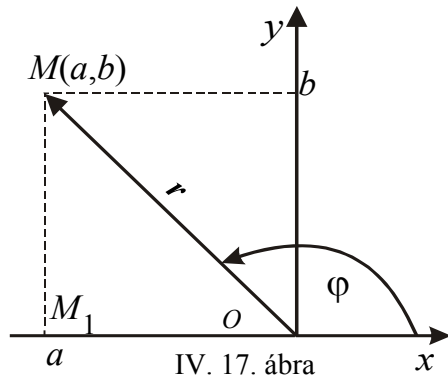
A 6.1. feladatban az MOX és az MOX ellentétes irányításúak, tehát az OM szakasz hossza és az XOM (vagy MOX) irányított szög mértéke egyértelműen jellemzi az M pont helyzetét.

A továbbiakban, ha egy M pont esetén ismerjük az $r = OM$ hosszúságot és az XOM trigonometrikus irányba mért irányított szög mértékét, akkor azt mondjuk, hogy M helyzetét a poláris koordináták (az r és a φ) segítségével jellemeztük.

Ha r -rel jelöljük az OM szakasz hosszát és φ -vel az XOM - $\cap$ irányított szög mértékét, akkor az OMM_1 derékszögű háromszögben:



IV. 16. ábra



IV. 17. ábra

$$\text{Így a } \varphi = \begin{cases} \arctg \frac{b}{a}, & \text{ha } b > 0, a > 0, \\ \pi + \arctg \frac{b}{a} & \text{ha } b > 0, a < 0, \\ \pi + \arctg \frac{b}{a} & \text{ha } b < 0, a < 0, \\ 2\pi + \arctg \frac{b}{a} & \text{ha } b < 0, a > 0 \end{cases}$$

$$a = r \cos \varphi \text{ és } b = r \sin \varphi.$$

(ellenőrizhető, hogy nemcsak az első negyedbeli M pont esetén érvényesek ezek az összefüggések, hanem tetszőleges M esetén). Tehát az (r, φ) poláris koordinátáknak az $(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ Descartes-koordináták felelnek meg. Ha ismerjük egy pontnak a Descartes-koordinátáit, könnyen kiszámíthatjuk a poláris koordinátáit a 6.1. feladat megoldásához hasonlóan.

Az OMM_1 derékszögű háromszögben $r = OM = \sqrt{OM_1^2 + M_1M^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$ és $\tg \varphi = \frac{b}{a}$. Innen a φ -t csak akkor tudjuk kifejezni, ha tudjuk, hogy az M pont melyik negyedben helyezkedik el (mert az $\arctg$ függvény az R -et a $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ -re képezi le).

összefüggésekhez jutunk. Ha $b = 0$, akkor

$\varphi = 0$ vagy $\varphi = \pi$, aszerint, hogy $a > 0$ vagy $a < 0$. Ha $a = 0$, akkor $\varphi = \frac{\pi}{2}$ vagy

$\varphi = \frac{3\pi}{2}$ aszerint, hogy $b > 0$ vagy $b < 0$. Ha r és φ a $z = a + bi$ komplex számnak

megfelelő pont poláris koordinátái, akkor $a = r \cos \varphi$ és $b = r \sin \varphi$, tehát $z = r \cos \varphi + r \sin \varphi \cdot i = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Ezt az alakot trigonometriai alaknak nevezzük. Itt az r a z modulusa és φ a z argumentumának nevezzük.

Eddigi vizsgálódásaink eredményeként a következő tételt jelenthetjük ki:

6.2. Tétel. Bármely $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ komplex szám esetén létezik $r \in \mathbb{R}_+$ és $\varphi \in [0, 2\pi)$ úgy, hogy

$$z = r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi).$$

6.3. Jelölés. φ -t a z redukált argumentumának nevezzük, ezt az $\arg z = \varphi$ egyenlőséggel fejezzük ki. Így az előbbi egyenlőség $z = |z|(\cos(\arg z) + i \sin(\arg z))$ alakban is írható.

IV.6.4. Gyakorlatok

1. Határozzuk meg a következő komplex számok trigonometrikus alakját!

a) $z_1 = 1 + i$;

b) $z_2 = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$;

c) $z_3 = -1 + i\sqrt{3}$;

d) $z_4 = 3$;

e) $z_5 = -2$.

2. Ha $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$, határozzuk meg az $1 + z$ komplex szám trigonometrikus alakját!

Megoldások

1. a) $z_1 = 1 + i$, $|z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ és $\arg z_1 = \arctg \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$, mert $\operatorname{Re} z_1 > 0$ és

$$\operatorname{Im} z_1 > 0. \text{ Tehát } z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

b) $z_2 = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$.

c) $z_3 = -1 + i\sqrt{3} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$.

d) $z_4 = 3 = 3 \cdot (\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)$.

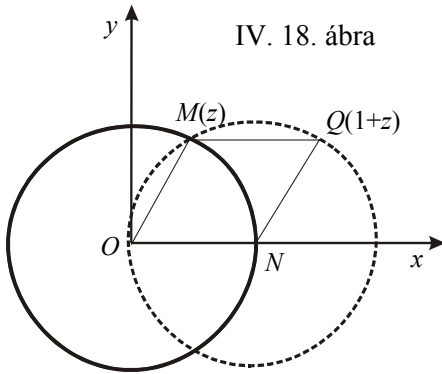
e) $z_5 = -2 = 2(\cos \pi + i \sin \pi)$.

2. $1 + z = 1 + \cos \varphi + i \sin \varphi = 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} + i 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} = 2 \cos \frac{\varphi}{2} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right)$, tehát

az $1 + z$ trigonometrikus alakja $2 \cos \frac{\varphi}{2} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right)$, ha $\cos \frac{\varphi}{2} > 0$, azaz

$$\varphi \in [0, \pi) \text{ és } -2 \cos \frac{\varphi}{2} \left(\cos \left(\pi - \frac{\varphi}{2} \right) + i \sin \left(\pi - \frac{\varphi}{2} \right) \right), \text{ ha } \varphi \in (\pi, 2\pi).$$

6.5. Megjegyzés. Az előbbi feladat b) pontja alapján $\arg(1+z) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, ha



IV. 18. ábra

$|z| = 1$. Ez geometriailag azt jelenti, hogy ha $M \in C(0, 1)$ és N koordinátái $(1, 0)$, akkor az $NOMQ$ paralelogramma Q csúcsának abszcisszája nem lehet negatív, tehát Q nem lehet az OY által meghatározott bal oldali félsíkban. A $|z_1 - z_2|$ mértani értelmezése alapján $|(1+z) - 1| = 1$, tehát az $1+z$ képe rajta van a $C((1, 0), 1)$ körön.

IV.7. Műveletek trigonometrikus alakban írt komplex számokkal

Ha $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ és $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$, akkor

$$z_1 + z_2 = (r_1 \cos \varphi_1 + r_2 \cos \varphi_2) + i(r_1 \sin \varphi_1 + r_2 \sin \varphi_2),$$

tehát

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= r_1^2 \cos^2 \varphi_1 + r_2^2 \cos^2 \varphi_2 + 2r_1 r_2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + r_1^2 \sin^2 \varphi_1 + \\ &+ r_2^2 \sin^2 \varphi_2 + 2r_1 r_2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) = \\ &= r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2|\cos(\arg z_1 - \arg z_2). \end{aligned}$$

Ez az összefüggés tulajdonképpen az ONQ_Δ -ben a OQ -ra felírt koszinusztétel. Ezért általában nehezebb trigonometriai alakban írt számok összegét kiszámolni.

Vizsgáljuk meg két, trigonometrikus alakban írt komplex szám szorzatát!

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= [r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)] \cdot [r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)] = \\ &= r_1 r_2 \cdot [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)] = \\ &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned}$$

Itt persze a $\varphi_1 + \varphi_2$ nem biztos, hogy a $[0, 2\pi)$ intervallumban van, de a $\cos$ és $\sin$ függvények periodicitása szerint az $\arg(z_1 z_2)$ és a $\varphi_1 + \varphi_2$ különbsége a 2π -nek többszöröse. A jelölések egyszerűsítésének céljából ezután az $\text{Arg } z = \{\arg z + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ kiterjesztett argumentumot használjuk. Az előbbi egyenlőségből a következő tétel származik:

7.1. Tétel. Ha $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ és $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$, akkor

a) $z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2));$

b) $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ és $\text{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2.$

A matematikai indukció módszerével a z^n -re is adhatunk egy összefüggést, ha $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

$$z^2 = r \cdot r(\cos(\varphi + \varphi) + i \sin(\varphi + \varphi)) = r^2 \cdot (\cos(2\varphi) + i \sin(2\varphi)),$$

$$z^3 = r^2 \cdot r(\cos(2\varphi + \varphi) + i \sin(2\varphi + \varphi)) = r^3 \cdot (\cos(3\varphi) + i \sin(3\varphi)),$$

és általában

$$z^n = r^n \cdot (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)).$$

Ezt az egyenlőséget Moivre-képletnek nevezzük. Fontossága miatt külön tételbe foglaljuk:

7.2. Tétel. Ha $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, akkor

$$z^n = r^n \cdot (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Bizonyítás. Az $n = 1, 2, 3$ esetben láttuk, hogy a képlet helyes. Ha feltételezzük, hogy $z^n = r^n \cdot (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$, akkor a 7.1. tétel szerint

$$z^{n+1} = r^n \cdot r(\cos(n\varphi + \varphi) + i \sin(n\varphi + \varphi)) = r^{n+1}(\cos(n+1)\varphi + i \sin(n+1)\varphi),$$

tehát a képlet $(n+1)$ -re is helyes. Így a matematikai indukció elve alapján a tétel igaz.

7.3. Megjegyzés. Az $r^n \cdot (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$ kifejezés nem biztos, hogy a z^n szám trigonometriai alakját adja, mert $n\varphi$ a 2π -nél nagyobb is lehet. Ennek ellenére nagyon hasznos az előbbi tétel, mert segítségével a trigonometrikus alak is meghatározható. Pl. ha $z = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$, akkor a z^{10} trigonometrikus alakja a következőképpen határozható meg:

$$\begin{aligned} z^{10} &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{10} \left(\cos \frac{10\pi}{3} + i \sin \frac{10\pi}{3} \right) = \frac{1}{32} \left(\cos \left(\frac{10\pi}{3} - 2\pi \right) + i \sin \left(\frac{10\pi}{3} - 2\pi \right) \right) = \\ &= \frac{1}{32} \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right). \end{aligned}$$

$$\text{A } z \cdot \bar{z} = |z|^2 \text{ egyenlőség alapján } \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}, \text{ tehát } \frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2}. \text{ Ez}$$

trigonometrikus alakban azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot \frac{r_2}{r_2^2}(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2) = \\ &= \frac{r_1}{r_2}(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i(-\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)) = \\ &= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)). \end{aligned}$$

Érvényes tehát a következő tétel is:

7.4. Tétel. Ha $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ és $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$, akkor

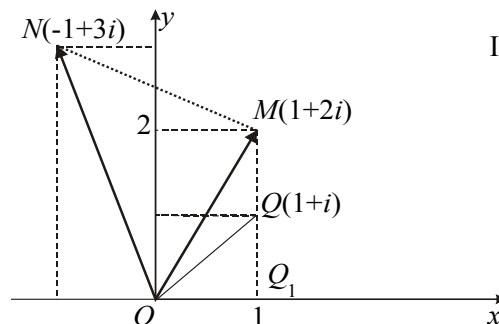
a) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2));$

b) $\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg}(z_1) - \operatorname{Arg}(z_2).$

IV.8. A szorzás geometriai interpretációja

8.1. Feladat. Ábrázoljuk a síkban a $z_1 = 1 + 2i$ és a $z_2 = z_1(1 + i)$ komplex számnak megfelelő pontokat!

Megoldás. $z_2 = (1 + 2i)(1 + i) = 1 + i + 2i + 2i^2 = -1 + 3i$. Tehát az $M(z_1)$ -et és az $N(z_2)$ -t a mellékelt ábrának megfelelően kell felvennünk.



IV. 19. ábra

Az ábrán megjelöltük a $Q(1+i)$ pontot is, valamint ennek az Ox -re eső vetületét.

Írjuk át az előbbi műveleteket trigonometrikus alakra! A $z_1 = \sqrt{5}(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ és a $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$ alapján $z_2 = \sqrt{10}\left(\cos\left(\varphi_1 + \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\varphi_1 + \frac{\pi}{4}\right)\right)$, tehát

$$\frac{OM}{ON} = \frac{OQ_1}{OQ} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{és} \quad \angle Q_1 O G \equiv \angle M O N.$$

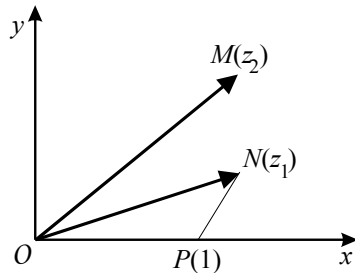
Következésképp az MON és $Q_1 O Q$ háromszögek hasonlóak.

Az előbbi tulajdonság általános esetben is igaz, tehát az $O, M(z_1)$ és $N(z_1 z_2)$ pontok által meghatározott háromszög és az $O, Q(z_2)$ és $Q_1(1)$ pontok által meghatározott háromszög hasonló.

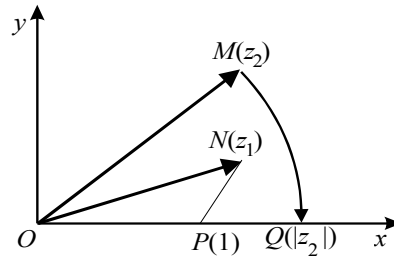
A fentiek alapján megszerkesztjük a $z_1 \cdot z_2$ geometriai képét a z_1 és z_2 képének segítségével:

Vegyük fel a síkban az 1, z_1 és z_2 komplex számoknak megfelelő pontokat, majd az Ox tengelyen a $|z_2|$ abszcisszájú pontot (körzővel az O középpontú OM sugarú körívet húzunk). Ez a két lépés a IV.20. és IV.21. ábrákon látható.

IV. 20. ábra

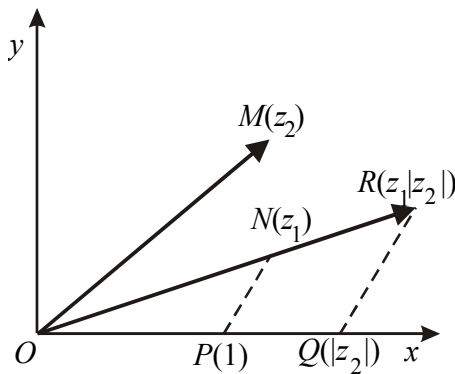


IV. 21. ábra

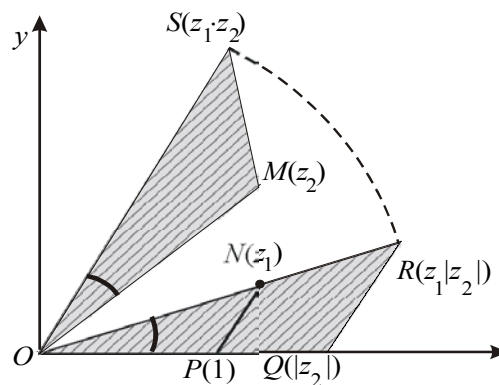


Húzzunk párhuzamost a Q -ból az NP szakaszhoz. Jelöljük R -rel e párhuzamos és az ON egyenes metszéspontját. Az ONP és ORQ háromszög hasonló, és a hasonlósági arány: $\frac{1}{|z_2|}$, tehát az R pont affixuma $z_1 \cdot |z_2|$. Ha az ORQ háromszöget az O pont

körül elforgatjuk úgy, hogy a Q az M -be kerüljön, akkor az R pont forgatás utáni képeinek, S -nek az affixuma $z_1 \cdot z_2$ (ez látható az alábbi két ábrán).



IV. 22. ábra



IV. 23. ábra

IV.9. Gyökvonás komplex számokból

9.1. Feladat. Keressük meg az összes olyan $z \in \mathbb{C}$ komplex számot, amelyre

$$z^7 = 1 + i.$$

Megoldás. A z trigonometriai alakját keressük. Tételezzük fel, hogy $z = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$. A 7.2. tétel értelmében $z^7 = r^7 \cdot (\cos 7\varphi + i \sin 7\varphi)$. De

$$1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right), \text{ tehát az } \begin{cases} r^7 = \sqrt{2} \\ \cos 7\varphi = \cos \frac{\pi}{4} \\ \sin 7\varphi = \sin \frac{\pi}{4} \end{cases} \text{ rendszerhez jutunk. Ebből}$$

adódik, hogy $r = \sqrt[14]{2}$ (mert az első egyenlet pozitív valós megoldásait kell meghatározni) és $7\varphi - \frac{\pi}{4} = 2k\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$. Kifejezzük a φ -t és megvizsgáljuk, hány különböző értéket kaphatunk a $[0, 2\pi)$ intervallumban:

$$0 < \varphi = \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{7} < 2\pi \Leftrightarrow 0 < \frac{\pi}{4} + 2k\pi < 14\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} < (14 - 2k)\pi \text{ és } -2k\pi < \frac{\pi}{4}.$$

Ezekből az egyenlőtlenségekből következik: $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, tehát a megoldások:

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[14]{2} \left(\cos \frac{\pi}{28} + i \sin \frac{\pi}{28} \right); \\ z_1 &= \sqrt[14]{2} \left(\cos \frac{9\pi}{28} + i \sin \frac{9\pi}{28} \right); \\ z_2 &= \sqrt[14]{2} \left(\cos \frac{17\pi}{28} + i \sin \frac{17\pi}{28} \right); \\ z_3 &= \sqrt[14]{2} \left(\cos \frac{25\pi}{28} + i \sin \frac{25\pi}{28} \right); \\ z_4 &= \sqrt[14]{2} \left(\cos \frac{33\pi}{28} + i \sin \frac{33\pi}{28} \right); \\ z_5 &= \sqrt[14]{2} \left(\cos \frac{41\pi}{28} + i \sin \frac{41\pi}{28} \right); \\ z_6 &= \sqrt[14]{2} \left(\cos \frac{45\pi}{28} + i \sin \frac{45\pi}{28} \right). \end{aligned}$$

Látható, hogy az előbbi feladat általánosan is megoldható. A trigonometrikus alak segítségével megoldhatjuk a $z^n = z_0$ egyenletet bármely $z_0 \in \mathbb{C}$ esetén. Ennek az egyenletnek a megoldásait a z_0 komplex szám n -ed rendű gyökeinek nevezzük. Ha $z_0 = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ és $z = \rho \cdot (\cos \theta + i \sin \theta)$, akkor $\rho^n = r$ és $n\theta - \varphi = 2k\pi$, tehát $\rho = \sqrt[n]{r}$ és $\theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$, $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$. A gyökök alakját érdemes megjegyezni, mert gyakran hasznos lesz. Ezért kijelentjük a következő tételt:

9.2. Tétel. A $z_0 = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ komplex szám n -ed rendű gyökei a

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right)$$

számok, ahol $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$.

9.3. Megjegyzések

1. A 9.2. tétel értelmében bármely komplex számnak n darab n -ed rendű gyöke van. Így az $\sqrt[n]{z}$ jelölés komplex számok esetén nem használatos.
2. A $z = 1$ komplex szám n -ed rendű gyökeit n -ed rendű egységgyököknek nevezzük. Az n -ed rendű egységgyökök geometriai képe szabályos n -szöget határoz meg.

IV.10. Megoldott feladatok

IV.10.1. Algebrai alkalmazások

10.1.1. Másodfokú egyenlet megoldása

1. Bizonyítsuk be, hogy ha $a, b, c \in \mathbb{R}$ és $a \neq 0$, akkor az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet

gyökei: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, ha $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ és $x_{1,2} = \frac{-b \pm i \cdot \sqrt{-\Delta}}{2a}$, ha $\Delta < 0$.

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a} \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}.$$

1. eset:

Ha $\Delta \geq 0$, akkor $x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$, tehát $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

2. eset:

Ha $\Delta < 0$, akkor $\Delta = -\Delta \cdot (-1) = -\Delta \cdot i^2$, tehát a $\Delta = u^2$ egyenlet gyökei: $i\sqrt{-\Delta}$ és $-i\sqrt{-\Delta}$. Így $x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{i \cdot \sqrt{-\Delta}}{2a}$, tehát $x_{1,2} = \frac{-b \pm i \cdot \sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Példa. Az $x^2 - x + 1 = 0$ egyenlet diszkriminánsa $\Delta = 1 - 4 = -3$, tehát a gyökök $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$, ahonnan $x_1 = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$ és $x_2 = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}$.

Látható, hogy ezek éppen a harmadrendű komplex egységgyökök. Vizsgáljuk meg, mi történik, ha az együtthatók komplex számok!

Az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlőség most is ekvivalens az $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$

egyenlőséggel. Így $x_{1,2} + \frac{b}{2a} \in \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$, ahol $\sqrt{\Delta}$ az $u^2 = \Delta$ egyenlet megoldásainak

halmaza. Mivel a $\sqrt{\Delta}$ két eleme előjelben különbözik írhatjuk, hogy $x_{1,2} = \frac{-b \pm \delta}{2a}$, ahol δ a Δ egyik másodrendű gyöke.

Példa. A $z^2 - 8(1-i)z + (63-16i) = 0$ egyenlet esetében $\Delta = 8^2(1-i)^2 - 4(63-16i) = 4(16(1-1-2i) - 63 + 16i) = 4 \cdot (-63 - 16i) = 2^2 \cdot (1^2 - 8^2 - 2 \cdot 1 \cdot 8i) = 2^2(1-8i)^2$, tehát $\sqrt{\Delta} = \{2(1-8i), -2(1-8i)\}$ és a gyökök: $z_1 = \frac{8(1-i) + 2(1-8i)}{2} = 5 - 12i$, valamint $z_2 = \frac{8(1-i) - 2(1-8i)}{2} = 3 + 4i$.

Megjegyzések

a) Látható, hogy valós együtthatók esetén a komplex gyökök egymás konjugáltjai, a nem valós, komplex együtthatók esetén a gyökök nem konjugáltjai egymásnak.

b) Észrevehető, hogy a Viéte-összefüggések és az $ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$ felbontási képlet érvényesek komplex együtthatók esetén is.

2. Határozzuk meg az m valós paraméter azon értékeit, amelyekre az $mz^2 - 2(2+i)z - 1 + 2i = 0$ egyenletnek létezik legalább egy valós gyöke!

Megoldás. Ha z_0 valós gyök, akkor a bal oldalon egy komplex szám áll, amelynek valós része $(mz_0^2 - 4z_0 - 1)$ és az imaginárius része $(-2z_0 + 2)$. Mivel egy komplex szám csak akkor nulla, ha a valós és képzetes része egyaránt nulla, az $\begin{cases} mz_0^2 - 4z_0 - 1 = 0 \\ -2z_0 + 2 = 0 \end{cases}$ egyenletrendszerhez jutunk. A második egyenletből kapjuk, hogy $z_0 = 1$, tehát $m = 5$.

IV.10.2. Trigonometrikus összegek és szorzatok kiszámítása

1. Számítsuk ki az

$$S_1 = \sin a + \sin(a+r) + \sin(a+2r) + \dots + \sin(a+nr) \quad \text{és}$$

$$S_2 = \cos a + \cos(a+r) + \dots + \cos(a+nr)$$

összeget, ha $r \neq k\pi$.

Megoldás. Képezzük az $S = S_2 + iS_1 = \sum_{k=0}^n [\cos(a+kr) + i \sin(a+kr)]$ komplex

számot! A $z = \cos a + i \sin a$ és a $z_0 = \cos r + i \sin r$ jelölésekkel

$\cos(a+kr) + i \sin(a+kr) = z \cdot z_0^k$, tehát $S = \sum_{k=0}^n z \cdot z_0^k$. A mértani haladványok

összegzésekor igazolt (1) $x^n - y^n = (x-y) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k$ azonosság bizonyításakor

csak a szorzás és összeadás tulajdonságait használtuk. E tulajdonságok akkor is igazak, ha x és y komplex szám, tehát az (1) azonosság komplex számok esetén is igaz. Így érvényes a következő egyenlőségsorozat:

$$\begin{aligned}
S_2 + iS_1 = S &= z \cdot \sum_{k=0}^n z_0^k = z \frac{z_0^{n+1} - 1}{z_0 - 1} = z \frac{\cos((n+1)r) - 1 + i \sin((n+1)r)}{\cos r - 1 + i \sin r} = \\
&= z \frac{2i \sin\left(\frac{n+1}{2}r\right) \cdot \left[\cos\left(\frac{n+1}{2}r\right) + i \sin\left(\frac{n+1}{2}r\right)\right]}{2i \sin \frac{r}{2} \left[\cos \frac{r}{2} + i \sin \frac{r}{2}\right]} = \\
&= \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}r\right)}{\sin \frac{r}{2}} \cdot z \cdot \left(\cos\left(\frac{nr}{2}\right) + i \sin\left(\frac{nr}{2}\right)\right) = \\
&= \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}r\right)}{\sin \frac{r}{2}} \cdot \left(\cos\left(a + \frac{nr}{2}\right) + i \sin\left(a + \frac{nr}{2}\right)\right).
\end{aligned}$$

Az utóbbi kifejezés valós része az S_2 és képzetes része az S_1 , tehát

$$S_2 = \frac{\cos\left(a + \frac{nr}{2}\right) \sin\left(\frac{n+1}{2}r\right)}{\sin \frac{r}{2}} \quad \text{és} \quad S_1 = \frac{\sin\left(a + \frac{nr}{2}\right) \sin\left(\frac{n+1}{2}r\right)}{\sin \frac{r}{2}}.$$

Megjegyzés. Ha az $S \cdot \sin \frac{r}{2}$ szorzatot átalakítjuk, direkt trigonometriai megoldást is adhatunk.

2. Számítsuk ki a $P = \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ$ szorzatot!

Megoldás. A $z = \cos 20^\circ + i \sin 20^\circ$ jelöléssel $\cos 20^\circ = \frac{z^2 + 1}{2z}$, $\cos 40^\circ = \frac{z^4 + 1}{2z^2}$ és

$\cos 80^\circ = \frac{z^8 + 1}{2z^4}$, tehát

$$\begin{aligned}
P &= \frac{(z^2 + 1)(z^4 + 1)(z^8 + 1)}{8z^7} = \frac{1 + z^2 + z^4 + z^6 + z^8 + z^{10} + z^{12} + z^{14}}{8z^7} = \\
&= \frac{(z^{16} - 1)}{(z^2 - 1)} = \frac{z^{16} - 1}{8(z^9 - z^7)} = \frac{-z^7 - 1}{8(-z^7 - 1)} = \frac{1}{8},
\end{aligned}$$

mert $z^9 = -1$.

Megjegyzés. A direkt trigonometriai megoldás itt egyszerűbb.

$$\begin{aligned} \frac{8 \cdot \sin 20^\circ}{8 \cdot \sin 20^\circ} \cdot P &= \frac{4 \cdot (2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ) \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{8 \sin 20^\circ} = \frac{2(2 \sin 40^\circ \cos 40^\circ) \cos 80^\circ}{8 \sin 20^\circ} = \\ &= \frac{2 \sin 80^\circ \cos 80^\circ}{8 \sin 20^\circ} = \frac{\sin 160^\circ}{8 \sin 20^\circ} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

IV.10.3. Kombinatorikus összegek kiszámítása

1. Számítsuk ki az $S_1 = 1 + C_n^1 \cos \alpha + C_n^2 \cos 2\alpha + \dots + C_n^n \cos n\alpha$ és az

$$S_2 = C_n^1 \sin \alpha + C_n^2 \sin 2\alpha + \dots + C_n^n \sin n\alpha \text{ összeget!}$$

Megoldás. Képezzük az $S = S_1 + iS_2$ komplex számot! A $z = \cos \alpha + i \sin \alpha$ jelöléssel $S = 1 + C_n^1 z + C_n^2 z^2 + \dots + C_n^n z^n = (1+z)^n$, mert Newton binomiális tétele érvényes a komplex számokra is.¹ De $1+z = 1 + \cos \alpha + i \sin \alpha = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \right)$, tehát $(1+z)^n = 2^n \cos^n \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{n\alpha}{2} + i \sin \frac{n\alpha}{2} \right)$. Az S_1 az előbbi kifejezés valós része, míg S_2 a képzetes része, tehát $S_1 = 2^n \cos^n \frac{\alpha}{2} \cos \frac{n\alpha}{2}$ és

$$S_2 = 2^n \cos^n \frac{\alpha}{2} \sin \frac{n\alpha}{2}.$$

2. Számítsuk ki az összegeket!

$$\text{a) } S_1 = C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \dots$$

$$\text{b) } S_2 = C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + \dots$$

$$\text{c) } S_3 = C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + \dots$$

Megoldás. Jelöljük ε -nal az egyik harmad rendű komplex egységgyököt. Az $\varepsilon^3 = 1$ és $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$ egyenlőségek alapján a következő kifejezésekhez jutunk:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k = S_1 + S_2 + S_3;$$

$$(-\varepsilon^2)^n = (1+\varepsilon)^n = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k C_n^k = S_1 + \varepsilon S_2 + \varepsilon^2 S_3;$$

$$(-\varepsilon)^n = (1+\varepsilon^2)^n = \sum_{k=0}^n \varepsilon^{2k} C_n^k = S_1 + \varepsilon^2 S_2 + \varepsilon S_3.$$

A három egyenlőséget S_1 , S_2 és S_3 ismeretlenekkel egy rendszernek tekintjük és megoldjuk. Így a következő képletekhez jutunk:

$$S_1 = \frac{2^n + (-\varepsilon)^n + (-\varepsilon^2)^n}{3} = \frac{2^n + 2 \cdot (-1)^n \cos \frac{2n\pi}{3}}{3};$$

¹ A bizonyítás a II. fejezetben található bizonyítással szó szerint megegyezik.

$$S_2 = \frac{2^n + \varepsilon^2(-\varepsilon^2)^n + \varepsilon(-\varepsilon)^n}{3} = \frac{2^n - 2 \cdot (-1)^{n+1} \cos \frac{2(n+1)\pi}{3}}{3};$$

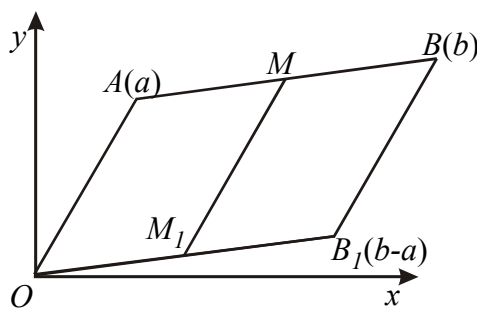
$$S_3 = \frac{2^n + \varepsilon(-\varepsilon^2)^n + \varepsilon^2(-\varepsilon)^n}{3} = \frac{2^n + (-1)^n \cos \frac{2(n+1)\pi}{3}}{3}.$$

IV.10.4. Geometriai alkalmazások²

10.4.1. Szakaszt adott arányban osztó pont affixuma

Feladat. Az $A(a)$ és a $B(b)$ pont által meghatározott szakaszon vegyük fel az M pontot úgy, hogy $\frac{MA}{MB} = k$ legyen. Számítsd ki az M pont affixumát!

Megoldás



IV. 24. ábra

Ha a szakasz egyik végpontja az origóban lenne, akkor a komplex számoknak valós számmal való szorzására adott geometriai értelmezés segítségével könnyen meg adhatjuk az M pont affixumát. Ezért szerkesszünk egy, az AB -vel párhuzamos és vele egyenlő hosszúságú szakaszt, amelynek A_1 végpontja az O -ban van. Így az $OABB_1$ négyszög paralelogramma, ezért a B_1 pont z_3

affixumára igaz a $z_3 + a = b$ egyenlőség. Tehát a B_1 affixuma $b - a$. Az OB_1 szakaszon vegyük fel az M_1 pontot úgy, hogy $\frac{OM_1}{M_1B_1} = \frac{AM}{MB} = k$ legyen. Az M_1

szerkesztése szerint $\frac{OM_1}{OB_1} = \frac{OM_1}{OM_1 + M_1B_1} = \frac{k}{1+k}$, tehát az M_1 affixuma

$\frac{z_3}{1+k} = \frac{(b-a)k}{1+k}$. Az AOM_1M paralelogramma, tehát az M pont m affixumára

érvényes az $a + k \cdot \frac{(b-a)}{1+k} = m$ egyenlőség. Az előbbi egyenlőség $m = \frac{a + kb}{1+k}$ alakban

írható. Ez fontos összefüggés, ezért tétel formájában is kijelentjük:

² Az itt megoldott feladatok eredményei tételként használhatók.

10.4.2. Tétel. Az $A(a)$ és a $B(b)$ pont által meghatározott szakaszt $\frac{MA}{MB} = k$ arányban osztó M pont affixuma $m = \frac{a + kb}{1 + k}$.

10.4.3. Megjegyzés. A továbbiakban a síkbeli pontok affixumait ugyanazzal a kis betűvel jelöljük, mint a pontot.

10.4.4. Következmények

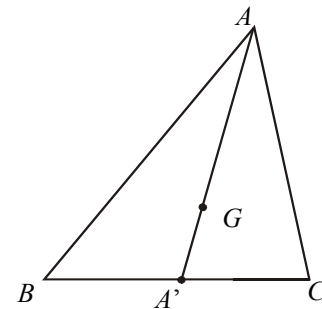
1. Az $A(a)$ és $B(b)$ pontok által meghatározott szakasz M felezőpontjának affixuma $m = \frac{a + b}{2}$.

2. Az ABC háromszög G súlypontjának affixuma $g = \frac{a + b + c}{3}$.

IV. 25. ábra

Bizonyítás. Az ABC_{Δ} súlypontja az AA' oldalfelező A' -hez közelebb eső harmadoló pontja, tehát $a' = \frac{b + c}{2}$ és $g = \frac{a + 2a'}{1 + 2} = \frac{a + b + c}{3}$.

3. Az $ABCD$ négyszög súlypontjának affixuma $g = \frac{a + b + c + d}{4}$.

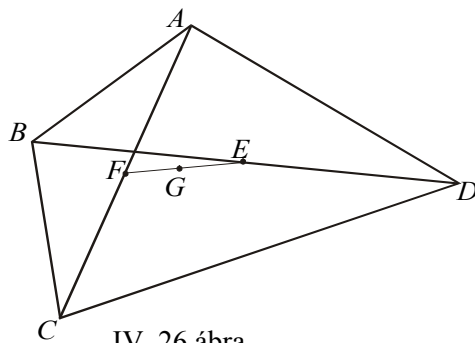


Bizonyítás

Az $ABCD$ négyszög súlypontja az AC és BD átlók felezőpontjai által meghatározott szakasz felezőpontja. Az ábra jelölései szerint $e = \frac{b + d}{2}$,

$$f = \frac{a + c}{2}, \text{ tehát } g = \frac{e + f}{2} = \frac{a + b + c + d}{4}.$$

4. Az $ABCD$ konvex négyszög akkor és csak akkor paralelogramma, ha $a + c = b + d$.



IV. 26 ábra

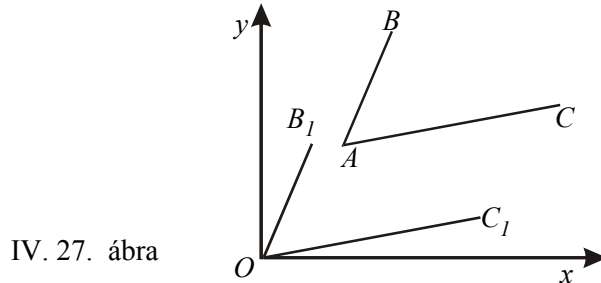
10.4.5. Szögek mértéke

Feladat. Fejezd ki a BAC szög mértékét a pontok affixumainak segítségével.

Megoldás. Akárcsak az előbb „visszavisszük” a szöget az origóba, vagyis megszerkesztjük a B_1 és a C_1 pontokat úgy, hogy $OB_1 = AB$, $OB_1 \parallel AB$ és $OC_1 = AC$, $OC_1 \parallel AC$ legyen (lásd a

mellékelt ábrát).

A szerkesztések alapján $b_1 = b - a$, $c_1 = c - a$ és $m(BAC \neg) = m(B_1AC_1 \neg)$. De $m(B_1AC_1 \neg) = m(B_1OX \neg) - m(C_1OX \neg) = \arg b_1 - \arg c_1$, tehát



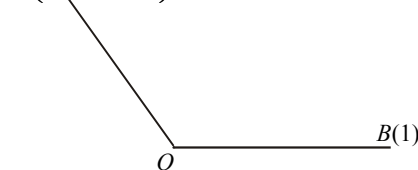
IV. 27. ábra

$m(BAC \neg) \in \text{Arg}(b-a) - \text{Arg}(c-a) = \text{Arg} \frac{b-a}{c-a}$, tehát $m(BAC \neg)$ az $\text{Arg} \frac{b-a}{c-a}$ halmaz

$[0, 2\pi)$ -be eső eleme. Ez éppen $\arg \frac{b-a}{c-a}$, tehát $m(BAC \neg) = \arg \frac{b-a}{c-a}$.

Megjegyzés. Itt a szögek mértékét inverz trigonometriai irányban mérjük és a $[0, 2\pi)$ bármely elemét elfogadjuk szögmértéknek. Például a mellékelt ábrán látható szög mértéke 240° .

$$C\left(-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$



IV. 28. ábra

Eredményünket a következő tételben foglaljuk össze.

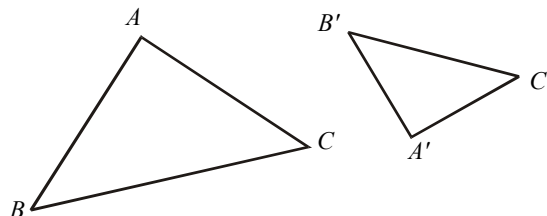
10.4.6. Tétel. $m((BAC)\angle) = \arg \frac{b-a}{c-a}$, ahol $A(a)$, $B(b)$ és $C(c)$ három különböző pont a síkban és a BAC háromszög pozitív körüljárású.

10.4.7. Hasonlósági kritérium háromszögekre

Feladat. Vezessünk le egy szükséges és elégséges feltételt arra vonatkozóan, hogy az ABC_Δ hasonló legyen $A'B'C'_\Delta$ -gel, és a körbejárási irányuk is egyezzen meg!

Megoldás. A második hasonlósági kritériumot komplex számokra ültetjük át:

IV. 29. ábra



$$ABC_{\Delta} \sim A'B'C'_{\Delta} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{BA}{B'A'} = \frac{CA}{C'A'} & (\text{irányítást is beleértve}), \text{ és } BA = |b-a| \\ (BAC)\angle \equiv (B'A'C')\angle \end{cases}$$

stb., tehát ha az első egyenlőségben a beltagokat felcseréljük, akkor a $\frac{|b-a|}{|c-a|} = \frac{|b'-a'|}{|c'-a'|}$ egyenlőséghez jutunk. A 10.4.5. tétel szerint a második összefüggés

ekvivalens az $\arg \frac{b-a}{c-a} = \arg \frac{b'-a'}{c'-a'}$ egyenlőséggel. Az előbbi két egyenlőség azt

jelenti, hogy a $\frac{b-a}{c-a}$ és $\frac{b'-a'}{c'-a'}$ komplex számok modulusa és argumentuma is

egyforma. Ez csak akkor lehetséges, ha a két komplex szám egyenlő, tehát $\frac{b-a}{c-a} = \frac{b'-a'}{c'-a'}$. Ez az egyenlőség az $a(b'-c') + b(c'-a') + c(a'-b') = 0$ alakban

is írható. Érvényes tehát a következő tétel:

10.4.8. Tétel. Az ABC_{Δ} és $A'B'C'_{\Delta}$ háromszögek akkor és csak akkor azonos körüljárási irányúak és hasonlóak, ha $a(b'-c') + b(c'-a') + c(a'-b') = 0$.

10.4.9. Következmények

1. Az ABC_{Δ} háromszög akkor és csak akkor egyenlő oldalú, ha

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc.$$

Bizonyítás. Az ABC_{Δ} háromszög akkor és csak akkor egyenlő oldalú, ha hasonló a BCA_{Δ} -gel, vagyis ha $a(c-a) + b(a-b) + c(b-c) = 0$. Ez éppen a kijelentésben szereplő egyenlőség.

2. Az ABC_{Δ} háromszög pontosan akkor egyenlő oldalú, ha $a\varepsilon + b\varepsilon^2 + c = 0$ vagy $a\varepsilon^2 + b\varepsilon + c = 0$.

Bizonyítás. Az ABC_{Δ} háromszög pontosan akkor egyenlő oldalú, ha hasonló az $X(1), Y(\varepsilon), Z(\varepsilon^2)$ affixumú pontok által meghatározott háromszöggel. Ez az XYZ vagy XZY körüljárások szerint lehetséges, tehát $a(\varepsilon - \varepsilon^2) + b(\varepsilon^2 - 1) + c(1 - \varepsilon) = 0$ vagy $a(\varepsilon^2 - \varepsilon) + b(\varepsilon - 1) + c(1 - \varepsilon^2) = 0$. Ha az első egyenlőséget $(1 - \varepsilon)$ -nal elosztjuk, az $a\varepsilon + b\varepsilon^2 + c = 0$ egyenlőséghez jutunk, míg ha a másodikat $\frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}$ -gyel szorozzuk, akkor $a\varepsilon^2 + b\varepsilon + c = 0$ egyenlőséghez jutunk, tehát a tulajdonság igaz.

3. Az ABC_{Δ} akkor és csak akkor pozitív körbejárású, derékszögű egyenlőszárú

$$(AB = AC) \text{ háromszög, ha } a = \frac{bi - c}{i - 1}.$$

Bizonyítás. A $X(0), Y(1), Z(i)$ affixumú pontok által meghatározott háromszög egyenlő szárú, derékszögű és pozitív körbejárású, tehát ABC akkor és csak akkor ilyen, ha $ABC_{\Delta} \sim XYZ_{\Delta}$, vagyis ha $a(y-z) + b(z-x) + c(x-y) = 0$. Ha behelyettesítünk $x=0, y=1$ és $z=i$ értékeket, majd kifejezzük az a -t, akkor éppen a kívánt egyenlőséghez jutunk.

10.4.10. Megjegyzés

Az a) és b) pont alapján következik, hogy

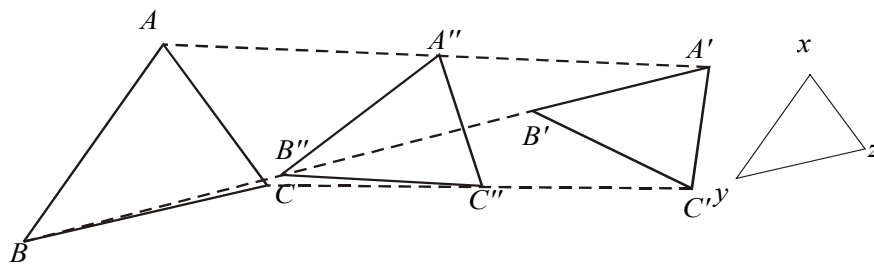
$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = (a\varepsilon + b\varepsilon^2 + c)(a\varepsilon^2 + b\varepsilon + c).$$

Ez direkt számolással is ellenőrizhető.

10.4.11. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy az ABC és $A'B'C'$ azonos körbejárású és hasonló háromszögek megfelelő csúcsait összekötő szakaszok felezőpontjai által meghatározott háromszög hasonló az ABC_{Δ} -gel.

Megoldás

IV. 30. ábra



Jelöljük az AA', BB' és CC' szakaszok felezőpontjait rendre A'' -tel, B'' -tel és C'' -tel. A számolások áttekinthetőségének érdekében válasszunk egy, az ABC -vel hasonló XYZ vonatkoztatási háromszöget. A 10.4.7. tétel szerint

$$a(y-z) + b(z-x) + c(x-y) = 0 \text{ és } a'(y-z) + b'(z-x) + c'(x-y) = 0.$$

Ha ezt a két egyenlőséget összeadjuk és 2-vel osztjuk, akkor az $\frac{a+a'}{2}(y-z) + \frac{b+b'}{2}(z-x) + \frac{c+c'}{2}(x-y) = 0$ egyenlőséghez jutunk. Ez éppen a kért

tulajdonságot fejezi ki, hisz $\frac{a+a'}{2} = a''$, $\frac{b+b'}{2} = b''$ és $\frac{c+c'}{2} = c''$, tehát $a''(y-z) + b''(z-x) + c''(x-y) = 0$, és így a 10.4.8. tétel értelmében $A''B''C''_{\Delta} \sim ABC_{\Delta}$.

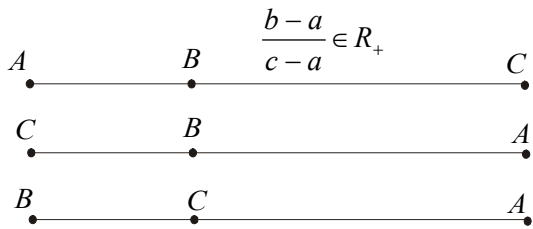
10.4.11. Kritérium kollinearitásra és körbeírhatóságra

Feladat. Keressünk szükséges és elégséges feltételt arra vonatkozóan, hogy

- a) az $A(a), B(b)$ és $C(c)$ pont egy egyenesen legyen;
- b) az AB és CD szakaszok tartóegyenesei egymásra merőlegesek legyenek;
- c) az $A(a), B(b), C(c)$ és $D(d)$ pontok egy körbeírható négyszög csúcsait képezzék (ebben a sorrendben).

Megoldás

- a) Az A , B és C pont akkor és csak akkor helyezkedik el egy egyenesen, ha $m(\angle BAC) = 0^\circ$ vagy $m(\angle BAC) = 180^\circ$. A 10.4.5. tétel szerint az első esetben $\arg \frac{b-a}{c-a} = 0$; a második esetben $\arg \frac{b-a}{c-a} = \pi$. Mindkét esetben a $\frac{b-a}{c-a}$ komplex



IV. 31. ábra

szám képzetes része 0, tehát a keresett feltétel $\frac{b-a}{c-a} \in \mathbb{R}$. A mellékelt ábráknak megfelelően a $\frac{b-a}{c-a}$ előjele a pontok

rendezéséről ad információt (a másik három lehetséges sorrendre $\frac{b-a}{c-a} < 0$).

- b) Megszerkesztjük a D_1 pontot úgy, hogy a $DCBD_1$ négyszög paralelogramma legyen. A szerkesztés alapján $AB \perp CD \Leftrightarrow AB \perp BD_1$ (1).

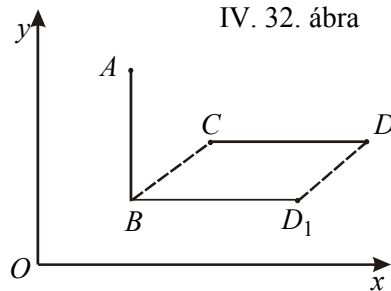
De $d_1 + c = d + b$ (10.4.4. következmény

3. pontja alapján) tehát $d_1 = b + d - c$, és így

$$m(\angle ABD_1) = \arg \frac{a-b}{d_1-b} = \arg \frac{a-b}{d-c} \quad (2).$$

Az (1) és a (2) alapján a kívánt feltétel:

$$i \frac{a-b}{d-c} \in \mathbb{R}.$$



IV. 32. ábra

- c) A körbeírhatóság feltétele:

$$m(\angle DAB) + m(\angle BCD) = \pi,$$

$$\text{vagyis } \arg \frac{d-a}{b-a} + \arg \frac{b-c}{d-c} = \pi.$$

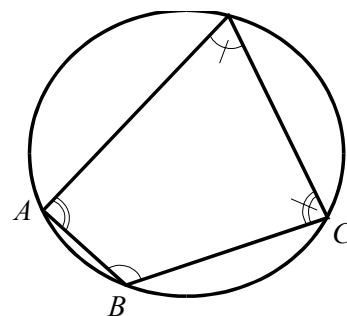
Ha az itt megjelenő argumentumok közül valamelyik π -nél nagyobb, akkor a négyszög nem

konvex, tehát $\arg \left[\frac{d-a}{b-a} : \frac{d-c}{b-c} \right] = \pi$.

Ez ekvivalens a $\frac{d-a}{b-a} : \frac{d-c}{b-c} \in \mathbb{R}_-$ feltétellel. Az

előbbi feltételeket a következő tételben foglaltuk össze:

IV. 33. ábra



10.4.12. Tétel

- a) Az A , B és C pont akkor és csak akkor kollineáris, ha $\frac{b-a}{c-a} \in \mathbb{R}$.
- b) Az AB és CD szakaszok tartó egyenesei pontosan akkor merőlegesek egymásra, ha $i \frac{a-b}{d-c} \in \mathbb{R}$.
- c) Az $ABCD$ konvex négyszög akkor és csak akkor körbeírható, ha $\frac{d-a}{b-a} : \frac{d-c}{b-c} \in \mathbb{R}_+$.

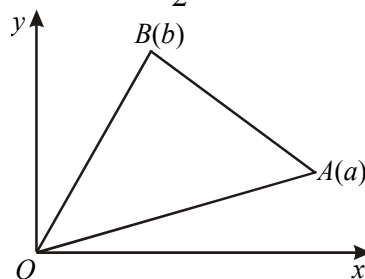
10.4.13. Háromszögek területe

Feladat

- a) Fejezzük ki az OAB pozitív körüljárású háromszög területét az A és B pontok affixumainak segítségével!
- b) Fejezzük ki az ABC pozitív körüljárású háromszög területét, ha $O \in \text{Int}(ABC)$.
- c) Hogyan változik a b) pontbeli kifejezés, ha $O \notin \text{Int}(ABC)$?

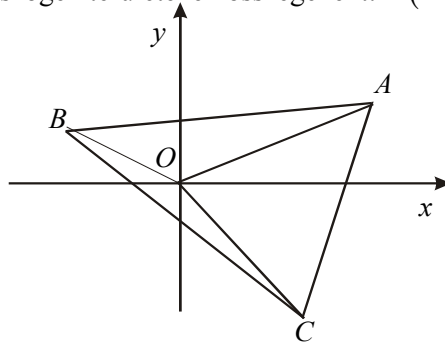
Megoldás. $T(OAB) = \frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin(\angle BOA) = \frac{1}{2} |a| \cdot |b| \cdot \sin(\arg(b) - \arg(a)) =$
 $= \frac{1}{2} |a| \cdot |b| \cdot \sin(\arg(b \cdot \bar{a})) = \frac{1}{2} |\bar{a}| \cdot |b| \cdot \sin(\arg(b\bar{a})) = \frac{1}{2} \text{Im}(b\bar{a}).$

Tehát az a) pontra a válasz: $T(OAB) = \frac{1}{2} \text{Im}(b\bar{a}).$



IV. 34. ábra

- b) Mivel $O \in \text{Int}(ABC)$ az ABC_{Δ} területe felírható az OAB , OBC és OCA háromszögek területének összegeként: $T(ABC) = T(OAB) + T(OBC) + T(OCA).$



IV. 35. ábra

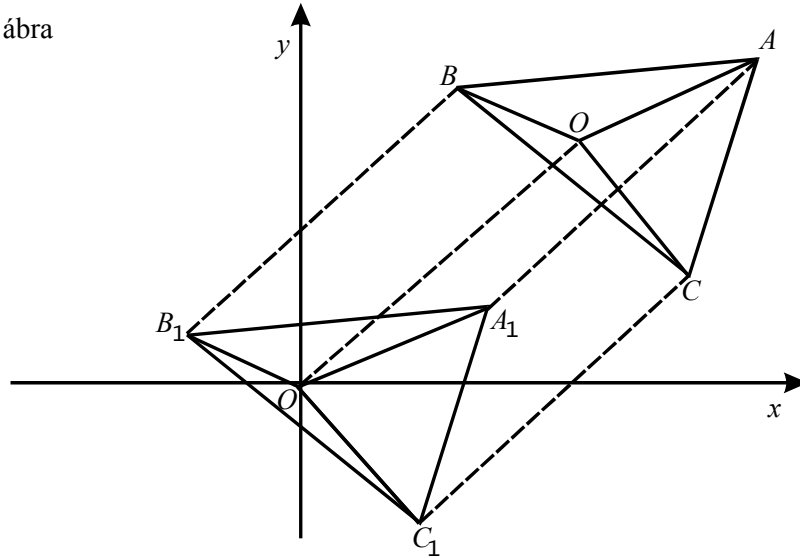
Az a) pont alapján

$$T(ABC) = \frac{1}{2} \operatorname{Im}(b\bar{a}) + \frac{1}{2} \operatorname{Im}(c\bar{b}) + \frac{1}{2} \operatorname{Im}(a\bar{c}) = \frac{1}{2} \operatorname{Im}(b\bar{a} + c\bar{b} + a\bar{c}).$$

c) Tételezzük fel, hogy $O \notin \operatorname{Int}(ABC)$. Vegyük fel az $O_1 \in \operatorname{Int}(ABC)$ pontot, és szerkesszük meg az A_1 , B_1 és C_1 pontot úgy, hogy az O_1AA_1O , O_1BB_1O és O_1CC_1O négyszögek paralelogrammák legyenek (lásd a mellékelt ábrát). A szerkesztés alapján az AA_1 , BB_1 és CC_1 szakaszok hossza megegyezik az OO_1 szakasz hosszával, és párhuzamosak is OO_1 -gyel, tehát az $A_1B_1C_1$ kongruens az ABC -gel, és $O \in \operatorname{Int}(A_1B_1C_1)$. Így a b) pont eredménye alkalmazható az $A_1B_1C_1$ háromszögre:

$$T(ABC) = T(A_1B_1C_1) = \frac{1}{2} \operatorname{Im}(b_1\bar{a}_1 + c_1\bar{b}_1 + a_1\bar{c}_1).$$

IV. 36. ábra



Mivel $a_1 = a - o_1$, $b_1 = b - o_1$ és $c_1 = c - o_1$, következik:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \operatorname{Im}(b_1\bar{a}_1 + c_1\bar{b}_1 + a_1\bar{c}_1) &= \frac{1}{2} \operatorname{Im}((b - o_1)(\bar{a} - \bar{o}_1) + (c - o_1)(\bar{b} - \bar{o}_1) + (a - o_1)(\bar{c} - \bar{o}_1)) = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Im}(b\bar{a} + c\bar{b} + a\bar{c} + 3o_1\bar{o}_1 - o_1(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) - \bar{o}_1(a + b + c)) = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Im}(b\bar{a} + c\bar{b} + a\bar{c}) + \frac{3}{2} \operatorname{Im}o_1\bar{o}_1 - \frac{1}{2} \operatorname{Im}[o_1(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) + \bar{o}_1(a + b + c)]. \end{aligned}$$

Az $O_1\bar{O}_1$ és $o_1(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) + \bar{o}_1(a + b + c)$ kifejezések értékei valósak, tehát képzetes részük nulla, és így $T(ABC) = \frac{1}{2} \operatorname{Im}(b\bar{a} + c\bar{b} + a\bar{c})$.

Ha az előbbi gondolatmenetet megismételjük egy n oldalú sokszögre, akkor a következő tételhez jutunk:

10.4.14. Kiril Docev tétele

Ha $a_1, a_2, \dots, a_n$ az $A_1 A_2 \dots A_n$ pozitív körüljárású konvex sokszög csúcsainak affixumai, akkor a sokszög területe

$$T = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \sum_{k=1}^n a_{k+1} \cdot \bar{a}_k, \text{ ahol } a_{n+1} = a_1.$$

Bizonyítás. Ha $O \in \operatorname{Int}(A_1 A_2 \dots A_n)$, akkor

$$T = T[A_1 A_2 \dots A_n] = \sum_{k=1}^n T(O A_k A_{k+1}) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \operatorname{Im} a_{k+1} \bar{a}_k = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \sum_{k=1}^n a_{k+1} \bar{a}_k,$$

tehát az egyenlőség igaz.

Ha $O \notin \operatorname{Int}(A_1 A_2 \dots A_n)$, akkor felvesszünk egy $O_1 \in \operatorname{Int}(A_1 A_2 \dots A_n)$ pontot és megszerkesztjük az $a'_k = a_k - o_1$ affixumú pontokat $k = \overline{1, n}$. Az így szerkesztett $A'_1 A'_2 \dots A'_n$ konvex sokszög az eredetivel egybevágó és az O pont a belsejében található, tehát

$$\begin{aligned} T &= T[A'_1 A'_2 \dots A'_n] = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \sum_{k=1}^n a'_{k+1} \bar{a}'_k = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \sum_{k=1}^n (a_{k+1} - o_1)(\bar{a}_k - \bar{o}_1) = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \sum_{k=1}^n a_{k+1} \bar{a}_k - \frac{n}{2} \operatorname{Im} o_1 \bar{o}_1 - \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left[o_1 \left(\sum_{k=1}^n \bar{a}_k \right) + \bar{o}_1 \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \right]. \end{aligned}$$

Mivel $o_1 \bar{o}_1$ és $o_1 \left(\sum_{k=1}^n \bar{a}_k \right) + \bar{o}_1 \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)$ valós számok, a képzetes részük 0, és így a tétel állítása ebben az esetben is igaz.

10.4.15. Metrikus relációk bizonyítása komplex számok segítségével

Feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha G az ABC_Δ súlypontja és M egy tetszőleges pont a háromszög síkjában, akkor

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + \frac{AB^2 + BC^2 + CA^2}{3}.$$

(Leibniz-tétel)

Bizonyítás. Az $MA^2 = |m - a|^2 = (m - a)(\bar{m} - \bar{a})$ és ehhez hasonló összefüggések alapján a bizonyítandó egyenlőség ekvivalens az

$$\begin{aligned} &(m - a)(\bar{m} - \bar{a}) + (m - b)(\bar{m} - \bar{b}) + (m - c)(\bar{m} - \bar{c}) = \\ &3 \left(m - \frac{a + b + c}{3} \right) \left(\bar{m} - \frac{\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}}{3} \right) + \frac{1}{3} ((a - b)(\bar{a} - \bar{b}) + (b - c)(\bar{b} - \bar{c}) + (c - a)(\bar{c} - \bar{a})) \end{aligned}$$

egyenlőséggel. Ezt egyszerű számolásokkal a következőképpen alakíthatjuk:

$$\begin{aligned}
& 3m\bar{m} - m(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) - \bar{m}(a + b + c) + a\bar{a} + b\bar{b} + c\bar{c} = \\
& = 3m\bar{m} - m(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) - \bar{m}(a + b + c) + \frac{(a + b + c)(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})}{3} + \\
& + \frac{1}{3}(a\bar{a} + b\bar{b} + b\bar{b} + c\bar{c} + c\bar{c} + a\bar{a} - a\bar{b} - b\bar{a} - b\bar{c} - \bar{b}c - \bar{c}a - \bar{c}a) \\
& 3(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + 2(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}).
\end{aligned}$$

Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, az eredeti egyenlőség is igaz.

10.4.16. Geometriai egyenlőtlenségek bizonyítása

Feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha A, B, C és D valamely sík négy pontja, akkor
 $AB \cdot CD + BC \cdot AD \geq AC \cdot BD$

(Ptolemájosz I. tétele).

Bizonyítás. Vizsgáljuk meg az $(a - b)(c - d)$, $(b - c)(d - a)$ és $(a - c)(b - d)$ kifejezéseket (egyelőre modulusok nélkül). $(a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd$,
 $(b - c)(d - a) = -bd + ab + cd - ac$ és $(a - c)(b - d) = ab - cb - ad + bc$.

Észrevehető, hogy a jobb oldalon minden tag kétszer szerepel: egyszer pozitív és egyszer negatív előjellel, tehát

$$(a - b)(c - d) + (b - c)(d - a) + (a - c)(b - d) = 0 \text{ (Euler).}$$

Ebből következik, hogy $AC \cdot BD = |(a - c)(b - d)| = |(a - b)(c - d) + (b - c)(d - a)| \leq$
 $\leq |(a - b)(c - d)| + |(b - c)(d - a)| = AB \cdot CD + BC \cdot AD$.

10.4.17. Megjegyzés. Az Euler-egyenlőség a $d(b - c) + d(c - a) + d(a - b) = 0$ és
 $a(b - c) + b(c - a) + c(a - b) = 0$ egyenlőségek különbségeként is előállítható. Itt az első egyenlőség azt a geometriai tényt fejezi ki, hogy az egy ponttá fajult háromszög tekinthető az ABC_Δ -gel hasonlóknak, míg a második egyenlőség azt fejezi ki, hogy minden háromszög hasonló önmagával.

IV.11. Gyakorlatok és feladatok

1. Határozd meg az x és az y valós számot az alábbi egyenlőségekből:

- a) $(x + 3i)(2 - i) = 4x - 3 - iy$;
- b) $(3x + 2y) + (3y + 2x)i = 5x + 5i$;
- c) $\frac{x - 2}{1 - i} + \frac{y - 3}{1 + i} = 1 - 3i$;
- d) $(5 + 3i)x - (2 + 5i)y = 11 - i$.

2. Végezd el a műveleteket!

- a) $(1 - 2i)(3 + 2i) + (3 - 2i)(1 + 2i) =$
- b) $\frac{1 + i}{3 - i} + \frac{1 - i}{3 + i} =$
- c) $(1 + i)^2 + (1 + i)^3 + (1 + i)^4 =$

d) $\frac{1+2i}{1-i} + \frac{1+i}{3-i} =$

3. Számítsd ki $|z|$ -t, ha $z = \left(\frac{17-5i}{11+6i}\right)^4$.

4. Határozd meg a z komplex számot az alábbi egyenlőségekből!

a) $z^2 = 27 + 36i$;

b) $z^2 = 8 + 6i$;

c) $z^2 + 4iz + 5 = 0$;

d) $z^2 - 3iz - 3 + i = 0$;

e) $\left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^2 + 2z + 1 = 0$;

f) $z^2 + \bar{z} = 5 + 3i$;

g) $|z-1| + 2z = 13 + 8i$;

h) $|z+1| = z + 2 + 2i$;

i) $z^3 - z^2 + 8z + 10 = 0$;

j) $z^3 = 2 + 11i$;

5. Határozd meg az $m \in \mathbb{R}$ paraméter értékeit úgy, hogy a $z^3 + (3+i)z^2 - 3z - (m+i) = 0$ egyenletnek legyen legalább egy valós gyöke!

6. Oldd meg az $z^2 - 3z + 2 \leq 0$ egyenlőtlenséget a komplex számok halmazában! Ábrázold a megoldáshalmazt és általánosítsd a feladatot és az eredményt tetszőleges másodfokú, valós együtthatós egyenlőtlenségre!

7. Oldd meg az $i \cdot z \leq 2$ egyenlőtlenséget a komplex számok halmazában!

8. Hozd egyszerűbb alakra az

$$E_1 = \left(\frac{a+bi}{a-bi}\right)^2 - \left(\frac{a-bi}{a+bi}\right)^2 \text{ és az } E_2 = \frac{(a+i)^3 - (a-i)^3}{(a+i)^2 - (a-i)^2} \text{ kifejezést!}$$

9. Határozd meg a sík azon (x, y) pontjait, amelyekre

a) $\left|\sqrt{x^2+4} + i\sqrt{y-4}\right| = \sqrt{10}$ és $y \geq 4$;

b) $\left|\sqrt{2x+y} + i\sqrt{x+2y}\right| = \sqrt{3}$, $2x+y \geq 0$ és $x+2y \geq 0$.

Mi történik, ha lemondunk az egyenlőtlenségekről, amelyek a gyök alatti kifejezések nemnegatív voltát biztosítják?

10. Bizonyítsd be az azonosságokat!

a) $\left|1 + z_1 \bar{z}_2\right|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)$;

b) $|z_1 + z_2|^2 + |z_2 + z_3|^2 + |z_3 + z_1|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_1 + z_2 + z_3|^2$;

c) $|z_1 - z_2|^2 + |z_2 - z_3|^2 + |z_3 - z_1|^2 + |z_1 + z_2 + z_3|^2 = 3(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2)$;

Értelmezd geometriailag is a bizonyított azonosságokat!

11. Bizonyítsd be az alábbi feltételes azonosságokat!

a) Ha $z^2 = z_1 z_2$, akkor $|z_1| + |z_2| = \left| \frac{1}{2}(z_1 + z_2) - z \right| + \left| \frac{1}{2}(z_1 + z_2) + z \right|$.

b) Ha $|a| = 1$, akkor $|z - a| = |1 - \bar{a}z|$.

c) Ha $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ és $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, akkor z_1, z_2 és z_3 egy egyenlő oldalú háromszög csúcsainak affixumai.

d) Ha $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$ és $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$, akkor $|z_1 + z_2 + z_3| = 2$.

e) Ha $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, akkor $|z_1 + z_2 + z_3| = |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|$.

12. Bizonyítsd be az egyenlőtlenségeket!

a) $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

b) $(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2) \leq |1 - \bar{z}_1 z_2|^2$.

c) $|1 + \bar{z}_1 z_2|^2 \leq (1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)$.

d) $|z_1 + z_2| + |z_2 + z_3| + |z_3 + z_1| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_1 + z_2 + z_3|$.

(Hlawka-egyenlőtlenség)

13. Vizsgáld meg a függvények injektivitását és szürjektivitását!

a) $f_\omega : C \rightarrow C$ $f_\omega(z) = \operatorname{Re} z + \omega \operatorname{Im} z$, ha $\omega \in C \setminus R$;

b) $f : C \rightarrow C$ $f(z) = 2z + \sqrt{z \cdot \bar{z}}$.

Ha valamelyik bijektív függvény, számítsd ki az inverzét! Lehet-e valamelyik függvény egyenlő a saját inverzével?

14. Bizonyítsd be, hogy minden, a -1 -től különböző, egységnyi modulusú komplex szám felírható $z = \frac{1 + \lambda i}{1 - \lambda i}$ alakban, ahol $\lambda \in R$.

15. Bizonyítsd be, hogy ha $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, akkor

a) $\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} \in R$, ha $z_1 z_2 \neq -1$;

b) $\frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3}{1 + z_1 z_2 z_3} \in R$, ha $z_1 z_2 z_3 \neq -1$.

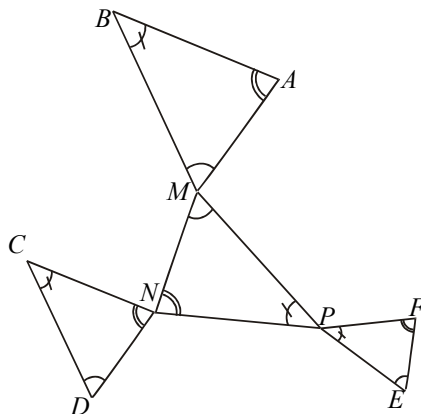
16. Bizonyítsd be, hogy ha $z \in C \setminus R$ és $\operatorname{Im} \frac{1 + z + z^2}{1 - z + z^2} = 0$, akkor $|z| = 1$.

17. Bizonyítsd be, hogy ha $z_1, z_2, z_3 \in C$ és $|z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1| = a$, valamint $|z_1 z_2 z_3| = b$, akkor létezik olyan $k \in \{1, 2, 3\}$, hogy $|z_k| \leq \frac{3b}{a}$.

- 18.** Bizonyítsd be, hogy ha $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ komplex számok modulusa azonos, és a $z_1 + z_2 z_3$, $z_2 + z_1 z_3$, illetve a $z_3 + z_1 z_2$ kifejezés értéke valós szám, akkor $z_1 z_2 z_3 = 1$.
- 19.** Oldd meg az alábbi egyenleteket!
- $\bar{z} = z^{n-1}$;
 - $\left(\frac{1+xi}{1-xi} \right)^n = \frac{1+i \operatorname{tg} \alpha}{1-i \operatorname{tg} \alpha}$, $x \in \mathbb{R}$;
 - $(x+i)^n + (x-i)^n = 0$, $x \in \mathbb{R}$;
 - $(1+z)^{11} + (1-z)^{11} = z^{11}$.
- 20.** Számítsd ki a következő összegeket!
- $S_1 = \sum_{k=1}^n k C_n^k \cos(k-1)\alpha$;
 - $S_2 = \sum_{k=1}^n k \cos k\alpha$;
 - $S_3 = \cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{2\pi}{n} + \dots + \cos \frac{(n-1)\pi}{n}$;
 - $S_4 = C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + \dots$.
- 21.** Bizonyítsd be!
- $(1 - C_n^2 + C_n^4 \dots)^2 + (C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 \dots)^2 = 2n$;
 - $C_n^1 - 3 \cdot C_n^3 + 3^2 \cdot C_n^5 - 3^3 \cdot C_n^7 + \dots = \frac{2^n}{\sqrt{3}} \sin \frac{n\pi}{3}$.
- 22.**
- Bizonyítsd be, hogy ha $z_1, z_2, \dots, z_{2n}$ az egység $2n$ -ed rendű gyökei, akkor

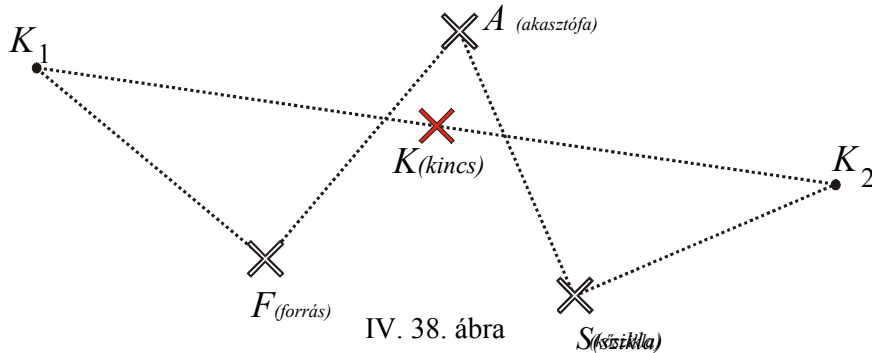
$$\sum_{k=1}^{2n} |z - z_k|^2 = 2n(|z|^2 + 1).$$
 - Mi az előbbi egyenlőség geometriai jelentése?
 - Bizonyítsd be, hogy ha $A_1 A_2 \dots A_n$ egy szabályos n -szög és M egy mozgó pont az $A_1 A_2 \dots A_n$ -be írt körön, akkor a $\sum_{k=1}^n M A_k^2$ konstans.
- 23.** Bizonyítsd be, hogy az $ABCD$ és az $A_1 B_1 C_1 D_1$ paralelogrammák megfelelő csúcsait összekötő szakaszok felezőpontjai is egy paralelogramma csúcspontjai!
- 24.** Bizonyítsd be, hogy ha az ABC_Δ oldalaira (kívül) egymással hasonló ABM , BCN és CAP egyenlőszárú háromszögeket szerkesztünk, akkor az MNP_Δ és ABC_Δ súlypontjai egybeesnek!

- 25.** Bizonyítsd be, hogy ha az ABC háromszög oldalain felvesszük az M, N és P pontot úgy, hogy $M \in BC$, $N \in CA$ és $P \in AB$, valamint $\frac{BM}{MC} = \frac{CN}{NA} = \frac{AP}{PB} = k$ legyen, akkor az ABC és MNP háromszögek súlypontjai egybeesnek! (Papposz tétele)
- 26. a)** Igaz-e az előbbi tétel fordítottja?
b) Fogalmazd meg Papposz tételét négyszögre!
- 27.** Az ABC_{Δ} oldalaira kívül megszerkesztjük a BCM, CAN és ABP háromszöget úgy, hogy $BCM_{\Delta} \sim CAN_{\Delta} \sim ABP_{\Delta}$. Bizonyítsd be, hogy az MNP_{Δ} és ABC_{Δ} súlypontjai egybeesnek!
- 28.** Bizonyítsd be, hogy bármely háromszög oldalfelezőivel lehet háromszöget szerkeszteni. Általánosítsd ezt a tulajdonságot!
- 29.** Az OAB, DOC és EFO hasonló háromszög és azonos körbejárású (a csúcsok sorrendjének megfelelően). Bizonyítsd be, hogy a BC, DE és AF szakaszok felezőpontjai által meghatározott háromszög is hasonló az OAB_{Δ} -gel!
- 30.** Az MNP, MAB, DNC és EFP hasonló háromszögek és azonos körbejárási iránnyal rendelkeznek. Bizonyítsd be, hogy a BC, DE és AF szakaszok felezőpontjai által meghatározott háromszög is hasonló MNP_{Δ} -gel!



IV. 37. ábra

- 31.** A lakatlan szigeten a kalózok az ellenük szegülőket egy fára akasztották az A helyen, majd elásták a kincset a következő módon: lemérték az akasztófától a forrásig az AF távolságot, a forrásnál jobbra fordultak, és az AF távolsággal egyenlő távolságra kijelölték a K_1 pontot. Visszamentek az akasztófáig (A), lépésekkel lemérték a szikláig terjedő AS távolságot, a kösziklánál balra fordultak, és a sziklától AS távolságra kijelölték a K_2 pontot. A két kijelölt, K_1 és K_2 pont közötti szakasz felezőpontjánál elásták a kincset. Húsz év múlva a kapitány visszatért, hogy kincseit magával vigye. Nagy meglepetésére az akasztófát sehol sem találta. Megtalálhatja-e a kincset?



IV. 38. ábra

- 32.** Az $A_1 A_2 \dots A_{2001}$ sokszög oldalainak felezőpontjait megjelöltük, majd a sokszöget kitöröltük. Meg lehet-e szerkeszteni a sokszöget a megjelölt pontok ismeretében? Hát akkor, ha 2000 oldalú sokszögből indulunk ki?
- 33.** Az $A_1 A_2 A_3 A_4$ körbeírható négyszögben H_1 -gyel, H_2 -vel, H_3 -mal, H_4 -gyel az $A_2 A_3 A_4$, $A_1 A_3 A_4$, $A_1 A_2 A_4$, illetve $A_1 A_2 A_3$ háromszögek ortocentrumait jelöltük. Bizonyítsd be, hogy:
- $H_1 H_2 H_3 H_4 \equiv A_1 A_2 A_3 A_4$;
 - az $A_1 A_2 A_3$, $A_1 A_2 A_4$, $A_1 A_3 A_4$ és $A_2 A_3 A_4$ háromszögek Euler-egyenesei összefutók.
- 34.** Az ABC_Δ oldalain felvettük az $M \in BC$, $N \in CA$ és $P \in AB$ pontot. Bizonyítsd be, hogy az ANP , BMP és CMN háromszögek köré írható köröknek van egy közös pontja! Bizonyítsd: ha M , N és P kollineáris, akkor a közös pont rajta van az ABC_Δ köré írt körön. (Miquel tétele)
- 35.** Az $ABCD$ négyszög átlóinak felezőpontjait jelöljük M -mel és N -nel ($M \in (AC)$, $N \in (BD)$) az átlók metszéspontját pedig O -val. Bizonyítsd be, hogy:
- $2MN \cdot AC \leq AB \cdot AD + CB \cdot CD$;
 - $4T[MON] \leq T[ABCD]$.
- 36.** Bizonyítsd be, hogy az egyenlő oldalú háromszög síkjában elhelyezkedő P pontnak a háromszög csúcsaitól mért távolságai lehetnek egy háromszög oldalainak hosszai. Szerkesszél olyan háromszöget, amelynek oldalhosszai arányosak ezekkel a távolságokkal! (Pompeiu-tétel)
- 37.** Bizonyítsd be, hogy ha M egy pont az O középpontú ABC egyenlő oldalú háromszög síkjában, akkor az M pontnak a BC -re, CA -ra és AB -re eső vetületei által meghatározott háromszögnek a súlypontja az OM szakasz felezőpontja.