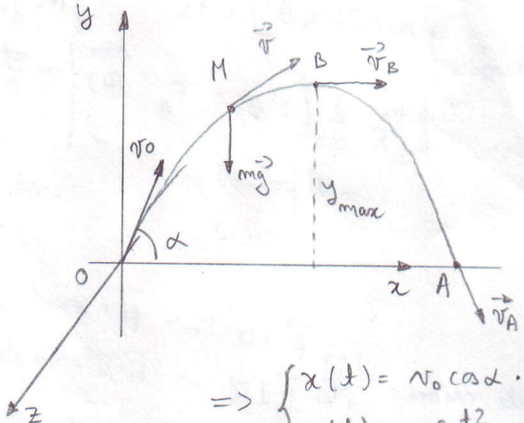
Aplicații

1. Un punct material M de masă m este aruncat din originea O a unui reper Oxyz legat de pământ cu viteza $\vec{v}_0$ ce face unghiul α cu orizontala. Să se studieze mișcarea punctului în vid sub acțiunea greutății sale. Să se determine ecuațiile de mișcare, traiectoria punctului, înălțimea maximă, viteza v_A în punctul A, în care M atinge pământul în cădere.



Mișcarea punctului M este o mișcare plană:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = -mg \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = c_1 t + c_2 \\ y(t) = -g\dfrac{t^2}{2} + c_3 t + c_4 \end{cases}$$

Condiții inițiale: $\begin{cases} x(0) = 0\ ;\ y(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \cos\alpha\ ;\ \dot{y}(0) = v_0 \sin\alpha \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = v_0 \cos\alpha \cdot t \\ y(t) = -g\dfrac{t^2}{2} + v_0 t \sin\alpha \end{cases}$$ – ec. mișcării

$t = \dfrac{x}{v_0\cos\alpha} \Rightarrow \boxed{y = -\dfrac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\cdot x^2 + x\,tg\,\alpha}$ – ec. traiectoriei.

Pt. a determina înălțimea maximă punem condiția $\vec{v}_B \parallel Ox$

$\vec{v}_B(\dot{x}_B, \dot{y}_B) \parallel Ox \Rightarrow \dot{y}_B = 0 \Rightarrow 0 = \dot{y}_B = -g t_B + v_0 \sin\alpha \Rightarrow \boxed{t_B = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g}}$ – timpul de urcare

$$y_B = -\frac{g t_B^2}{2} + v_0 t_B \sin\alpha = -\frac{g}{2g^2} v_0^2 \sin^2\alpha + v_0 \frac{v_0 \sin\alpha}{g}\cdot \sin\alpha = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

$\boxed{y_B = \dfrac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}}$ – înălțimea maximă

$x_B = v_0 \cos\alpha \cdot \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g}$

$\boxed{x_B = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}}$

Condiția de atingere a pământului: $y_A = 0 \Rightarrow -\dfrac{g t_A^2}{2} + v_0 t_A \sin\alpha = 0 \;\Big|: t_A$

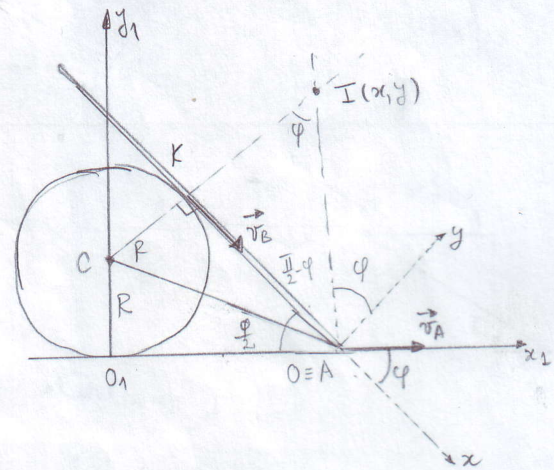
$\Rightarrow \boxed{t_A = \dfrac{2 v_0 \sin\alpha}{g}}$ – timpul total

$$\Rightarrow \begin{cases} x_A(t_A) = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \\ y_A(t_A) = 0 \end{cases}$$ – bătaia

$$v_A = \sqrt{\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2} = \sqrt{v_0^2\cos^2\alpha + g^2 t_A^2 + v_0^2 \sin^2\alpha - 2 g t_A v_0 \sin\alpha} = v_0$$

Obs: Mișcarea în aruncarea pe orizontală se desfășoară în plan vertical, traiectoria este o parabolă, iar viteza la lansare este egală cu viteza la aterizare.

Problema 2: Pe un cerc de rază R, tangent în origine axei O_1x_1 se sprijină continuu o bară AB, a cărei extremitate A se mișcă pe O_1x_1. Să se determine baza și rulanta mișcării barei.



Fie $\varphi = (\widehat{O_1x_1, Ox})$

$\widehat{O_1OK} = \varphi \Rightarrow \widehat{IOK} = \frac{\pi}{2} - \varphi \Rightarrow \widehat{OIK} = \varphi$

$\widehat{O_1OC} = \widehat{COK} = \frac{\varphi}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{IOC} = \frac{\pi}{2} - \varphi + \frac{\varphi}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} \\ \widehat{KCO} = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \Delta ICO$ - isoscel.

$\Rightarrow d(I, O_1x_1) = d(I, C) \Rightarrow$ baza este parabola cu focarul în C și axa directoare O_1x_1.

$$\begin{cases} x_{10} = R\,\mathrm{ctg}\frac{\varphi}{2} \\ y_{10} = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Ec. bazei: } \begin{cases} x_1 = x_{10} - \frac{dy_{10}}{d\varphi} \\ y_1 = y_{10} + \frac{dx_{10}}{d\varphi} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = R\,\mathrm{ctg}\frac{\varphi}{2} \\ y_1 = -\frac{R}{2} \cdot \frac{1}{\sin^2\frac{\varphi}{2}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_1 = -\frac{R}{2}\,\frac{\cos^2\frac{\varphi}{2} + \sin^2\frac{\varphi}{2}}{\sin^2\frac{\varphi}{2}} = -\frac{R}{2}\left(\mathrm{ctg}^2\frac{\varphi}{2} + 1\right) \Rightarrow y_1 = -\frac{R}{2}\left(\frac{x_1^2}{R^2} + 1\right)$$

$$\Rightarrow y_1 = -\frac{1}{2R}\left(x_1^2 + R^2\right) \text{ - ec. unei parabole.}$$

Ec. rulantei:
$$\begin{cases} x = \frac{dx_{10}}{d\varphi}\sin\varphi - \frac{dy_{10}}{d\varphi}\cos\varphi \\ y = \frac{dx_{10}}{d\varphi}\cos\varphi + \frac{dy_{10}}{d\varphi}\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -R \cdot \frac{1}{2\sin^2\frac{\varphi}{2}} \cdot \sin\varphi \\ y = -R\,\frac{1}{2\sin^2\frac{\varphi}{2}} \cdot \cos\varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{R}{2}\,\frac{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{\sin^2\frac{\varphi}{2}} \\ y = -\frac{R}{2}\,\frac{\cos^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}{\sin^2\frac{\varphi}{2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -R\,\mathrm{ctg}\frac{\varphi}{2} \Rightarrow \mathrm{ctg}\frac{\varphi}{2} = -\frac{x}{R} \\ y = -\frac{R}{2}\left(\mathrm{ctg}^2\frac{\varphi}{2} - 1\right) \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{R}{2}\left(+\frac{x^2}{R^2} - 1\right) \Rightarrow y = -\frac{1}{2R}\left(x^2 - R^2\right) \text{ - ec. unei parabole.}$$

$$\left(\mathrm{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)' = \left(\frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\right)' = \frac{-\frac{1}{2}\sin^2\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\sin^2\frac{\varphi}{2}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}$$