Mecanică teoretică
Seminar nr. 10

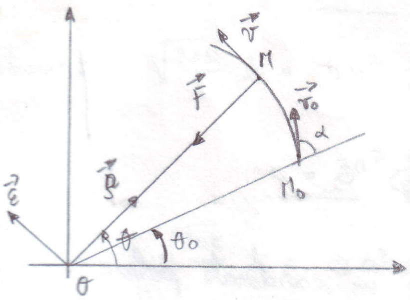
getahonda@yahoo.com

9. Mai. 2006

Forțe centrale

Se numește „forță centrală" forța a cărei direcție trece întotdeauna printr-un punct fix.

$\boxed{m\cdot\vec{a} = \pm F\cdot\frac{\vec{r}}{r}}$; $\vec{F} = \pm F\vec{\rho}$ $\begin{cases} - \text{ „atracție"} \\ + \text{ „respingere"} \end{cases}$



I Ecuația lui Binet:

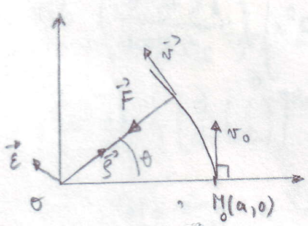
$$\begin{cases} -\dfrac{mc^2}{r^2}\left[\dfrac{d^2}{d\theta^2}\left(\dfrac{1}{r}\right)+\dfrac{1}{r}\right] = \pm F(r,\theta) \\ r(\theta_0) = r_0 \\ \dfrac{d}{d\theta}\left(\dfrac{1}{r}\right)\Big|_{\theta=\theta_0} = -\dfrac{1}{r_0}\operatorname{ctg}\alpha \\ r^2\dot{\theta} = c = r_0^2\dot{\theta}_0 = \underline{r_0 v_0 \sin\alpha} \end{cases}$$

II Dacă $F = F(r)$ prin aplicarea teoremei energiei se obține:

$$\underbrace{c^2\left\{\left[\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\right]^2 + \frac{1}{r^2}\right\}}_{v^2} = \frac{2}{m}\int \pm F(r)\,dr + h$$

Aplicații:

① Să se determine mișcarea unui punct material M de masă m acționat de o forță centrală atractivă de mărime $F = \dfrac{mk\sin^2\theta}{r^2}$. În momentul inițial punctul ocupă poziția $M_0(a,0)$ și are viteza $\sqrt{2K/3a}$ perpendiculară pe raza vectoare.



Sol: $F = F(r,\theta)$

Scriem ecuația lui Binet:

Forța este atractivă

$$-\frac{\cancel{m}c^2}{\cancel{r^2}}\left\{\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}\right\} = -\frac{\cancel{m}K\sin^2\theta}{\cancel{r^2}}$$

$$c = r_0 v_0 \sin\alpha = a\cdot\sqrt{\frac{2K}{3a}} = \sqrt{\frac{2}{3}aK}$$

Atunci: $\dfrac{2}{3}aK\left\{\dfrac{d^2}{d\theta^2}\left(\dfrac{1}{r}\right)+\dfrac{1}{r}\right\} = +K\sin^2\theta \Rightarrow \dfrac{d^2}{d\theta^2}\left(\dfrac{1}{r}\right)+\dfrac{1}{r} = \dfrac{3}{2a}\sin^2\theta \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r} = \frac{3}{2a}\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

Atașăm ecuația omogenă: $\dfrac{d^2}{d\theta^2}\left(\dfrac{1}{r}\right)+\dfrac{1}{r} = 0$ și ec. caracteristică $a^2+1=0 \Rightarrow a_{1,2} = \pm i$

și atunci $\dfrac{1}{r_0} = C_1\cos\theta + C_2\sin\theta$

În funcție de forma membrului drept căutăm o soluție particulară:

$\left(\dfrac{1}{2+\cos\theta}\right)' = -\dfrac{-\sin\theta}{(2+\cos\theta)^2}$ $\left(\dfrac{1}{f}\right)' = -\dfrac{f'}{f^2}$

$$\frac{1}{r_p} = \frac{3}{4a} + A\cos 2\theta$$

Înlocuim în ecuația neomogenă:

$$-4A\cos 2\theta + \cancel{\frac{3}{4a}} + A\cos 2\theta = \cancel{\frac{3}{4a}} - \frac{3\cos 2\theta}{4a} \Rightarrow -3A\cos 2\theta = -\frac{3\cos 2\theta}{4a} \Rightarrow$$

Atunci $\frac{1}{r_p} = \frac{3}{4a} + \frac{\cos 2\theta}{4a}$

Soluția generală este: $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_p} = C_1 \cos\theta + C_2 \sin\theta + \frac{3}{4a} + \frac{\cos 2\theta}{4a}$

Aflăm C_1 și C_2 din condițiile inițiale:

$$t = 0: \left.\begin{matrix} \theta = 0 \\ r_0 = a \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{1}{a} = C_1 + \frac{3}{4a} + \frac{1}{4a} \Rightarrow \underline{C_1 = 0}$$

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\Big|_{\theta=0} = -\frac{1}{r_0}\, \mathrm{ctg}\, \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\Big|_{\theta=0} = \left(C_2 \cos\theta - 2\,\frac{\sin 2\theta}{4a}\right)\Big|_{\theta=0} = 0 \Rightarrow \underline{C_2 = 0}$$

Atunci: $\boxed{\frac{1}{r} = \frac{3 + \cos 2\theta}{4a}}$ – ecuația traiectoriei în coordonate polare

$$\boxed{r = \frac{4a}{3 + \cos 2\theta}}$$

Pentru a determina ecuațiile de mișcare folosim $\boxed{r^2\dot{\theta} = C}$

$$r^2\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2ak}{3}} \Leftrightarrow r^2\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2ak}{3}} \Rightarrow \int_0^\theta \frac{16a^2}{(3+\cos 2\theta)^2}\,d\theta = \sqrt{\frac{2ak}{3}}\int_0^t dt$$

$$\sqrt{\frac{2ak}{3}}\,t = 16a^2\int_0^\theta \frac{d\theta}{(3+\cos 2\theta)^2} = 16a^2\int_0^\theta \frac{d\theta}{\left(3 + \frac{1-\mathrm{tg}^2\theta}{1+\mathrm{tg}^2\theta}\right)^2} = 16a^2\int_0^\theta \frac{d\theta}{\left(\frac{3+3\,\mathrm{tg}^2\theta + 1 - \mathrm{tg}^2\theta}{1+\mathrm{tg}^2\theta}\right)^2} =$$

$$\cos 2\theta = \frac{1-\mathrm{tg}^2\theta}{1+\mathrm{tg}^2\theta}$$

$$= 16a^2\int_0^\theta \frac{d\theta}{\left(\frac{4+2\,\mathrm{tg}^2\theta}{1+\mathrm{tg}^2\theta}\right)^2} = 16a^2\int_0^\theta \frac{d\theta}{4\left(\frac{2+\mathrm{tg}^2\theta}{1+\mathrm{tg}^2\theta}\right)^2} = 4a^2\int_0^\theta\left(\frac{1+\mathrm{tg}^2\theta}{2+\mathrm{tg}^2\theta}\right)^2 d\theta =$$

$$\mathrm{tg}\,\theta = u \Rightarrow \theta = \mathrm{arctg}\,u \Rightarrow d\theta = \frac{1}{1+u^2}\,du$$

$$= 4a^2\int_0^u\left(\frac{1+u^2}{2+u^2}\right)^2\frac{1}{1+u^2}\,du = 4a^2\int_0^u \frac{1+u^2}{(2+u^2)^2}\,du = 4a^2\int_0^u \frac{2+u^2-1}{(2+u^2)^2}\,du =$$

$$= \underbrace{4a^2\int_0^u \frac{1}{2+u^2}\,du}_{I_1} - 4a^2\underbrace{\int_0^u \frac{1}{(2+u^2)^2}\,du}_{I_2}$$

$$I_1 = \int_0^u \frac{1}{2+u^2}\,du = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{u}{\sqrt{2}}\Big|_0^u = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{u}{\sqrt{2}}$$

$$I_2 = \int_0^u \frac{1}{(2+u^2)^2}\,du = \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{u}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4}\cdot\frac{u}{(2+u^2)}\Big|_0^u = \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{u}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4}\frac{u}{2+u^2}$$

Fie $I_n = \int^u \frac{1}{(2+u^2)^n}\,du = \int \frac{u'}{(2+u^2)^n}\,du = \frac{u}{(2+u^2)^n} - \int u \cdot \frac{-n \cdot 2u}{(2+u^2)^{n+1}}\,du =$

$$\int \frac{u^2}{\ldots}\,du \ldots \frac{u}{\ldots} + 2n\int\frac{2+u^2}{\ldots}\,du - 4n\int\frac{du}{(2+u^2)^{n+1}}\,du =$$