Geometrie Afină

Contents

Chapter 1

Spaţii vectoriale

1.1 Spaţii vectoriale peste un corp $\mathbb{K}$

Fie $\mathbb{K}$ un corp **comutativ** (poate fi corpul numerelor complexe $\mathbb{C}$, cel al numerelor reale $\mathbb{R}$, cel al numerelor raţionale $\mathbb{Q}$ sau al claselor de resturi modulo p, $\mathbb{Z}_{/p}$ (p prim), etc).

Fie $(V, +)$ un grup pe care definim o operaţie externă

$$\mathbb{K} \times V \to V$$

$$(\alpha, v) \to \alpha \cdot v$$

care satisface axiomele:

V1. $(\alpha\beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v)$

V2. $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$

V3. $\alpha \cdot (v + w) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot w$

V4. $1 \cdot v = v$,

pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ şi orice $v, w \in V$. $(V, +, \cdot)$ se numeşte $\mathbb{K}$-*spaţiu vectorial* (sau *spaţiu vectorial peste corpul* $\mathbb{K}$).

Observaţie. *Într-un spaţiu vectorial* $(V, +, \cdot)$, *adunarea este comutativă.*

$$(1 + 1) \cdot (a + b) = (1 + 1) \cdot a + (1 + 1) \cdot b = a + a + b + b$$

iar

$$(1 + 1) \cdot (a + b) = 1 \cdot (a + b) + 1 \cdot (a + b) = a + b + a + b,$$

deci $a + b = b + a$. $\square$

Elementele lui V se numesc *vectori*, iar elementele lui $\mathbb{K}$ se numesc *scalari*. Operaţia internă $+$ este *adunarea* vectorilor, iar operaţia externă $\cdot$ este *înmulţirea vectorilor cu scalari.*

Când $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, respectiv $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, spaţiul V se numeşte *spaţiu vectorial complex*, respectiv *spaţiu vectorial real.*

Propoziţie. *Într-un $\mathbb{K}$-spaţiu vectorial V, au loc:*

- $0_{\mathbb{K}} \cdot v = 0_V$, $\forall v \in V$, *unde* $0_{\mathbb{K}}$ *este elementul neutru al grupului aditiv* $(\mathbb{K}, +)$, *iar* 0_V *este elementul neutru al grupului* $(V, +)$, *numit* ***vectorul nul*** *al spaţiului vectorial* V.
- $\alpha \cdot 0_v = 0_v$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$
- $\alpha \cdot v = 0_v$ *dacă şi numai dacă* $\alpha = 0_{\mathbb{K}}$ *sau* $v = 0_V$
- $(-1) \cdot v = -v$, $\forall v \in V$, *unde* $-v$ *este* ***opusul*** *vectorului* $v \in V$ *în grupul* $(V, +)$.

1.2 Exemple de spaţii vectoriale

1. Spaţiul vectorilor legaţi şi spaţiul vectorilor liberi

sunt spaţii vectoriale reale.

2. Spaţiile vectoriale standard $\mathbb{K}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$

Pe produsul cartezian $\mathbb{K}^n = \{x = (x^1, x^2, \ldots, x^n), x^i \in \mathbb{K}, i = \overline{1, n}\}$ se poate defini o structură de $\mathbb{K}$-spaţiu vectorial, numită structura canonică a lui $\mathbb{K}^n$. Operaţia externă este dată de

$$x + y = (x^1 + y^1, x^2 + y^2, \ldots, x^n + y^n), \forall x = (x^1, x^2, \ldots, x^n), y = (y^1, y^2, \ldots, y^n) \in \mathbb{K}^n,$$

iar cea externă de

$$\alpha x = (\alpha x^1, \alpha x^2, \ldots, \alpha x^n), \forall \alpha \in \mathbb{K}^n, \forall x = (x^1, x^2, \ldots, x^n) \in \mathbb{K}^n.$$

3. Spaţiul $\mathfrak{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ al matricelor dreptunghiulare cu elemente din $\mathbb{K}$

este un $\mathbb{K}$-spaţiu vectorial. Dacă $A = (a_{i,j})$ şi $B = (b_{i,j})$ sunt două matrici din $\mathfrak{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, iar $\alpha \in \mathbb{K}$, atunci operaţiile care dau structura de spaţiu vectorial sunt

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j}) \in \mathfrak{M}_{m,n}(\mathbb{K})$$

şi

$$\alpha A = (\alpha a_{i,j}) \in \mathfrak{M}_{m,n}(\mathbb{K}).$$

Dacă $m = n$, se obţine $\mathbb{K}$-spaţiul vectorial al matricelor pătratice de ordinul n. Dacă $m = 1$, se obţine $\mathbb{K}$-spaţiul vectorial al matricelor linie, iar dacă $n = 1$, se obţine $\mathbb{K}$-spaţiul vectorial al matricelor coloană. Aceste ultime două spaţii se identifică cu $\mathbb{K}^n$.

4. Spaţiul funcţiilor $V^A = \{f : A \to V\}$

unde V este un $\mathbb{K}$-spaţiu vectorial, este, la rândul lui, un $\mathbb{K}$-spaţiu vectorial. Operaţia de adunare a funcţiilor este dată de

$$f + g : A \to V, \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x),$$

iar operaţia externă pe V^A peste $\mathbb{K}$

$$\mathbb{K} \times V^A \to V^A$$

$$(\alpha, f) \to \alpha f, \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x).$$

Spaţiile $\mathbb{K}^n$ şi $\mathfrak{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ sunt, de fapt, spaţii de tipul V^A, unde $V = \mathbb{K}$ şi $A = \{1, 2, \ldots, n\}$, respectiv $A = \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$.

5. Spaţiul $\mathfrak{F}(A; \mathbb{K})$ al funcţiilor cu suport finit

este un $\mathbb{K}$-spaţiu vectorial. Pe mulţimea

$$\mathfrak{F}(A; \mathbb{K}) = \{f : A \to \mathbb{K}, f(x) = 0 \text{ cu excepţia unui număr finit de puncte }\}$$

se defineşte suma şi înmulţirea cu scalari ca în exemplul anterior.

6. Spaţiul vectorial real $\mathcal{C}([a, b])$ al funcţiilor continue pe $[a, b]$,

cu operaţiile definite mai sus. De asemenea,

7. Spaţiul vectorial real $\mathcal{D}([a, b])$ al funcţiilor derivabile pe $[a, b]$

8. Spaţiul vectorial $\mathbb{K}_n[X]$ al polinoamelor într-o variabilă X (de grad mai mic sau egal cu un n fixat), cu coeficienţi in corpul $\mathbb{K}$,

relativ la operaţiile uzuale de adunare a polinoamelor şi înmulţire a acestora cu numere reale.

9. $\mathbb{K}$-spaţiul polinoamelor de forma $a_0(X^2 + Y^2) + a_1X + a_2Y + a_3$, cu $a_i \in \mathbb{K}$, $a_0 \neq 0$

este legat de mulţimea cercurilor din plan. La fel,

10. $\mathbb{K}$-spaţiul polinoamelor de forma $a_0XY + a_1X + a_2Y + a_3$, cu $a_i \in \mathbb{K}$, $a_0 \neq 0$

este legat de mulţimea hiperbolelor cu asimptotele paralele cu axele sistemului de coordonate.

11. Corpul numerelor reale $\mathbb{R}$

este un $\mathbb{Q}$-spaţiu vectorial. Evident, corpul numerelor raţionale $\mathbb{Q}$ **nu** este un $\mathbb{R}$-spaţiu vectorial (operaţia externă nu se poate defini).

12. Numerele reale de forma $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}$

formează un $\mathbb{Q}$-spaţiu vectorial.

13. Mulţimea soluţiilor unui sistem de ecuaţii liniare şi omogene

cu coeficienţi într-un corp $\mathbb{K}$ formeaza un $\mathbb{K}$-spaţiu vectorial.

14. Complexificatul unui spaţiu vectorial real

Dacă V este un spaţiu vectorial complex, pe el se poate defini întotdeauna o structură de spaţiu vectorial real. Operaţia internă rămâne aceeaşi, iar operaţia externă peste $\mathbb{R}$ este restricţia la $\mathbb{R}$ a operaţiei externe peste $\mathbb{C}$.

Să presupunem acum că V este un spaţiu vectorial real. Se poate defini pe $V^2 = V \times V$ o structură de spaţiu vectorial complex astfel: operaţia internă este dată de

$$V^2 \times V^2 \to V^2, \quad (v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2),$$

iar operaţia externă peste $\mathbb{C}$

$$\mathbb{C} \times V^2 \to V^2, \quad (\alpha + i\beta)(v, w) = (\alpha v - \beta w, \alpha w + \beta v).$$

Spaţiul V^2, cu structura de spaţiu vectorial complex, se numeşte *complexificatul* lui V şi se notează $\mathbb{C}_V$.

1.3 Dependenţă liniară de vectori

Fie $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ un sistem **finit** de vectori dintr-un $\mathbb{K}$-spaţiu vectorial V. Spunem că un vector $v \in V$ este *combinaţie liniară de vectorii sistemului S* dacă există scalarii $\lambda_1, \ldots \lambda_n \in \mathbb{K}$, astfel încât

$$v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n.$$

Exemple.

- *În spaţiul vectorial real al numerelor complexe, orice număr complex $z = a + bi$ este o combinaţie liniară a numerelor complexe 1 şi i.*
- *În spaţiul vectorial $\mathbb{K}_2[X]$ al polinoamelor de grad cel mult 2, orice polinom $P(X) = aX^2 + bX + c$ este o combinaţie liniară a polinoamelor 1, X şi X^2.*

Un sistem **finit** de vectori $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ (din $\mathbb{K}$-spaţiul vectorial V) se numeşte *liniar independent* (sau vectorii săi sunt *liniar independenţi*) dacă

$$0_V = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \Longrightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0_{\mathbb{K}}.$$

În caz contrar, S este *liniar dependent.*

Propoziţie. *Sistemul $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ este liniar dependent dacă şi numai dacă cel puţin unul din vectorii săi este o combinaţie liniară a celorlalţi.*

Propoziţie. *Fie $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ un sistem **finit** de vectori din V.*

- *Dacă un subsistem al lui S este liniar dependent, atunci şi S este liniar dependent.*
- *Dacă S este liniar independent, atunci orice subsistem al să este liniar independent.*

Exemple.

- *Numerele complexe $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 2 + 2i$ şi $z_3 = 3 + 3i$ sunt liniar dependente (peste corpul numerelor raţionale), deoarece $z_2 = \frac{2}{3} z_3$, chiar dacă z_1 nu este liniar dependent de z_2 şi z_3.*
- *Polinoamele $P_1(X) = X - X^2$, $P_2(X) = 1 - 2X$, $P_3(X) = 1 + X^2$ şi $P_4(X) = 1 - 2X^2$ sunt liniar dependente peste $\mathbb{Q}$, deoarece $P_4 = 2P_1 + P_2$.*
- *Se verifică uşor că numerele complexe $1 + i$ şi $1 - i$ sunt liniar independente peste corpul numerelor reale.*
- *Vectorii $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)$ din $\mathbb{K}^n$ sunt liniar independenţi peste corpul $\mathbb{K}$.*
- *Sistemul $\{1, \sin x, \cos x\}$ este liniar independent în spaţiul vectorial real $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.*
- *În $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, sistemul $\{1, \sin^2 x, \cos^2 x\}$ este liniar dependent.*
- *Sistemul alcătuit dintr-un singur vector v este liniar dependent dacă şi numai dacă v este vectorul nul. Doi vectori sunt liniar dependenţi dacă şi numai dacă au aceeaşi direcţie. Trei vectori (legaţi) sunt liniar dependenţi dacă şi numai dacă sunt coplanari. Patru vectori sunt întotdeauna liniar dependenţi.*

Ideea de vectori liniar independenţi se extinde şi la sisteme **infinite** de vectori.

Un sistem **infinit** $S = \{v_\alpha : \alpha \in I\}$ de vectori din spaţiul vectorial V este *liniar independent* dacă orice subsistem finit al său este liniar independent. În caz contrar, sistemul este liniar dependent.

Un vector $v \in V$ este *combinaţie liniară* a unui sistem de vectori S (**finit** sau **infinit**) dacă este combinţie liniară a unui subsistem **finit** al lui S.

Exemplu. *Fie $\mathbb{K}[X]$ spaţiul vectorial al polinoamelor într-o variabilă X, cu coeficienţi într-un corp $\mathbb{K}$. Sistemul **infinit** de polinoame $\{1, X, X^2, X^3, \ldots\}$ este liniar independent, deoarece orice subsistem **finit** al său $\{X^{m_1}, \ldots X^{m_k}\}$ este liniar independent.*

1.4 Baze. Coordonate de vectori. Dimensiune

Fie $S = \{v_\alpha : \alpha \in I\}$ un sistem oarecare (**finit** sau **infinit**) de vectori din $\mathbb{K}$-spaţiul vectorial V. Sistemul S este *sistem de generatori* pentru V dacă orice vector din V este o combinaţie liniară a lui S.

Un sistem de vectori $B = \{v_\alpha : \alpha \in I\}$ din $\mathbb{K}$-spaţiul vectorial V este o *bază* a lui V dacă

- B este liniar independent
- B este sistem de generatori pentru V.

Dacă $B = \{v_\alpha : \alpha \in I\}$ este o bază a $\mathbb{K}$-spaţiului vectorial V, atunci orice vector $v \in V$ se poate exprima **în mod unic** în forma

$$v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n,$$

unde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, iar $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset B$. Sistemul de scalari $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ poartă numele de *coordonatele vectorului v în baza B*.

Evident, dacă un $v \in V$ se scrie sub forma $v = \sum\limits_{\alpha \in I} \lambda_\alpha v_\alpha$ şi, în acelaşi timp $v = \sum\limits_{\alpha \in I} \mu_\alpha v_\alpha$ (coeficienţii λ_α şi μ_α sunt zero, cu excepţia unui număr finit, deci sumele sunt finite), atunci

$$\sum_{\alpha \in I} \lambda_\alpha v_\alpha - \sum_{\alpha \in I} \mu_\alpha v_\alpha = 0,$$

deci $\sum\limits_{\alpha \in I} (\lambda_\alpha - \mu_\alpha) v_\alpha = 0$, adică $\lambda_\alpha = \mu_\alpha$.

Exemple.

- *În spaţiul vectorial $\mathcal{E}_3$ al vectorilor legaţi într-un punct O, orice sistem format din trei vectori* ***necoplanari*** *determină o bază. Coordonatele unui vector arbitrar vor fi date de descompunerea (se poate face geometric...) acestui vector după direcţiile vectorilor din bază.*

- *În $\mathbb{K}^n$, sistemul de vectori $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)$ este o bază, numită* baza canonică *(sau* baza naturală*). Orice vector $v = (v^1, \ldots, v^n) \in \mathbb{K}^n$ se scrie în mod unic*

$$v = v_1 e_1 + \ldots v_n e_n.$$

- *O bază a lui $\mathbb{C}$ peste $\mathbb{R}$ este dată de numerele complexe 1 şi i.*

- *O bază pentru spaţiul vectorial al polinoamelor de grad cel mult 2 este dată de monoamele 1, X şi X^2.*

- *În $\mathbb{K}$-spaţiul vectorial $\mathfrak{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, o bază este formată din sistemul de matrici $E_{i,j}$, unde*

$$E_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 \cdots 0 \cdots 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ 0 \cdots 1 \cdots 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ 0 \cdots 0 \cdots 0 \end{pmatrix} \quad (1 \textit{ la intersecţia liniei } i \textit{ cu coloana } j).$$

O matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{K}$ se va scrie în mod unic sub forma

$$A = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} E_{i,j},$$

iar $\{a_{i,j}\}$ sunt coordonatele lui A în baza $\{E_{i,j}\}$.

- *Subspaţiul nul $\{0_V\}$ nu admite bază, deoarece sistemul $\{0_V\}$ este liniar dependent.*
- *Fie A o mulţime nevidă oarecare şi*

$$\mathfrak{F}(A;\mathbb{K}) = \{f : A \to \mathbb{K}, f(x) = 0 \text{ cu excepţia unui număr finit de puncte } \}.$$

Această mulţime are o structură de $\mathbb{K}$-spaţiu vectorial în raport cu adunarea funcţiilor şi înmulţirea acestora cu scalari. Construim o bază în acest spaţiu.

Pentru orice $a \in A$, definim funcţia

$$f_a : A \to \mathbb{K}, \quad f_a(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x = a \\ 0, & \text{dacă } x \neq a. \end{cases}$$

Sistemul de funcţii $B = \{f_a, a \in A\}$ este o bază a spaţiului $\mathfrak{F}(A;\mathbb{K})$. Într-adevăr, o funcţie $f \in \mathfrak{F}(A;\mathbb{K})$ se scrie sub forma

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_k f_{a_i}(x),$$

unde $\{a_i, i = \overline{1,k}\}$ este mulţimea (finită) a punctelor unde f nu se anulează, iar $\lambda_i = f(a_i)$. În plus, dacă

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_k f_{a_i} = 0 \in \mathfrak{F}(A;\mathbb{K}),$$

atunci, egalând cele două funcţii pentru punctele a_i, obţinem $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$.

- **Orice sistem de generatori al unui spaţiu vectorial conţine o bază.**
- **Fiecare sistem de vectori liniar independenţi dintr-un spaţiu vectorial poate fi extins la o bază.**
- **Orice spaţiu vectorial netrivial admite cel puţin o bază.**

Spaţiile vectoriale care admit o *bază finită* se vor numi *spaţii finit dimensionale.*

Propoziţie 1.4.1. *Dacă $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ este o bază* ***finită*** *a $\mathbb{K}$-spaţiului vectorial V şi $w = w_1e_1 + \ldots + w_ne_n \in V$ are proprietatea că $w_i \neq 0$, atunci sistemul $B^* = \{e_1, \ldots, e_{i-1}, w, e_{i+1}, \ldots, e_n\}$ este, de asemenea, o bază pentru V.*

Dem: Sistemul B^* este **liniar independent**. Într-adevăr, dacă

$$\lambda_1e_1 + \ldots + \lambda_{i-1}e_{i-1} + \lambda w + \lambda_{i+1}e_{i+1} + \ldots + \lambda_ne_n = 0, \quad (*)$$

înlocuind pe w, se obţine

$$(\lambda_1 + w_1)e_1 + \ldots + (\lambda_{i-1} + w_{i-1})e_{i-1} + \lambda w_ie_i + (\lambda_{i+1} + w_{i+1})e_{i+1} + \ldots + (\lambda_n + w_n)e_n = 0$$

şi, deci,

$$\lambda_1 + w_1 = 0, \ \ldots, \ \lambda_{i-1} + w_{i-1} = 0, \ \lambda_{i+1} + w_{i+1} = 0, \ \ldots \ \lambda_n + w_n = 0, \ \lambda = 0.$$

Înlocuind $\lambda = 0$ în (*), rămâne doar o combinaţie liniară de vectori din B, deci $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{i-1} = \lambda_{i+1} = \ldots = \lambda_n = 0$.

B^* este **sistem de generatori**. Orice vector $v \in V$ se scrie ca o combinaţie liniară de vectori din B. Înlocuind în această expresie vectorul e_i (care se exprimă din w ca o combinaţie liniară de vectori din B^*, va rezulta o expresie a lui v ca o combinaţie liniară de vectori din B^*. $\square$

Teoremă 1.4.2. (**Teorema înlocuirii, Steinitz**) *Dacă $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ este o bază a $\mathbb{K}$-spaţiului vectorial V şi $S = \{v_1, \ldots, v_p\} \subset V$ este un sistem de vectori liniar independenţi, atunci*

1) $p \leq n$

2) renumerotând, eventual, vectorii lui B, sistemul $B^* = \{v_1, \ldots v_p, e_{p+1}, \ldots, e_n\}$ este, de asemenea, o bază a lui V.

Dem: Vom folosi inducţia după p. Dacă $p = 1$, avem Propoziţia 1.4.1. Presupunem că teorema are loc pentru $p - 1$. Fie

$$S_1 = \{v_1, \ldots, v_{p-1}\}.$$

Aceasta înseamnă că $p - 1 \leq n$ şi că mulţimea

$$B_1^* = \{v_1, \ldots, v_{p-1}, e_p, \ldots, e_n\}$$

este o bază pentru V.

- **Nu putem avea** $p - 1 = n$. În caz contrar, $S_1 = B^*$, deci S_1 este o bază a lui V. Vectorul v_p (care nu se află în S_1) se va putea exprima ca o combinaţie liniară de elemente din S_1. Dar aceasta ar însemna că sistemul S nu este liniar independent, ceea ce contrazice ipoteza. Deci $p - 1 < n$, adică $p \leq n$.

- Deoarece B_1^* este o bază a lui V, vectorul v_p se poate scrie

$$v_p = \alpha_1 v_1 + \ldots \alpha_{p-1} v_{p-1} + \alpha_p e_p + \ldots + \alpha_n e_n,$$

unde cel puţin unul din coeficienţii $\alpha_p, \ldots, \alpha_n$ este nenul (altfel, v_p ar fi, din nou, combinaţie liniară de elemente din S_1). Renumerotând, eventual, putem presupune că $\alpha_p \neq 0$. Folosind, din nou, Propoziţia 1.4.1, B^* va deveni o bază pentru V. $\square$

Consecinţă. *Dacă un spaţiu vectorial V are o bază formată din n vectori, atunci orice bază a sa este formată din n vectori.*

Dem: Considerând două baze ale lui V, una cu m elemente şi una cu n elemente, oricare dintre acestea poate fi considerată sistemul liniar independent din Teorema 1.4.2. Vom avea $m \leq n$ şi $n \leq m$, adică $m = n$. $\square$

Numărul elementelor dintr-o bază a unui spaţiu vectorial V cu bază finită se numeşte *dimensiunea* spaţiului vectorial V $(\dim V)$.

Corolar. *Dacă* $\dim V = n$*, atunci oricare n vectori liniar independenţi din V formează o bază a lui V. De asemenea, un sistem de generatori format din n elemente este o bază.*

- Dimensiunea spaţiului nul $\{0_V\}$ este 0.
- Spaţiile vectoriale de dimensiune 1 se numesc *drepte vectoriale*, iar cele de dimensiune 2 *plane vectoriale.*
- Un spaţiu vectorial este de *dimensiune infinită* dacă nu admite baze finite (un spaţiu infinit dimensional admite sisteme **finite** şi **infinite** de vectori liniar independenţi .

1.5 Schimbări de baze

Fie V un $\mathbb{K}$-spaţiu vectorial n-dimensional şi $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ şi $B' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ două baze oarecare. Vectorii lui B' sunt combinaţii liniare de vectori din B, iar vectorii lui B sunt combinaţii liniare de vectori din B'.

$$e'_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ji} e_j, \quad i = \overline{1,n}, \quad p_{ij} \in \mathbb{K}, \tag{1.1}$$

$$e_j = \sum_{i=1}^{n} p'_{ij} e'_i, \quad j = \overline{1,n}, \quad p'_{ij} \in \mathbb{K}, \tag{1.2}$$

Formulele (1.1) sunt **formulele de trecere de la baza B la baza B'**, iar matricea $P = (p_{ij})$ este **matricea de trecere de la baza B la baza B'.**

Analog, (1.2) sunt **formulele de trecere de la baza** B' la baza B, iar matricea $P' = (p'_{ji})$ este **matricea de trecere de la baza B' la baza B.**

Evident, matricele P şi P' sunt unic determinate de cele două baze.

Propoziţie. *O matrice $P \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ este matricea unei schimbări de baze într-un $\mathbb{K}$-spaţiu vectorial n-dimensional V dacă şi numai dacă* $\det P \neq 0$.

Dem: "$\Longrightarrow$" Fie B şi B' două baze ale lui V, ca mai sus, iar P matricea de trecere de la B la B'.

Deoarece B' este bază, relaţia

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e'_i = 0$$

are loc numai pentru scalarii $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$. Dar, folosind formulele de trecere de la baza B la baza B', relaţia de mai sus este echivalentă cu

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\sum_{j=1}^{n} p_{ji} e_j) = 0$$

adică

$$\sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_{ji}) e_j = 0.$$

Dar şi B este bază, deci ultima relaţie este echivalentă cu

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_{ji} = 0. \tag{1.3}$$

Rezultă, de fapt, că sistemul liniar şi omogen (1.3) trebuie să admită doar soluţia banală $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$, deci determinantul matricei asociate acestui sistem (care este chiar matricea P) este nenul, $\det P \neq 0$.

"$\Longleftarrow$ Fie $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ o bază oarecare a lui V şi $P = (p_{ij}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ o matrice arbitrară, cu $\det P \neq 0$. Vom arăta că există o bază B' a lui V, pentru care matricea de trecere de la B la B' este chiar P.

Definim elementele muţimii B' chiar prin formulele de trecere (1.1).

$$e'_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ji} e_j, \quad i = \overline{1,n}, \quad p_{ji} \in \mathbb{K}.$$

Deoarece B' are n elemente, este suficient să arătăm că sistemul B' este liniar independent.

Dacă $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e'_i = 0$, înlocuind vectorii e'_i, obţinem $\sum\limits_{j=1}^{n} (\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i p_{ji}) e_j = 0$, deci $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i p_{ji} = 0$. Deoarece matricea P coincide cu matricea acestui sistem şi este nesingulară, sistemul admite doar soluţia banală $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$, deci B' este o bază a lui V, iar matricea de trecere le la B la B' este P. $\square$

Propoziţie. *Fie V un $\mathbb{K}$-spaţiu vectorial de dimensiune n, $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ şi $B' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ două baze oarecare ale sale, $v \in V$ un vector, iar $v = (v_1, \ldots, v_n)$ şi $v = (v'_1, \ldots, v'_n)$ coordonatele lui v respectiv în cele două baze. Dacă $P = (p_{ij})$ şi $P' = (p'_{ji})$ sunt matricele de trecere de la o bază la alta (ca şi în (1.1) şi (1.2)), atunci* ***formulele de transformare a coordonatelor*** *lui v la schimbarea bazelor sunt*

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} v'_j, \quad i \in \overline{1,n} \tag{1.4}$$

respectiv

$$v'_i = \sum_{j=1}^{n} p'_{ij} v_j, \quad i \in \overline{1,n}. \tag{1.5}$$

Dem: Rezultă din unicitatea scrierii unui vector ca o combinaţie liniară de elemente dintr-o bază.

$$v = \underline{\sum_{i=1}^{n} v_i e_i} = \sum_{j=1}^{n} v'_j e'_j = \sum_{j=1}^{n} v'_j (\sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i) = \underline{\sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} p_{ij} v'_j) e_i},$$

deci

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} v'_j.$$

Folosind formulele de trecere de la B' la B, obţinem expresiile pentru v'_i. $\square$

Fie, din nou, $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ şi $B' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ două baze oarecare ale unui spaţiu vectorial V, $v = (v_1, \ldots, v_n)$ şi $v = (v'_1, \ldots, v'_n)$ coordonatele unui vector v respectiv în cele două baze, iar $P = (p_{ij})$ şi $P' = (p'_{ji})$ sunt matricele de trecere de la o bază la alta. Am văzut că

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} v'_j, \quad i \in \overline{1, n}$$

şi

$$v'_j = \sum_{k=1}^{n} p'_{jk} v_k, \quad i \in \overline{1, n}.$$

Va rezulta că

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} v'_j = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} (\sum_{k=1}^{n} p'_{jk} v_k) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} p_{ij} p'_{jk} v_k = \sum_{k=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} p_{ij} p'_{jk}) v_k$$

deci $\sum\limits_{j=1}^{n} p_{ij} p'_{jk} = \delta_i^k$, adică produsul matricelor de trecere este matricea unitate de ordinul n,

$$PP' = P'P = I_n.$$

Rezultă că matricele care intervin în formulele de schimbare de baze (şi în formulele de schimbare de coordonate ale vectorilor) sunt nesingulare şi sunt **una inversa celeilalte** $P' = P^{-1}$.

- Formulele (1.4) şi (1.5) au o **formă matriceală**. Identificând un vectorul $v = (v_1, \ldots, v_n)$ cu matricea coloană $[v]_B = \begin{pmatrix} v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{pmatrix}$, **formulele de schimbare de coordonate** (1.4) devin

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} \cdots p_{1n} \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ p_{n1} \cdots p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v'_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v'_n \end{pmatrix},$$

sau, pe scurt,

$$[v]_b = P[v]_{B'}.$$

(În matricea P, coloanele reprezintă componentele vectorilor bazei B').

1.6 Subspaţii vectoriale

Fie V un $\mathbb{K}$-spaţiu vectorial. Un *subspaţiu vectorial* al lui V este o submulţime nevidă W a lui V, care rămâne un $\mathbb{K}$-spaţiu vectorial în raport cu operaţiile induse din V.

Aceasta înseamnă că W este subspaţiu vectorial al lui V dacă $W \subset V$, $W \neq \emptyset$ şi

$$\forall (w_1, w_2) \in W \times W, \quad w_1 + w_2 \in W$$

$$\forall (\lambda, w) \in \mathbb{K} \times W, \quad \lambda w \in W.$$

Vom nota $W \prec V$. O formulare echivalentă: $W \prec V$ dacă şi numai dacă $W \subset V$, $W \neq \emptyset$ şi

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K},\ \forall w_1, w_2 \in W \implies \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \in W.$$

Exemple.

- *Numerele complexe de forma $a(1+i)$ formează un subspaţiu vectorial real al lui $\mathbb{C}$ (peste $\mathbb{R}$).*
- *Spaţiul vectorial al polinoamelor de grad cel mult trei este un subspaţiu al spaţiului vectorial al polinoamelor de grad cel mult 7 (peste acelaşi corp).*
- *$\mathbb{Q}$ nu este subspaţiu vectorial al lui $\mathbb{R}$ (peste corpul numerelor reale).*
- *Mulţimea funcţiilor pare $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este un subspaţiu vectorial al spaţiului tuturor funcţiilor $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (peste $\mathbb{R}$).*
- *Orice spaţiu vectorial V admite cel puţin două subspaţii: subspaţiul nul şi subspaţiul însuşi. Ele se numesc **subspaţiile triviale** ale lui V.*
- *În spaţiul vectorilor legaţi într-un punct O, mulţimea vectorilor care au aceeaşi dreaptă suport $d \ni O$ este un subspaţiu vectorial de dimensiune 1, iar mulţimea vectorilor cu suportul conţinut într-un plan $\pi \ni O$ este un subspaţiu vectorial de dimensiune 2.*
- *Următoarele submulţimi sunt subspaţii vectoriale ale lui $\mathfrak{M}(\mathbb{K})$:*
  - *mulţimea matricelor **simetrice** este un subspaţiu vectorial de dimensiune $\dfrac{n(n+1)}{2}$.*
  - *mulţimea matricelor **antisimetrice** este un subspaţiu vectorial de dimensiune $\dfrac{n(n-1)}{2}$.*
  - *mulţimea matricelor **triunghiulare** este un subspaţiu vectorial de dimensiune $\dfrac{n(n+1)}{2}$.*

– *mulţimea matricelor **diagonale** este un subspaţiu vectorial de dimensiune n.*

Propoziţie. *Dacă W_1 şi W_2 sunt subspaţii ale $\mathbb{K}$-spaţiului vectorial V, atunci **intersecţia** şi **suma** acestora sunt subspaţii ale lui V.*

$$W_1 \cap W_2 = \{v \in V, v \in W_1 \text{ şi } v \in W_2\},$$

$$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2, w_1 \in W_1 \text{ şi } w_2 \in W_2\}.$$

Fie $S = \{v_\alpha,\ \alpha \in J\}$ un subsistem oarecare al $\mathbb{K}$-spaţiului vectorial V. Intersecţia tuturor subspaţiilor lui V care conţin S se numeşte *subspaţiul generat* de S (sau *închiderea liniară* a lui S, sau *înfăşurătoarea liniară* a lui S); îl vom nota $< S >$. Este subspaţiul cel mai mic (în raport cu incluziunea) care conţine pe S.

Propoziţie 1.6.1. *Fie $S = \{v_\alpha,\ \alpha \in J\}$ un subsistem de vectori al $\mathbb{K}$-spaţiului vectorial V. Atunci*

$$< S >= \{\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n, \quad n \in \mathbb{N}^*,\ \lambda_i \in \mathbb{K},\ v_i \in S\} \quad \textit{(sume finite)}.$$

Dem: Subspaţiul generat de S este

$$< S >= \bigcap_{\substack{W \prec V \\ S \subset W}} W.$$

Notăm

$$N = \{\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n, \quad n \in \mathbb{N}^*,\ \lambda_i \in \mathbb{K},\ v_i \in S\}.$$

- N este, evident, un subspaţiu vectorial al lui V şi îl conţine pe S, deci conţine şi $< S >$,
$$< S > \subset N.$$
- Un subspaţiu W al lui V, care conţine pe S, va conţine şi orice combinaţie liniară de elemente din S, deci orice vector de forma $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$. În consecinţă, îl va conţine pe N, adică N se află în intersecţia acestor subspaţii şi
$$N \subset < S > .$$

Deci $N =< S >$. $\square$

- S este un sistem de generatori pentru spaţiul $< S >$.
- Dacă S este liniar independent, atunci S este bază pentru $< S >$.
- Dacă S este un subspaţiu al lui V, atunci $S =< S >$.
- Subspaţiul generat de mulţimea vidă este identic cu subspaţiul nul
$$< \emptyset >= \{0_v\}.$$

- Subspaţiul generat de un vector nenul este o dreaptă vectorială

$$< v >= \{\lambda v,\ \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

- Subspaţiul generat de doi vectori liniar independenţi este un plan vectorial

$$< v_1, v_2 >= \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2,\ \lambda_1 \lambda_2 \in \mathbb{K}\}.$$

- Dacă $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ este o mulţime finită, atunci **subspaţiul generat de** $v_1, \ldots, v_n$ este

$$< v_1, \ldots, v_n >= \{\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n,\ \lambda_i \in \mathbb{K}\}.$$

- Se numeşte *rang al sistemului* $S = \{v_\alpha, \alpha \in I\}$ dimensiunea spaţiului $< S >$ generat de S. Rangul unui sistem **finit** de vectori $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ este egal cu numărul maxim de vectori liniar independenţi din S.

- Mulţimea soluţiilor unui sistem de ecuaţii liniare şi omogene (cu m ecuaţii şi n necunoscute) are o structură de spaţiu vectorial. Dacă rangul matricei coeficienţilor sistemului este r, atunci **dimensiunea spaţiului soluţiilor** sale este $n - r$.

Propoziţie 1.6.2. *Dacă spaţiul vectorial V este de dimensiune finită şi W este un subspaţiu al lui V, atunci* $\dim W \leq \dim V$. *Dacă, în plus,* $\dim W = \dim V$, *atunci* $W = V$.

Dem: Deoarece W este un subspaţiu al lui V, orice sistem de vectori liniar independenţi în W va fi liniar independent şi în V. Conform Teoremei 1.4.2, acesta se poate completa până la o bază în V, deci are cel mult atâtea elemente cât este dimensiunea lui V. În consecinţă, $\dim W \leq \dim V$.

Presupunem că $\dim W = \dim V$. Atunci, o bază a lui W, fiind cuprinsă într-o bază a lui V şi având acelaşi cardinal, coincide cu aceasta din urmă. Spaţiile W şi V vor fi, deci, generate de aceeaşi bază şi vor coincide. □

Propoziţie. *Fie W_1 şi W_2 două subspaţii ale lui V. Atunci*

$$< W_1 \cup W_2 >= W_1 + W_2.$$

- În general, dacă $\{W_\alpha,\ \alpha \in I\}$ este o mulţime de subspaţii ale lui V, subspaţiul generat de mulţimea $M = \bigcup\limits_{\alpha \in I} W_\alpha$ se numeşte **suma subspaţiilor** W_α şi se scrie $< M >= \bigcup\limits_{\alpha \in I} W_\alpha$.

- Suma a două subspaţii W_1 şi W_2 ale lui V se numeşte *sumă directă* dacă fiecare vector $v \in W_1 + W_2$ se scrie **în mod unic** sub forma

$$v = w_1 + w_2.$$

  Suma directă a subspaţiilor W_1 şi W_2 se notează $W_1 \oplus W_2$.

Propoziţie. *Suma a două subspaţii W_1 şi W_2 ale lui V este sumă directă dacă şi numai dacă intersecţia acestora este subspaţiul nul*

$$W_1 \oplus W_2 \Longleftrightarrow W_1 \cap W_2 = \{0_V\}.$$

Dem: "$\Longrightarrow$" Fie $v \in W_1 \cap W_2$. Dacă $v \neq 0_V$, atunci un vector arbitrar $w \in W_1 \oplus W_2$ ar admite două scrieri distincte $w = w_1 + w_2 \in W_1 + W_2$ şi $w = (w_1 + v) + (w_2 - v) \in W_1 + W_2$, contradicţie cu faptul că suma este directă.

"$\Longleftarrow$" Presupunem că un vector $w \in W_1 + W_2$ admite două scrieri de forma $w = w_1 + w_2 \in W_1 + W_2$ şi $w = u_1 + u_2 \in W_1 + W_2$. Atunci $0_v = (w_1 - u_1) + (w_2 - u_2)$. Cum $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$, va rezulta că $w_1 - u_1 = w_2 - u_2 = 0_V$, adică scrierea lui w este unică şi suma subspaţiilor W_1 şi W_2 este directă: $W_1 \oplus W_2$. $\square$

- Fie $W_1, \ldots, W_n$ un număr finit de subspaţii ale lui V. **Suma** acestora va fi subspaţiul

$$\sum_{i=1}^{n} W_i = W_1 + \ldots + W_n,$$

  iar un vector $w \in \sum\limits_{i=1}^{n} W_i$ este de forma

$$w = w_1 + \ldots + w_p,\ w_i \in W_i,\ i \in \overline{1,n}.$$

  Dacă w se scrie **în mod unic** în forma de mai sus, atunci suma de spaţii este **directă** şi se notează

$$W_1 \oplus \ldots \oplus W_n = \bigoplus_{i=1}^{n} W_i.$$

Subspaţii suplimentare. Hiperplane vectoriale

Două subspaţii vectoriale W_1 şi W_2 ale unui $\mathbb{K}$-spaţiu vectorial V se numesc *suplimentare* dacă V este suma lor directă

$$V = W_1 \oplus W_2.$$

Un subspaţiu $H \prec V$ se numeşte *hiperplan vectorial* dacă este suplimentar unei drepte vectoriale din V.

Exemple.

- *Două drepte distincte din spaţiul euclidian* 3*-dimensional, care trec prin origine, sunt subspaţii vectoriale* ***independente*** *(adică intersecţia lor este subspaţiul nul* $\{0_V\}$*). Suma lor este o sumă directă şi este planul vectorial determinat de cele două drepte.*

- *Un plan şi o dreaptă care nu aparţine planului, în spaţiul euclidian* 3*-dimensional, care trec prin origine, sunt subspaţii vectoriale independente. Suma lor este directă şi este întreg spaţiul. Sunt, deci, subspaţii vectoriale suplimentare.*

- *Subspaţiile matricelor simetrice, respectiv antisimetrice, sunt subspaţii suplimentare. Pentru orice matrice $A \in \mathfrak{M}(\mathbb{K})$, avem*

$$A = A^s + A^a,$$

unde $A^s = \dfrac{1}{2}(A +^t A)$ *este o matrice simetrică, iar* $A^a = \dfrac{1}{2}(A -^t A)$ *este o matrice antisimetrică.*

- *Subspaţiile matricelor triunghiulare şi al matricelor simetrice nu sunt independente, doarece intersecţia lor este subspaţiul matricelor diagonale.*

Propoziţie. *Fie V un $\mathbb{K}$-spaţiu vectorial n-dimensional. Orice subspaţiu W de dimeniune m al lui V admite cel puţin un subspaţiu suplimentar în V. Subspaţiul suplimentar va avea dimensiunea $n - m$.*

Dem: W este, la rândul său, un spaţiu vectorial m-dimensional, deci admite o bază finită, cu m elemente, $B = \{e_1, \ldots, e_m\}$. Această bază se poate completa până la o bază a lui V. Fie $S = \{f_{m+1}, \ldots, f_n\}$ un sistem de vectori din V, astfel încât $B \cup S$ să fie bază a lui V. Fie U spaţiul vectorial generat de S, evident un subspaţiu $(n - m)$-dimensional al lui V. Este imediat faptul că U este un spaţiu suplimentar al lui W. $\square$

- Dacă V este un spaţiu vectorial n-dimensional, atunci **hiperplanele** sunt subspaţii de dimensiune $n - 1$.

- Hiperplanele unui spaţiu vectorial 2-dimensional sunt dreptele vectoriale.

- Hiperplanele unui spaţiu vectorial 3-dimensional sunt planele vectoriale.

- Propoziţia anterioară este adevărată şi în **cazul spaţiilor vectoriale infinit dimensionale**: Orice subspaţiu propriu al unui spaţiu vectorial admite cel puţin un subspaţiu suplimentar.

Teoremă 1.6.3. (existenţa hiperplanelor) *Fie V un spaţiu vectorial (finit sau infinit dimensional) şi W un subspaţiu propriu al său. Există cel puţin un hiperplan vectorial al lui V care conţine pe W.*

Dem: Fie B o bază a lui W. Aceasta se poate completa până la o bază a lui V. Fie S un sistem de vectori din V, pentru care $B \cup S$ este bază a lui V. Sistemul S este nevid (altfel, B ar fi o bază a lui V, deci W şi V ar fi generate de acelaşi sistem de vectori, adică ar coincide şi W nu ar mai fi un subspaţiu propriu al lui V). Fie $v \in S$ şi fie

$$H =< B \cup (S \setminus \{v\}) > .$$

Evident, $V =< v > \oplus H$, deci H este un hiperplan al lui V. Mai mult, deoarece H conţine baza lui W, H va conţine întreg spaţiul W. $\square$

Teoremă 1.6.4. *Fie V un $\mathbb{K}$-spaţiu vectorial n-dimensional şi W un subspaţiu de dimeniune m al lui V. Atunci W este intersecţia a $n - m$ hiperplane vectoriale.*

Dem: Fie $B = \{e_1, \ldots, e_m\}$ o bază a lui W. Aceasta se poate completa până la o bază a lui V. Fie $S = \{f_{m+1}, \ldots, f_n\}$ un sistem de vectori din S, pentru care $B \cup S$ este o bază a lui V. Fie

$$B_i = (B \cup S) \setminus \{f_{m+i}\}, \quad i \in \overline{1, n-m}.$$

Sistemele B_i conţin câte $n-1$ vectori: toţi vectorii din baza lui V, mai puţin respectiv câte un vector din S. Fie

$$H_i =< B_i >, \quad i \in \overline{1, n-m}.$$

Evident, H_i sunt $n-m$ hiperplane ale lui V. Vom arăta că

$$W = \bigcap_{i=1}^{n-m} H_i.$$

Fie $M = \bigcap\limits_{i=1}^{n-m} H_i$.

- $W \subset B_i$, $\forall i \in \overline{1, n-m}$, deci $W \subset< B_i >= H_i$, $\forall i \in \overline{1, n-m}$, adică $W \subset \bigcap\limits_{i=1}^{n-m} H_i = M$.
- Dacă $v \in M$, atunci $v \in H_i$, $\forall i \in \overline{1, n-m}$, deci v va fi o combinaţie liniară de vectori numai din B (elementele lui S "dispar" pe rând), adică $v \in< B >= W$ şi $M \subset W$. $\square$

Teorema anterioară are loc şi în cazul spaţiilor vectoriale **infinit dimensionale**: Dacă W este un subspaţiu propriu al unui spaţiu vectorial V, atunci există o familie de hiperplane H_α, $\alpha \in I$, astfel încât

$$W = \bigcap_{\alpha \in I} H_\alpha.$$

Teorema dimensiunii, Grassmann

Fie W_1 şi W_2 două subspaţii (de dimensiune finită) ale spaţiului vectorial V. Are loc relaţia

$$\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2).$$

Dem: Presupunem că $\dim W_1 = m$, $\dim W_2 = n$ şi $\dim(W_1 \cap W_2) = p$. Fie

$$B = \{e_1, \ldots, e_p\}$$

o bază a lui $W_1 \cap W_2$. Aceasta se poate completa atât la o bază B_1 a lui W_1, cât şi la o bază B_2 a lui W_2. Să presupunem că

$$B_1 = \{e_1, \ldots, e_p, a_{p+1}, \ldots, a_m\} \quad \text{este o bază a lui } W_1 \text{ şi}$$

$$B_2 = \{e_1, \ldots, e_p, b_{p+1}, \ldots, b_n\} \quad \text{este o bază a lui } W_2.$$

Fie

$$B_3 = \{e_1, \ldots, e_p, a_{p+1}, \ldots, a_m, b_{p+1}, \ldots, b_n\}.$$

Vom arăta că B_3 este o bază a lui $W_1 + W_2$.

- Mai întâi, B_3 este un **sistem de generatori** pentru $W_1 + W_2$. Fie $v \in W_1 + W_2$. Atunci $v = w_1 + w_2$, unde $w_1 \in W_1$ şi $w_2 \in W_2$. Deci

$$v = \underbrace{\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_p e_p + \lambda_{p+1} a_{p+1} + \ldots + \lambda_m a_m}_{w_1} + \underbrace{\mu_1 e_1 + \ldots + \mu_p e_p + \mu_{p+1} b_{p+1} + \ldots + \mu_m b_m}_{w_2},$$

adică v este o combinaţie liniară de vectori din B_3.

- Sistemul B_3 este **liniar independent**. Fie

$$(*)\ \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_p e_p + \lambda_{p+1} a_{p+1} + \ldots + \lambda_m a_m + \mu_{p+1} b_{p+1} + \ldots + \mu_m b_m = 0.$$

  Vom arăta că toţi coeficienţii se anulează.

Relaţia de mai sus este echivalentă cu

$$\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_p e_p + \lambda_{p+1} a_{p+1} + \ldots + \lambda_m a_m = -\mu_{p+1} b_{p+1} - \ldots - \mu_m b_m.$$

Termenul din partea stângă este un vector din W_1, iar cel din dreapta un vector din W_2. Rezultă că ambii membri se află în $W_1 \cap W_2$. Deoarece $\mu_{p+1} b_{p+1} + \ldots + \mu_m b_m \in W_1 \cap W_2$, rezultă că

$$\mu_{p+1} b_{p+1} + \ldots + \mu_m b_m = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_p e_p$$

şi relaţia (*) devine

$$\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_p e_p + \lambda_{p+1} a_{p+1} + \ldots + \lambda_m a_m + \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_p e_p = 0$$

sau

$$(\lambda_1 + \alpha_1) e_1 + \ldots + (\lambda_p + \alpha_p) e_p + \lambda_{p+1} a_{p+1} + \ldots + \lambda_m a_m = 0.$$

Aceasta din urmă este o combinaţie liniară de vectori din B_1, care este o bază pentru W_1, deci toţi scalarii sunt zero. În particular,

$$\lambda_{p+1} = \ldots = \lambda_m = 0.$$

Înlocuind în (*), obţinem o combinaţie liniară de vectori din B_2, deci şi restul scalarilor se anulează.

Rezultă că B_3 este o bază a lui $W_1 + W_2$ şi dimensiunea acestuia este egală cu numărul de elemente din bază.

$$\dim(W_1 + W_2) = p + (m-p) + (n-p) = m + n - p = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2). \quad \square$$

- Dacă W_1 şi W_2 sunt subspaţii **independente**, atunci

$$\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 + W_2).$$

- Dacă W_1 şi W_2 sunt subspaţii ale spaţiului vectorial n-dimensional V şi $\dim W_1 + \dim W_2 > n$, atunci $W_1 \cap W_2 \neq \{0_v\}$.

1.7 Morfisme de spaţii vectoriale

Fie V şi W două spaţii vectoriale peste acelaşi corp $\mathbb{K}$. O aplicaţie $f : V \to W$ se numeşte *morfism* al lui V în W (sau *aplicaţie liniară*, sau *omomorfism*) dacă satisface condiţiile:

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \quad \forall\, v_1, v_2 \in V,$$

$$f(\lambda v) = \lambda f(v) \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{K}, \forall\, v \in V.$$

Condiţiile de mai sus sunt echivalente cu

$$f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) \quad \forall\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}, \forall\, v_1, v_2 \in V.$$

- O aplicaţie liniară $f : V \to V$ se numeşte *endomorfism* (sau *operator liniar*) al spaţiului vectorial V.
- O aplicaţie liniară **bijectivă** $f : V \to W$ se numeşte *izomorfism* al lui V pe W. Două spaţii vectoriale V şi W sunt *izomorfe* ($V \simeq W$) dacă există un izomorfism $f : V \to W$.
- Un izomorfism $f : V \to V$ se numeşte *automorfism* al lui V.

Propoziţie. *1) Fie $f : V \to W$ un morfism de spaţii vectoriale. Atunci*

a) $f(-v) = -f(v), \forall\, v \in V$

b) $f(0_V) = 0_W$.

2) Dacă $f : V \to W$ este un izomorfism de spaţii vectoriale, atunci şi $f^{-1} : W \to V$ este un izomorfism.

Exemple.

- *Aplicaţia identică $1_V : V \to V$, $1_V(v) = v$, $\forall v \in V$, este o aplicaţie liniară.*
- *Dacă V este un spaţiu vectorial, iar W un subspaţiu al său,* ***injecţia canonică*** *a lui W în V, $i : W \hookrightarrow V$, $i(w) = w$, $\forall w \in W$, este o aplicaţie liniară.*
- *Aplicaţia nulă $0 : V \to W$, $0(v) = 0_W$, $\forall v \in V$, este o aplicaţie liniară.*
- ***Omotetia*** *de raport h este o aplicaţie liniară. Dacă V este un $\mathbb{K}$-spaţiu vectorial şi $h \in \mathbb{K}^*$, omotetia de raport h este definită prin $H_h : V \to V$, $H_h(v) = hv$, $\forall v \in V$. Deoarece $h \neq 0$, H_h admite o inversă $H_{1/h} : V \to V$, deci o omotetie a unui spaţiu este un automorfism al acestuia.*
- *Operaţia de derivare, în spaţiul vectorial $\mathbb{R}[X]$, este o aplicaţie liniară a spaţiului în el însuşi.*

- *Fie V un $\mathbb{K}$-spaţiu vectorial şi W_1 şi W_2 două subspaţii suplimentare: $V = W_1 \oplus W_2$. Un vector $v \in V$ admite o descompunere unică de forma $v = w_1 + w_2$, cu $w_1 \in W_1$ şi $w_2 \in W_2$.*

  Aplicaţia
  $$p_{W_1} : V \to W_1, \quad p_{W_1}(v) = w_1, \quad \forall\, v \in V$$
  *se numeşte **proiecţia** lui V pe W_1, făcută paralel cu W_2. Analog se poate defini proiecţia lui V pe W_2, făcută paralel cu W_1.*

  Aplicaţia
  $$s_{W_1} : V \to V, \quad s_{W_1}(v) = w_1 - w_2, \quad \forall\, v \in V$$
  *se numeşte **simetria** lui V faţă de W_1, făcută paralel cu W_2. Analog se poate defini simetria lui V faţă de W_2, făcută paralel cu W_1.*

  Proiecţiile şi simetriile definite mai sus sunt aplicaţii liniare.

- *Fie $\mathcal{E}_{O_1}$ spaţiul vectorial (3-dim) al vectorilor legaţi în O_1 şi $\mathcal{E}_{O_2}$ spaţiul vectorial (3-dim) al vectorilor legaţi în O_2. Aplicaţia $f : \mathcal{E}_{O_1} \to \mathcal{E}_{O_2}$, $f(O_1A_1) = O_2A_2$, unde vectorii O_1A_1 şi O_2A_2 sunt echipolenţi, este un izomorfism de spaţii vectoriale.*

Propoziţie. *Fie $F : V \to W$ o aplicaţie liniară între două spaţii vectoriale.*

a) Dacă $M \prec V$, atunci $f(M) \prec W$, unde
$$f(M) = \{f(v), v \in V\}$$
*este **mulţimea valorilor** lui f.*

b) Dacă $N \prec W$, atunci $f^{-1}(N) \prec V$, unde
$$f^{-1}(N) = \{v \in V, f(v) \in N\}$$
*este **preimaginea** lui N.*

Fie $\mathrm{Im}\ f = f(V)$ **imaginea** aplicaţiei f şi $\ker f = f^{-1}(0_W)$ **nucleul** lui f. Acestea sunt subspaţii ale lui W, respectiv V.

Propoziţie. *Fie $f : V \to W$ o aplicaţie liniară. Atunci:*

a) f este injectivă dacă şi numai dacă $\ker f = \{0_V\}$.

b) f este surjectivă dacă şi numai dacă $\mathrm{Im}\ f = W$.

c) f este bijectivă dacă şi numai dacă $\ker f = \{0_V\}$ şi $\mathrm{Im}\ f = W$.

Propoziţie. *Fie $f : V \to W$ o aplicaţie liniară şi $S = \{v_\alpha, \alpha \in J\}$ un sistem de vectori din V.*

a) Dacă f este injectivă şi S este liniar independent, atunci şi $f(S)$ este liniar independent.

b) Dacă f este surjectivă şi S este sistem de generatori pentru V, atunci şi $f(S)$ este sistem de generatori pentru W.

c) Dacă f este bijectivă şi S este o bază pentru V, atunci $f(S)$ este o bază pentru W.

- Notăm cu $\text{Hom}(V, W)$ mulţimea aplicaţiilor liniare de la V la W şi cu $\text{Izo}(V, W)$ mulţimea izomorfismelor de la V la W.

În raport cu operaţiile de adunare a funcţiilor şi înmulţire a acestora cu scalari, $\text{Hom}(V, W)$ are o structură de $\mathbb{K}$-spaţiu vectorial. El este un subspaţiu vectorial al lui W^V.

- Notăm $\text{End}(V)$ mulţimea endomorfismelor unui $\mathbb{K}$-spaţiu vectorial V.

Mulţimea $\text{End}(V)$ este un $\mathbb{K}$-spaţiu vectorial şi admite o structură de inel cu unitate (relativ la compunerea funcţiilor), în consecinţă, este o $\mathbb{K}$-algebră asociativă cu unitate.

- Notăm $\text{Aut}(V)$ mulţimea automorfismelor unui $\mathbb{K}$-spaţiu vectorial V.

Mulţimea $\text{Aut}(V)$ admite o structură de grup în raport cu operaţia de compunere a funcţiilor. Grupul automorfismelor unui $\mathbb{K}$-spaţiu vectorial V se mai numeşte şi **grupul general liniar** al lui V şi se notează cu $\text{GL}(V)$.

Proiectori

Un endomorfism $p : V \to V$ se numeşte *proiector* al spaţiului V dacă $p^2 = p$, unde $p^2 = p \circ p$.

Propoziţie. *Dacă $p : V \to V$ este un proiector, atunci*

a) $\text{Im}\ p \oplus \ker p = V$*;*

b) endomorfismul $q = 1_V - p$ este, şi el, un proiector.

Dem: a) Fie $v_1 = p(v)$ şi $v_2 = v - v_1$. Evident $v = v_1 + v_2$, $v_1 \in \text{Im}\ p$ şi $p(v_2) = p(v) - p(v_1) = p(v) - p^2(v) = 0_V$, deci $v_2 \in \ker p$. Rezultă că $\text{Im}\ p + \ker p = V$. Deoarece imaginea unui vector prin f este unică, rezultă că v_1 este unic, la fel v_2, deci suma este directă.

b) Se verifică direct. □

Avem

$$\text{Im}\, p = \{p(v),\ v \in V\}$$

$$\text{Im}\, q = \{v - p(v),\ v \in V\}$$

$$\ker p = \{v \in V,\ p(v) = 0_V\}$$

$$\ker q = \{v \in V,\ v - p(v) = 0_V\}.$$

Vom arăta că $\text{Im}\ p = \ker q$ şi $\text{Im}\ q = \ker p$.

- Im $p = \ker q$

  Fie $w \in$ Im $p \Rightarrow \exists v \in V$ cu $w = p(v)$. Deoarece $w - p(w) = v(v) - p^2(v) = 0_V$, $\Rightarrow w \in \ker q$, deci Im $p \subseteq \ker q$.

  Fie $v \in \ker q \Rightarrow v = p(v) \in$ Im $p \Rightarrow v \in$ Im p, deci $\ker q \subseteq$ Im p.

- Im $q = \ker p$

  Fie $w \in$ Im $q \Rightarrow \exists v \in V$ cu $w = v - p(v)$. Deoarece $p(w) = p(v) - p^2(v) = 0_V \Rightarrow w \in \ker p$, deci Im $q \subseteq \ker p$.

  Fie $v \in \ker p \Rightarrow p(v) = 0_V$, deci v se poate scrie $v = v - 0_v = v - p(v) \Rightarrow v \in$ Im q, adică $\ker p \subseteq$ Im q.

Deci spaţiul V se descompune ca sumă directă

$$V = \operatorname{Im} p \oplus \ker p \quad \text{şi} \quad V = \ker q \oplus \operatorname{Im} q.$$

Aplicaţia $p : V \to$ Im p este proiecţia lui V pe Im p, făcută paralel cu $\ker p$, iar $q : V \to$ Im q este proiecţia lui V pe Im q, făcută paralel cu $\ker q$.

În general, dacă W_1 şi W_2 sunt două subspaţii suplimentare ale lui V, $V = W_1 \oplus W_2$, iar $p : V \to W_1$ şi $q : V \to W_2$ sunt proiecţiile lui V pe cei doi factori, avem $p^2 = p$, $q^2 = q$ şi $p + q = 1_V$.

(desene)

Automorfisme involutive

Un endomorfism $s : V \to V$ este *involutiv* dacă $s^2 = 1_V$. Deci orice endomorfism involutiv este un automorfism.

Pentru fiecare automorfism involutiv s, definim

$$p_s : V \to V, \quad p_s(v) = \frac{1}{2}(v + s(v))$$

$$q_s : V \to V, \quad p_s(v) = \frac{1}{2}(v - s(v)).$$

Aplicaţiile p_s şi q_s sunt proiectori şi satisfac relaţia $p_s + q_s = 1_V$.

Deci, plecând de la un automorfism involutiv s, se pot construi doi proiectori p_s şi q_s, cu $p_s + q_s = 1_V$.

Plecând de la un proiector $p : V \to V$, se poate construi automorfismul involutiv $s_p : V \to V$, $s_p(v) = 2p(v) - v$.

De fapt, un automorfism involutiv $s : V \to V$ nu este decât o simetrie a lui V faţă de subspaţiul Im p_s, făcută paralel cu subspaţiul $\ker p_s$.

(desene p.48)

Morfisme de spaţii finit dimensionale

Presupunem acum că morfismele sunt definite între **spaţii vectoriale de dimensiuni finite.**

Fie V un spaţiu vectorial n-dimensional, W un spaţiu vectorial m-dimensional şi fie $f : V \to W$ un morfism.

- Morfismul f este unic determinat de valorile sale pe vectorii unei baze $B_V = \{e_1, \ldots, e_n\}$ a lui V.

Într-adevăr, orice vector $v \in$ admite o scriere unică de forma

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i,$$

adică

$$f(v) = f(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i).$$

Cunoscând valorile $f(e_i)$, $i = \overline{1,n}$, f este determinat în mod unic.

- Dacă $B_W = \{r_1, \ldots, r_m\}$ este o bază a spaţiului W, atunci orice vector de forma $f(e_i) \in W$, $i = \overline{1,n}$, se poate exprima ca o combinaţie liniară de vectori din B_W:

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} r_j, \quad i = \overline{1,n}. \tag{1.6}$$

Sistemul de scalari (a_{ji}) determinat în (1.6) poartă numele de *coordonatele morfismului* f în bazele B_V şi B_W.

- Vom vedea cum se comportă morfismul f la o **schimbare de baze**.

Fie $B'_V = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ o altă bază a lui V şi $B'_W = \{r'_1, \ldots, r'_m\}$ o altă bază a lui W. Formulele de schimbare de baze (în V şi în W) sunt, respectiv

$$e'_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ji} e_j, \quad i = \overline{1,n}, \quad \det(p_{ji}) \neq 0, \tag{1.7}$$

$$r'_j = \sum_{k=1}^{m} q_{kj} r_k, \quad j = \overline{1,m}, \quad \det(q_{kj}) \neq 0. \tag{1.8}$$

Ţinând seama de (1.6) şi (1.7), avem

$$f(e'_i) = f(\sum_{j=1}^{n} p_{ji} e_j) = \sum_{j=1}^{n} p_{ji} f(e_j) = \sum_{j=1}^{n} p_{ji}(\sum_{k=1}^{m} a_{kj} r_k) = \sum_{k=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n} p_{ji} a_{kj}) r_k \quad i = \overline{1,n}. \tag{1.9}$$

Pe de altă parte, $f(e'_i)$ este un vector din W, deci se scrie ca o combinaţie liniară de vectori din B'_W,

$$f(e'_i) = \sum_{j=1}^{m} a'_{ji} r'_j,$$

unde (a'_{ji}) sunt **coordonatele lui** f în bazele B'_V şi B'_W. Folosind (1.8), vom avea

$$f(e'_i) = \sum_{j=1}^{m} a'_{ji} r'_j = \sum_{j=1}^{m} a'_{ji} (\sum_{k=1}^{m} q_{kj} r_k) = \sum_{k=1}^{m} (\sum_{j=1}^{m} a'_{ji} q_{kj}) r_k \quad i = \overline{1,n}. \tag{1.10}$$

Identificând coeficienţii vectorilor r_k în (1.9) şi (1.10) (B_W este o bază a lui W, deci vectorii săi sunt liniar independenţi), obţinem *formulele de schimbare de coordonate ale unui morfism la schimbarea bazelor*:

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ji} a_{kj} = \sum_{j=1}^{m} a'_{ji} q_{kj} \quad i = \overline{1,n}, \quad k = \overline{1,m}. \tag{1.11}$$

- Dacă $v \in V$ are coordonatele $v = (x_1, \dots, x_n)$, $w = f(v) \in W$ are coordonatele $w = (y_1, \dots, y_m)$, iar **matricea morfismului** $f : V \to W$ în bazele B_V şi B_W este $A = (a_{ij})$ dată prin formulele (1.6), atunci, identificându-l pe v cu matricea coloană $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ şi pe w cu $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, relaţia $w = f(v)$ are o scriere matriceală

$$Y = AX, \tag{1.12}$$

iar coordonatele lui $f(v)$ sunt date prin

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i, \quad j = \overline{1,n}. \tag{1.13}$$

Dacă X şi X' sunt matricele lui v în bazele B_V respectiv B'_V, Y şi Y' matricele lui $f(v)$ în bazele B_W respectiv B'_W, $P = (p_{ij})$ şi $Q = (q_{jk})$ sunt matricele de schimbare de baze definite prin (1.7) şi (1.8), avem

$$X = PX' \quad \text{şi} \quad Y = QY'.$$

Ecuaţia matriceala (1.12) devine

$$QY' = APX'$$

adică

$$Y' = (Q^{-1}AP)X'. \tag{1.14}$$

Rezultă că, atunci când schimbăm bazele în V şi W, matricele asociate morfismului f se schimbă după legea

$$A' = Q^{-1}AP.$$

Exprimând elementele lui A' în relaţia matriceală anterioară, obţinem

$$a'_{i\alpha} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \tilde{q}_{ij} a_{jk} p_{k\alpha} \quad i = \overline{1,n} \quad \alpha = \overline{1,m},$$

unde $(\tilde{q}_{ij}) = Q^{-1}$.

- Dacă V este un spaţiu vectorial n-dimensional şi $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ o bază a sa, atunci **coordonatele** lui f în baza B sunt date de sistemul de scalari (a_{ji}), unde $f(e_i) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ji} e_j$. **Matricea** lui f în baza B este $A = (a_{ij})$. Dacă schimbăm baza în V, iar matricea schimbării de baze este P, atunci $A' = P^{-1}AP$.

Teoremă 1.7.1. *Fie V un spaţiu vectorial n-dimensional, W un spaţiu vectorial m-dimensional şi $f : V \to W$ un morfism. Atunci*

$$\dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f = \dim V.$$

Dem: Fie $d = \dim \ker f$ şi $r = \dim \operatorname{Im} f$. Fie $B_d = \{e_1, \ldots, e_d\}$ o bază a lui $\ker f$. Ea poate fi completată până la o bază $B = \{e_1, \ldots, e_d, e_{d+1}, \ldots, e_n\}$ a lui V.

Dacă $v = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$ este un vector arbitrar din V, atunci $f(v) = x_1 f(e_1) + \ldots + x_n f(e_n)$, adică sistemul $\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$ este un sistem de generatori pentru Im f. Dar $e_1, \ldots, e_d \in \ker f$, adică $f(e_1) = \ldots = f(e_d) = 0$. Rezultă că sistemul $\{f(e_{d+1}), \ldots, f(e_n)\}$ este sistem de generatori pentru Im f.

Arătăm că sistemul $\{f(e_{d+1}), \ldots, f(e_n)\}$ este liniar independent. Fie

$$\lambda_{d+1} f(e_{d+1}) + \ldots + \lambda_n f(e_n) = 0.$$

Atunci

$$f(\lambda_{d+1} f(e_{d+1}) + \ldots + \lambda_n f(e_n)) = 0_W,$$

deci

$$\lambda_{d+1} f(e_{d+1}) + \ldots + \lambda_n f(e_n) \in \ker f.$$

Dar $\ker f$ este generat de baza sa B_d, care nu conţine vectorii $e_{d+1}, \ldots, e_n$. Rezultă că

$$\lambda_{d+1} = \ldots = \lambda_n = 0.$$

În consecinţă, sistemul $\{f(e_{d+1}), \ldots, f(e_n)\}$ este o bază pentru Im f, adică dim Im $f = n - d$. $\square$

- Dimensiunea subspaţiului Im $f \subset W$ se numeşte *rangul morfismului f*.
- Dimensiunea subspaţiului $\ker f \subset V$ se numeşte *defectul morfismului f*.
- Teorema 1.7.1 afirmă că rang $f+$ def $f = n$.
- Rangul unei aplicaţii liniare nu poate depăşi dimensiunea nici unuia dintre spaţiile V şi W; rang $f \leq \min\{n, m\}$.

- rang $f = m \leq n \iff f$ este surjectivă (deoarece dim Im $f = \dim V$, deci Im $f = V$).
- rang $f = n \leq m \iff f$ este injectivă (deoarece $\dim \ker f = 0$, deci $\ker f = \{0_V\}$).
- rang $f = n = m \iff f$ este bijectivă.

Două spaţii vectoriale sunt izomorfe dacă şi numai dacă au aceeaşi dimensiune.

Propoziţie. *Fie V un spaţiu vectorial n-dimensional, W un spaţiu vectorial m-dimensional şi $f : V \to W$ un morfism, fie $B_V = \{e_1, \ldots, e_n\}$ o bază a lui V şi $B_W = \{r_1, \ldots, r_m\}$ o bază a lui W. Atunci*

$$\operatorname{rang} f = \operatorname{rang} A,$$

unde $A = (a_{ij})$ este matricea lui f în bazele B_V şi B_W.

Dem: Avem rang f = dim Im $f = n - \dim \ker f$. Vom calcula dimensiunea nucleului lui f.

Fie $v = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i \in \ker f \Longrightarrow f(v) = 0_W \Longrightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = 0_W$. Înlocuind expresiile lui $f(e_i)$, obţinem

$$f(v) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} a_{ji} r_j = 0_W \Longrightarrow \sum_{j=1}^{m} (\sum_{i=1}^{n} x_i a_{ji}) r_j = 0_W$$

şi, deoarece vectorii r_j sunt liniar independenţi, rezultă că $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i a_{ji} = 0$. Deci componentele $(x_1, \ldots, x_n)$ ale unui vector $v \in \ker f$ sunt soluţiile unui sistem de ecuaţii liniare şi omogene, adică determină un spaţiu vectorial de dimensiune $n-$ rang A. Rezultă că $\dim \ker f = n-$ rang A şi, deci, rang $f = n - (n-$ rang $A)$ = rang A. $\square$

Următoarele afirmaţii sunt imediate:

- Rangul aplicaţiei produs nu poate depăşi rangul nici uneia dintre aplicaţiile factor

$$\operatorname{rang}(f \circ g) \leq \min\{\operatorname{rang} f, \operatorname{rang} g\}.$$

- Rangul unei aplicaţii este invariant la compunerea cu izomorfisme

$$f \text{ izomorfism} \Longrightarrow \operatorname{rang}(f \circ g) = \operatorname{rang}(g \circ f) = \operatorname{rang} g.$$

- Dacă A este matricea asociată morfismului $f : V \to W$ în bazele B_V şi B_W, iar B este matricea asociată morfismului $g : W \to U$ în bazele B_W şi B_U, atunci matricea asociată prodului $g \circ f : V \to U$, în bazele B_V şi B_U este BA.
- Rangul matricei asociate unui morfism $f : V \to W$ nu depinde de alegerea bazelor în spaţiile vectoriale V şi W. Într-adevăr, la schimbarea bazelor, matricea lui f se schimbă după formula $A' = Q^{-1}AP$, unde Q şi P sunt matrici pătratice nesingulare. Deci rang A' = rang A.

- Dacă $f \in \text{End }(V)$ (V finit dimensional), atunci, din $A' = P^{-1}AP$, vom avea $\det A' = \det A$, deci **determinantul matricei asociate unui endomorfism f este invariant la o schimbare de bază** în V. Numărul $\det A$ (invariant) se numeşte *determinantul endomorfismului* f şi se notează $\det f$.

Teoremă 1.7.2. *a) Fie V şi W două spaţii vectoriale finit dimensionale şi fie B_V şi B_W câte o bază fixată în fiecare din cele două spaţii. Corespondenţa*

$$\text{Hom}\,(V, W) \longrightarrow \mathfrak{M}_{m,n}(\mathbb{K}),$$

$$f \longrightarrow A,$$

*unde A este matricea lui f în bazele B_V şi B_W, este un **izomorfism de spaţii vectoriale**. În consecinţă, spaţiul Hom (V, W) este finit dimensional şi are dimensiunea mn.*

b) Corespondenţa

$$\text{End}\,(V) \longrightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}),$$

$$f \longrightarrow A,$$

*este un **izomorfism de algebre**.*

c) Corespondenţa

$$\text{GL(V)} \longrightarrow GL(n, \mathbb{K}),$$

$$f \longrightarrow A,$$

*este un **izomorfism de grupuri**.*

1.8 Subspaţii invariante. Vectori proprii. Valori proprii

Un subspaţiu $W \prec V$ este *invariant* în raport cu un operator $f \in \text{End }(V)$ dacă $f(W) \subseteq W$.

Exemple.

- *Subspaţiile triviale $\{0_V\}$ şi V ale spaţiului V sunt invariante faţă de orice endomorfism.*

- *Orice dreaptă vectorială $< v >\in V$, $v \in V^*$, este invariantă în raport cu omotetia $h_\rho : V \to V$, $h_\rho(w) = \rho w$. Într-adevăr, dacă $\lambda v \in< v >$, atunci $h_\rho(\lambda v) = \rho(\lambda v) = (\rho\lambda)v \in< v >$.*

- *Fie $p \in \text{End }(V)$ un proiector, $p^2 = p$. Am văzut că $V = \text{Im }p \oplus \ker p$. Spaţiile* Im p *şi* $\ker p$ *sunt invariante în raport cu p. Într-adevăr,*

  $$w \in \operatorname{Im} p \Longrightarrow \exists v \in V, p(v) = w \Longrightarrow p(w) = p(p(v)) = p(v) \in \operatorname{Im} p \Longrightarrow p(\operatorname{Im} p) \subset \operatorname{Im} p,$$

  $$v \in \ker p \Longrightarrow p(v) = 0_V \Longrightarrow p(p(v)) = p(0_V) = 0_V \Longrightarrow p(v) \in \ker p \Longrightarrow p(\ker p) \subset \ker p.$$

- *Fie* $s \in \text{End }(V)$ *un operator involutiv,* $s^2 = 1_V$*. Fie* $W_1 = \text{Im }(1_V + s)$ *şi* $W_2 = \text{Im }(1_V - s)$ *două subspaţii ale lui* V*. În raport cu* s*,* W_1 *şi* W_2 *sunt subspaţii invariante. Într-adevăr,*

$$w_1 \in W_1 \Rightarrow \exists v_1 \in V, w_1 = v_1 + s(v_1) \Rightarrow s(w_1) = s(v_1 + s(v_1)) = s(v_1) + s^2(v_1) = s(v_1) + v_1 = w_1 \in W_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s(W_1) \subset W_1,$$

$$w_2 \in W_2 \Rightarrow \exists v_2 \in V, w_2 = v_2 - s(v_2) \Rightarrow s(w_2) = s(v_2 - s(v_2)) = s(v_2) - s^2(v_2) = s(v_2) - v_2 = -w_2 \in W_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s(W_2) \subset W_2.$$

Fie V un $\mathbb{K}$-spaţiu vectorial şi $f \in \text{End }(f)$. Se numeşte *vector propriu* al lui f un vector $v \in V$, $v \neq 0_V$, pentru care există un scalar $\lambda \in \mathbb{K}$, astfel încât

$$f(v) = \lambda v.$$

Scalarul λ asociat vectorului propriu $v \neq 0_V$ se numeşte *valoare proprie* a endomorfismului f.

Propoziţie 1.8.1. *Fie* $\lambda \in \mathbb{K}$ *o valoare proprie a endomorfismului* $f : V \to V$*. Mulţimea* $V^{(\lambda)}$*, a tuturor vectorilor proprii asociaţi lui* λ*, este un subspaţiu vectorial al lui* V*.*

Dem: $V^{(\lambda)} = \{v \in V, f(v) = \lambda v\}$. Mulţimea $V^{(\lambda)}$ coincide cu $\ker(f - \lambda 1_V)$. Întradevăr,

$$v \in \ker(f - \lambda 1_V) \Longleftrightarrow (f - \lambda 1_V)(v) = 0_V \Longleftrightarrow f(v) = \lambda v \Longleftrightarrow v \in V^{(\lambda)}.$$

Deci

$$V^{(\lambda)} = \ker(f - \lambda 1_V),$$

iar acesta din urmă este un subspaţiu al lui V. □

Spaţiul $V^{(\lambda)}$ se numeşte *spaţiul propriu* al endomorfismului f, corespunzător valorii proprii λ.

Propoziţie 1.8.2. *Dacă* $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ *sunt valori proprii* ***distincte două câte două****, ale endomorfismului* $f : V \to V$ *şi* $\{v_1, \ldots, v_p\}$ *sunt, respectiv, vectori proprii corespunzători acestor valori proprii, atunci sistemul* $\{v_1, \ldots, v_p\}$ *este liniar independent.*

Dem: Vom demonstra prin inducţie după p.

Dacă $p = 1$, avem o valoare proprie $\{\lambda\}$, căreia i se asociază un vector propriu $v \in V$, în mod necesar nenul, $v \neq 0_V$.

Presupunem acum că sistemul de vectori proprii $\{v_1, \ldots, v_{p-1}\}$, asociat sistemului de valori proprii distincte două câte două, $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_{p-1}\}$, este liniar independent. Fie λ_p o altă valoare proprie a lui f, distinctă de celelate $p - 1$ şi fie v_p un vector propriu asociat lui λ_p. Presupunem, prin absurd, ca vectorul v_p este liniar dependent de vectorii din $\{v_1, \ldots, v_{p-1}\}$. Rezultă că există scalarii $\alpha_1 \ldots, \alpha_{p-1}$, nu toţi nuli, astfel încât

$$v_p = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{p-1} v_{p-1}.$$

Multiplicând cu λ_p, obţinem

$$\lambda_p v_p = \lambda_p \alpha_1 v_1 + \ldots + \lambda_p \alpha_{p-1} v_{p-1}. \tag{1.15}$$

Pe de altă parte

$$f(v_p) = f(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{p-1} v_{p-1}) = \alpha_1 f(v_1) + \ldots + \alpha_{p-1} f(v_{p-1}),$$

deci

$$\lambda_p v_p = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \ldots + \alpha_{p-1} \lambda_{p-1} v_{p-1}. \tag{1.16}$$

Scăzând relaţiile (1.15) şi (1.16), obţinem

$$0_V = \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_p) v_1 + \ldots + \alpha_{p-1}(\lambda_{p-1} - \lambda_p) v_{p-1}.$$

Dar sistemul $\{v_1, \ldots, v_{p-1}\}$ este liniar independent, deci relaţia de mai sus este echivalentă cu

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_{p-1} = \lambda_p,$$

contradicţie cu faptul că valorile proprii sunt alese distincte două câte două. $\square$

Corolar. *Un endomorfism al unui spaţiu vectorial de dimensiune n are cel mult n valori proprii distincte.*

Teoremă 1.8.3. *Fie V un spaţiu vectorial de dimensiune n, B o bază a lui V, $f : V \to V$ un endomorfism al lui V şi $A = (a_{ij})$ matricea asociată lui f în baza B. Valorile proprii ale endomorfismului f sunt rădăcinile ecuaţiei polinomiale*

$$\det(A - \lambda I_n) = 0.$$

Dem: Fie $\lambda \in \mathbb{K}$ o valoare proprie a lui f şi $v \in V$, $v \neq 0_V$, un vector propriu asociat acesteia, $f(v) = \lambda v$. Presupunem că, în baza B, componentele lui v sunt $(x_1, \ldots, x_n)$, iar cele ale lui $f(v)$ sunt $(y_1, \ldots, y_n)$ şi identificăm pe v şi pe $f(v)$ respectiv, cu matricele coloană X şi Y. Relaţia

$$f(v) = \lambda v$$

se scrie, matriceal,

$$AX = \lambda X,$$

deci

$$(A - \lambda I_n)X = 0 \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}).$$

Scriind pe componente egalitatea matriceală de mai sus, obţinem

$$\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - \lambda \delta^i_j) x_j = 0 \quad i = \overline{1, n} \tag{1.17}$$

deci un sistem de ecuaţii liniare şi omogene în necunoscutele x_i, $i = \overline{1, n}$, sistem care trebuie să admită soluţii diferite de cea banală. Rezultă că determinantul matricei asociate acestui sistem trebuie să fie nul. Dar matricea asociată este chiar $A - \lambda I_n$, deci $\det(A - \lambda I_n) = 0$. $\square$

- $\det(A-\lambda I_n)$ este un polinom de gradul n în nedeterminata λ. Ordonat după puterile lui λ, el va avea forma

$$P(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n - \delta_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots \pm \delta_0),$$

unde

$\delta_{n-1} = a_{11} + \ldots + a_{nn} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii} = \mathrm{tr}\, A$,urma matricei A.

$\delta_{n-2} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ii+1} \\ a_{i+1i} & a_{i+1i+1} \end{vmatrix}$, suma minorilor diagonali de ordinul 2.

$\ldots$

$\delta_{n-k} =$ suma minorilor diagonali de ordinul k.

$\ldots$

$\delta_0 = \det A$.

- Dacă λ este o valoare proprie a endomorfismului f, atunci sistemul (1.17) determină nucleul endomorfismului $f - \lambda 1_V$, deci chiar subspaţiul propriu asociat lui λ.

- Dacă rangul operatorului $f - \lambda 1_V$ este r, atunci dimensiunea nucleului său este $n-r$, deci dimensiunea subspaţiului propriu asociat valorii proprii λ este $n - r$.

Teoremă 1.8.4. *Polinomul $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ este* ***invariant la schimbările de bază*** *din V.*

Dem: Fie P matricea unei schimbări de baze în V şi A' matricea lui f în noua bază. Avem

$\det(A'-\lambda I_n) = \det(P^{-1}AP-\lambda I_n) = \det(P^{-1}(A-\lambda I_n)P) = \det P^{-1}\det(A-\lambda I_n)\det P = \det(A-\lambda I_n)$.□

Polinomul $P(\lambda)$ se numeşte *polinomul caracteristic* al operatorului f. Rădăcinile sale se numesc *rădăcini caracteristice*, iar sistemul de scalari $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ este *spectrul operatorului* f, $\mathrm{Spec}\, f = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$.

Teoremă 1.8.5. *Fie V un spaţiu vectorial de dimensiune n, $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ o bază a sa, $f : V \to V$ un endomorfism şi A matricea lui f în baza B. Vectorii lui B sunt vectori proprii ai lui f dacă şi numai dacă matricea A este matricea diagonală*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

unde $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} = \mathrm{Spec}\, f$.

Dem: "$\Longrightarrow$" Dacă B este alcătuită din vectori proprii, există scalarii $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, pentru care

$$f(e_i) = \lambda_i e_i \quad i = \overline{1, n},$$

deci matricea A are chiar forma diagonală din teoremă.

"$\Longleftarrow$" Dacă A are forma dată în baza B, deoarece $f(v) = Av$, $\forall v \in V$, rezultă că $f(e_i) = \lambda_i e_i$, $i = \overline{1, n}$ şi, deci, toţi vectorii bazei B sunt vectori proprii. □

1.9 Forme liniare pe un $\mathbb{K}$-spaţiu vectorial

Fie V un $\mathbb{K}$-spaţiu vectorial. O aplicaţie $f : V \to \mathbb{K}$, care satisface condiţia

$$f(\lambda v + \mu w) = \lambda f(v) + \mu f(w) \quad \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \forall\, v, w \in V$$

se numeşte *formă liniară* pe V (sau *funcţională liniară* pe V).

Exemple.

- *Aplicaţia constantă $f : V \to \mathbb{K}$, $f(v) = 0 \in \mathbb{K}$, $\forall\, v \in V$, este o formă liniară pe V. Ea poartă numele de* ***forma nulă*** *pe V.*

- *Aplicaţia $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, dată prin*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n,$$

unde $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$, este o formă liniară pe $\mathbb{K}^n$.

- *Pe $\mathbb{R}$-spaţiul polinoamelor reale de grad cel mult n, aplicaţiile I şi D, definite mai jos, sunt forme liniare.*

$$I : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}, \quad I(P) = \int_0^1 P(x)dx, \quad \forall\, P \in \mathbb{R}[X],$$

$$D : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}, \quad D(P) = \left(\frac{dP(x)}{dx}\right)_{x=0}, \quad \forall\, P \in \mathbb{R}[X].$$

Notăm cu V^* mulţimea formelor liniare pe $\mathbb{K}$-spaţiul vectorial V.

$$V^* = \{f : V \to \mathbb{K}, f \text{ formă liniară}\}.$$

În raport cu adunarea funcţiilor şi înmulţirea acestora cu scalari, V^* este un $\mathbb{K}$-spaţiu vectorial. Spaţiul V^* se numeşte *spaţiul dual* al lui V.

Forme liniare pe un spaţiu vectorial finit

Dacă spaţiul vectorial V este finit dimensional, de dimenisune n, atunci şi dualul său este finit dimensional şi are tot dimensiunea n (în general, $\mathrm{Hom}(V_n, W_m) \simeq \mathfrak{M}_{mn}(\mathbb{K})$).

Fie $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ o bază a lui V. Orice vector $v \in V$ se scrie sub forma $v = \sum\limits_{i=1}^{n} x_ie_i$. Atunci

$$f(v) = f(\sum_{i=1}^{n} x_ie_i) = \sum_{i=1}^{n} x_if(e_i) = \sum_{i=1}^{n} a_ix_i,$$

unde am notat $a_i = f(e_i)$. Sistemul de scalari $(a_1, \ldots, a_n)$ poartă numele de *coordonatele formei f* în baza B.

Pornind de la baza B a lui V, se poate construi o bază în B^*. Definim aplicaţiile

$$e^i : V \to \mathbb{K}, \quad e^i(v) = x_i, \quad i = \overline{1, n}$$

unde $v = (x_1, \ldots, x_n)$ sunt componentele vectorului $v \in V$ în baza V.

- Este imediat faptul că aceste aplicaţii sunt forme liniare pe V.
- Sistemul $\{e^1, \ldots, e^n\}$ este un sistem de generatori pentru V^*.

Într-adevăr, pentru orice formă $f \in V^*$,

$$f(v) = f(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \sum_{i=1}^{n} a_i e^i(v),$$

deci $f = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i e^i$.

- Sistemul $\{e^1, \ldots, e^n\}$ este liniar independent.

Într-adevăr,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e^i = 0 \in V^* \Longrightarrow (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e^i)(v) = 0 \in \mathbb{K}, \forall\, v \in V \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (e^i(v)) = 0, \forall\, v \in V \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0, \forall\, x_i \in \mathbb{K} \Longrightarrow \lambda_i = 0, \forall\, i = \overline{1,n}.$$

Deci, sistemul de forme $B^* = \{e^1, \ldots, e^n\}$ este o bază a spaţiului dual V^*, numită *baza duală* a lui B. Un vector e^i din B^* verifică $e^i(e_j) = \delta^i_j$.

Vom studia acum comportarea bazei duale şi a coordonatelor unei forme $f \in V^*$ la o schimbare de baze în V. Fie $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ şi $B' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ două baze ale lui V. Trecerea de la B la B' se face după formulele

$$e'_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ji} e_j, \quad i = \overline{1,n} \quad \det(p_{ji}) \neq 0.$$

Dacă, în cele două baze, coordonatele lui $v \in V$ sunt, respectiv $v = (x_1, \ldots, x_n)$ şi $v = (x'_1, \ldots, x'_n)$, avem

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x'_j, \quad i = \overline{1,n}, \quad \det(p_{ij}) \neq 0.$$

Atunci

$$e^i(v) = x_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x'_j = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} e'^j(v),\ i = \overline{1,n}$$

adică

$$e^i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} e'^j, \quad i = \overline{1,n} \quad \det(p_{ij}) \neq 0, \tag{1.18}$$

iar

$$a'_i = f(e'_i) = f(\sum_{j=1}^{n} p_{ji} e_j) = \sum_{j=1}^{n} p_{ji} f(e_j) = \sum_{j=1}^{n} p_{ji} a_j,\ i = \overline{1,n},$$

deci

$$a'_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ji} a_j, \quad i = \overline{1,n} \quad \det(p_{ij}) \neq 0. \tag{1.19}$$

Vectorii lui V se numesc *vectori contravarianţi* (sau, simplu, vectori), iar vectorii lui V^* se numesc *vectori covarianţi* sau *covectori.*

Teoremă 1.9.1. *O submulţime $H \subset V$ a unui spaţiu vectorial V (**finit sau infinit dimensional**) este un hiperplan al lui V dacă şi numai dacă H este nucleul unei forme liniare, nenule, pe V.*

Dem: Fie H un hiperplan al lui V. Înseamnă că H este un subspaţiu suplimentar unei drepte vectoriale, deci există $a \in V \setminus H$, astfel încât

$$V = H \oplus < a > .$$

Orice vector $v \in V$ admite o scriere unică de forma

$$v = h + \lambda(v)a, \quad h \in H, \lambda(v) \in \mathbb{K}.$$

Putem defini aplicaţia

$$\lambda : V \to \mathbb{K}, \quad v \longrightarrow \lambda(v),$$

unde $\lambda(v)$ este scalarul din scrierea unică de mai sus.

- λ este **nenulă** (altfel, $V = H$, fals).
- λ este un **morfism**.

Într-adevăr, oricare doi vectori v_1, $v_2 \in V$ admit, respectiv, o scriere unică de forma

$$v_1 = h_1 + \lambda(v_1)a \qquad v_2 = h_2 + \lambda(v_2)a, \quad h_1, h_2 \in H.$$

Pe de altă parte, vectorul $v_1 + v_2 \in$ admite o scriere unică de forma

$$v_1 + v_2 = h + \lambda(v_1 + v_2), \quad h \in H.$$

Rezultă, în mod necesar, că $\lambda(v_1) + \lambda(v_2) = \lambda(v_1 + v_2)$. Analog, $\lambda(\alpha v_1) = \alpha\lambda(v_1)$.

- $H = \ker \lambda$.

Dacă $v \in H \Longrightarrow v = v + 0.a \Longrightarrow \lambda(v) = 0 \Longrightarrow v \in \ker \lambda \Longrightarrow H \subset \ker \lambda$.
Dacă $v \in \ker \lambda \Longrightarrow v = h + \lambda(v)a = h + 0a = h \in H \Longrightarrow \ker \lambda \subset H$.

Deci orice hiperplan este nucleul unei forme liniare nenule pe V.

Reciproc, fie $f \in V^*$ o formă liniară pe V, nenulă şi fie $H = \ker f$. Vom arăta că H este un hiperplan. Deoarece f este nenulă, există $v_0 \in V$, astfel încât $f(v_0) \neq 0$.

- $V = \ker f + < v_0 >$.

Evident $\ker f + < v_0 > \subset V$.
Fie $v \in V$ şi fie $w = v - \lambda(w)v_0 \in V$, unde $\lambda(w) = (f(v_0))^{-1}f(v) \in \mathbb{K}$. Avem

$$f(w) = f(v) - \lambda(w)f(v_0) = 0,$$

deci $w \in \ker f$. Exprimându-l pe v, obţinem

$$v = w + \lambda(w)v_0 \in \ker f + < v_0 >,$$

deci $V \subset \ker f + < v_0 >$.

- $V = \ker f \oplus < v_0 >$.

Deoarece, pentru un $v \in V$, vectorul w este, din modul de definire, unic determinat, suma va fi directă.

Rezultă că $\ker f$ are o dreaptă ca spaţiu suplimentar, deci este un hiperplan. □

Dacă spaţiul V este **finit dimensional**, de dimensiune n, iar $B = \{e_1 \ldots, e_n\}$ este o bază a lui V, aceasta induce o bază duală $B^* = \{e^1, \ldots, e^n\}$ în V^*. Orice formă liniară $f \in V^*$ se scrie sub forma $f = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i e^i$, unde scalarii a_i, $i = \overline{1,n}$ nu sunt toţi nuli, $e^i : V \to \mathbb{K}$, $e^i(v) = x_i$, $v = (x_1, \ldots, x_n) \in V$.

Am văzut că un hiperplan este nucleul unei forme nenule. Atunci

$$\ker f = \{v \in V,\ f(v) = 0\} = \{v \in V,\ (\sum_{i=1}^{n} a_i e^i)(v) = 0\} = \{v = (x_1, \ldots, x_n) \in V,\ a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0\},$$

deci **un hiperplan al unui spaţiu n-dimensional este mulţimea vectorilor $v \in V$ ale căror coordonate, într-o bază oarecare, verifică ecuaţia liniară şi omogenă**

$$a_1x_1 + \ldots a_nx_n = 0, \quad \mathrm{rang}\,(a_1, \ldots, a_n) = 1.$$

Teoremă 1.9.2. *Două forme liniare, nenule, pe un spaţiu vectorial V (**finit sau infinit dimensional**) au acelaşi nucleu dacă şi numai dacă sunt liniar dependente.*

Dem: "$\Longrightarrow$" Fie $f_1,\ f_2 : V \to \mathbb{K}$ două forme nenule pe V, astfel încât $H = \ker f_1 = \ker f_2$. Nucleul oricărei forme nenule este un hiperplan, deci există $v_0 \in V \setminus H$ astfel încât

$$V = H \oplus < v_0 > .$$

Fie $v \in V$. Rezultă că

$$v = h + \alpha v_0,\ h \in H,\ \alpha \in \mathbb{K},$$

deci

$$f_1(v) = f_1(h) + \alpha f_1(v_0) = \alpha f_1(v_0),$$

$$f_2(v) = f_2(h) + \alpha f_2(v_0) = \alpha f_2(v_0).$$

Notând $a = f_1(v_0)$ şi $b = f_2(v_0)$, din relaţiile de mai sus rezultă că $(bf_1 - af_2)(v) = 0$, deci f_1 şi f_2 sunt liniar dependente.

"$\Longleftarrow$" Dacă $f_2 = \alpha f_1$, este imediat faptul că cele două aplicaţii au acelaşi nucleu. □

- Dacă V este un spaţiu vectorial **finit dimensional** de dimensiune n, **ecuaţiile**

$$a_1x_1 + \ldots a_nx_n = 0, \quad \text{rang}\,(a_1, \ldots, a_n) = 1$$

şi

$$b_1x_1 + \ldots b_nx_n = 0, \quad \text{rang}\,(b_1, \ldots, b_n) = 1$$

reprezintă acelaşi hiperplan vectorial dacă şi numai dacă

$$\text{rang} \begin{pmatrix} a_1 \ldots a_n \\ b_1 \ldots b_n \end{pmatrix} = 1.$$

1.10 Forme biliniare

Fie V un $\mathbb{K}$-spaţiu vectorial. O aplicaţie $g : V \times V \to \mathbb{K}$, liniară în raport cu fiecare argument, se numeşte *formă biliniară* pe V. Deci, o formă biliniară verifică

$$g(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w) = \lambda_1 g(v_1, w) + \lambda_2 g(v_2, w), \quad \forall\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K},\ \forall\, v_1, v_2, w \in V,$$

$$g(v, \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) = \lambda_1 g(v, w_1) + \lambda_2 g(v, w_2), \quad \forall\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K},\ \forall\, v, w_1, w_2 \in V.$$

Rezultă imediat că

$$g(-v, w) = g(v, -w) = -g(v, w),\ \forall\, v, w \in V,$$

$$g(v, 0_V) = g(0, v_V) = 0_V,\ \forall\, v \in V.$$

Exemple.

- *Aplicaţia $g : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, dată prin*

$$g(x, y) = x_1y_1 + \ldots x_ny_n,$$

este o formă biliniară pe $\mathbb{K}^n$.

- *Aplicaţia constantă nulă, $G : V \times V \to \mathbb{K}$, $g(x, y) = 0 \in \mathbb{K}$ este o formă biliniară pe V.*

- *Fie f_1 şi f_2 două forme liniare pe V. Definim* ***produsul tensorial*** *al formelor f_1 şi f_2 ca fiind aplicaţia*

$$f_1 \otimes f_2 : V \times V \to \mathbb{K},$$

$$(f_1 \otimes f_2)(v_1, v_2) = f_1(v_1) f_2(v_2), \quad \forall\, (v_1, v_2) \in V \times V.$$

Aceasta este o formă biliniară pe V.

Notăm prin $\mathfrak{L}(V \times V; \mathbb{K})$ mulţimea formelor biliniare pe V. Se verifică uşor că adunarea şi înmulţirea cu scalari, definite în mod obişnuit, sunt operaţii interne în $\mathfrak{L}(V \times V; \mathbb{K})$. Mai mult, în raport cu aceste operaţii, $\mathfrak{L}(V \times V; \mathbb{K})$ are o structură de $\mathbb{K}$-spaţiu vectorial.

Vom construi un izomorfism între $\mathfrak{L}(V \times V; \mathbb{K})$ şi spaţiul Hom (V, V^*). Fie $g \in \mathfrak{L}(V \times V; \mathbb{K})$,

$$g : V \times V \to \mathbb{K}.$$

- Pentru un vector $v \in V$, definim aplicaţia

$$g_v : V \to \mathbb{K},$$
$$g_v(w) = g(v, w), \quad \forall\, w \in W.$$

Se verifică imediat că
$$g_v \in V^*.$$
Într-adevăr, $g_v(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) = \lambda_1 g(w_1) + \lambda_2 w_2$, $\forall\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$,$\forall\, w_1, w_2 \in V$.

- Aplicaţia $F : \mathfrak{L}(V \times V; \mathbb{K}) \to \mathrm{Hom}\,(V, V^*)$, definită mai jos, este un **izomorfism de spaţii vectoriale**.

$$F : \mathfrak{L}(V \times V; \mathbb{K}) \to \mathrm{Hom}\,(V, V^*),$$
$$g \longrightarrow F(g),$$

unde
$$F(g) : V \to V^*, \quad F(g)(v) = g_v \in V^*,$$
iar $g_v : V \to \mathbb{K}$ este definită prin $g_v(w) = g(v, w)$.

Într-adevăr, F este un *morfism*:

$$F(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) = \lambda_1 F(g_1) + \lambda_2 F(g_2) \Leftrightarrow \forall\, v \in V, F(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2)(v) = \lambda_1 F(g_1)(v) + \lambda_2 F(g_2)(v) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall\, v \in V, (\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2)_v = \lambda_1 (g_1)_v + \lambda_2 (g_2)_v \Leftrightarrow \forall\, v, w \in V, (\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2)_v(w) = \lambda_1 (g_1)_v(w) + \lambda_2 (g_2)_v(w) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall\, v, w \in V, (\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2)(v, w) = \lambda_1 (g_1)(v, w) + \lambda_2 (g_2)(v, (w).$$

F este *injectivă*:

$$F(g_1) = F(g_2) \Leftrightarrow \forall\, v \in V, F(g_1)(v) = F(g_2)(v) \Leftrightarrow \forall\, v \in V, (g_1)_v = (g_2)_v \Leftrightarrow$$

$$\forall\, v, w \in V, (g_1)_v(w) = (g_2)_v(w) \Leftrightarrow \forall\, v, w \in V, (g_1)(v, w) = (g_2)(v, w) \Leftrightarrow g_1 = g_2.$$

F este *surjectivă*:

Într-adevăr, plecând de la un morfism arbitrar $h : V \to V^*$, $v \to h(v)$, unde $h(v) : V \to \mathbb{K}$, aplicaţia $g : V \times V \to \mathbb{K}$, dată prin $g(v, w) = h(v)(w)$ este o formă biliniară pe V şi $F(g) = h$.

Fie g o formă biliniară pe V. Submulţimile

$$N_1 = \{v \in V, g(v, w) = 0, \quad \forall\, w \in V\}$$

$$N_2 = \{w \in V, g(v, w) = 0, \quad \forall\, v \in V\}$$

sunt subspaţii vectoriale ale lui V. Ele se numesc *spaţiile nule* ale formei g.

- O formă biliniară g pe V se numeşte *nesingulară* (sau *nedegenerată*) dacă subspaţiile sale nule coincid cu subspaţiul $\{0_V\}$, adică

$$N_1 = N_2 = \{0_V\}.$$

În caz contrar, g este *singulară* (sau *degenerată*).

- O formă biliniară g pe V se numeşte *simetrică* dacă

$$g(v, w) = g(w, v) \quad \forall\, v, w \in V.$$

Dacă g este o formă simetrică, atunci subspaţiile nule ale lui g coincid: $N_1 = N_2$.

Notăm cu $\mathfrak{L}^s(V \times V; \mathbb{K})$ mulţimea formelor biliniare simetrice pe V. Este imediat faptul că $\mathfrak{L}^s(V \times V; \mathbb{K})$ este un subspaţiu vectorial al lui $\mathfrak{L}(V \times V; \mathbb{K})$.

- O formă biliniară g pe V se numeşte *antisimetrică* dacă

$$g(v, w) = -g(w, v) \quad \forall\, v, w \in V.$$

O formă biliniară g este antisimetrică dacă şi numai dacă se anulează când argumentele sunt egale. Într-adevăr, dacă g este antisimetrică, luând $v = w$, obţinem $g(v, v) = -g(v, v)$, deci $g(v, v) = 0$. Reciproc, dacă $g(v, v) = 0$, atunci $g(v + w, v + w) = 0$ şi, folosind liniaritatea pe cele două argumente, rezultă că $g(v, w) = -g(w, v)$.

Notăm cu $\mathfrak{L}^a(V \times V; \mathbb{K})$ mulţimea formelor biliniare antisimetrice pe V. Muţimea $\mathfrak{L}^a(V \times V; \mathbb{K})$ este un subspaţiu al lui $\mathfrak{L}(V \times V; \mathbb{K})$.

Propoziţie. *Avem*

$$\mathfrak{L}(V \times V; \mathbb{K}) = \mathfrak{L}^s(V \times V; \mathbb{K}) \oplus \mathfrak{L}^a(V \times V; \mathbb{K}).$$

Dem: Fie $g \in \mathfrak{L}(V \times V; \mathbb{K})$. Definim aplicaţiile

$$g^s : V \times V \to \mathbb{K}, \quad g^s(v, w) = \frac{1}{2}[g(v, w) + g(w, v)]$$

şi

$$g^a : V \times V \to \mathbb{K}, \quad g^a(v, w) = \frac{1}{2}[g(v, w) - g(w, v)].$$

Se verifică faptul că g^s şi g^a sunt forme biliniare pe V. Mai mult, $g^s \in \mathfrak{L}^s(V \times V; \mathbb{K})$ şi $g^a \in \mathfrak{L}^a(V \times V; \mathbb{K})$. În plus, $g = g^s + g^a$, deci

$$\mathfrak{L}(V \times V; \mathbb{K}) = \mathfrak{L}^s(V \times V; \mathbb{K}) + \mathfrak{L}^a(V \times V; \mathbb{K}).$$

Pentru a arăta că suma este directă, este suficient să verificăm faptul că

$$\mathfrak{L}^s(V \times V; \mathbb{K}) \cap \mathfrak{L}^a(V \times V; \mathbb{K}) = \{0\},$$

unde 0 este forma identic nulă.

Dacă $g \in \mathfrak{L}^s(V \times V; \mathbb{K}) \cap \mathfrak{L}^a(V \times V; \mathbb{K})$, atunci $g(v, w) = g(w, v)$ şi, în acelaşi timp, $g(v, w) = -g(w, v)$. Adunând, obţinem $g(v, w) = 0$, $\forall\, v, w \in V$. $\square$

Forme biliniare pe spaţii finit dimensionale

Fie V un $\mathbb{K}$-spaţiu vectorial de dimensiune n şi $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ o bază a lui V. Fie $g : V \times V \to \mathbb{K}$ o formă biliniară pe V. Dacă, în baza B, vectorii $x, y \in V$ se scriu sub forma $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ respectiv $y = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j e_j$, avem

$$g(x,y) = g(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j g(e_i, e_j),$$

deci

$$g(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij} x_i y_j,$$

unde $g_{ij} = g(e_i, e_j)$.

Sistemul de scalari (g_{ij}) poartă numele de *coordonatele formei* g în baza B. Polinomul $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} g_{ij} x_i y_j$ este *expresia algebrică* a formei g în baza B. Matricea coordonatelor

$$A = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}$$

se numeşte *matricea asociată* lui g în baza B. Identificând un vector $x \in V$ cu matricea coloană X a componentelor sale, forma g are *expresia matriceală*

$$g(x,y) =^t XAY.$$

Plecând de la o bază $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ a lui V, se poate construi o **bază pentru spaţiul** $\mathfrak{L}(V \times V; \mathbb{K})$ **al formelor biliniare** pe V.

Pentru orice $i = \overline{1,n}$ şi $j = \overline{1,n}$, definim aplicaţiile

$$e^{ij} : V \times V \to \mathbb{K}, \quad e^{ij}(x,y) = x_i y_j, \, \forall\, x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in V.$$

Se verifică imediat că acestea sunt **liniare în fiecare argument**, deci

$$e^{ij} \in \mathfrak{L}(V \times V; \mathbb{K}), \quad \forall\, i = \overline{1,n}, \forall\, j = \overline{1,n}.$$

Vom arăta că **sistemul**

$$\{e^{ij}, \; i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}\}$$

este o bază în $\mathfrak{L}(V \times V; \mathbb{K})$.

- $\{e^{ij}, \; i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}\}$ este **un sistem de generatori** pentru $\mathfrak{L}(V \times V; \mathbb{K})$.

Într-adevăr, dacă g este o formă arbitrară, avem

$$g(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}x_iy_j=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}e^{ij}(x,y),$$

deci

$$g=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}e^{ij},$$

unde coeficienţii sunt daţi de $g_{ij}=g(e_i,e_j)$.

- Sistemul $\{e^{ij},\ i=\overline{1,n}, j=\overline{1,n}\}$ este **liniar independent**.

Avem

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}e^{ij}=0\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}e^{ij}(x,y)=0,\,\forall\,x,y\in V\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}x_iy_j=0,\,\forall\,x_i,y_j\in\mathbb{K}$$

şi rezultă, în mod necesar, că $\lambda_{ij}=0$, $\forall\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n}$.

Formele e^{ij} din baza lui $\mathfrak{L}(V\times V;\mathbb{K})$ verifică $e^{ij}(e_h,e_k)=\delta^i_h\delta^j_k$.

Dacă V este un spaţiu vectorial n-dimensional, atunci **dimensiunea** spaţiului $\mathfrak{L}(V\times V;\mathbb{K})$ este n^2. Spaţiile $\mathfrak{L}(V\times V;\mathbb{K})$ şi $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ sunt **izomorfe**. Un izomorfism între cele două spaţii vectoriale este dat de

$$\mathfrak{L}(V\times V;\mathbb{K})\longrightarrow\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}),$$

$$g\longmapsto A=(g_{ij}).$$

Fie $g(x,y)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}g_{ij}x_iy_j$ şi $h(x,y)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}h_{ij}x_iy_j$ două forme biliniare pe V. Atunci

$$(g+h)(x,y)=g(x,y)+h(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}g_{ij}x_iy_j+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}h_{ij}x_iy_j=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(g_{ij}+h_{ij})x_iy_j,$$

deci matricea sumei a două forme este suma matricelor celor două forme. Analog, matricea formei λg va fi (λg_{ij}).

Dacă g este o formă simetrică, $g(x,y)=g(y,x)$, atunci $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}g_{ij}x_iy_j=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}g_{ji}x_iy_j$, deci $g_{ij}=g_{ji}$, pentru orice $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,n}$. Deci, dacă g este o formă biliniară simetrică, atunci matricea asociată este simetrică. Analog, dacă g este o formă biliniară antisimetrică, atunci matricea asociată este antisimetrică.

Studiem comportarea coordonatelor (g_{ij}) şi a bazei $\{e^{ij}\}$ la o **schimbare a bazei** în V. Fie $B=\{e_1,\dots,e_n\}$ şi $B'=\{e'_1,\dots,e'_n\}$ două baze ale lui V. Trecerea de la B la B' se face după formulele

$$e'_i=\sum_{j=1}^{n}p_{ji}e_j,\quad i=\overline{1,n}\quad \det(p_{ji})\neq 0.$$

Dacă, în cele două baze, coordonatele lui $x \in V$ sunt, respectiv $x = (x_1, \ldots, x_n)$ şi $x = (x'_1, \ldots, x'_n)$, avem

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x'_j, \quad i = \overline{1,n}, \quad \det(p_{ij}) \neq 0.$$

În consecinţă,

$$g'_{ij} = g(e'_i, e'_j) = g(\sum_{h=1}^{n} p_{hi} e_h, \sum_{k=1}^{n} p_{kj} e_k) = \sum_{h=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} p_{hi} p_{kj} g(e_h, e_k) = \sum_{h=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} p_{hi} p_{kj} g_{hk},$$

deci

$$g'_{ij} = \sum_{h=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} p_{hi} p_{kj} g_{hk}, \quad i, j = \overline{1,n}. \tag{1.20}$$

De asemenea,

$$e^{ij}(x, y) = x_i y_j = (\sum_{h=1}^{n} p_{hi} x'_h)(\sum_{k=1}^{n} p_{kj} x'_k) = \sum_{h=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} p_{hi} p_{kj} x'_h x'_k = \sum_{h=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} p_{hi} p_{kj} e'^{hk}(x, y),$$

deci

$$e^{ij} = \sum_{h=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} p_{hi} p_{kj} e'^{hk}, \quad i, j = \overline{1,n}. \tag{1.21}$$

O formă biliniară se mai numeşte şi *tensor covariant de ordinul* 2.

Propoziţie. *Fie g o formă biliniară pe un spaţiu vectorial finit dimensional, iar A matricea asociată lui g într-o bază dată. Rangul matricei A este invariant la schimbarea bazei în V.*

Dem: Am văzut că, relativ la o bază B a lui V, forma g are ecuaţia matriceală

$$g(x, y) = ^t XAY.$$

Dacă B' este o altă bază în V, vom avea

$$g(x, y) = ^t X'A'Y',$$

unde A' este matricea lui g în baza B' (notaţiile sunt cele convenţionale, X este matricea coloană având drept componente coordonatele vectorului x, etc, şi tot ce e cu prim este relativ la baza B').

Expresia matriceală a schimbării coordonatelor unui vector la schimbarea bazei este

$$X = PX',$$

unde P este matricea schimbăii de baze (de la B la B') şi $\det P \neq 0$..

Vom avea, deci

$$^t XAY = ^t X'A'Y'$$

şi, înlocuind pe X şi pe Y, obţinem

$$^{t}(PX')APY' =^{t} X'A'Y',$$

sau

$$^{t}X'(^{t}PAP)Y' =^{t} X'A'Y'.$$

În sfârşit,

$$^{t}PAP = A'.$$

Va rezulta că

$$\det A' = \det A \cdot (\det P)^2$$

şi, evident

$$\operatorname{rang} A' = \operatorname{rang} A. \quad \square$$

Vom numi *rang al formei biliniare* g, definită pe un spaţiu vectorial finit dimensional V, rangul matricei asociate lui g într-o bază oarecare a spaţiului.

Propoziţie 1.10.1. *Dacă rangul unei forme biliniare g, definită pe un spaţiu vectorial n-dimensional, este r, atunci fiecare din spaţiile nule ale formei g are dimensiunea $n - r$.*

Dem: $N_1 = \{x \in V, g(x, y) = 0, \forall y \in V\}$. Dar

$$g(x, y) = 0, \forall\, y \in V \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} g_{ij} x_i y_j = 0, \forall\, y_j \in \mathbb{K},$$

deci N_1 este spaţiul soluţiilor sistemului de ecuaţii liniare şi omogene

$$\sum_{i=1}^{n} g_{i1} x_i = 0, \ldots, \sum_{i=1}^{n} g_{in} x_i = 0.$$

Dacă rang $(g_{ij}) = r$, atunci $\dim N_1 = n - r$.

Analog, N_2 este spaţiul soluţiilor sistemului de ecuaţii liniare şi omogene

$$\sum_{i=1}^{n} g_{1i} x_i = 0, \ldots, \sum_{i=1}^{n} g_{ni} x_i = 0$$

şi, deci, dacă rang $(g_{ij}) = r$, atunci $\dim N_1 = n - r$. $\square$

1.11 Forme pătratice. Aducerea la forma canonică

Fie V un $\mathbb{K}$-spaţiu vectorial şi $g : V \times V \to \mathbb{K}$ o formă biliniară **simetrică**. Îi asociem lui g funcţia

$$h : V \to \mathbb{K}, \quad h(v) = g(v, v), \ \forall\, v \in V.$$

Din biliniaritatea lui g şi din definiţia lui h, obţinem

$$g(v+w, v+w) = h(v) + 2g(v,w) + h(w),\ \forall\, v, w \in V,$$

adică

$$g(v,w) = \frac{1}{2}[h(v+w) - h(v) - h(w)].$$

În consecinţă, putem spune că forma biliniară g este determinată de restricţia sa h la diagonala lui $V \times V$.

- Funcţia h se numeşte *formă pătratică* pe V, asociată formei biliniare g.
- Forma g, determinată de h, se numeşte *forma polară* (sau *forma dedublată*) a formei pătratice h.
- Spunem că forma pătratică h este *nesingulară* dacă forma polară g este nesingulară. În caz contrar, h este singulară.

Funcţia h are câteva proprietăţi imediate:

- h este o **funcţie omogenă de gradul** 2.

$$h(\lambda v) = \lambda^2 h(v), \quad \forall\, v \in V.$$

- h este o **funcţie pară**. Luând pe $\lambda = -1$ mai sus, obţinem, într-adevăr,

$$h(-v) = h(v), \quad \forall\, v \in V.$$

- h verifică **identitatea paralelogramului**. Din $g(v,w) + g(v,-w) = 0$, obţinem

$$h(v+w) + h(v-w) = 2[h(v) + h(w)], \quad \forall\, v, w \in V.$$

Presupunem acum că spaţiul vectorial V este **finit dimensional**, de dimensiune n şi fie $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ o bază a lui V. Dacă, în baza B, vectorul $x \in V$ este de forma $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, atunci expresia lui h în coordonate locale va fi

$$h(x) = g(x,x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} g(e_i, e_j) x_i x_j.$$

Notând $a_{ij} = g(e_i, e_j)$, avem

$$h(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \tag{1.22}$$

şi, evident $a_{ij} = a_{ji}$ (forma g este simetrică).

Polinomul omogen, de gradul 2, în nedeterminatele x_i, $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$, se numeşte *expresia algebrică a formei pătratice h.*

Coeficienţii a_{ij} (care sunt aceiaşi cu coeficienţii formei polare g în baza B) se mai numesc şi *coordonatele formei pătratice h.*

Matricea $A = (a_{ij})$ se numeşte *matricea asociată formei pătratice* h în baza B (evident, este chiar matricea formei g în baza B).

Deoarece rangul matricei A nu depinde de baza aleasă, putem defini *rangul formei pătratice h* să fie rangul matricei A.

Forma pătratică h este *nesingulară* dacă şi numai dacă rang $A = n$ (evident, rang $h =$ rang g, iar dacă g este nesingulară, subspaţiile sale nule – care coincid, căci g este simetrică – degenerează la $\{0_V\}$, adică au dimensiunea egală cu zero. Ţinând cont de Propoziţia 1.10.1, rezultă că rang $A = n$). Forma pătratică h este *singulară* dacă şi numai dacă rang $A < n$.

Expresia (1.22) a formei pătratice h într-o bază B are (cu convenţiile obişnuite) o formă matriceală

$$h(x) =^t XAX,$$

unde matricea A este simetrică: ${}^tA = A$.

Aducerea la forma canonică

Expresia unei forme pătratice h, definită pe un spaţiu vectorial de dimeniune n, depinde de baza considerată în V. Se pune problema dacă există o bază în V faţă de care h să aibă expresia algebrică de forma

$$h(x) = \lambda_1(x_1)^2 + \ldots + \lambda_n(x_n)^2. \tag{1.23}$$

Expresia (1.23) poartă numele de *forma canonică* a lui h. O bază în care h are forma canonică se numeşte *bază canonică.*

Expresia matriceală a lui h este

$$h(x) = (x_1, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Matricea corespunzătoare formei canonice este, deci, o matrice diagonală.

Rangul matricei A nu depinde de alegerea bazei în V. Aceasta înseamnă că, dacă rang$A = r \leq n$, atunci, în forma canonică, doar r din cei n coeficienţi λ_i sunt nenuli. Renumerotând, eventual, putem presupune că $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \neq 0$ şi $\lambda_{r+1} = \ldots = \lambda_n = 0$. Rezultă că forma canonică a expresiei algebrice a lui h este

$$h(x) = \lambda_1(x_1)^2 + \ldots + \lambda_r(x_r)^2, \tag{1.24}$$

iar scrierea matriceală

$$h(x) = (x_1, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_r & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Teoremă 1.11.1. (**Gauss-Lagrange**) *Fie V un spaţiu vectorial n dimensional, h o formă pătratică nenulă pe V, având, într-o bază B a lui V, expresia*

$$h(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

Se poate face întotdeauna o schimbare de bază în V astfel încât, în noua bază, expresia lui h să aibă forma canonică

$$h(u) = \lambda_1 (u_1)^2 + \ldots + \lambda_n (u_n)^2.$$

Dem: Forma pătratică h este asociată la o formă biliniară simetrică g, iar coeficienţii a_{ij} sunt daţi de $a_{ij} = g(e_i, e_j)$. Deci, într-adevăr, $a_{ij} = a_{ji}$, iar expresia lui h este, scrisă dezvoltat,

$$h(x) = a_{11}(x_1)^2 + \ldots + a_{nn}(x_n)^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n + \ldots + 2a_{n-1n}x_{n-1}x_n.$$

Vom face demonstraţia prin inducţie după numărul m de coordonate care intervin în expresia lui h.

Dacă $m = 1$, h va avea forma

$$h(x) = a_{11}(x_1)^2,$$

expresie care are, evident, forma canonică.

Presupunem că în expresia lui h intervin m coordonate, $x_1, \ldots, x_m$, deci

$$h(x) = a_{11}(x_1)^2 + \ldots + a_{mm}(x_m)^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \ldots + 2a_{1m}x_1x_n + \ldots + 2a_{m-1m}x_{m-1}x_m$$

şi că o formă pătratică în $m-1$ coordonate se poate aduce la forma canonică. Vom distinge două cazuri.

- Există un termen pătratic cu coeficientul diferit de zero. Renumerotând, putem presupune că $a_{11} \neq 0$.

Ordonăm termenii lui $h(x)$ după coordonata x_1 şi vom avea

$$h(x) = a_{11}(x_1)^2 + 2x_1(a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m) + \phi_1(x_2, \ldots, x_m),$$

unde ϕ_1 este expresia unei forme pătratice numai în coordonatele $x_2, \ldots, x_m$.

Completând primii doi termeni până la un pătrat perfect, obţinem

$$h(x) = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m)^2 + h_1(x_2, \ldots, x_m),$$

unde

$$h_1(x_2, \ldots, x_m) = \phi_1(x_2, \ldots, x_m) - \frac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m)^2$$

este o formă pătratică numai în coordonatele $x_2, \ldots, x_m$.

Prin schimbarea de coordonate

$$v_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m,\ v_2 = x_2, \ldots, v_n = x_n,$$

forma pătratică h va avea expresia

$$h(v) = \frac{1}{a_{11}}(v_1)^2 + \phi_2(v_2, \ldots, v_m),$$

unde ϕ_2 este expresia unei forme pătratice în $m-1$ coordonate. Folosind ipoteza de inducţie, rezultă că există o schimbare de coordonate de forma

$$u_1 = v_1, u_i = \sum_{j=2}^{m} b_{ij}v_j, i = \overline{2, m},\ u_{m+1} = v_{m+1}, \ldots, u_n = v_n,$$

astfel încât

$$\phi_2(v_2, \ldots, v_m) = \lambda_2(u_2)^2 + \ldots + \lambda_m(u_m)^2.$$

Compunând cele două schimbări de coordonate, obţinem o schimbare de bază în V astfel încât, în raport cu noua bază, expresia lui h are forma canonică

$$h(u) = \lambda_1(u_1)^2 + \ldots + \lambda_n(u_n)^2,$$

cu $\lambda_1 = \dfrac{1}{a_{11}}$.

- Toţi coeficienţii termenilor pătratici sunt nuli.

Expresia lui h are forma

$$h(x) = 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n + \ldots + 2a_{n-1n}x_{n-1}x_n$$

şi există cel puţin un coeficient nenul. Presupunem că $a_{12} \neq 0$.

Facem schimbarea de coordonate

$$v_1 = x_1 + x_2, v_2 = x_1 - x_2, v_3 = x_3 \ldots, v_n = x_n.$$

Atunci, înlocuind $x_1 = \dfrac{v_1 + v_2}{2}$, $x_2 = \dfrac{v_1 - v_2}{2}$, $x_3 = v_3$, …, $x_n = v_n$, obţinem expresia lui h în noua bază

$$h(v) = a_{12}\left(\frac{v_1^2 - v_2^2}{4}\right) + \ldots,$$

deci acest caz se reduce la primul. $\square$

- Oricum am alege o bază canonică pentru h, numărul pătratelor cu coeficienţi nenuli care intervin în forma canonică este acelaşi. El este egal cu rangul formei h.
- Forma polară g asociată formei h va avea expresia corespunzătoare formei canonice a lui h
$$g(u,v) = \frac{1}{2}[h(u+v) - h(u) - h(v)],$$
adică
$$g(u,v) = \lambda_1 u_1 v_1 + \ldots + \lambda_n u_n v_n.$$
Ea se numeşte *forma canonică a expresiei formei polare g.*

Fie $A = (a_{ij})$ o matrice pătratică de ordinul n. *Minorii diagonali **principali*** ai matricei A sunt determinanţii

$$\Delta_1 = a_{11}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_n = \det A.$$

Teoremă 1.11.2. (**Jacobi**) *Dacă matricea unei forme pătratice h, dată prin*

$$h(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ij} = a_{ji},$$

are toţi minorii diagonali principali nenuli, atunci există o bază canonică astfel încât, în această bază, h are forma canonică

$$h(u) = \frac{1}{\Delta_1}(u_1)^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}(u_2)^2 + \ldots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}(u_n)^2.$$

Dem: Ideea este următoarea: dacă $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ este baza lui V în care h are expresia iniţială, vom construi, pornind de la B, o altă bază $\{f_1, \ldots, f_n\}$, care să fie canonică (deci în noua expresie a lui h să nu avem decât termeni pătratici) şi, în plus, coeficienţii acestor termeni pătratici să fie chiar cei care apar în enunţul teoremei.

Căutăm ca vectorii din noua bază să fie de forma
$f_1 = p_{11}e_1$
$f_2 = p_{12}e_1 + p_{22}e_2$
$\ldots$
$f_m = p_{1m}e_1 + \ldots + p_{mm}e_m$
$\ldots$
$f_n = p_{1n}e_1 + \ldots + p_{mn}e_m + \ldots + p_{nn}e_n.$

Matricea schimbării de baze este $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \ldots & p_{1n} \\ 0 & p_{22} & \ldots & p_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & p_{nn} \end{pmatrix}$ şi vrem ca $\det P = p_{11} \ldots p_{nn} \neq 0$.

Vom arăta că este posibil să determinăm coeficienţii p_{ij} astfel încât baza $\{f_1, \ldots, f_n\}$ să fie canonică, iar coeficienţii formei h să fie cei ceruţi.

Fie g forma polară asociată lui h şi fie b_{jm} coordonatele lui h în baza $\{f_1, \ldots, f_n\}$. Evident

$$b_{jm} = g(f_j, f_m) \quad \forall\, j, m = \overline{1, n}.$$

Deoarece g este simetrică, este suficient să ne referim doar la coeficienţii b_{jm} cu $j \leq m$.

- Deoarecem cerem ca baza $\{f_1, \ldots, f_n\}$ să fie canonică, trebuie ca

$$\mathbf{b_{jm} = 0 \quad \forall\, j < m = \overline{2, n}} \quad \text{şi} \quad b_{jj} \neq 0 \;\forall\, j = \overline{1, n}.$$

Exprimând coeficienţii b_{jm}, obţinem

$$b_{jm} = g(f_j, f_m) = g(p_{1j}e_1 + \ldots + p_{jj}e_j, f_m) = p_{1j}g(e_1, f_m) + \ldots + p_{jj}g(e_j, f_m) \quad j < m,$$

deci baza $\{f_1, \ldots, f_n\}$ va fi canonică dacă luăm

$$\mathbf{g(e_j, f_m) = 0 \quad \forall\, 1 \leq j < m = \overline{2, n}}$$

şi, deoarece

$$b_{mm} = g(f_m, f_m) = g(p_{1m}e_1 + \ldots + p_{mm}e_m, f_m) = p_{1m}g(e_1, f_m) + \ldots + p_{m-1m}g(e_{m-1}, f_m) + p_{mm}g(e_m, f_m) =$$

$$= p_{mm}g(e_m, f_m),$$

vom lua

$$\mathbf{g(e_m, f_m) = 1 \quad \forall\, m = \overline{1, n}},$$

astfel încât

$$\mathbf{b_{mm} = p_{mm} \quad \forall\, m = \overline{1, n}}.$$

- Pentru determinarea coeficienţilor p_{ij}, vom proceda prin inducţie după m.

Dacă $m = 1$, condiţiile de mai sus se reduc la $g(e_1, f_1) = 1$, adică $g(e_1, p_{11}e_1) = 1$, deci $p_{11}g(e_1, e_1) = 1 \Longrightarrow p_{11}a_{11} = 1 \Longrightarrow p_{11} = \dfrac{1}{a_{11}}$. Deci

$$b_{11} = p_{11} = \frac{1}{a_{11}} = \frac{1}{\Delta_1}.$$

Presupunem că am determinat coeficienţii p_{ij} până la vectorul f_{m-1} şi că $b_{m-1m-1} = p_{m-1m-1} = \dfrac{\Delta_{m-2}}{\Delta_{m-1}}$. Vom arăta că putem determina coeficienţii lui f_m şi că $b_{mm} = p_{mm} = \dfrac{\Delta_{m-1}}{\Delta_m}$.

Condiţiile puse pentru determinarea bazei devin

$$\begin{cases} a_{11}p_{1m} + \ldots + a_{1m}p_{mm} = 0 \\ \ldots \\ a_{m-11}p_{1m} + \ldots + a_{m-1m}p_{mm} = 0 \\ a_{m1}p_{1m} + \ldots + a_{mm}p_{mm} = 1 \end{cases}. \tag{1.25}$$

Deci, determinarea coeficienţilor lui f_m revine la rezolvarea unui sistem de ecuaţii. Determinantul acestui sistem este chiar $\Delta_n \neq 0$, deci sistemul este un sistem Cramer şi are soluţie unică. Înseamnă că coeficienţii lui f_m sunt unic determinaţi prin condiţiile puse şi baza $\{f_1, \ldots, f_n\}$ este canonică. În plus, rezultă imediat că $p_{mm} = \dfrac{\Delta_{m-1}}{\Delta_m}$, deci

$$b_{mm} = p_{mm} = \frac{\Delta_{m-1}}{\Delta_m}.$$

Rezultă că, în baza $\{f_1, \ldots, f_n\}$, forma pătratică h are coeficienţii termenilor omogeni egali cu zero, iar cei ai termenilor pătratici b_{jj} determinaţi mai sus. Expresia algebrică a lui h va fi, deci,

$$h(u) = \frac{1}{\Delta_1}(u_1)^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}(u_2)^2 + \ldots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}(u_n)^2. \quad \square$$

Teorema lui Gauss ne asigură de faptul că există întotdeauna o bază canonică a spaţiului vectorial V (de dimeniune n), faţă de care o formă pătratică h are expresia algebrică

$$h(x) = \lambda_1(x_1)^2 + \ldots + \lambda_n(x_n)^2.$$

Mai mult, dacă rangul matricei formei polare asociate lui h este $r \leq n$, atunci doar r din cei n coeficienţi λ_i sunt nenuli, iar forma h are expresia

$$h(x) = \lambda_1(x_1)^2 + \ldots + \lambda_r(x_r)^2.$$

- Dacă V este un **spaţiu vectorial complex**, atunci se poate efectua o schimbare de coordonate de forma

$$z_1 = \sqrt{\lambda_1}x_1, \ldots, z_r = \sqrt{\lambda_r}x_r, z_{r+1} = x_{r+1}, \ldots, z_n = x_n,$$

iar expresia algebrică a lui h va fi

$$h(z) = (z_1)^2 + \ldots + (z_r)^2.$$

Aceasta se numeşte *formă normală* a expresiei lui h.

- Dacă V este un **spaţiu vectorial real**, putem presupune (eventual renumerotând) că $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sunt **pozitivi**, iar $\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_r$ sunt **negativi**. Efectuând o schimbare de coordonate de forma

$$u_1 = \sqrt{\lambda_1}x_1, \ldots, u_p = \sqrt{\lambda_p}x_p, u_{p+1} = \sqrt{|\lambda_{p+1}|}x_{p+1}, \ldots, u_r = \sqrt{|\lambda_r|}x_r, u_{r+1} = x_{r+1}, \ldots, u_n = x_n,$$

expresia algebrică a lui h este de forma

$$h(u) = (u_1)^2 + \ldots + (u_p)^2 - (u_{p+1})^2 - \ldots - (u_r)^2.$$

Aceasta se numeşte *formă normală* a expresiei lui h.

1.12 Forme pătratice pe spaţii vectoriale complexe

Fie V un spaţiu vectorial complex.

O aplicaţie $g : V \times V \to \mathbb{C}$ care satisface condiţiile

$$g(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, w) = \alpha_1 g(v_1, w) + \alpha_2 g(v_2, w) \quad \forall\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C},\ \forall\, v_1, v_2, w \in V$$

$$g(v, \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2) = \overline{\alpha}_1 g(v, w_1) + \overline{\alpha}_2 g(v, w_2) \quad \forall\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C},\ \forall\, v_1, v_2, w \in V,$$

se numeşte *formă sesquiliniară.*

Dacă g este o formă sesquiliniară pe spaţiul vectorial complex V, atunci aplicaţia

$$h : V \to \mathbb{C},$$

$$h(v) = g(v, v) \quad \forall\, v \in V,$$

se numeşte *formă pătratică sesquiliniară.*

- O formă sesquiliniară g este perfect determinată de forma pătratică sesquiliniară h asociată.

Într-adevăr, avem

$$h(v + w) = h(v) + h(w) + g(v, w) + g(w, v)$$

şi

$$h(v + iw) = h(v) + h(w) - ig(v, w) + ig(w, v).$$

Înmulţind a doua relaţie cu i şi adunând, obţinem

$$2g(v, w) = [h(v + w) - h(v) - h(w)] + i[h(v + iw) - h(v) - h(w)] \quad \forall\, v, w \in V. \tag{1.26}$$

- O formă pătratică sesquiliniară satisface următoarele proprietăţi imediate:

$$h(v + w) + h(v - w) = 2[h(v) + h(w)] \quad \forall\, v, w \in V,$$

$$h(\alpha v) = |\alpha|^2 h(v) \quad \forall\, v \in V.$$

- O formă sesquiliniară g se numeşte *formă hermitiană* dacă satisface proprietatea

$$g(v, w) = \overline{g(w, v)} \quad \forall\, v, w \in V.$$

Forma pătratică h asociată unei forme hermitiene se numeşte *formă pătratică hermitiană.*

Propoziţie. *O formă sesquiliniară g este hermitiană dacă şi numai dacă forma pătratică asociată h este cu valori reale.*

Dem: "$\Longrightarrow$: Dacă g este hermitiană, atunci $g(v,w) = \overline{g(w,v)} \quad \forall\, v,w \in V$ şi, luând $v = w$, obţinem $g(v,v) = \overline{g(v,v)} \quad \forall\, v \in V$, deci $h(v) = g(v,v) \in \mathbb{R} \quad \forall\, v \in V$.

"$\Longleftarrow$" Am văzut că g este determinată de h prin relaţia

$$2g(v,w) = [h(v+w) - h(v) - h(w)] + i[h(v+iw) - h(v) - h(w)] \quad \forall\, v,w \in V.$$

Atunci

$$2g(w,v) = [h(w+v) - h(w) - h(v)] + i[h(w+iv) - h(w) - h(v)] \quad \forall\, v,w \in V.$$

Partea reală a celor două expresii de mai sus este aceeaşi. Vom arăta că suma părţilor imaginare este zero. Într-adevăr,

$$[h(v+iw)-h(v)-h(w)]+[h(w+iv)-h(w)-h(v)] = h(v+iw)+h[i(v-iw)]-2h(v)-2h(w) =$$

$$= h(v+iw) + |i|^2 h(v-iw) - 2h(v) - 2h(w) = 0,$$

conform unei proprietăţi demonstrate la începutul paragrafului. Deci $g(v,w) = \overline{g(w,v)} \quad \forall\, v,w \in V$ şi forma g este hermitiană. $\square$

O formă hermitiană g care are proprietatea că $h(v) > 0$, $\forall\, v \in V$, $v \neq 0_V$, unde h este forma pătratică hermitiană asociată lui g, se numeşte *formă hermitiană pozitiv definită.*

- O formă hermitiană pozitiv definită este nesingulară, iar forma pătratică asociată se anulează numai pentru vectorul nul.

Propoziţie. *Fie g o* ***formă hermitiană pozitiv definită*** *şi h forma pătratică asociată. Au loc inegalităţile:*

- Inegalitatea lui Cauchy-Schwarz

$$|g(v,w)| \leq \sqrt{h(v)}\sqrt{h(w)} \quad \forall\, v,w \in V.$$

- Inegalitatea triunghiului

$$\sqrt{h(v+w)} \leq \sqrt{h(v)} + \sqrt{h(w)} \quad \forall\, v,w \in V.$$

Dem: Pentru a demonstra inegalitatea lui Cauchy-Schwarz, pornim de la faptul că g este pozitiv definită, deci $h(v - \alpha w) \geq 0$, $\forall\, v,w \in V$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{C}$. Avem

$$h(v-\alpha w) \geq 0 \Leftrightarrow g(v-\alpha w, v-\alpha w) \geq 0 \Leftrightarrow h(v) - \alpha\overline{g(v,w)} - \overline{\alpha} g(v,w) + \alpha\overline{\alpha} h(w) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h(v) - \alpha\overline{g(v,w)} \geq \overline{\alpha}[g(v,w) - \alpha h(w)],\ \forall\, v,w \in V,\ \forall\, \alpha \in \mathbb{C}.$$

Dacă $h(w) = 0 \Longrightarrow w = 0_V$, iar inegalitatea devine egalitate.

Dacă $h(w) > 0$, alegem $\alpha = \dfrac{g(v,w)}{h(w)}$ şi, înlocuind, obţinem

$$h(v) - \frac{1}{h(w)} g(v,w)\overline{g(v,w)} \geq 0,$$

de unde rezultă inegalitatea lui Cauchy-Schwarz.

În cazul celei de-a doua inegalităţi, deoarece g este hermitiană, avem

$$h(v+w) = h(v)+h(w)+g(v,w)+\overline{g(v,w)} = h(v)+h(w)+2\Re g(v,w) \leq h(v)+h(w)+2|g(v,w)| \leq$$
$$\leq h(v)+h(w)+\sqrt{h(v)}\sqrt{h(w)} = (\sqrt{h(v)}+\sqrt{h(w)})^2,$$

de unde rezultă inegalitatea triunghiului. □

Presupunem acum că spaţiul vectorial complex V este **finit dimensional**, de dimenisune n şi că $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ este o bază a sa. Dacă $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ şi $y = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j e_j$, atunci o **formă hermitiană** g va avea ecuaţiile

$$g(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i \overline{y}_j g(e_i, e_j)$$

şi, notând $g(e_i, e_j) = a_{ij}$, vom obţine

$$g(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i \overline{y}_j.$$

Deoarece $a_{ji} = g(e_j, e_i) = \overline{g(e_i, e_j)} = \overline{a}_{ij}$, rezultă că

$$A =^t \overline{A},$$

adică matricea asociată unei forme hermitiene în raport cu o bază dată este egală cu transpusa conjugatei sale. Rezultă că **elementele de pe diagonala principală ale acestei matrice sunt reale**.

În scriere matriceală, o formă hermitiană va avea expresia

$$g(x,y) =^t XA\overline{Y}.$$

Considerând forma pătratică hermitiană h asociată lui g, de rang $r \leq n$, într-o bază canonică, aceasta va avea ecuaţia matriceală

$$h(x) = g(x,x) =^t XA\overline{X},$$

unde A este o matrice diagonală, cu elementele numere reale. Deci

$$h(x) = (x_1 \ldots x_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \lambda_r & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \overline{x}_n \end{pmatrix}.$$

Expresia algebrică a lui h va fi

$$h(x) = \lambda_1 |x_1|^2 + \ldots + \lambda_r |x_r|^2,$$

unde scalarii λ_i sunt reali.

1.13 Forme pătratice pe spaţii vectoriale reale

Fie V un **spaţiu vectorial real** n dimensional şi o formă pătratică $h : V \to \mathbb{R}$. Într-o bază canonică a lui V, forma pătratică h se poate aduce la **forma normală**

$$h(x) = (x_1)^2 + \ldots + (x_p)^2 - (x_{p+1})^2 - \ldots - (x_r)^2,$$

unde $r \leq n$ este rangul formei h (invariant la schimbarea bazei canonice). Următoarea teoremă ne asigură că şi numărul p (numărul termenilor pozitivi în forma normală) este invariant la schimbarea bazei.

Teoremă 1.13.1. (**Sylvester**) *Numărul termenilor pozitivi în expresia canonică a unei forme pătratice reale nu depinde de alegerea bazei canonice.*

Dem: Fie $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ o bază canonică a lui V, în care forma h are expresia

$$h(u) = (u_1)^2 + \ldots + (u_p)^2 - (u_{p+1})^2 - \ldots - (u_r)^2 \quad \forall\, u(u_1, \ldots, u_n) \in V,$$

astfel încât, matriceal, expresia lui $h(u)$ se poate scrie

$$h(u) = (u_1, \ldots, u_p, u_{p+1}, \ldots u_r, u_{r+1}, \ldots, u_n) \begin{pmatrix} \mathbf{I_p} & \mathbf{\Theta} & \mathbf{\Theta} \\ \mathbf{\Theta} & -\mathbf{I_{r-p}} & \mathbf{\Theta} \\ \mathbf{\Theta} & \mathbf{\Theta} & \mathbf{\Theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

Dacă $B' = \{f_1, \ldots, f_n\}$ este o altă bază canonică a lui V, în raport cu care h are expresia

$$h(w) = (w_1)^2 + \ldots + (w_q)^2 - (w_{q+1})^2 - \ldots - (w_r)^2 \quad \forall\, w(w_1, \ldots, w_n) \in w,$$

atunci

$$h(w) = (w_1, \ldots, w_q, w_{q+1}, \ldots w_r, w_{r+1}, \ldots, w_n) \begin{pmatrix} \mathbf{I_q} & \mathbf{\Theta} & \mathbf{\Theta} \\ \mathbf{\Theta} & -\mathbf{I_{r-q}} & \mathbf{\Theta} \\ \mathbf{\Theta} & \mathbf{\Theta} & \mathbf{\Theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}.$$

Presupunem, prin absurd, că $q < p$. Fie spaţiile

$$L_1 =< e_1, \ldots, e_p, e_{r+1}, \ldots, e_n > \quad \text{şi} \quad L_2 =< f_{q+1}, \ldots, f_r > .$$

Deoarece $\dim L_1 + \dim L_2 = (n - r + p) + (r - q) = n + p - q > n$, rezultă că intersecţia spaţiilor L_1 şi L_2 conţine vectori nenuli ($\dim L_1 + \dim L_2 = \dim(L_1 + L_2) + \dim(L_1 \cap L_2)$). Fie $v \in L_1 \cap L_2$, $v \neq 0_V$ (considerând componentele acestui vector în cele doua baze, între a "$q+1$-a" componentă şi a "p-a" compenentă, nu toate componentele sunt nule).

$$v \in L_1 \Longrightarrow v = v_1 e_1 + \ldots + v_q e_q + v_{q+1} e_{q+1} + \ldots + v_p e_p, \quad v_{q+1}^2 + \ldots + v_p^2 \neq 0,$$

$$v \in L_2 \Longrightarrow v = v'_{q+1} f_{q+1} + \ldots + v'_p f_p + v'_{p+1} f_{p+1} + \ldots + v'_r f_r \quad v'^2_{q+1} + \ldots + v'^2_p \neq 0.$$

Vom avea

$$h(v) = (v_1, \ldots, v_q, v_{q+1}, \ldots, v_p, 0, \ldots, 0, v_{r+1}, \ldots v_n) \begin{pmatrix} \mathbf{I_p} & \mathbf{\Theta} & \mathbf{\Theta} \\ \mathbf{\Theta} & -\mathbf{I_{r-p}} & \mathbf{\Theta} \\ \mathbf{\Theta} & \mathbf{\Theta} & \mathbf{\Theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} =$$

$$= v_1^2 + \ldots + v_q^2 + v_{q+1}^2 + \ldots + v_p^2 > 0$$

şi

$$h(v) = (0, \ldots, 0, v'_{q+1}, \ldots, v'_p, v'_{p+1}, \ldots, v'_r, 0, \ldots, 0) \begin{pmatrix} \mathbf{I_q} & \mathbf{\Theta} & \mathbf{\Theta} \\ \mathbf{\Theta} & -\mathbf{I_{r-q}} & \mathbf{\Theta} \\ \mathbf{\Theta} & \mathbf{\Theta} & \mathbf{\Theta} \end{pmatrix} V = -v'^2_{q+1} - \ldots - v'^2_r < 0.$$

Există, deci, un vector $v \in V$, $v \neq 0_V$, pentru care $h(v) > 0$ şi $h(v) < 0$, absurd. Un raţionament analog ne conduce la concluzia că nici cazul $p < q$ nu este posibil. În consecinţă, $p = q$. $\square$

- Numărul p al termenilor pozitivi din expresia canonică a unei forme pătratice reale este invariant la schimbarea bazei canonice. El se numeşte *indicele pozitiv de inerţie*.
- Numărul $q = r - p$ (invariant şi el) se numeşte *indicele negativ de inerţie*.
- Diferenţa $s = p - q$ poartă numele de *signatura formei h*.
- O formă pătratică h se numeşte *pozitiv definită* (resp. *negativ definită*) dacă $h(v) > 0$, $\forall\, v \neq 0_V$ (resp. $h(v) < 0$, $\forall\, v \neq 0_V$).
- O formă pătratică h se numeşte *pozitiv semidefinită* (resp. *negativ semidefinită*) dacă $h(v) \geq 0$, $\forall\, v \in V$ (resp. $h(v) \leq 0$, $\forall\, v \in V$) şi există $v \neq 0_V$ pentru care $h(v) = 0$.
- O formă pătratică h se numeşte *nedefinită* dacă $\exists\, v_1, v_2 \in V$, astfel încât $h(v_1) > 0$ şi $h(v_2) < 0$.

Rezultă imediat că:

- O formă pătratică h este **pozitiv definită** (resp. **negativ definită**) dacă şi numai dacă $p = n$ (resp. $q = n$).
- O formă pătratică h este **pozitiv semidefinită** (resp. **negativ semidefinită**) dacă şi numai dacă $p = s < n$ (resp. $q = -s < n$).
- O formă pătratică h este **nedefinită** dacă şi numai dacă $pq \neq 0$.

Propoziţie. *Fie V un spaţiu vectorial real n dimensional şi $h : V \to \mathbb{R}$ o formă pătratică pe V. h este pozitiv definită dacă şi numai dacă toţi minorii diagonali ai matricei asociate sunt pozitivi.*

Dem: O formă pătratică pozitiv definită h poate fi adusă la expresia canonică

$$h(x) = \lambda_1(x_1)^2 + \ldots + \lambda_n(x_n)^2, \quad \lambda_i > 0\, \forall\, i = \overline{1, n},$$

adică

$$h(x) = (x_1 \ldots x_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Elementele nenule ale matricei fiind toate strict pozitive, este clar că toţi minorii diagonali ai săi sunt pozitivi.

Reciproc, dacă toţi minorii diagonali sunt pozitivi, atunci Teorema lui Jacobi ne dă o formă canonică a lui h,

$$h(x) = \frac{1}{\Delta_1}(x_1)^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}(x_2)^2 + \ldots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}(x_n)^2,$$

şi, evident, h este pozitiv definită. □

Fie V un spaţiu vectorial real şi $h : V \to \mathbb{R}$ o formă pătratică pe V. Fie $g : V \times V \to \mathbb{R}$ forma polară asociată lui h. Dacă $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ este un sistem de vectori din V, *determinantul* său *Gram în raport cu forma h* este

$$G_h(v_1, \ldots, v_p) = \begin{vmatrix} g(v_1, v_1) & \ldots & g(v_1, v_p) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ g(v_p, v_1) & \ldots & g(v_p, v_p) \end{vmatrix}.$$

Propoziţie. *Fie h o formă pătratică pozitiv definită pe V şi $S = \{v_1, \ldots, v_p\}$ un sistem de vectori din V.*

- *Dacă S este **liniar independent**, atunci $G_h(v_1, \ldots, v_p) > 0$.*
- *Dacă S este **liniar dependent**, atunci $G_h(v_1, \ldots, v_p) = 0$.*

Dem: Subspaţiul vectorial $< S >$ generat de $S = \{v_1, \ldots, v_p\}$ este finit dimensional şi putem considera o bază în $< S >$ ca fiind chiar $S = \{v_1, \ldots, v_p\}$. Restricţia

$$h_{|<S>} :< S >\to \mathbb{R}$$

este o formă pătratică pozitiv definită pe un spaţiu real finit dimensional. Rezultă, conform propoziţiei anterioare, că determinantul matricei asociate este pozitiv. Dar matricea asociată lui h este matricea care are ca elemente $g(v_i, v_j)$, deci determinantul său este chiar $G_h(v_1, \ldots, v_p)$, deci $G_h(v_1, \ldots, v_p) > 0$.

Dacă S este liniar dependent, rezultă că există scalarii $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$, nu toţi nuli, astfel încât

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_p v_p = 0_V.$$

Avem

$$g(v, 0_V) = 0,\ \forall\, v \in V \Longrightarrow g(v_i, \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_p v_p) = 0,\ \forall\, i = \overline{1, p}.$$

Deci, sistemul liniar şi omogen (în necunoscutele λ_j)

$$\lambda_1 g(v_a, v_1) + \ldots + \lambda_p g(v_a, v_p) = 0 \quad a = \overline{1,p}$$

admite soluţii diferite de soluţia banală. Rezultă că determinantul coeficienţilor este nul, adică $G_h(v_1, \ldots, v_p) = 0$. $\square$

Chapter 2

Spaţii afine

2.1 Structura afină a unui spaţiu vectorial

Fie V un spaţiu vectorial cu scalarii într-un corp $\mathbb{K}$. O submulţime a lui V de forma

$$A = a + U = \{a + u, u \in U\},$$

unde $a \in V$ şi U este un subspaţiu vectorial al lui V, se numeşte *varietate liniară* în V. U poartă numele de *subspaţiu director* al varietăţii A.

Mulţimea tuturor varietăţilor liniare ale spaţiului vectorial V, împreună cu mulţimea vidă, formează *structura afină* $\mathcal{A}(V)$ a lui V.

$$\mathcal{A}(V) = \{a + U, a \in V, U \prec V\} \cup \emptyset.$$

Exemple

- În spaţiul $\mathcal{E}_3^O$ al vectorilor legaţi în punctul O, considerăm mulţimea A a vectorilor cu extremitatea pe o dreaptă $d \subset \mathcal{E}_3^O$ (care nu trece prin punctul O). Această mulţime este o varietate liniară, al cărei spaţiu director este dreapta vectorială (deci care trece prin "originea" O) d', care are direcţia paralelă cu cea a dreptei d.

  Evident, pentru orice vector $v_0 \in A$ fixat, un vector $v \in A$ se scrie sub forma $v = v_0 + u$, unde $u \in d'$, deci $A = v_0 + d'$.

  Dacă identificăm vectorul $v \in A$ cu extremitatea acestuia, situată pe dreapta d, structura de varietate liniară a lui A se transmite dreptei d. O astfel de varietate liniară se numeşte **dreaptă** din $\mathcal{E}_3^O$ (deci dreptele care *nu* trec prin origine sunt varietăţi liniare în $\mathcal{E}_3^O$).

- În acelaşi spaţiu $\mathcal{E}_3^O$ al vectorilor legaţi în punctul O, considerăm mulţimea B a vectorilor cu extremitatea într-un plan $\pi \subset \mathcal{E}_3^O$ (care nu trece prin punctul O). Această mulţime este o varietate liniară, al cărei spaţiu director este planul vectorial (deci care trece prin "originea" O) π', paralel cu planul π.

  Evident, pentru orice vector $v_0 \in B$ fixat, un vector $v \in B$ se scrie sub forma $v = v_0 + u$, unde $u \in \pi'$, deci $B = v_0 + \pi'$.

Dacă identificăm vectorul $v \in B$ cu extremitatea acestuia, situată în planul π, structura de varietate liniară a lui B se transmite planului π. O astfel de varietate liniară se numeşte **plan** din $\mathcal{E}_3^O$ (deci planele care *nu* trec prin origine sunt varietăţi liniare în $\mathcal{E}_3^O$).

- Considerăm un sistem **neomogen** de m ecuaţii liniare, cu n necunoscute.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1,m}, \ a_{ij} \in \mathbb{K}.$$

  Presupunem că sistemul este compatibil, adică

$$\operatorname{rang}(a_{ij}) = \operatorname{rang}(a_{ij}, b_i) = r \leq n.$$

  Mulţimea A a soluţiilor sistemului neomogen de ecuaţii este o varietate liniară a lui $\mathbb{K}^n$. Spaţiul său director este mulţimea U a soluţiilor sistemului de ecuaţii liniare şi **omogene** asociat (acesta este un subspaţiu al lui $\mathbb{K}^n$).

  Într-adevăr, dacă $x = (x_1, \ldots, x_n)$ este o soluţie fixată a sistemului dat, atunci pentru orice soluţie $u = (u_1, \ldots, u_n)$ a sistemului omogen asociat, este imediat faptul că $(x_1 + u_1, \ldots, x_n + u_n)$ este, de asemenea, o soluţie a sistemului neomogen. Deci $A = x + U$.

Propoziţie. *Dacă $A = a + U \in \mathcal{A}(V)$ şi $b \in A$, atunci $A = b + U$.*

Dem: $b \in A \Longrightarrow \exists u \in U, b = a + u$, deci $a = b - u$ şi $A = a + U = (b - u) + U = b + (-u) + U = b + U$. $\square$

Rezultă că o varietate liniară A nu depinde de punctul a ales din A (de exemplu, o dreaptă din $\mathcal{E}_3^O$ este determinată de direcţia sa — spaţiul său director — şi un punct **arbitrar** al dreptei).

- O varietate liniară $A \in \mathcal{A}$ este un subspaţiu vectorial al lui V dacă şi numai dacă $0_V \in A$.

Dimensiunea unei varietăţi liniare

Propoziţie. *Dacă $A = a + U = a' + U' \in \mathcal{A}$, atunci $U = U'$.*

Dem: Deoarece $a' \in A$, rezultă că $A = a' + U' = a + U'$, deci $a + U = a + U'$ şi $U = U'$. $\square$

În consecinţă, în reprezentarea unei varietăţi liniare sub forma $A = a + U$, subspaţiul său director U este **unic determinat**. Îl vom nota cu $D(A)$ şi o varietate liniară A va fi de forma

$$A = a + D(A).$$

Definim *dimensiunea* unei varietăţi liniare $A = a + D(A)$ astfel:

$$\dim A = \begin{cases} \dim D(A) & \text{dacă} \quad A \neq \emptyset \\ -1 & \text{dacă} \quad A = \emptyset \end{cases}.$$

- Dacă $\dim A = 0$, atunci $A = a + < 0_V >$ şi mulţimea A (formată dintr-un singur vector a) se numeşte *punct*. Identificăm vectorul a cu punctul $\{a\}$.
- Dacă $\dim A = 1$, $\dim A = 2$, $\dim A = p$, atunci varietatea liniară A se va numi respectiv *dreaptă*, *plan* sau *p-plan*. Dacă $0_V \in A$, atunci vom avea o dreaptă vectorială, un plan vectorial, respectiv un p-plan vectorial.
- Dacă U este un hiperplan vectorial, atunci $A = a + U$ se numeşte *hiperplan*. În particular, dacă V are dimensiunea n, un hiperplan va avea dimensiunea $n - 1$.

Propoziţie. *Dacă $A_\alpha \in \mathcal{A}(V)$, pentru $\alpha \in I$, atunci $\bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha \in \mathcal{A}(V)$.*

Dem: Dacă $\bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha = \emptyset$, propoziţia este evidentă. Fie $a \in \bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha \neq \emptyset$. Rezultă că $A_\alpha = a + D(A_\alpha)$, pentru orice $\alpha \in I$. Este imediat faptul că $\bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha = a + \bigcap\limits_{\alpha \in I} D(A_\alpha)$. $\square$

Corolar. *Dacă varietăţile liniare A_α sunt finit dimensionale, $\alpha \in I$, şi au intersecţia nevidă, atunci*

$$\dim \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \dim \bigcap_{\alpha \in I} D(A_\alpha).$$

Teoreme de caracterizare pentru varietăţile liniare

Propoziţie 2.1.1. *Dacă a şi b sunt două puncte distincte din V, atunci există o singură dreaptă în $\mathcal{A}(V)$ care conţine punctele a şi b; o vom nota cu ab.*

Dem: Dreapta $a + < b - a >= \{a + \lambda(b - a), \lambda \in \mathbb{K}\}$ conţine punctele a şi b, deci existenţa este asigurată.

Presupunem acum că D este o adreaptă arbitrară din $\mathcal{A}(V)$, care conţine punctele distincte a şi b. Vom arăta că $D = a + < b - a >$. Într-adevăr, deoarece $a \in D$, rezultă că $D = a + U$, unde $U \prec V$, de dimeniune 1 (adică generat de un singur vector al lui U). Dar $b \in D \Longrightarrow b = a + u$, cu $u \in U$, deci $b - a = u$ şi este imediat faptul că $< b - a >=< u >$, adică $< b - a >= U$. $\square$

Deci, dreapta ab care trece prin punctele distincte a şi b este

$$ab = \{a + \lambda(b - a), \lambda \in \mathbb{K}\}$$

şi ea se mai poate scrie sub forma

$$ab = \{(1 - \lambda)a + \lambda b, \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

Dăm acum o caracterizare a varietăţilor afine cu ajutorul dreptelor.

Propoziţie 2.1.2. *Fie V un spaţiu vectorial peste un corp $\mathbb{K}$ care conţine cel puţin trei elemente. O submulţime A a lui V este o varietate liniară dacă şi numai dacă*

$$\forall\, a, b \in A, a \neq b \Longrightarrow ab \subset A.$$

Dem: "$\Longrightarrow$" Dacă $A \in \mathcal{A}(V)$, atunci $A = x + D(A)$, unde $x \in A$ şi $D(A) \prec V$. Fie $a \neq b$ două puncte din A. Varietatea A se poate scrie

$$A = a + D(A).$$

Deoarece $b \in A \Longrightarrow b - a \in D(A)$, deci $< b - a > \subset D(A)$, adică $ab \subset A$.

"$\Longleftarrow$" Fie A o submulţime a lui V care satisface condiţia din enunţ. Dacă $A = \emptyset$, atunci A este o varietate liniară.

Presupunem că $A \neq \emptyset$. Fie $a \in A$ şi notăm $U = A - a = \{u = x - a, x \in a\}$. Vom demonstra că U este **subspaţiu vectorial** al lui V.

- Pentru orice $u_1, u_2 \in U$ şi orice $\lambda \in \mathbb{K}$, rezultă că

$$(1-\lambda)u_1 + \lambda u_2 \in U. \tag{2.1}$$

Într-adevăr, dacă $u_1 = x_1 - a$ şi $u_2 = x_2 - a$, cu $x_1, x_2 \in A$, avem

$$(1-\lambda)u_1 + \lambda u_2 = (1-\lambda)(x_1 - a) + \lambda(x_2 - a) = \underbrace{(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2}_{x_1 x_2} - a \in A - a = U.$$

- În (2.1) înlocuim $u_1 = 0_V$ (deoarece $a \in A \Longrightarrow 0_V = a - a \in U$) şi obţinem

$$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall u \in U,\ \Longrightarrow \lambda u \in U.$$

- Deoarece corpul $\mathbb{K}$ are cel puţin trei elemente, rezultă că există $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$. Înlocuim în (2.1) $\lambda = \alpha$, $u_1 = (1-\alpha)^{-1}v_1$ şi $u_2 = \alpha^{-1}v_2$, cu $v_1, v_2 \in U$. Atunci

$$\forall, v_1, v_2 \in U \ \Longrightarrow v_1 + v_2 \in U.$$

Deci U este un subspaţiu vectorial al lui V, iar $A = a + U$ este o varietate liniară. $\square$

Dacă $\mathbb{K}$ are doar două elemente, propoziţia nu mai este adevărată. Fie $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2 = \{\widehat{0}, \widehat{1}\}$, $V = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ şi $M = \{(\widehat{0},\widehat{0}), (\widehat{0},\widehat{1}), (\widehat{1},\widehat{0})\} \subset V$. Orice dreaptă din $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ conţine exact două elemente ($ab = \{a + \lambda(b-a), \lambda = \widehat{0}, \widehat{1}\}$), deci oricare ar fi două elemente ale lui M, dreapta care trece prin ele este conţinută în M. Dar M nu este varietate liniară, căci dacă ar fi, ţinând cont de faptul că $(\widehat{0},\widehat{0}) \in M$, ar rezulta că M este un subspaţiu vectorial al lui $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Dar atunci $(\widehat{0},\widehat{1}) + (\widehat{1},\widehat{0}) \in M$, deci $(\widehat{1},\widehat{1}) \in M$, ceea ce este fals.

În următoarea caracterizare a varietăţilor liniare nu excludem nici un corp.

Propoziţie 2.1.3. *Fie V un spaţiu vectorial peste un corp $\mathbb{K}$. O submulţime $A \subset V$ este o varietate liniară a lui V dacă şi numai dacă este satisfăcută următoarea condiţie:*

$$(\forall\, x_1, \ldots, x_n \in A,\ \forall\, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1) \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in A. \tag{2.2}$$

Dem: "$\Longrightarrow$" Dacă $A \in \mathcal{A}(V)$, atunci $A = x + D(A)$, unde $x \in A$ şi $D(A) \prec V$. Fie $x_1 \in A$. Varietatea A se poate scrie

$$A = x_1 + D(A).$$

Pentru $x_i \in A, i = \overline{1,n}$ şi $\lambda_i \in \mathbb{K}, i = \overline{1,n}$, cu $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \Longrightarrow x_i - x_1 \in D(A) \prec V$, deci $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - x_1) \in D(A)$. În consecinţă,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - x_1) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_1 = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - x_1)}_{\in D(A)} + x_1 \subset D(A) + x_1 \in A.$$

"$\Longleftarrow$" Fie A o submulţime a lui V care satisface condiţia din enunţ. Dacă $A = \emptyset$, atunci A este o varietate liniară.

Presupunem că $A \neq \emptyset$. Fie $a \in A$ şi notăm $U = A - a = \{u = x - a, x \in a\}$. Vom demonstra că U este **subspaţiu vectorial** al lui V.

- Pentru orice $u_1, \ldots, u_n \in U$ şi orice $\lambda_i \in \mathbb{K}$, cu $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, rezultă că

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \in U. \tag{2.3}$$

Într-adevăr, dacă $u_i = x_i - a$, cu $x_i \in A$, $\imath = \overline{1,n}$, avem

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - a) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i}_{\in A} - a \subset A - a = U.$$

- În (2.3) înlocuim $n = 3$, $\lambda_1 = \alpha \in \mathbb{K}$, $\lambda_2 = \beta \in \mathbb{K}$, $\lambda_3 = 1 - \alpha - \beta$, $u_3 = 0_V$ (deoarece $a \in A \Longrightarrow 0_V = a - a \in U$) şi obţinem

$$\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ \forall\, u_1, u_2 \in U,\ \Longrightarrow \alpha u_1 + \beta u_2 \in U.$$

Deci U este un subspaţiu vectorial al lui V, iar $A = a + U$ este o varietate liniară. $\square$

Înfăşurătoarea afină a unei submulţimi

Combinaţia liniară $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, în care coeficienţii $\lambda_i \in \mathbb{K}$ verifică $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, se numşte *combinaţie afină* a punctelor $x_1, \ldots, x_n \in V$.

Am văzut că intersecţia varietăţilor liniare este o varietate liniară. Fie $M \subset V$. Intersecţia tuturor varetăţilor liniare ale lui V, care conţin pe M, se numeşte *înfăşurătoarea afină* (sau *închiderea afină*) a lui M şi se notează cu af M. Este clar că af M este elementul **minim** al lui $\mathcal{A}(V)$ (în raport cu incluziunea) care conţine pe M.

$$A \in \mathcal{A}(V), M \subset A \Longrightarrow \operatorname{af} M \subset A.$$

Propoziţie 2.1.4. *Fie V un spaţiu vectorial peste un corp $\mathbb{K}$. Înfăşurătoarea afină a unei mulţimi $M \subset V$ este mulţimea tuturor combinaţiilor afine care se pot forma cu un număr finit de elemente din M.*

$$\operatorname{af} M = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, n \in \mathbb{N}, x_1, \ldots, x_n \in M, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\} \quad (\textit{\textbf{sume finite}}).$$

Dem: Fie $X = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, n \in \mathbb{N}, x_1, \ldots, x_n \in M, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}$. Vom arăta că af $M = X$.

"$\subseteq$" Pentru această incluziune, este suficient să verificăm faptul că X este o varietate liniară care conţine pe M. Evident, $M \subset X$, deoarece orice $x \in M$ este de forma $x = 1 \cdot x$.

Pentru a demonstra că $X \in \mathcal{A}(V)$, vom folosi Propoziţia 2.1.3. Fie $y_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} x_i \in X$, cu $\sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} = 1$, $j = \overline{1,k}$ şi fie $\mu_j \in \mathbb{K}$, $j = \overline{1,k}$, cu $\sum_{j=1}^{k} \mu_j = 1$. Atunci

$$\sum_{j=1}^{k} \mu_j y_j = \sum_{j=1}^{k} \mu_j (\sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} x_i) = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{k} \mu_j \lambda_{ij}) x_i \in X,$$

deoarece $\sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{k} \mu_j \lambda_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{k} \mu_j) \lambda_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} = 1$, deci $X \in \mathcal{A}(V)$. Deoarece af M este cea mai mică varietate liniară a lui V care conţine pe M, rezultă că af $M \subseteq X$.

"$\supseteq$" Fie $A \in \mathcal{A}(V)$ o varietate liniară arbitrară, astfel încât $M \subset A$. Vom arăta că $X \subset A$. Într-adevăr, fie $x \in X$. Deci $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, unde $x_i \in M$, iar $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Deoarece $x_i \in M$, iar $M \subset A$, atunci $x_i \in A$. Folosind din nou Propoziţia 2.1.3, rezultă că $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in A$, deci $X \subset A$. Adică X este inclusă în orice varietate liniară A, cu $M \subset A$, deci $X \subset$ af M. □

Rezultă imediat că

- $M = \operatorname{af} M \iff M \in \mathcal{A}(V)$.
- $\operatorname{af} \{a, b\} = ab$.

Ecuaţiile unei varietăţi liniare

Presupunem acum că spaţiul vectorial V este **finit dimensional**, de dimeniune n, şi fie $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ o bază a sa. Fie $A \in \mathcal{A}(V)$ o varietate liniară de dimensiune r, $r \leq n$. Atunci A este de forma

$$A = a + < d_1, \ldots, d_r >,$$

unde $a \in A$, iar vectorii $d_1, \ldots, d_r$ sunt liniar independenţi. Aceasta este *ecuaţia vectorială* a varietăţii A.

În raport cu baza B a lui V, putem determina coordonatele vectorilor $a, d_1, \ldots, d_r$. Dacă $a = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i e_i$ şi $d_j = \sum\limits_{i=1}^{n} d_{ij} e_i$, $j = \overline{1,r}$, atunci varietatea liniară A este dată de

$$A = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in V, x_i = a_i + \sum_{j=1}^{r} d_{ij}\lambda_j, \lambda_j \in \mathbb{K}\}$$

şi am obţinut *ecuaţiile parametrice* ale varietăţii A.

Pe de altă parte, varietăţile liniare coincid cu soluţiile sistemelor de ecuaţii liniare, deci

$$A = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in V, \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, i = \overline{1,m}\},$$

unde rangul matricei (a_{ij}) este r.

Teorema dimensiunii. Paralelism

Varietăţile liniare $A, B \in \mathcal{A}(V)$ se numesc *paralele* dacă $D(A) \subseteq D(B)$ sau $D(B) \subseteq D(A)$. Vom nota $A \parallel B$.

Propoziţie. *Dacă $A, B \in \mathcal{A}(V)$, cu $A \parallel B$, atunci $A \subseteq B$, sau $B \subseteq A$, sau $A \cap B = \emptyset$.*

Dem: Dacă $A \cap B = \emptyset$, nu mai e nimic de demonstrat. Presupunem că $A \cap B \neq \emptyset$ şi fie $a \in A \cap B$. Rezultă că $A = a + D(A)$ şi $B = a + D(B)$. Deoarece $A \parallel B$, putem presupune că $D(A) \subseteq D(B)$. Atunci, $A = a + D(A) \subseteq a + D(B) = B$ şi propoziţia este demonstrată. $\square$

Propoziţie 2.1.5. *Fie $A, B \in \mathcal{A}(V)$, $A = a + D(A)$, $B = b + D(B)$. Atunci*

$$\mathrm{af}\,(A \cup B) = a + D(A) + D(B) + < b - a > .$$

Dem: "$\subseteq$". Într-adevăr, deoarece $A \subseteq a + D(A) + D(B) + < b - a >$ şi $B \subseteq a + D(A) + D(B) + < b - a >$, rezultă că $A \cup B \subseteq a + D(A) + D(B) + < b - a >$, deci af $(A \cup B) \subseteq a + D(A) + D(B) + < b - a >$ (deoarece af $(A \cup B)$ este cea mai mică varietate liniară care conţine pe $A \cup B$).

"$\supseteq$". Am văzut că af $(A \cup B)$ este o varietate liniară (ca intersecţie de varietăţi liniare). Deci af $(A \cup B) = a + D($ af $(A \cup B))$. Avem:

$$A \subseteq \mathrm{af}\,(A \cup B) \Longrightarrow D(A) \subseteq D(\mathrm{af}\,(A \cup B)),$$

$$B \subseteq \mathrm{af}\,(A \cup B) \Longrightarrow D(B) \subseteq D(\mathrm{af}\,(A \cup B)),$$

$$a, b \in \mathrm{af}\,(A \cup B) \Longrightarrow < b - a > \subseteq D(\mathrm{af}\,(A \cup B)),$$

deci

$$a + D(A) + D(B) + < b - a > \subseteq a + D(\mathrm{af}\,(A \cup B)) = \mathrm{af}\,(A \cup B). \quad \square$$

Propoziţie 2.1.6. *Fie $A, B \in \mathcal{A}(V)$, $A = a + D(A)$, $B = b + D(B)$. Atunci*

$$A \cap B \neq \emptyset \Longleftrightarrow < b - a > \subset D(A) + D(B).$$

Dem: "$\Longrightarrow$" Fie $c \in A \cap B$. Atunci există $u_1 \in D(A)$ şi $u_2 \in D(B)$ astfel încât $c = a + u_1 = b + u_2$. Rezultă că $b - a = u_1 - u_2 \in D(A) + D(B)$, deci $< b - a > \subset D(A) + D(B)$.

"$\Longleftarrow$" Dacă $< b - a > \subset D(A) + D(B) \Longrightarrow b - a \in D(A) + D(B)$, deci există $u_1 \in D(A)$ şi $u_2 \in D(B)$, astfel încât $b - a = u_1 + u_2$. În consecinţă, $\underbrace{b - u_2}_{\in B} = \underbrace{a + u_1}_{\in A} = c$, deci $c \in A \cap B$.

$\square$

Consecinţă. *Fie $A, B \in \mathcal{A}(V)$, $A = a + D(A)$, $B = b + D(B)$. Atunci*

$$\operatorname{af}(A \cup B) = \begin{cases} a + D(A) + D(B) & \text{dacă} \quad A \cap B \neq \emptyset \\ a + D(A) + D(B) + < b - a > & \text{dacă} \quad A \cap B = \emptyset \end{cases}. \tag{2.4}$$

Exemplu. *Presupunem că V este un spaţiu vectorial de dimensiune 3 şi fie $d_1 = a + < d_1 >$ şi $d_2 = b + < d_2 >$ două drepte distincte din $\mathcal{A}(V)$.*

- *Dacă $d_1 \cap d_2 = \{P\}$, atunci*

$$\operatorname{af}(d_1 \cup d_2) = a + < d_1 > + < d_2 > = a + < d_1, d_2 >,$$

obţinând planul determinat de cele două drepte.

- *Dacă $d_1 \parallel d_2$, atunci $< d_1 > = < d_2 >$, deci*

$$\operatorname{af}(d_1 \cup d_2) = a + < d_1 > + < b - a > = a + < d_1, b - a >,$$

obţinând planul determinat de vectorii (liniar independenţi) d_1 şi $b - a$ (acesta este, evident, planul determinat de d_1 şi d_2).

- *Dacă d_1 şi d_2 sunt necoplanare, atunci*

$$\operatorname{af}(d_1 \cup d_2) = a + < d_1 > + < d_2 > + < b - a > = a + < d_1, d_2, b - a >$$

şi, deoarece d_1, d_2 şi $b - a$ sunt liniar independenţi, af $(d_1 \cup d_2)$ *este întreg spaţiul V.*

Propoziţie 2.1.7. (**Teorema dimensiunii**) *Fie A şi B două varietăţi liniare nevide, de dimensiuni finite, din spaţiul vectorial V. Atunci*

$$\dim \operatorname{af}(A \cup B) = \begin{cases} \dim A + \dim B - \dim(A \cap B) & \text{dacă} \quad A \cap B \neq \emptyset \\ \dim[D(A) + D(B)] + 1 & \text{dacă} \quad A \cap B = \emptyset \end{cases}. \tag{2.5}$$

Dem: Dacă $A \cap B \neq \emptyset$, atunci af $(A \cup B) = a + D(A) + D(B)$ şi, folosind teorema dimensiunii (Grassmann), obţinem

$$\dim \operatorname{af}(A \cup B) = \dim[D(A) + D(B)] = \dim D(A) + \dim D(B) - \dim(D(A) \cap D(B)) =$$

$$= \dim A + \dim B - \dim(A \cap B).$$

Dacă $A \cap B = \emptyset$, atunci, conform Propoziţiei 2.1.6, $< b - a > \nsubseteq D(A) + D(B)$, deci vectorul $b - a$ este liniar independent de vectorii din $[D(A) + D(B)]$. Rezultă că

$$\dim \mathrm{af}\,(A \cup B) = \dim[D(A) + D(B) + < b - a >] =$$

$$= \dim[D(A)+D(B)] + \dim < b-a > - \dim([D(A)+D(B)] \cap < b-a >) = \dim[D(A)+D(B)]+1,$$

deoarece $[D(A) + D(B)] \cap < b - a > = \{0_V\}$ (altfel subspaţiul 1-dim $< b - a >$ ar fi inclus în subspaţiul $D(A) + D(B)$). $\square$

Exemplu. *Vom determina poziţiile relative ale unei drepte şi un plan într-un spaţiu vectorial 4-dimensional V. Fie $d = a + < d_1 >$ o dreaptă şi $\pi = b + < d_2, d_3 >$ un plan.*

- *Dacă $d \cap \pi \neq \emptyset$, atunci*

$$\mathrm{af}\,(d \cup \pi) = a + < d_1 > + < d_2, d_3 >,$$

iar

$$\dim\,[\mathrm{af}\,(d \cup \pi)] = 1 + 2 - \dim(d \cap \pi) \leq 4,$$

de unde rezultă că $\dim(d \cap \pi) \geq -1$, deci $\dim(d \cap \pi) = \{0, 1\}$.

  a) Dacă $\dim(d \cap \pi) = 0 \Longrightarrow d \cap \pi = \{P\}$, $\dim\,(\mathrm{af}\,(d \cup \pi)) = 3$, deci intersecţia dintre d şi π este un punct, iar înfăşurătoarea afină a lui $d \cup \pi$ este un hiperplan.

  b) Dacă $\dim(d \cap \pi) = 1 \Longrightarrow d \cap \pi = d$, $\dim\,(\mathrm{af}\,(d \cup \pi)) = 2$, deci $d \subset \pi$.

- *Dacă $d \cap \pi = \emptyset$, atunci*

$$\mathrm{af}\,(d \cup \pi) = a + < d_1 > + < d_2, d_3 > + < b - a >,$$

iar

$$\dim\,[\mathrm{af}\,(d \cup \pi)] = \dim[< d_1 >, < d_2, d_3 >] + 1 \leq 4,$$

de unde rezultă că $\dim < d_1, d_2, d_3 > \leq 3$, deci $\dim < d_1, d_2, d_3 > = \{2, 3\}$ (evident, d_2 şi d_3 sunt liniar independenţi, deci $\dim < d_1, d_2, d_3 > \geq 2$).

  a) Dacă $\dim < d_1, d_2, d_3 > = 2 \Longrightarrow < d_1 > \subset < d_2, d_3 > \Longrightarrow d \parallel \pi$, iar af $(d \cup \pi) = a + < d_2, d_3 > + < b - a >$ este un hiperplan.

  b) Dacă $\dim < d_1, d_2, d_3 > = 3 \Longrightarrow \dim \mathrm{af}\,(d \cup \pi) = 4 \Longrightarrow$ af $(d \cup \pi) = V$ şi $d \nparallel \pi$ (dreapta d nu este paralelă cu planul π şi nici nu are puncte comune cu π).

2.2 Spaţii afine. Proprietăţi imediate

Fie $\mathcal{A} = \{A, B, C, \ldots\}$ o mulţime **nevidă** de puncte.

- Un element $(A, B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ se numeşte *bipunct* al lui $\mathcal{A}$, de *origine* A şi *extremitate* B.
- Un bipunct de forma (A, A) este un *bipunct diagonal* sau *bipunct nul.*
- Bipunctele (A, B) şi (B, A) sunt *bipuncte simetrice.*

Un $\mathbb{K}$-spaţiu vectorial V determină o *structură afină* pe $\mathcal{A}$ dacă se poate defini o funcţie $\varphi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to V$, astfel încât:

1) $\varphi(A, B) + \varphi(B, C) = \varphi(A, C)$, pentru oricare $A, B, C \in \mathcal{A}$;
2) Pentru orice $A \in \mathcal{A}$ şi orice $v \in V$, există un **unic** punct $B \in \mathcal{A}$, astfel încât $\varphi(A, B) = v$.

Mulţimea $\mathcal{A}$, dotată cu o structură afină, se numeşte *spaţiu afin.* Un spaţiu afin este, deci, determinat de un triplet $(\mathcal{A}, V, \varphi)$ care verifică cele două condiţii de mai sus.

- Mulţimea $\mathcal{A}$ este *spaţiul bază* (sau *spaţiul suport*), iar elementele sale sunt *punctele spaţiului afin.*
- Spaţiul vectorial V este *spaţiul director* al spaţiului afin, iar elementele sale nenule sunt *vectori directori.*
- Funcţia φ este *funcţia structurală* a spaţiului afin.

Spaţiul afin este *real* sau *complex*, după cum scorpul $\mathbb{K}$ al scalarilor lui V este real sau complex.

Notând $\varphi(A, B) = AB$, cele două condiţii din definiţia structurii afine devin:

1) $AB + BC = AC$, pentru oricare $A, B, C \in \mathcal{A}$;
2) Pentru orice $A \in \mathcal{A}$ şi orice $v \in V$, există un **unic** punct $B \in \mathcal{A}$, astfel încât $AB = v$.

În continuare, vom menţiona un spaţiu afin prin $(\mathcal{A}, V, \varphi)$ sau, folosind notaţia $\varphi(A, B) = AB$, prin $(\mathcal{A}, V)$ sau, când se subînţelege spaţiul director V, doar prin spaţiul său suport $\mathcal{A}$.

Propoziţie. *Într-un spaţiu afin $(\mathcal{A}, V)$, avem*

1) Vectorul asociat oricărui ***bipunct diagonal*** *este* ***vectorul nul****,*

$$AA = 0_V \in V, \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

2) Vectorii asociaţi la două ***puncte simetrice*** *sunt* ***vectori opuşi****,*

$$BA = -AB, \quad \forall A, B \in \mathcal{A}.$$

3) Pentru fiecare punct $A \in \mathcal{A}$, aplicaţia

$$\varphi_A : \mathcal{A} \to V, \quad \varphi_A(B) = AB$$

este o bijecţie.

Fie $O \in \mathcal{A}$ un punct fixat şi fie $\mathcal{A}^O = \{O\} \times \mathcal{A}$ mulţimea bipunctelor lui $\mathcal{A}$, de origine O. Prin bijecţia $\mathcal{A}^O \to V$, $(O, A) \to OA$, bipunctul (O, A) se poate identifica cu vectorul OA. În acest mod, structura vectorială din V se introduce pe $\mathcal{A}^O$.

- Spaţiul vectorial $\mathcal{A}^O$ astfel determinat se numeşte *spaţiu vectorial tangent* în O la $\mathcal{A}$.
- Un vector din $\mathcal{A}^O$ se numşte *vector tangent* în O la $\mathcal{A}$ (sau *vector legat* al spaţiului afin $\mathcal{A}$, de origine O).
- Evident, spaţiul vectorial $\mathcal{A}^O$ este izomorf cu V.
- Considerând bijecţia
$$\mathcal{A} \to \mathcal{A}^O, \quad A \to (O, A),$$
vectorul (O, A), asociat punctului A, se numeşte *vector de poziţie* al punctului A în raport cu originea O.

Vom spune că bipunctul (A, B) este *echipolent* cu bipunctul (C, D) şi vom scrie $(A, B) \sim (C, D)$ dacă (A, B) şi (C, D) determină acelaşi vector în V, adică

$$(A, B) \sim (C, D) \Longleftrightarrow \varphi(A, B) = \varphi(C, D).$$

Este imediat faptul că $\sim$ este o **relaţie de echivalenţă** pe $\mathcal{A}\times\mathcal{A}$. Fie $(\mathcal{A}\times\mathcal{A})_{/\sim}$ mulţimea claselor de echivalenţă şi $[(A, B)]$ clasa bipunctului (A, B). Aplicaţia

$$(\mathcal{A} \times \mathcal{A})_{/\sim} \to V, \quad [(A, B)] \to v = \varphi(A, B)$$

este bine definită (evident, nu depinde de alegerea reprezentantului (A, B) al clasei $[(A, B)]$) şi este o bijecţie. Putem, deci, să identificăm clasa $[(A, B)]$ cu vectorul $\varphi(A, B) = AB$. În acest fel, structura de spaţiu vectorial a lui V se poate transporta pe spaţiul factor $(\mathcal{A} \times \mathcal{A})_{/\sim}$ care va avea, astfel, o structură de spaţiu vectorial.

- Spaţiul vectorial astfel definit se numeşte *spaţiul vectorial al vectorilor liberi* din spaţiul afin $\mathcal{A}$.
- $(\mathcal{A} \times \mathcal{A})_{/\sim}$ este izomorf cu spaţiul său director V.
- O clasă oarecare de bipuncte echipolente se numeşte *vector liber* al spaţiului afin $\mathcal{A}$.

2.3 Exemple de spaţii afine

Structura afină a spaţiului $\mathcal{E}_3$

Dacă $\mathcal{E}_3$ este spaţiul punctual euclidian 3-dimensional, iar $\overline{\mathcal{E}}_3$ este spaţiul vectorial al vectorilor liberi din $\mathcal{E}_3$, considerăm funcţia

$$\varphi : \mathcal{E}_3 \times \mathcal{E}_3 \to \overline{\mathcal{E}}_3, \quad \varphi(A, B) = \overline{AB},$$

unde $\overline{AB}$ este vectorul liber asociat vectorului legat $\overrightarrow{AB}$ determinat de bipunctul (A, B). Tripletul $(\mathcal{E}_3, \overline{\mathcal{E}}_3, \varphi)$ este un spaţiu afin real.

Fie $O \in \mathcal{E}_3$ un punct arbitrar. Putem identifica spaţiul $\overline{\mathcal{E}}_3$ al vectorilor liberi cu spaţiul vectorial $\mathcal{E}_3^O$ tangent la $\mathcal{E}_3$ în punctul O. Structura afină pe $\mathcal{E}_3$ este determinată de un triplet $(\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_3^O, \varphi)$, unde φ este operaţia de scădere din $\mathcal{E}_3^O$,

$$\varphi : \mathcal{E}_3 \times \mathcal{E}_3 \to \mathcal{E}_3^O, \quad \varphi(A, B) = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}.$$

Structura afină asociată unei varietăţi liniare

Fie A o varietate liniară dintr-un spaţiu vectorial V, $A = a + D(A)$. Pe A se poate defini o structură afină, numită *structura afină canonic asociată* lui A, considerând funcţia

$$\varphi : A \times A \to D(A), \quad \varphi(a + u, a + w) = w - u.$$

Se verifică imediat cele două condiţii din definiţia structurii afine, deci tripletul $(A, D(A), \varphi)$ determină o structură afină pe A.

Structura afină asociată unui spaţiu vectorial

Fie V un $\mathbb{K}$-spaţiu vectorial. Structura afină *canonic asociată* lui V este dată de tripletul (V, V, φ), unde

$$\varphi : V \times V \to V, \quad \varphi(v, w) = w - v.$$

Spaţiul afin standard $\mathbb{K}^n$

Pe spaţiul vectorial aritmetic $\mathbb{K}^n$, structura afină este dată de tripletul $(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n, \varphi)$, unde, din nou,

$$\varphi : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \varphi(A, B) = AB = (b_1 - a_1, \ldots, b_n - a_n),\ \forall\, A = (a_1, \ldots, a_n), B = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{K}^n.$$

2.4 Combinaţii afine de puncte

Propoziţie. *Fie $\mathcal{A}$ un spaţiu afin şi $\mathcal{S} = \{A_0, A_1, \ldots, A_p\} \subset \mathcal{A}$ un sistem* ***finit*** *de puncte din $\mathcal{A}$. Fie $\{\alpha_o, \alpha_1, \ldots, \alpha_p\} \subset \mathbb{K}$ un sistem de scalari cu proprietatea că $\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_p = 1$. Atunci există un* ***unic*** *punct $P \in \mathcal{A}$, astfel încât*

$$OP = \alpha_0 OA_0 + \alpha_1 OA_1 + \ldots + \alpha_p OA_p, \tag{2.6}$$

oricum am alege punctul origine $O \in \mathcal{A}$.

Dem : Presupunem că, alegând originea în O, găsim punctul P astfel încât

$$OP = \alpha_0 OA_0 + \alpha_1 OA_1 + \ldots + \alpha_p OA_p$$

şi, pentru originea în O', avem punctul P', cu

$$O'P' = \alpha_0 O'A_0 + \alpha_1 O'A_1 + \ldots + \alpha_p O'A_p.$$

Atunci

$$O'P = O'O + OP = \sum_{i=0}^{p} \alpha_i O'O + \sum_{i=0}^{p} \alpha_i OA_i = \sum_{i=0}^{p} \alpha_i (O'O + OA_i) = \sum_{i=0}^{p} \alpha_i O'A_i = O'P',$$

deci $O'P = O'P'$ şi $P = P'$. $\square$

Deoarece alegerea lui O în (2.6) nu este esenţială, putem folosi notaţia

$$P = \alpha_0 A_0 + \alpha_1 A_1 + \ldots + \alpha_p A_p.$$

- Fie $\mathcal{S} = \{A_0, A_1, \ldots, A_p\} \subset \mathcal{A}$ un sistem **finit** de puncte din $\mathcal{A}$. Un punct $P \in \mathcal{A}$ se numeşte *combinaţie afină* (sau *baricentru*) a sistemului de puncte $\mathcal{S}$ dacă există un sistem de scalari $\{\alpha_o, \alpha_1, \ldots, \alpha_p\} \subset \mathbb{K}$, cu $\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_p = 1$, astfel încât
$$P = \alpha_0 A_0 + \alpha_1 A_1 + \ldots + \alpha_p A_p. \tag{2.7}$$
- Sistemul de scalari $\{\alpha_o, \alpha_1, \ldots, \alpha_p,\ \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_p = 1\}$ se numeşte *sistemul de ponderi* al punctului P faţă de $\mathcal{S}$.
- Dacă $\mathcal{S} = \{A_\alpha, \alpha \in J\}$ este un sistem **oarecare** de puncte din $\mathcal{A}$, atunci un punct $P \in \mathcal{A}$ este *combinaţie afină* a lui $\mathcal{S}$ dacă există un subsistem **finit** al lui $\mathcal{S}$, astfel încât P să fie combinaţie afină a acestuia.
- Un sistem **oarecare** $\mathcal{S}$ de puncte din $\mathcal{A}$ se numeşte *sistem de generatori al spaţiului afin* $\mathcal{A}$ dacă orice punct $P \in \mathcal{A}$ este o combinaţie afină a lui $\mathcal{S}$.

Propoziţie. *Fie* $\mathcal{S} = \{A_0, A_1, \ldots, A_q, A_{q+1}, \ldots, A_p\}$ *un sistem de puncte din* $\mathcal{A}$ *şi*

$$P = \alpha_0 A_0 + \ldots + \alpha_q A_q + \alpha_{q+1} A_{q+1} + \ldots + \alpha_p A_p, \quad \alpha_0 + \ldots + \alpha_q + \alpha_{q+1} + \ldots + \alpha_p = 1,$$

un baricentru al său. Dacă $\alpha = \alpha_0 + \ldots + \alpha_q \neq 0$, *atunci*

$$P = \alpha Q + \alpha_{q+1} A_{q+1} + \ldots + \alpha_p A_p, \quad \alpha + \alpha_{q+1} + \ldots + \alpha_p = 1,$$

unde Q *este baricentru al subsistemului* $\{A_0, A_1, \ldots, A_q\}$, *cu ponderile* $\{\frac{\alpha_0}{\alpha}, \frac{\alpha_1}{\alpha}, \ldots, \frac{\alpha_q}{\alpha}\}$.

Reciproc, dacă $P \in \mathcal{A}$ *este dat de*

$$P = \alpha Q + \alpha_{q+1} A_{q+1} + \ldots + \alpha_p A_p, \quad \alpha + \alpha_{q+1} + \ldots + \alpha_p = 1,$$

cu $\alpha \neq 0$, *iar*

$$Q = \beta_0 A_0 + \beta_1 A_1 + \ldots + \beta_q A_q, \quad \beta_0 + \beta_1 + \ldots + \beta_q = 1,$$

atunci P *este baricentru al sistemului* $\mathcal{S}$, *de ponderi* $\{\alpha\beta_0, \ldots, \alpha\beta_q, \alpha_{q+1}, \ldots, \alpha_p\}$.

- Un sistem **finit** de puncte $\mathcal{S} = \{A_0, A_1, \dots, A_p\}$ din $\mathcal{A}$ se numeşte *afin dependent* dacă cel puţin unul din punctele sale este combinaţie afină a sistemului format cu celelalte puncte. Punctele lui S se numesc *afin dependente.*

- Sistemul $\mathcal{S} = \{A_0, A_1, \dots, A_p\}$ se numeşte *afin independent* dacă nu este afin dependent sau dacă este alcătuit dintr-un singur punct. Punctele lui S se numesc *afin independente.*

Propoziţie. *Sistemul de puncte $\mathcal{S} = \{A_0, A_1, \dots, A_p\}$ din $\mathcal{A}$ este afin dependent dacă şi numai dacă sistemul de vectori $S = \{A_0A_1, \dots, A_0A_p\}$ din V este liniar dependent.*

Dem: Presupunem că sistemul de puncte $\mathcal{S} = \{A_0, A_1, \dots, A_p\}$ este afin dependent. Rezultă că

$$\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{K}, \quad \alpha_1 + \dots + \alpha_p = 1, \quad A_0 = \alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_p A_p,$$

adică

$$\forall\, O \in \mathbb{A}, \quad OA_0 = \alpha_1 OA_1 + \dots + \alpha_p OA_p.$$

Alegând, în ultima relaţie, originea O să fie chiar punctul A_0, obţinem că

$$0_V = \alpha_1 A_0A_1 + \dots + \alpha_p OA_p,$$

unde scalarii α_i nu sunt toţi zero, deoarece suma lor este egală cu 1. Rezultă că sistemul de vectori $S = \{A_0A_1, \dots, A_0A_p\}$ este liniar dependent.

Reciproc, presupunem că sistemul $S = \{A_0A_1, \dots, A_0A_p\}$ este liniar dependent. Rezultă că

$$\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{K}, \text{ nu toţi nuli, cu } \alpha_1 A_0A_1 + \dots + \alpha_p A_0A_p = 0_V,$$

adică

$$\forall\, O \in \mathcal{A}, \quad \alpha_1(A_0O + OA_1) + \dots + \alpha_p(A_0O + OA_p) = 0_V,$$

sau

$$\forall\, O \in \mathcal{A}, \quad \underbrace{(\alpha_1 + \dots + \alpha_p)}_{\alpha} A_0O + \alpha_1 OA_1 + \dots + \alpha_p OA_p = 0_V.$$

- Dacă $\alpha \neq 0$, atunci

  $$\forall\, O \in \mathcal{A}, \quad \alpha OA_0 = \alpha_1 OA_1 + \dots + \alpha_p OA_p,$$

  deci

  $$\forall\, O \in \mathcal{A}, \quad OA_0 = \frac{\alpha_1}{\alpha} OA_1 + \dots + \frac{\alpha_p}{\alpha} OA_p, \quad \text{cu} \sum_{i=1}^{p} \frac{\alpha_i}{\alpha} = 1$$

  şi

  $$A_0 = \frac{\alpha_1}{\alpha} A_1 + \dots + \frac{\alpha_p}{\alpha} A_p, \quad \text{cu} \sum_{i=1}^{p} \frac{\alpha_i}{\alpha} = 1,$$

  adică sistemul de puncte $\mathcal{S}$ este afin dependent.

- Dacă $\alpha = 0$, atunci $\alpha_1 OA_1 + \ldots + \alpha_p OA_p = 0_V$, unde nu toţi scalarii α_i sunt nuli. Presupunem că $\alpha_1 \neq 0$. Atunci

$$-\alpha_1 OA_1 = \alpha_2 OA_2 + \ldots + \alpha_p OA_p,$$

deci

$$\forall O \in \mathcal{A}, \quad OA_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} OA_2 - \ldots - \frac{\alpha_p}{\alpha_1} OA_p, \quad \text{cu} \sum_{i=2}^{p} -\frac{\alpha_i}{\alpha_1} = 1,$$

şi

$$\forall O \in \mathcal{A}, \quad A_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} A_2 - \ldots - \frac{\alpha_p}{\alpha_1} A_p, \quad \text{cu} \sum_{i=2}^{p} -\frac{\alpha_i}{\alpha_1} = 1,$$

deci, şi în acest caz, sistemul de puncte $\mathcal{S}$ este afin dependent. □

Sistemul de vectori $S = \{A_0A_1, \ldots, A_0A_p\}$ se numeşte *sistem de vectori asociat* sistemului de puncte $\mathcal{S} = \{A_0, A_1, \ldots, A_p\}$. Schimbând rolul punctului A_0 cu alt punct din sistem, se pot obţine alte sisteme de vectori asociate unui sistem de puncte. Toate aceste sisteme se deduc din primul prin transformări elementare.

- Un sistem format din două puncte $\{A, B\}$ este afin independent dacă şi numai dacă punctele sunt distincte $A \neq B$.

- În $\mathcal{E}_3$, trei puncte necoliniare sunt afin independente. La fel sunt şi patru puncte necoplanare.

- Orice sistem de puncte care conţine un un subsistem afin dependent este afin dependent.

- Dacă un sistem este afin independent, atunci orice subsistem al său este afin independent.

Vom spune că un sistem **oarecare** de puncte $\mathcal{S} = \{A_\alpha, \alpha \in J\}$ din $\mathcal{A}$ este *afin independent* dacă orice subsistem finit al său este afin independent.

2.5 Subspaţii afine

Fie $(\mathcal{A}, V, \varphi)$ un spaţiu afin. Fie $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ o submulţime **nevidă** a lui $\mathcal{A}$ şi $\varphi' = \varphi_{|\mathcal{A}' \times \mathcal{A}'}$ restricţia lui φ la $\mathcal{A}' \times \mathcal{A}'$. Dacă $V' = \varphi'(\mathcal{A}' \times \mathcal{A}')$ este un subspaţiu vectorial al lui V, atunci tripletul $(\mathcal{A}', V', \varphi')$ are o structură de spaţiu afin.

Se numeşte *subspaţiu afin* al spaţiului afin $(\mathcal{A}, V, \varphi)$ un triplet $(\mathcal{A}', V', \varphi')$, unde $\mathcal{A}'$ este o submulţime nevidă a lui $\mathcal{A}$, φ' este restricţia lui φ la $\mathcal{A}' \times \mathcal{A}'$, iar $V' = \varphi'(\mathcal{A}' \times \mathcal{A}')$ este un subspaţiu vectorial al lui V. **Mulţimea vidă** se consideră, prin definiţie, subspaţiu afin al oricărui spaţiu afin $\mathcal{A}$.

Un subspaţiu afin $(\mathcal{A}', V')$ este determinat fie de mulţimea $\mathcal{A}'$ a punctelor sale, fie de un punct $P_0 \in \mathcal{A}'$ şi de spaţiul său director V'.

- Când cunoaştem pe $\mathcal{A}'$, spaţiul director va fi
$$V' = \{AB, \quad A, B \in \mathcal{A}'\},$$
sau, fixând un punct $P_0 \in \mathcal{A}'$,
$$V' = \{P_0A, \quad A \in \mathcal{A}'\}.$$

- Când cunoaştem punctul $P_0 \in \mathcal{A}'$ şi spaţiul V', atunci
$$\mathcal{A}' = \{A \in \mathcal{A}, \quad P_0A \in V'\}.$$

Exemple. • *Orice submulţime formată dintr-un singur punct $\mathcal{A}' = \{A\} \subset \mathcal{A}$ este un subspaţiu afin al lui $\mathcal{A}$. Spaţiul său director este $V' = \{0_V\} \prec V$.*

- *Orice dreaptă d şi orice plan π din $\mathcal{E}_3$ sunt subspaţii afine ale lui $\mathcal{E}_3$. Spaţiile lor directoare sunt, respectiv, o dreaptă vectorială $d' \in \mathcal{E}_3^O$ şi un plan vectorial $\pi' \in \mathcal{E}_3^O$, care le determină direcţia (adică $d \parallel d'$, resp. $\pi \parallel \pi'$).*

- *Varietăţile liniare din $\mathbb{K}^n$, determinate de mulţimea soluţiilor sistemelor de ecuaţii liniare, sunt subspaţii afine ale spaţiului afin standard $\mathbb{K}^n$. Spaţiile lor directoare sunt subspaţiile vectoriale ale lui $\mathbb{K}^n$, determinate de soluţiile sistemelor liniare şi omogene, asociate sistemelor date.*

  De exemplu, în $\mathbb{K}^3$, spaţiul soluţiilor ecuaţiei $Ax + By + Cz + D = 0$, cu rang *$(A, B, C) = 1$, este un subspaţiu afin al lui $\mathbb{K}^3$. Spaţiul său director este spaţiul vectorial al soluţiilor ecuaţiei omogene asociate $Ax + By + Cz = 0$.*

Următoarea propoziţie este o generalizare a axiomei paralelelor din $\mathcal{E}_3$.

Propoziţie. *Fie $(\mathcal{A}, V, \varphi)$ un spaţiu afin. Pentru orice punct $P_0 \in \mathcal{A}$ şi orice subspaţiu vectorial V' al lui V, există un unic subspaţiu afin $\mathcal{A}'$ al lui $\mathcal{A}$ care conţine punctul P_0 şi admite pe V' ca spaţiu director.*

Dem: Definim $\mathcal{A}' = \{A \in \mathcal{A}, \quad P_0A \in V'\}$ şi fie φ' restricţia lui φ la $\mathcal{A}' \times \mathcal{A}'$. Tripletul $(\mathcal{A}', V', \varphi')$ este un subspaţiu afin al lui $(\mathcal{A}, V, \varphi)$, conţine pe P_0 şi admite pe V' ca spaţiu director.

Deoarece aplicaţia $\varphi'_{P_0} : \mathcal{A}' \to V'$, $A \longmapsto P_0A$, este o bijecţie, rezultă că $\mathcal{A}'$ este unic determinat. $\square$

- Un subspaţiu afin al lui $\mathcal{A}$ este o *dreaptă* în $\mathcal{A}$ dacă spaţiul său director este o dreaptă vectorială din V.

- Un subspaţiu afin al lui $\mathcal{A}$ este un *plan* în $\mathcal{A}$ dacă spaţiul său director este un plan vectorial din V.

- Un subspaţiu afin al lui $\mathcal{A}$ este un *hiperplan* în $\mathcal{A}$ dacă spaţiul său director este un hiperplan vectorial din V.

Propoziţie 2.5.1. *O condiţie necesară şi suficientă pentru ca o submulţime nevidă $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ să fie un subspaţiu afin al lui $\mathcal{A}$ este ca*

$$\forall\ P, Q \in \mathcal{A}', \quad \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ \alpha + \beta = 1 \Longrightarrow \alpha P + \beta Q \in \mathcal{A}'.$$

Dem: Presupunem că $\mathcal{A}'$ este un subspaţiu afin al lui $\mathcal{A}$. Înseamnă că spaţiul director V' al lui $\mathcal{A}'$ este un subspaţiu vectorial al spaţiului director V al lui $\mathcal{A}$.

Fixăm $A_0 \in \mathcal{A}'$. Atunci

$$V' = \{A_0P, \quad P \in \mathcal{A}'\} \prec V.$$

Fie $P, Q \in \mathcal{A}'$. Atunci $A_0P, A_0Q \in V'$ şi, deoarece $V' \prec V$, rezultă că, pentru orice $\lambda \in \mathbb{K}$, $(1-\lambda)A_0P + \lambda A_0Q \in V'$. Deci există $R \in \mathcal{A}'$, astfel încât $A_0R = (1-\lambda)A_0P + \lambda A_0Q$. Deci $R = (1-\lambda)P + \lambda Q \in \mathcal{A}'$.

Reciproc, presupunem că implicaţia din propoziţie este adevărată. Fixăm $A_0 \in \mathcal{A}'$ şi fie

$$V' = \{A_0P, \quad P \in \mathcal{A}'\}.$$

Vom arăta că V' este un subspaţiu vectorial al lui V.

Fie $v \in V'$. Rezultă că există $P \in \mathcal{A}'$, astfel încât $v = A_0P$. V' este o submulţime a lui V, deci $v \in V$ şi, deoarece $\mathcal{A}$ este un spaţiu afin cu spaţiul director V, rezultă că, pentru orice $\lambda \in \mathbb{K}$, există un unic $R \in \mathcal{A}$, astfel încât $A_0R = \lambda v$. Deci $\lambda v = A_0R = (1-\lambda)A_0A_0 + \lambda v = (1-\lambda)A_0A_0 + \lambda A_0P$ şi, cum $A_0, P \in \mathcal{A}'$, rezultă că $R \in \mathcal{A}'$, ceea ce înseamnă că $\lambda v \in V'$.

Dacă $v, w \in V'$, atunci există punctele (unice) $P, Q \in \mathcal{A}'$, astfel încât $v = A_0P$ şi $w = A_0Q$. Combinaţia afină $T = \dfrac{1}{2}P + \dfrac{1}{2}Q$ se va afla în $\mathcal{A}'$, deci $A_0T = \dfrac{1}{2}v + \dfrac{1}{2}w \in V'$. Rezultă că şi suma $v + w \in V'$, deci $V' \prec V$, iar $\mathcal{A}'$ este subspaţiu afin al lui $\mathcal{A}$. $\square$

Evident, propoziţia anterioară este valabilă pentru orice combinaţie afină a unui număr finit de puncte din $\mathcal{A}'$.

Propoziţie 2.5.2. *Fie $(\mathcal{A}, V)$ un spaţiu afin, $\mathcal{S} = \{A_0, A_1, \ldots, A_p\}$ un sistem **finit** de puncte din $\mathcal{A}$ şi $S = \{A_0A_1, \ldots, A_0A_p\}$ sistemul de vectori asociat. Atunci mulţimea baricentrelor lui $\mathcal{S}$,*

$$\overline{\mathcal{S}} = \{P \in \mathcal{A},\ P = \alpha_0A_0 + \ldots + \alpha_pA_p, \quad \alpha_0 + \ldots + \alpha_p = 1\},$$

este un subspaţiu afin al lui $\mathcal{A}$. Spaţiul său director este înfăşurătoarea liniară a lui S (deci subspaţiul $< S >$ generat de S).

Dem: Pentru a demonstra că $\overline{\mathcal{S}}$ este un subspaţiu afin, vom folosi Propoziţia 2.5.1. Fie $P, Q \in \overline{\mathcal{S}}$ şi $\lambda \in \mathbb{K}$. Punctele P şi Q sunt de forma $P = \alpha_0A_0 + \ldots + \alpha_pA_p$, cu $\sum\limits_{i=0}^{p} \alpha_i = 1$, respectiv $Q = \beta_0A_0 + \ldots + \beta_pA_p$, cu $\sum\limits_{i=0}^{p} \beta_i = 1$. Atunci

$$(1-\lambda)P + \lambda Q = (1-\lambda)\sum_{i=0}^{p} \alpha_iA_i + \sum_{i=0}^{p} \beta_iA_i = \sum_{i=0}^{p}[(1-\lambda)\alpha_i + \lambda\beta_i]A_i \in \overline{\mathcal{S}},$$

deoarece

$$\sum_{i=0}^{p}[(1-\lambda)\alpha_i+\lambda\beta_i]=(1-\lambda)\sum_{i=0}^{p}\alpha_i+\lambda\sum_{i=0}^{n}\beta_i=(1-\lambda)+\lambda=1.$$

Deci $\overline{\mathcal{S}}$ este un subspaţiu afin al lui $\mathcal{A}$.

Vom arăta că spaţiul director al lui $\overline{\mathcal{S}}$ este chiar $< S >$. Spaţiul director al lui $\overline{\mathcal{S}}$ este (relativ la punctul A_0, dar acest spaţiu nu depinde de alegerea punctului din $\mathcal{S}$)

$$\overline{V}=\{A_0P, \quad P\in\overline{\mathcal{S}}\}.$$

Vom verifica dubla incluziune $\overline{V}=< A_0A_1,\ldots,A_0A_p >$.

"$\subseteq$" Fie $v\in\overline{V}$. Rezultă că există un unic $P\in\overline{\mathcal{S}}$, astfel încât $v=A_0P$, deci $v=\alpha_0A_0A_0+\alpha_1A_0A_1+\ldots+\alpha_pA_0A_p$, adică $v\in< A_0A_1,\ldots,A_0A_p >$.

"$\supseteq$" Fie $v\in< A_0A_1,\ldots,A_0A_p >$. Rezultă că $v=\alpha_1A_0A_1+\ldots+\alpha_pA_0A_p$, unde nu toţi scalarii α_i sunt nuli. Vectorul v poate fi scris sub forma

$$v=(1-\alpha_1-\ldots-\alpha_p)A_0A_0+\alpha_1A_0A_1+\ldots+\alpha_pA_0A_p.$$

Deci $v=A_0T$, unde

$$T=(1-\alpha_1-\ldots-\alpha_p)A_0+\alpha_1A_1+\ldots+\alpha_pA_p\in\overline{\mathcal{S}},$$

adică $v\in\overline{V}$. $\square$

Dacă $\mathcal{S}=\{A_0,A_\alpha,\ \alpha\in J\}$ este un sistem **infinit** de puncte, notăm cu $\overline{\mathcal{S}}$ mulţimea baricentrelor tuturor **subsistemelor finite** ale lui $\mathcal{S}$. Se arată, în acelaşi fel, că $\overline{\mathcal{S}}$ este un subspaţiu afin al lui $\mathcal{A}$ şi că spaţiul său director este înfăşurătoarea liniară a sistemului de vectori $S=\{A_0A_\alpha,\ \alpha\in J\}$, asociat lui $\mathcal{S}$.

Subspaţiul afin $\overline{\mathcal{S}}\subset\mathcal{A}$ se numeşte *închiderea afină* (sau *înfăşurătoarea afină*) a sistemului $\mathcal{S}$.

Exemple.

- *Închiderea afină a sistemului alcătuit dintr-un singur punct $\mathcal{S}=\{A\}\subset\mathcal{A}$ este punctul A însuşi, iar spaţiul său director este subspaţiul trivial $\{0_V\}\prec V$.*

- *Închiderea afină a unui sistem de două puncte afin independente (deci distincte) $\mathcal{S}=\{A_0,A_1\}$ din $\mathcal{A}$ este **dreapta afină***

$$\overline{\mathcal{S}}=\{P\in\mathcal{A}, \quad P=(1-\lambda)A_0+\lambda A_1,\ \lambda\in\mathbb{K}\},$$

  *iar spaţiul său director este **dreapta vectorială***

$$< S >=< \{A_0A_1\} >=\{A_0P\in V, \quad A_0P=\lambda A_0A_1,\ \lambda\in\mathbb{K}\}.$$

- *Închiderea afină a unui sistem de trei puncte afin independente (deci necoliniare) $\mathcal{S}=\{A_0,A_1,A_2\}$ din $\mathcal{A}$ este **planul afin***

$$\overline{\mathcal{S}}=\{P\in\mathcal{A}, \quad P=(1-\lambda-\mu)A_0+\lambda A_1+\mu A_2,\ \lambda,\mu\in\mathbb{K}\},$$

  *iar spaţiul său director este **planul vectorial***

$$< S >=< \{A_0A_1,A_0A_2\} >=\{A_0P\in V, \quad A_0P=\lambda A_0A_1+\mu A_0A_2,\ \lambda,\mu\in\mathbb{K}\}.$$

Propoziţie. *Fie $\mathcal{A}_1$ şi $\mathcal{A}_2$ două subspaţii afine ale lui $\mathcal{A}$ şi fie V_1 şi V_2 subspaţiile lor directoare. Atunci intersecţia $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ este, de asemenea, un subspaţiu afin al lui $\mathcal{A}$ iar, dacă $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \neq \emptyset$, atunci spaţiul său director este $V_1 \cap V_2$.*

Dem: Dacă $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \emptyset$, atunci propoziţia este evidentă.

Presupunem că $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \neq \emptyset$. Fie $P, Q \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ şi fie $\lambda \in \mathbb{K}$. Deoarece $\mathcal{A}_1$ şi $\mathcal{A}_2$ sunt subspaţii afine, rezultă că $(1-\lambda)P + \lambda Q \in \mathcal{A}_1$ şi $(1-\lambda)P + \lambda Q \in \mathcal{A}_2$, deci $(1-\lambda)P + \lambda Q \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$, deci $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ este un subspaţiu afin.

Fie $A_0 \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$. Spaţiul director al lui $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ este

$$V_{12} = \{A_0P, \quad P \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2\}.$$

Vom arăta că $V_{12} = V_1 \cap V_2$, unde

$$V_1 = \{A_0Q, \quad Q \in \mathcal{A}_1\}, \qquad V_2 = \{A_0R, \quad R \in \mathcal{A}_2\}.$$

"$\subseteq$" Fie $v \in V_{12} \Longrightarrow$ există un unic $P \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2, v = A_0P$, deci $v \in V_1 \cap V_2$.

"$\supseteq$" Fie $v \in V_1 \cap V_2$. Există un unic $Q \in \mathcal{A}_1$ şi un unic $R \in \mathcal{A}_2$, astfel încât $v = A_0Q = A_0R$, deci $Q = R \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$, adică $v \in V_{12}$. $\square$

- Dacă $\mathcal{S}$ este un sistem de puncte din $\mathcal{A}$, atunci intersecţia tuturor subspaţiilor afine ale lui $\mathcal{A}$, care conţin pe $\mathcal{S}$, este un subspaţiu afin (cel mai mic — în raport cu incluziunea — spaţiu afin care conţine pe $\mathcal{S}$). Acesta coincide cu înfăşurătoarea afină a sistemului $\mathcal{S}$.

Propoziţie. *Fie $(\mathcal{A}, V)$ un spaţiu afin, $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}$ două subspaţii afine nevide şi V_1, V_2 spaţiile lor directoare.*

*a) Dacă V_1 şi V_2 sunt **independente**, atunci $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ conţine **cel mult un punct**.*

*b) Dacă $V_1 + V_2 = V$, atunci $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ conţine **cel puţin un punct**.*

*c) Dacă $V_1 \oplus V_2 = V$, atunci $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ conţine **exact un punct**.*

Dem: a) Dacă $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \emptyset$, atunci afirmaţia de la a) este adevărată. Presupunem că $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \neq \emptyset$. Fie $P, Q \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$. Spaţiul director al lui $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ este $V_1 \cap V_2$, deci $PQ \in V_1 \cap V_2$. Dar V_1 şi V_2 sunt independente, deci $V_1 \cap V_2 = \{0_V\}$, deci $PQ = 0_V$ şi, în consecinţă, $P = Q$.

b) Presupunem, prin absurd, că $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \emptyset$. Fie $A_1 \in \mathcal{A}_1$ şi $A_2 \in \mathcal{A}_2$. Spaţiile directoare ale lui $\mathcal{A}_1$ şi $\mathcal{A}_2$ sunt, respectiv

$$V_1 = \{A_1P, \quad P \in \mathcal{A}_1\}, \qquad V_2 = \{A_2Q, \quad Q \in \mathcal{A}_2\}.$$

Deoarece $V = V_1 + V_2$, rezultă că $\forall\ v \in V$, există $v_1 \in V_1$ şi $v_2 \in V_2$, astfel încât $v = v_1 + v_2$. Pentru $A_1A_2 \in V$, există un unic $P \in \mathcal{A}_1$ şi un unic $Q \in \mathcal{A}_2$, astfel încât $A_1A_2 = A_1P + A_2Q$. Deci $A_1A_2 = A_1A_2 + A_2P + A_2Q$, de unde rezultă că $A_2P + A_2Q = 0_V$, ceea ce este absurd, căci $A_2Q \in V_2$ şi ar rezulta că $A_2P \in V_2$, dar $P \in \mathcal{A}_1$, deci $A_2P \notin V_2$.

c) Rezultă imediat din a) şi b). $\square$

- Fie $\mathcal{A}_1$ şi $\mathcal{A}_2$ două subspaţii afine ale spaţiului afin $\mathcal{A}$. Închiderea afină a mulţimii $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ se numeşte *uniunea* subspaţiilor $\mathcal{A}_1$ şi $\mathcal{A}_2$ şi se notează $\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2$.

Propoziţie. *Fie $(\mathcal{A}, V)$ un spaţiu afin, $\mathcal{A}_1$ şi $\mathcal{A}_2$ două subspaţii afine ale sale şi V_1, respectiv V_2 spaţiile lor directoare.*

a) Dacă $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \neq \emptyset$, atunci spaţiul director al subspaţiului afin $\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2$ este $V_1 + V_2$.

b) Dacă $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \emptyset$, atunci spaţiul director al subspaţiului afin $\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2$ este $(V_1 + V_2) \oplus D$, unde D este dreapta directoare a unei drepte afine $\mathcal{D}$, determinate de două puncte $A_1 \in \mathcal{A}_1$ şi $A_2 \in \mathcal{A}_2$.

Dem: a) Fie $A \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$. Spaţiile directoare ale lui $\mathcal{A}_1$ şi $\mathcal{A}_2$ sunt, respectiv

$$V_1 = \{AP, \quad P \in \mathcal{A}_1\}, \qquad V_2 = \{AQ, \quad Q \in \mathcal{A}_2\},$$

iar spaţiul director al lui $\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2$ este

$$W = \{AR, \quad R = \alpha P + \beta Q,\ \alpha + \beta = 1,\ P \in \mathcal{A}_1, Q \in \mathcal{A}_2\}.$$

Arătăm că $W = V_1 + V_2$.
"$\subseteq$" Fie $v \in W$. Rezultă că v este de forma $v = AR$, unde $R = \alpha P + \beta Q$, cu $P \in \mathcal{A}_1$ şi $Q \in \mathcal{A}_2$. Deci $AR = \alpha AP + \beta AQ$. Dar $AP \in V_1 \prec V$, deci $\alpha AP \in V_1$ şi, analog, $AQ \in V_2$, adică $v \in V_1 + V_2$.
"$\supseteq$" Fie $v \in V_1 + V_2$. Rezultă că v se poate scrie sub forma $v = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2$, unde $v_1 \in V_1$ şi $v_2 \in V_2$. Deci $v = \frac{1}{2}AP + \frac{1}{2}AQ$, unde $P \in \mathcal{A}_1$ şi $Q \in \mathcal{A}_2$, adică $v \in W$.

b) Fie $A_1 \in \mathcal{A}_1$, $A_2 \in \mathcal{A}_2$ şi $\mathcal{D}$ dreapta afină determinată de punctele A_1 şi A_2. Spaţiile directoare ale lui $\mathcal{A}_1$ şi $\mathcal{A}_2$ sunt, respectiv

$$V_1 = \{A_1P, \quad P \in \mathcal{A}_1\}, \qquad V_2 = \{A_2Q, \quad Q \in \mathcal{A}_2\}.$$

Vom arăta că

$$\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2 \vee \mathcal{D}.$$

Incluziunea $\subseteq$ este evidentă. Fie $M \in \mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2 \vee \mathcal{D}$. Punctul M va fi de forma $M = \alpha P + \beta Q + \gamma R$, unde $P \in \mathcal{A}_1$, $Q \in \mathcal{A}_2$ şi $R \in \mathcal{D}$ şi $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

Dacă $\gamma = 0$, atunci $M \in \mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2$. Dacă $\gamma \neq 0$, atunci, scriind punctul R sub forma $R = (1 - \lambda)A_1 + \lambda A_2$, obţinem

$$M = \alpha P + \beta Q + \gamma(1 - \lambda)A_1 + \gamma\lambda A_2 = \alpha P + \gamma(1 - \lambda)A_1 + \beta Q + \gamma\lambda A_2 \in \mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2,$$

deoarece este o combinaţie afină (evident, $\alpha+\beta+\gamma(1-\lambda)+\gamma\lambda = 1$) de puncte din $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$.

Avem, deci,

$$\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2 \vee \mathcal{D} = \mathcal{A}_1 \vee (\mathcal{A}_2 \vee \mathcal{D}).$$

Aplicând punctul a) al propoziţiei, rezultă că spaţiul director al lui $\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2$ este $V_1 + (V_2 + D)$, deci $(V_1 + V_2) + D$.

Rămâne de arătat că $(V_1 + V_2) \cap D = \{0_V\}$. Presupunem, prin absurd, că există un vector nenul $v \in D$, astfel încât $v \in V_1 + V_2$. Deoarece D este un spaţiu vectorial 1-dimensional, vectorul v este coliniar cu vectorul A_1A_2. Deci $A_1A_2 \in V_1+V_2$. Rezultă că există $P \in \mathcal{A}_1$ şi $Q \in \mathcal{A}_2$, astfel încât $A_1A_2 = A_1P+A_2Q$. Deci $A_1A_2 = A_1A_2+A_2P+A_2Q$, adică $A_2P + A_2Q = 0_V$, imposibil, deoarece $A_2Q \in \mathcal{A}_2$, iar $A_2P \notin \mathcal{A}_2$. În consecinţă, suma spaţiilor $V_1 + V_2$ şi D este directă. $\square$

- Fie $\mathcal{A}$ un spaţiu afin, $\mathcal{A}_1$ şi $\mathcal{A}_2$ două subspaţii afine ale sale şi V_1, respectiv V_2 spaţiile lor directoare. Spunem că $\mathcal{A}_1$ şi $\mathcal{A}_2$ sunt *paralele* dacă V_1 conţine V_2 sau V_2 conţine V_1.
$$\mathcal{A}_1 \parallel \mathcal{A}_2 \Longleftrightarrow V_1 \subseteq V_2 \quad \text{sau} \quad V_2 \subseteq V_1.$$

- În mulţimea subspaţiilor afine ale unui spaţiu afin $\mathcal{A}$, relaţia de paralelism este o relaţie **reflexivă** şi **simetrică**.

- Pentru subspaţiile afine ale lui $\mathcal{A}$ care admit acelaşi spaţiu director, relaţia de paralelism este o relaţie de **echivalenţă**. De exemplu, toate dreptele afine din $\mathcal{A}$, care au dreapta afină D ca spaţiu director, sunt paralele între ele.

- Subspaţiile afine $\mathcal{A}_1$ şi $\mathcal{A}_2$ sunt *strict paralele* dacă $\mathcal{A}_1 \parallel \mathcal{A}_2$ şi $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \emptyset$ (dacă intersecţia lor este nevidă, atunci unul dintre subspaţii îl conţine pe celălalt).

2.6 Spaţii afine finit dimensionale

2.6.1 Dimensiunea unui spaţiu afin

Un spaţiu afin $\mathcal{A}$ este *finit dimensional* dacă spaţiul său director V este finit dimensional. Se numeşte *dimensiune a unui spaţiu afin* $\mathcal{A}$ dimensiunea spaţiului său director V.

- Mulţimea vidă este considerată, prin definiţie, un spaţiu afin de dimensiune -1.

- Spaţiile afine de dimensiune 0 sunt punctele.

- Un spaţiu afin de dimensiune 1 se numeşte *dreaptă afină* (sau *dreaptă*).

- Un spaţiu afin de dimensiune 2 se numeşte *plan afin* (sau *plan*).

- Un subspaţiu afin al unui spaţiu afin n-dimensional $\mathcal{A}$ va fi, deci, un spaţiu afin de dimensiune $p \leq n$. El se va numi *p-plan afin* (sau *p-plan*).

Propoziţie. *Dacă $\mathcal{S} = \{A_0, A_1, \ldots, A_p\}$ este un sistem de puncte afin independent, atunci închiderea sa afină este un p-plan.*

Dem: Închiderea afină a lui $\mathcal{S}$ este un spaţiu afin, al cărui spaţiu director este generat de sistemul de vectori $\{A_0A_1, \ldots, A_0A_p\}$, deci are dimensiunea p. $\square$

Teoremă 2.6.1.1. (**Teorema dimensiunii pentru spaţii afine**) *Fie $\mathcal{A}$ un spaţiu afin finit dimensional, $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ subspaţii afine, având spaţiile directoare V_1, respectiv V_2, cu* $\dim V_1 = p$ *şi* $\dim V_2 = q$. *Dacă* $s = \dim(\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2)$, *iar* $i = \dim(V_1 \cap V_2)$, *atunci*

$$p + q = \begin{cases} s + i & \text{dacă} \quad \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \neq \emptyset \\ s + i - 1 & \text{dacă} \quad \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \emptyset \end{cases}. \tag{2.8}$$

Dem: Conform teoremei lui Grassmann, $\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 \cap V_2) + \dim(V_1 + V_2)$, adică $p + q = i + \dim(V_1 + V_2)$.

Dimensiunea spaţiului afin $\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2$ este dimensiunea spaţiului său director. Acest spaţiu director este dat de

$$\begin{cases} V_1 + V_2 & \text{dacă} \quad \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \neq \emptyset \\ V_1 + V_2 + D & \text{dacă} \quad \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \emptyset \end{cases},$$

deci

$$\dim(V_1 + V_2) = \begin{cases} s & \text{dacă} \quad \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \neq \emptyset \\ s - 1 & \text{dacă} \quad \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \emptyset \end{cases}. \qquad \square$$

2.6.2 Repere şi coordonate carteziene

Fie $\mathcal{A}$ un spaţiu afin **finit dimensional**, de dimensiune n şi fie V spaţiul său director. Se numeşte *reper cartezian* în $\mathcal{A}$ un sistem $R = (O; B)$, unde $O \in \mathcal{A}$, iar $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ este o bază a lui V. Punctul O se numeşte *originea* reperului R.

Dacă $R = (O; B)$ este un reper cartezian în $\mathcal{A}$, atunci oricărui punct $P \in \mathcal{A}$ i se asociază *vectorul său de poziţie* $OP \in V$, iar acesta este de forma $OP = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$, cu $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. Deci, orice reper $R = (O; B)$ al lui $\mathcal{A}$ defineşte o bijecţie

$$\mathcal{A} \to \mathbb{K}^n, \qquad P \mapsto (x_1, \ldots, x_n).$$

Sistemul de scalari $(x_1, \ldots, x_n)$ poartă numele de *coordonatele carteziene* ale punctului P faţă de reperul R.

Vrem să vedem ce se întâmplă la o schimbare de reper în $\mathcal{A}$. Fie $R = (O; B)$ şi $R' = (O', B')$ două repere în spaţiul afin (finit dimensional) $\mathcal{A}$, cu $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ şi $B' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$. Reperul R' este determinat faţă de reperul R atunci când cunoaştem coordonatele lui O' în baza B şi componentele vectorilor e'_i faţă de baza B. Presupunem că

$$OO' = \sum_{i=1}^{n} p_{i0} e_i, \qquad e'_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ji} e_j.$$

Fie $P_0 = (p_{i0})$ matricea (coloană) a coordonatelor lui O' în baza B şi $P = (p_{ij})$ matricea de trecere de la baza B la baza B' (vom avea $\det P \neq 0$). Sistemul de scalari $(p_{i0}, p_{ij}, \det(p_{ij}) \neq 0)$ poartă numele de *coordonatele reperului* R' faţă de reperul R. Acestui sistem de coordonate îi asociem atât perechea de matrice (P_0, P), cât şi matricea pătratică nesingulară, de ordinul $n + 1$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ P_0 & P \end{pmatrix},$$

numită *matrice de coordonate ale reperului R' faţă de reperul R.*

Putem să determinăm, în acelaşi fel, şi reperul R faţă de reperul R', exprimând vectorul $O'O$ şi vectorii e_j în baza B'.

$$O'O = \sum_{i=1}^{n} p'_{i0}e'_i, \qquad e_j = \sum_{i=1}^{n} p'_{ij}e'_i.$$

Dacă matricea coordonatelor lui O în baza B' este P'_0, iar matricea de trecere din baza B' în baza B este $P' = (p'_{ji})$, cu $\det P' \neq 0$, atunci matricea de coordonate a lui R faţă de R' este

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ P'_0 & P' \end{pmatrix}.$$

Avem $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ P'_0 & P' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ P_0 & P \end{pmatrix}^{-1}$. Într-adevăr, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ P_0 & P \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ P'_0 & P' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix}$, unde matricea coloană A este dată de $A = P_0 + P \cdot P'_0$. Dar P_0 este matricea componentelor vectorului OO' în baza B, iar $OO' = -O'O$. Scriind $A = [OO']_B + P \cdot [O'O]_{B'}$ şi folosind forma matriceală a trecerii din baza B în baza B', avem

$$A = -[O'O]_B + P \cdot [O'O]_{B'} = -P \cdot [O'O]_{B'} + P \cdot [O'O]_{B'} = 0.$$

Vom vedea acum cum se schimbă coordonatele unui punct din $\mathcal{A}$ la o schimbare de reper. Fie $P \in \mathcal{A}$. Coordonatele lui P faţă de reperul R sunt date de $OP = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, iar faţă de reperul R' sunt date de $O'P = \sum_{j=1}^{n} x'_j e'_j$. Fie, de asemenea, $OO' = \sum_{i=1}^{n} p_{i0} e_i$. (desen)

Deoarece $OP = OO' + O'P$, rezultă că

$$\sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} p_{i0} e_i + \sum_{j=1}^{n} x'_j e'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{i0} e_i + \sum_{j=1}^{n} x'_j (\sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i),$$

deci

$$\sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} (p_{i0} + \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x'_j) e_i.$$

În consecinţă, *ecuaţiile transformărilor de coordonate* corespunzătoare schimbării de reper sunt

$$x_i = p_{i0} + \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x'_j, \quad i = \overline{1,n}, \quad \det(p_{ij}) \neq 0. \tag{2.9}$$

Ecuaţiile (2.9) au o formă matriceală

$$X = P_0 + PX',$$

unde $X = (x_i)$, $X' = (x'_i)$ şi $P_0 = (p_{i0})$ sunt matrici coloană.

- O schimbare de reper se numeşte *translaţie* dacă $e'_i = e_i$, $\forall\ i = \overline{1,n}$. În acest caz, $P = I_n$. Ecuaţiile unei translaţii sunt

$$x_i = p_{i0} + x'_i, \quad i = \overline{1,n}.$$

- O schimbare de reper se numeşte *centro-afinitate* dacă $O' = O$, adică $P_0 = 0$. Ecuaţiile unei centro-afinităţi sunt

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x'_j, \quad i = \overline{1,n}, \quad \det(p_{ij}) \neq 0.$$

2.6.3 Repere şi coordonate afine

Un *reper afin* într-un spaţiu afin n-dimensional $(\mathcal{A}, V)$ este un sistem **ordonat** de $n+1$ puncte afin independente din $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{R} = \{E_0, E_1, \ldots, E_n\}.$$

Reperului **afin** $\mathcal{R}$ îi asociem reperul **cartezian**

$$R = \{E_0; (E_0E_1, \ldots, E_0E_n)\},$$

unde $\{E_0E_1, \ldots, E_0E_n\}$ este o bază în V. Rezultă că, pentru orice punct $P \in \mathcal{A}$, vectorul E_0P se scrie în mod unic sub forma

$$E_0P = \alpha_1 E_0E_1 + \ldots + \alpha_n E_0E_n, \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K},$$

adică

$$OP - OE_0 = \alpha_1(OE_1 - OE_0) + \ldots + \alpha_n(OE_n - OE_0), \quad \forall\ O \in \mathcal{A}.$$

În consecinţă, pentru orice punct $P \in \mathcal{A}$, există un unic sistem de scalari $\alpha_0 = 1 - \alpha_1 - \ldots - \alpha_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, astfel încât

$$P = \alpha_0 E_0 + \alpha_1 E_1 + \ldots + \alpha_n E_n, \quad \text{cu } \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1.$$

Sistemul de scalari $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ poartă numele de *sistem de coordonate afine* (sau *baricentrice*) ale punctului P faţă de reperul afin $\mathcal{R}$.

Există o bijecţie între mulţimea reperelor afine ale unui spaţiu afin n-dimensional şi mulţimea reperelor sale carteziene. Dacă $\mathcal{R} = \{E_0, E_1, \ldots, E_n\}$ este un reper afin, atunci reperul cartezian asociat are ca origine punctul E_0, iar baza este dată de sistemul de vectori $\{E_0E_1, \ldots, E_0E_n\}$. Dacă un vector $E_0P \in V$ are **coordonatele carteziene** $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, atunci **coordonatele afine** ale punctului $P \in \mathcal{A}$ sunt $(\alpha_0 = 1 - \alpha_1 - \ldots - \alpha_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Fie (A, B) un bipunct nenul. Punctele A şi B, fiind afin independente, determină o dreaptă afină $\mathcal{D} = \{P = \alpha A + \beta B,\ \alpha + \beta = 1\}$.

Fie $P \in \mathcal{D}$, $P \neq B$. Rezultă că există α, $\beta \in \mathbb{K}$, cu $\alpha \neq 0$, astfel încât $P = \alpha A + \beta B$, deci $PP = \alpha AP + \beta BP$, echivalent cu faptul că $\alpha AP = \beta PB$. Notând $k = \beta\alpha^{-1} \in \mathbb{K}$, rezultă că, pentru orice punct $P \in \mathcal{D}$, $P \neq B$, există un scalar $k \in \mathbb{K}$ astfel încât

$$AP = kPB.$$

Scalarul k astfel definit poartă numele de *raport în care punctul P divide bipunctul* (A, B).

Dacă $P \in \mathcal{D}$, $P \neq B$, are coordonatele afine $(1-x, x), x \neq 1$, atunci raportul în care P divide (A, B) este $k = \dfrac{x}{1-x}$. Coordonatele afine ale lui P se mai numesc *coordonate afine omogene*, iar raportul k este *coordonata* sa *afină neomogenă* (sau *coordonata raport*).

Fie dreapta afină **reală** $\mathcal{D}$, determinată de bipunctul nenul (A, B). Există o bijecţie între axa $\mathbb{R}$ a numerelor reale şi $\mathcal{D}$.

$$\mathbb{R} \to \mathcal{D}, \qquad x \longmapsto P = (1-x)A + xB.$$

Pe $\mathbb{R}$ avem o relaţie de ordine: $P_1(x_1)$ precede pe $P_2(x_2)$ dacă $x_1 < x_2$. Această relaţie de ordine induce o relaţie de ordine pe $\mathcal{D}$. Rezultă că P precede pe A dacă $x < 0$, P este între A şi B dacă $0 < x < 1$ şi B precede pe P dacă $1 < x$. Dacă P are coordonata raport $k = \dfrac{x}{1-x}$, rezultă imediat că P este între A şi B dacă $k > 0$ şi P nu se află între A şi B dacă $k < 0$.

Putem extinde coordonatele raport într-un spaţiu afin n-dimensional $\mathcal{A}$. Fie $\mathcal{R} = \{E_0, E_1, \ldots, E_n\}$ un reper afin şi $R = \{E_0; E_0E_1, \ldots, E_0E_n\}$ reperul cartezian asociat. Fie $P \in \mathcal{A}$, astfel încât coordonatele carteziene ale vectorului E_0P să fie $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ şi, în consecinţă, cu $\alpha_0 = 1 - \alpha_1 - \ldots - \alpha_n$, coordonatele baricentrice ale lui P faţă de reperul afin $\mathcal{R}$ sunt $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Deci

$$P = \alpha_0 E_0 + \alpha_1 E_1 + \ldots + \alpha_n E_n, \quad E_0P = \alpha_1 E_0E_1 + \ldots + \alpha_n E_0E_n.$$

Dacă $P \neq E_1, \ldots, E_n$ (ceea ce este echivalent cu faptul că $\alpha_0 \neq 0$), avem

$$E_0P = \alpha_1(E_0P + PE_1) + \ldots + \alpha_n(E_0P + PE_n),$$

deci

$$\alpha_0 E_0P = \alpha_1 PE_1 + \ldots + \alpha_n PE_n.$$

Deoarece $\alpha_0 \neq 0$, obţinem

$$E_0P = k_1 PE_1 + \ldots + k_n PE_n,$$

unde $k_i = \alpha_i\alpha_0^{-1}$, $i = \overline{1, n}$, sunt *coordonatele raport* ale lui P fată de reperul afin $\mathcal{R}$.

2.6.4 Raport şi biraport de puncte coliniare

Fie $\{A, B, C\}$ un sistem de trei puncte **coliniare** şi **distincte**. Notăm prin $k = (A, B|C)$ *raportul* în care punctul C divide bipunctul (A, B),

$$(A, B|C) = \frac{AC}{CB}.$$

Considerând un reper cartezian pe dreapta suport a celor trei puncte, cu originea într-un punct oarecare O şi baza dată de un vector nenul v, coordonatele carteziene ale celor trei puncte vor fi $A(a)$, $B(b)$ şi $C(c)$. Atunci, raportul $(A, B|C)$ este

$$k = (A, B|C) = \frac{c-a}{b-c}.$$

Putem asocia sistemului dat încă cinci astfel de rapoarte şi ele vor lua valorile

$$(B, A|C) = \frac{1}{k},\ (A, C|B) = -(1+k),\ (C, A|B) = -\frac{1}{1+k},\ (C, B|A) = -\frac{k}{1+k},\ (B, C|A) = -\frac{1+k}{k}.$$

Punctele A, B şi C fiind distincte, rezultă că $k \neq 0$ $(C \neq A)$ şi $k \neq 1$ $(C \neq B)$. Evident, dacă unul dintre cele şase rapoarte este determinat, toate celelalte sunt determinate.

Fie $\{A, B, P, Q\}$ un sistem de patru puncte **coliniare** şi **distincte**. Numim *biraport* al cuaternei ordonate (A, B, P, Q) scalarul

$$(A, B|P, Q) = \frac{(A, B|P)}{(A, B|Q)}.$$

Punctele A şi B se numesc *puncte de bază*, iar punctele P şi Q *puncte de diviziune.*

Se arată uşor (de exemplu, considerând un reper cartezian pe dreapta suport a celor patru puncte), că

$$(A, B|P, Q) = (B, A|Q, P) = (P, Q|A, B) = (Q, P|B, A).$$

Deci, din cele $4! = 24$ cuaterne ordonate care se pot forma cu patru puncte distincte date, numai şase dintre ele pot avea birapoarte distincte.

Dacă A, B, P, Q sunt patru puncte coliniare distincte, atunci

$$(A, B|P, Q) = \lambda, \quad (A, B|Q, P) = \frac{1}{\lambda}, \quad (A, P|B, Q) = 1 - \lambda,$$

$$(A, P|Q, B) = \frac{1}{1-\lambda}, \quad (A, Q|B, P) = \frac{\lambda - 1}{\lambda}, \quad (A, Q|P, B) = \frac{-\lambda}{1-\lambda}.$$

O cuaternă de puncte coliniare distincte $\{A, B, P, Q\}$ este *armonică* dacă biraportul său $(A, B|P, Q)$ este egal cu -1. Punctele P şi Q se numesc *comjugate armonic* faţă de bipunctul (A, B).

$$(A, B|P, Q) = -1 \Longleftrightarrow (A, B|P) = -(A, B|Q),$$

deci dacă punctul P se află între A şi B, atunci conjugatul său armonic Q nu se poate afla între A şi B.

2.6.5 Reprezentări analitice ale unui p-plan

Fie $\mathcal{A}$ un spaţiu afin de dimensiune n şi V spaţiul său director. Fie $\mathcal{A}'$ un subspaţiu afin al lui $\mathcal{A}$, având spaţiul director V', cu $\dim V' = p$, deci $\mathcal{A}'$ este un p-plan al lui $\mathcal{A}$. El poate fi determinat fie printr-un punct P_0 al său şi spaţiul său director V', fie printr-un sistem de $p+1$ puncte ale sale, afin independente.

Reprezentări ale unui p-plan determinat de un punct şi spaţiul său director

Fie $P_0 \in \mathcal{A}'$ şi $\{u_1, \ldots, u_p\}$ o bază a lui V', astfel încât $R' = \{P_0; (u_1, \ldots, u_p)\}$ este un reper cartezian al lui $\mathcal{A}'$. Fie, de asemenea, $R = \{O; (e_1, \ldots, e_n)\}$ un reper cartezian în $\mathcal{A}$.

Pentru orice $P \in \mathcal{A}'$, avem
$$OP = OP_0 + P_0P.$$
(desen)

Dar $P_0P \in V'$, deci $P_0P = \sum\limits_{j=1}^{p} t_j u_j$. Exprimând şi vectorii OP şi OP_0 în baza din V, avem $OP = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ şi $OP_0 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_{i0} e_i$. În plus, fiecare vector u_j din baza lui V' se scrie $u_j = \sum\limits_{i=1}^{n} u_{ij} e_i$. Înlocuind, obţinem

$$OP = OP_0 + \sum_{j=1}^{p} t_j u_j \quad \textbf{ecuaţia vectorială a unui } p \text{ plan},$$

sau
$$\sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} x_{i0} e_i + \sum_{j=1}^{p} t_j (\sum_{i=1}^{n} u_{ij} e_i)$$

de unde rezultă

$$x_i = x_{i0} + \sum_{j=1}^{p} t_j u_{ij}, \quad i = \overline{1,n} \quad \textbf{ecuaţiile parametrice ale unui } p \text{ plan}.$$

Scrise dezvoltat, ecuaţiile parametrice ale unui p-plan devin

$$\begin{cases} x_1 = x_{10} + t_1 u_{11} + t_2 u_{12} + \ldots + t_p u_{1p} \\ x_2 = x_{20} + t_1 u_{21} + t_2 u_{22} + \ldots + t_p u_{2p} \\ \ldots \\ x_n = x_{n0} + t_1 u_{n1} + t_2 u_{n2} + \ldots + t_p u_{np} \end{cases}, \quad t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{K}.$$

- Dacă $p = 1$, obţinem dreptele din $\mathcal{A}$. Fie $\mathcal{D}$ o dreaptă afină, P_0 un punct al său şi $v \neq 0_V$ un vector din spaţiul său director V' (V' este o dreaptă vectorială, deci $\{v\}$ este o bază în V'). Vectorul $v \neq 0_V$ se numeşte *vector director* al dreptei $\mathcal{D}$. În raport cu baza $\{e_1, \ldots, e_n\}$ din V, v este de forma $v = u_1 e_1 + \ldots + u_n e_n$. Coordonatele $(u_1, \ldots, u_n)$ ale lui v se numesc *parametrii directori* ai dreptei $\mathcal{D}$. Obţinem, în acest caz,

$$\begin{cases} x_1 = x_{10} + tu_1 \\ x_2 = x_{20} + tu_2 \\ \dots \\ x_n = x_{n0} + tu_n \end{cases} \quad \textbf{ecuaţiile parametrice ale unei drepte}$$

sau

$$\frac{x_1 - x_{10}}{u_1} = \dots = \frac{x_n - x_{n0}}{u_n} \quad \textbf{ecuaţiile simetrice ale unei drepte}.$$

Dacă $\mathcal{A}$ este chiar $\mathcal{E}_3$, ecuaţiile unei drepte care trece prin $P_0(x_0, y_0, z_0)$ şi are vectorul director $v(p, q, r)$ sunt

$$\begin{cases} x = x_0 + tp \\ y = y_0 + tq \\ z = z_0 + tr \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

sau

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}.$$

Dacă dreapta este conţinută în $\mathcal{E}_2$ (identificat cu xOy), atunci ecuaţiile dreptei devin

$$\begin{cases} x = x_0 + tp \\ y = y_0 + tq \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q},$$

sau, în cazul în care $\mathcal{D}$ nu este paralelă cu Oy,

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

- Dacă $p = n - 1$, obţinem hiperplanele din $\mathcal{A}$. Sistemul de ecuaţii parametrice ale unui hiperplan este

$$\begin{cases} x_1 = x_{10} + t_1 u_{11} + t_2 u_{12} + \dots + t_{n-1} u_{1n-1} \\ x_2 = x_{20} + t_1 u_{21} + t_2 u_{22} + \dots + t_{n-1} u_{2n-1} \\ \dots \\ x_n = x_{n0} + t_1 u_{n1} + t_2 u_{n2} + \dots + t_{n-1} u_{nn-1} \end{cases}$$

şi rezultă că

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_{10} & u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n-1} \\ x_2 - x_{20} & u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n-1} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ x_n - x_{n0} & u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn-1} \end{vmatrix} = 0,$$

deoarece prima coloană este o combinaţie liniară a celorlalte. Ecuaţia de mai sus este **ecuaţia hiperplanului sub formă de determinant**. Obţinem, de asemenea,

$$a_1(x_1 - x_{10}) + \dots + a_n(x_n - x_{n0}) = 0 \quad \textbf{ecuaţia carteziană a unui hiperplan}$$

sau

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + a_0 = 0 \quad \textbf{ecuaţia carteziană generală a unui hiperplan}.$$

Reprezentări ale unui p-plan determinat de $p+1$ puncte afin independente

Presupunem că p-planul $\mathcal{A}'$ este determinat de $p+1$ puncte afin independente $\{A_0, A_1, \ldots, A_p\}$. Vom putea asocia p-planului $\mathcal{A}'$ reperul cartezian $\{A_0; (A_0A_1, \ldots, A_0A_P)\}$ şi problema este redusă la cazul anterior.

Dacă $R = \{O; (e_1, \ldots, e_n)\}$ este un reper cartezian în spaţiul afin $\mathcal{A}$, atunci vectorul de poziţie al unui punct arbitrar $P \in \mathcal{A}'$ este

$$OP = OA_0 + A_0P,$$

sau

$$OP = OA_0 + \sum_{j=1}^{p} t_j A_0A_j.$$

(desen)

Exprimând în baza $\{e_1, \ldots, e_n\}$, ca şi în cazul anterior, vectorii care intervin, obţinem

$$OP = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \quad OA_0 = \sum_{i=1}^{n} x_{i0} e_i, \quad A_0A_j = OA_j - OA_0 = \sum_{i=1}^{n} (x_{ij} - x_{i0}) e_i,$$

iar **ecuaţiile parametrice ale p-planului** determinat de punctele $\{A_0, A_1, \ldots, A_p\}$ sunt

$$x_i = x_{i0} + \sum_{j=1}^{p} t_j (x_{ij} - x_{i0}), \quad i = \overline{1,n}.$$

Scriind desfăşurat, avem

$$\left\{\begin{array}{c} x_1 = x_{10} + t_1(x_{11} - x_{10}) + t_2(x_{12} - x_{10}) + \ldots + t_p(x_{1p} - x_{10}) \\ x_2 = x_{20} + t_1(x_{21} - x_{20}) + t_2(x_{22} - x_{20}) + \ldots + t_p(x_{2p} - x_{20}) \\ \cdots \\ x_n = x_{n0} + t_1(x_{n1} - x_{n0}) + t_2(x_{n2} - x_{n0}) + \ldots + t_p(x_{np} - x_{n0}) \end{array}\right. , \quad t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{K}.$$

De exemplu, **ecuaţiile parametrice ale dreptei afine** determinate de punctele A_0 şi A_1 sunt

$$\left\{\begin{array}{c} x_1 = x_{10} + t(x_{11} - x_{10}) \\ x_2 = x_{20} + t(x_{21} - x_{20}) \\ \cdots \\ x_n = x_{n0} + t(x_{n1} - x_{n0}) \end{array}\right. , \quad t \in \mathbb{K},$$

iar **ecuaţiile simetrice** ale acesteia sunt

$$\frac{x_1 - x_{10}}{x_{11} - x_{10}} = \frac{x_2 - x_{20}}{x_{21} - x_{20}} = \ldots = \frac{x_n - x_{n0}}{x_{n1} - x_{n0}}.$$

Ecuaţiile parametrice **hiperplanului** determinat de sistemul de puncte afin independente $\{A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}\}$ sunt

$$\left\{\begin{array}{c} x_1 = x_{10} + t_1(x_{11} - x_{10}) + t_2(x_{12} - x_{10}) + \ldots + t_{n-1}(x_{1n-1} - x_{10}) \\ x_2 = x_{20} + t_1(x_{21} - x_{20}) + t_2(x_{22} - x_{20}) + \ldots + t_{n-1}(x_{2n-1} - x_{20}) \\ \cdots \\ x_n = x_{n0} + t_1(x_{n1} - x_{n0}) + t_2(x_{n2} - x_{n0}) + \ldots + t_{n-1}(x_{nn-1} - x_{n0}) \end{array}\right. , \quad t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{K},$$

iar **ecuaţia hiperplanului sub formă de determinant** este

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_{10} & x_{11} - x_{10} & x_{12} - x_{10} & \dots & x_{1n-1} - x_{10} \\ x_2 - x_{20} & x_{21} - x_{20} & x_{22} - x_{20} & \dots & x_{2n-1} - x_{20} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ x_n - x_{n0} & x_{n1} - x_{n0} & x_{n2} - x_{n0} & \dots & x_{nn-1} - x_{n0} \end{vmatrix} = 0,$$

ecuaţie echivalentă cu

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_{10} & x_{11} & \dots & x_{1n-1} \\ x_2 & x_{20} & x_{21} & \dots & x_{2n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & x_{n0} & x_{n1} & \dots & x_{nn-1} \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dacă un punct P are, în raport cu un reper cartezian R, coordonatele carteziene $(x_1, \dots, x_n)$ atunci coordonatele sale afine în raport cu reperul afin $\mathcal{R}$ asociat lui R, sunt $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$, unde $\alpha_0 = 1 - x_1 - \dots - x_n$, $\alpha_1 = x_1, \dots \alpha_n = x_n$.

Dacă în ultimul determinant scădem din ultima linie suma celorlalte linii, obţinem **ecuaţia hiperplanului în coordonate baricentrice**

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_{10} & \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n-1} \\ \alpha_2 & \alpha_{20} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{2n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_n & \alpha_{n0} & \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn-1} \\ \alpha_0 & \alpha_{00} & \alpha_{01} & \dots & \alpha_{0n-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Este imediat faptul că **condiţia necesară şi suficientă pentru ca un sistem de $n+1$ puncte** $\{A_0, A_1, \dots, A_n\}$ din $\mathcal{A}$ să fie **afin independent** este ca

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_{10} & x_{11} & \dots & x_{1n-1} \\ x_2 & x_{20} & x_{21} & \dots & x_{2n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & x_{n0} & x_{n1} & \dots & x_{nn-1} \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{sau} \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_{10} & \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n-1} \\ \alpha_2 & \alpha_{20} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{2n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_n & \alpha_{n0} & \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn-1} \\ \alpha_0 & \alpha_{00} & \alpha_{01} & \dots & \alpha_{0n-1} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Vom da o altă reprezentare parametrică a unui p-plan, folosind **coordonatele raport** ale p-planului. Fie $\{A_0, A_1, \dots, A_p\}$ un sistem afin independent de puncte din $\mathcal{A}$, care determină p-planul afin $\mathcal{A}'$. Acestui sistem de puncte i se poate asocia reperul afin $(A_0, A_1, \dots, A_p)$. Orice punct $P \in \mathcal{A}'$ este de forma

$$P = \alpha_0 A_0 + \alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_p A_p, \quad \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_p = 1.$$

Raportând spaţiul afin $\mathcal{A}$ la un reper cartezian, obţinem sistemul de **ecuaţii parametrice** ale p-planului $\mathcal{A}'$

$$x_i = \alpha_0 x_{i0} + \alpha_1 x_{i1} + \dots + \alpha_p x_{ip}, \quad i = \overline{1,n}, \quad \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_p = 1.$$

Asociind reperului afin de mai sus reperul cartezian $\{A_0, (A_0A_1, \ldots, A_0A_p)\}$, vectorul de poziţie al punctului P este

$$A_0P = \alpha_1 A_0A_1 + \ldots + \alpha_p A_0A_p,$$

deci

$$A_0P = \alpha_1(A_0P + PA_1) + \ldots + \alpha_p(A_0P + PA_p) \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \underbrace{(1 - \alpha_1 - \ldots - \alpha_p)}_{\alpha_0} A_0P = \alpha_1 PA_1 + \ldots + \alpha_p PA_p.$$

Dacă $P \neq A_1, \ldots, A_p$ (echivalent cu $\alpha_0 \neq 0$), atunci

$$A_0P = k_1PA_1 + \ldots k_pPA_p, \quad k_j = \frac{\alpha_j}{\alpha_0},\ j = \overline{1,p}.$$

Rezultă că

$$P - A_0 = k_1(A_1 - P) + \ldots + k_p(A_p - P) \Longleftrightarrow P(1 + k_1 + \ldots + k_p) = A_0 + k_1A_1 + \ldots + k_pA_p.$$

În consecinţă, coordonatele baricentrice ale punctului P sunt date de

$$P = \alpha_0A_0 + \alpha_1A_1 + \ldots + \alpha_pA_p,$$

unde

$$\alpha_0 = \frac{1}{1 + \sum\limits_{j=1}^{p} k_p}, \qquad \alpha_j = \frac{k_j}{1 + \sum\limits_{j=1}^{p} k_p},\ j = \overline{1,p},$$

iar **ecuaţiile parametrice** ale p-planului $\mathcal{A}'$ sunt

$$x_i = \frac{x_{i0} + \sum\limits_{j=1}^{p} k_jx_{ij}}{1 + \sum\limits_{j=1}^{p} k_j}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Aplicaţie. Teorema lui Menelaus. *Fie ABC un triunghi oarecare. Punctele $A_1 \in BC$, $B_1 \in CA$, $C_1 \in AB$ (diferite de A, B, C) sunt coliniare dacă şi numai dacă*

$$(B, C|A_1)(C, A|B_1)(A, B|C_1) = -1.$$

Soluţie: Punctele (A, B, C) determină un reper afin. În raport cu acest reper, avem

$$A_1 = (1 - \lambda)B + \lambda C,$$

$$B_1 = \mu A + (1 - \mu)C,$$

$$C_1 = (1 - \nu)A + \nu B,$$

iar rapoartele din teoremă sunt

$$(B, C|A_1) = \frac{\lambda}{1-\lambda}, \quad (C, A|B_1) = \frac{\mu}{1-\mu}, \quad (A, B|C_1) = \frac{\nu}{1-\nu}.$$

Punctele A_1, B_1, C_1 sunt coliniare dacă şi numai dacă determinantul coordonatelor lor afine se anulează, adică

$$\begin{vmatrix} 0 & 1-\lambda & \lambda \\ \mu & 0 & 1-\mu \\ 1-\nu & \nu & 0 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \lambda\mu\nu + (1-\lambda)(1-\mu)(1-\nu) = 0.$$

2.7 Morfisme de spaţii afine

Fie $(\mathcal{A}, V, \varphi)$ şi $(\mathcal{B}, W, \psi)$ două $\mathbb{K}$-spaţii afine. O aplicaţie $\sigma : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ se numeşte *aplicaţie afină* (sau *morfism afin*) dacă

$$\sigma(\alpha P + \beta Q) = \alpha\sigma(P) + \beta\sigma(Q), \quad \forall\ P, Q \in \mathcal{A}, \quad \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ \alpha + \beta = 1.$$

Dacă $(\mathcal{A}, V, \varphi)$ este un spaţiu afin şi $O \in \mathcal{A}$, aplicaţia $\varphi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to V$ induce o aplicaţie bijectivă $\varphi_O : \mathcal{A} \to V$, $P \longmapsto OP$.

Propoziţie 2.7.1. *O aplicaţie $\sigma : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ este afină dacă şi numai dacă există $O \in \mathcal{A}$ astfel încât, dacă $O' = \sigma(O)$, aplicaţia $t : V \to W$, determinată de relaţia*

$$t \circ \varphi_O = \psi_{O'} \circ \sigma,$$

este liniară.

Dem: Relaţia $t \circ \varphi_O = \psi_{O'} \circ \sigma$ este echivalentă cu

$$\forall\ P \in \mathcal{A}, (t \circ \varphi_O)(P) = (\psi_{O'} \circ \sigma)(P) \Longleftrightarrow t(OP) = \sigma(O)\sigma(P).$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\sigma} & \mathcal{B} \\ * \downarrow & \searrow & \downarrow \\ V & \xrightarrow[t]{} & W \end{array} \tag{2.10}$$

"$\Longrightarrow$" Presupunem că σ este aplicaţie afină şi demonstrăm că $t : V \to W$ este liniară.

- t este **omogenă** dacă $\forall\ v \in V$, $\forall\ \lambda \in \mathbb{K}$, $t(\lambda v) = \lambda t(v)$.

Fie $O \in \mathcal{A}$, $v \in V$ şi $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$v \in V \Longrightarrow \exists! P \in \mathcal{A}, v = OP,$$
$$\lambda v \in V \Longrightarrow \exists! Q \in \mathcal{A}, \lambda v = OQ,$$
$$OQ = \lambda OP \Longrightarrow AQ - AO = \lambda(AP - AO),\ \forall\ A \in \mathcal{A}\ \Longrightarrow Q = (1-\lambda)O + \lambda P.$$

Avem

$$t(\lambda v) = t(OQ) = \sigma(O)\sigma(Q) = \sigma(O)\sigma[(1-\lambda)O + \lambda P] = \lambda\sigma(O)\sigma(P) = \lambda t(OP) = \lambda t(v).$$

- t este **aditivă** dacă $\forall\ v, w \in V$, $t(v+w) = t(v) + t(w)$.

Fie $O \in \mathcal{A}$ şi $v, w \in V$.

$$v \in V \Longrightarrow \exists! P \in \mathcal{A}, v = OP,$$
$$w \in W \Longrightarrow \exists! Q \in \mathcal{A}, w = OQ,$$
$$\frac{1}{2}v + \frac{1}{2}w \in V \Longrightarrow \exists! R \in \mathcal{A}, \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}w = OR \Longrightarrow R = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q.$$

Avem

$$t(v+w) = 2t\left(\frac{1}{2}v + \frac{1}{2}w\right) = 2t(OR) = 2\sigma(O)\sigma(R) = 2\sigma(O)\sigma\left[\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q\right] = 2\sigma(O)\left[\frac{1}{2}\sigma(P) + \frac{1}{2}\sigma(Q)\right] =$$
$$= \sigma(O)\sigma(P) + \sigma(O)\sigma(Q) = t(OP) + t(OQ) = t(v) + t(w).$$

"$\Longleftarrow$" Presupunem că t este liniară şi demonstrăm că σ este aplicaţie afină. Fie $O \in \mathcal{A}$ fixat, $\lambda \in \mathbb{K}$, $P, Q \in \mathcal{A}$ şi $R = (1-\lambda)P + \lambda Q$. Avem

$$\sigma(O)\sigma(R) = t(OR) = t[(1-\lambda)OP + \lambda OQ] = (1-\lambda)t(OP) + \lambda t(OQ) = (1-\lambda)\sigma(O)\sigma(P) + \lambda\sigma(O)\sigma(Q),$$

deci

$$\sigma(R) = (1-\lambda)\sigma(P) + \lambda\sigma(Q). \qquad \square$$

Aplicaţia liniară $t : V \to W$, definită prin $t(OP) = \sigma(O)\sigma(P)$ se numeşte *aplicaţia liniară asociată* lui σ (sau *aplicaţia tangentă* la σ, sau *urma* lui σ) şi are proprietatea că

$$\forall\ A, B \in \mathcal{A} \qquad t(AB) = \sigma(A)\sigma(B).$$

Într-adevăr,

$$t(AB) = t(OB - OA) = t(OB) - t(OA) = \sigma(O)\sigma(B) - \sigma(O)\sigma(A) = \sigma(A)\sigma(B).$$

- O aplicaţie afină este unic determinată de o pereche de puncte corespondente O şi O' şi de aplicaţia liniară indusă $t : V \to W$.
- Deoarece $t \circ \varphi_O = \psi_{O'} \circ \sigma$, iar aplicaţiile φ_O şi $\psi_{O'}$ sunt bijective, rezultă că aplicaţia afină $\sigma : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ este injectivă (surjectivă, resp. bijectivă) dacă şi numai dacă aplicaţia liniară indusă $t : V \to W$ este injectivă (surjectivă, resp. bijectivă).

Propoziţie. *Fie $\sigma : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ o aplicaţie afină.*

a) Dacă $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ este un subspaţiu afin al lui lui $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}' \neq \emptyset$, iar V' este spaţiul său director, atunci $\sigma(\mathcal{A}')$ este un subspaţiu afin al lui $\mathcal{B}$, cu spaţiul director $t(V')$.

b) Dacă $\mathcal{B}' \subset Im\ \sigma$ este un subspaţiu afin al lui lui $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}' \neq \emptyset$, iar W' este spaţiul său director, atunci $\sigma^{-1}(\mathcal{B}')$ este un subspaţiu afin al lui $\mathcal{A}$, cu spaţiul director $t^{-1}(W')$.

Dem: a) Fixăm $O \in \mathcal{A}'$ şi fie $O' = \sigma(O)$. Atunci

$$\mathcal{A}' = \{P \in \mathcal{A}, \quad OP \in V'\},$$

deci

$$\sigma(A') = \{\sigma(P) \in \mathcal{B}, OP \in V'\} = \{\sigma(P) \in \mathcal{B}, \sigma(O)\sigma(P) =$$
$$= t(OP) \in t(V')\} = \{\sigma(P) \in \mathcal{B}, O'\sigma(P) \in t(V')\}.$$

Dar $O' \in \sigma(\mathcal{A}')$ şi $t(V') \prec t(V) \prec W$, deci $\sigma(\mathcal{A}')$ este un subspaţiu afin al lui $\mathcal{B}$, cu spaţiul director $t(V')$.

b) Avem

$$\mathcal{B}' = \{P' \in \mathcal{B}, O'P' \in W'\},$$

deci

$$\sigma^{-1}(\mathcal{B}') = \{\sigma^{-1}(P') \in \mathcal{A}, O'P' \in W'\} = \{P \in \mathcal{A}, O'\sigma(P) \in W'\} =$$
$$= \{P \in \mathcal{A}, \sigma(O)\sigma(P) \in W'\} = \{P \in \mathcal{A}, t(OP) \in W'\} = \{P \in \mathcal{A}, OP \in t^{-1}(W')\}.$$

Dar $O \in \mathcal{A}$ şi $t^{-1}(W') \prec t^{-1}(W) \prec V$, deci $\sigma^{-1}(\mathcal{B}')$ este un subspaţiu afin al lui $\mathcal{A}$, cu spaţiul director $t^{-1}(W')$. $\square$

Consecinţe:

- Dacă $\sigma : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ este o aplicaţie afină, atunci
  a) Im σ este un subspaţiu afin al lui $\mathcal{B}$.
  b) Dacă $\mathcal{A}_1$ şi $\mathcal{A}_2$ sunt subspaţii afine ale lui $\mathcal{A}$, atunci $\mathcal{A}_1 \parallel \mathcal{A}_2 \Longrightarrow \sigma(\mathcal{A}_1) \parallel \sigma(\mathcal{A}_2)$. Într-adevăr, dacă $\mathcal{A}_1 \parallel \mathcal{A}_2$, atunci $V_1 \subset V_2$ sau $V_2 \subset V_1$, deci $t(V_1) \subset t(V_2)$ sau $t(V_2) \subset t(V_1)$ şi, deci, $\sigma(\mathcal{A}_1) \parallel \sigma(\mathcal{A}_2)$.
- Dacă $\sigma : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ este o aplicaţie afină **injectivă**, atunci pentru fiecare $B \in$ Im σ, $\sigma^{-1}(B)$ este un punct din $\mathcal{A}$. Într-adevăr, B este un subspaţiu afin al lui $\mathcal{B}$, cu spaţiul director $\{0_W\}$, deci $\sigma^{-1}(B)$ este un subspaţiu afin al lui $\mathcal{A}$, cu spaţiul director $t^{-1}(0_W) = \ker t$. Dar σ este injectivă, deci t este injectivă şi $\ker t = \{0_V\}$. În consecinţă, spaţiul director al lui $\sigma^{-1}(B)$ este $\{0_V\}$, deci $\sigma^{-1}(B)$ este un punct al lui $\mathcal{A}$.
- Dacă $\sigma : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ este o aplicaţie afină **surjectivă**, atunci pentru fiecare $B \in \mathcal{B}$, spaţiul director al subspaţiului $\sigma^{-1}(B)$ este $\ker t \subset V$. În consecinţă, dacă $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, atunci $\sigma^{-1}(B_1) \parallel \sigma^{-1}(B_2)$.

Exemple de aplicaţii afine

- **Aplicaţii definite pe $\mathbb{K}^n$ cu valori în $\mathbb{K}^m$**

Fie $\sigma : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $\sigma(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_m)$, unde

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i + b_j, \quad j = \overline{1, m}.$$

Aceasta este o aplicaţie afină, iar aplicaţia liniară asociată este

$$t : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, t(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_m),$$

unde

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i, \quad j = \overline{1, m}.$$

- **Omotetii de centru O şi raport k**

Fie $O \in \mathcal{A}$ un punct fixat şi $k \in \mathbb{K}^*$. Aplicaţia

$$\sigma_k : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad \sigma(P) = (1-k)O + kP,$$

se numeşte omotetie de centru O şi raport k. Evident, $\sigma_k(O) = O$. Aceasta este o aplicaţie afină, iar aplicaţia liniară asociată este

$$t_k : V \to V, \quad t_k(OP) = kOP,$$

adică omotetia vectorială de centru O şi raport k.

Omotetia de raport $k = 1$ este $1_{\mathcal{A}}$, iar $t_1 = 1_V$. Omotetia de raport $k = -1$ este simetria lui $\mathcal{A}$ faţă de O, $\sigma_{-1}(P) = 2O - P$, iar $t_{-1}(OP) = -OP$.

Propoziţie. *Fie $(\mathcal{A}_1, V_1)$, $(\mathcal{A}_2, V_2)$ şi $(\mathcal{A}_3, V_3)$ trei spaţii afine şi $\sigma_1 : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$, $\sigma_2 : \mathcal{A}_2 \to \mathcal{A}_3$ aplicaţii afine, cu aplicaţiile liniare induse $t_1 : V_1 \to V_2$, respectiv $t_2 : V_2 \to V_3$. Atunci $\sigma_2 \circ \sigma_1 : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_3$ este aplicaţie afină, iar aplicaţia liniară indusă este $t = t_2 \circ t_1$.*

Dem: Pentru orice α, $\beta \in \mathbb{K}$, $\alpha + \beta = 1$, şi orice $P, Q \in \mathcal{A}_1$, avem

$$(\sigma_2 \circ \sigma_1)(\alpha P + \beta Q) = \sigma_2(\alpha \sigma_1(P) + \beta \sigma_1(Q)) = \alpha \sigma_2(\sigma_1(P)) + \beta \sigma_2(\sigma_1(Q)),$$

deci $\sigma_2 \circ \sigma_1$ este o aplicaţie afină. În plus, pentru orice $A, B \in \mathcal{A}$,

$$(\sigma_2 \circ \sigma_1)(A)(\sigma_2 \circ \sigma_1)(B) = \sigma_2(\sigma_1(A))\sigma_2(\sigma_1(B)) = t_2(\sigma_1(A)\sigma_1(B)) = t_2(t_1(AB)),$$

deci aplicaţia liniară asociată lui $\sigma_2 \circ \sigma_1$ este $t_2 \circ t_1$. $\square$

Propoziţie. *Dacă $\sigma : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ este o aplicaţie afină bijectivă, iar aplicaţia liniară indusă este $t : V \to W$, atunci $\sigma^{-1} : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ este aplicaţie afină, iar aplicaţia liniară indusă este $t^{-1} : W \to V$.*

Dem: Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, cu $\alpha + \beta = 1$ şi fie $P, Q \in \mathcal{B}$. Rezultă că există $A, B \in \mathcal{A}$, astfel încât $\sigma(A) = P$, $\sigma(B) = Q$. Avem

$$\sigma^{-1}(\alpha P+\beta Q) = \sigma^{-1}(\alpha\sigma(A)+\beta\sigma(B)) = \sigma^{-1}(\sigma(\alpha A+\beta B)) = \alpha A+\beta B = \alpha\sigma^{-1}(P)+\beta\sigma^{-1}(B),$$

Deci σ^{-1} este aplicaţie afină. În plus, deoarece

$$\sigma^{-1}(P)\sigma^{-1}(Q) = \sigma^{-1}(\sigma(A))\sigma^{-1}(\sigma(B)) = AB = t^{-1}(PQ),$$

rezultă că aplicaţia liniară indusă de σ^{-1} este t^{-1}. □

O aplicaţie afină **bijectivă** $\sigma : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ se numeşte *afinitate* (sau *automorfism afin*, sau *transformare afină*) a spaţiului afin $\mathcal{A}$.

Mulţimea afinităţilor unui spaţiu afin $\mathcal{A}$ formează un grup în raport cu operaţia de compunere. Acest grup se notează $\mathrm{GA}(\mathcal{A})$ şi se numeşte *grupul afinităţilor* lui $\mathcal{A}$.

2.7.1 Translaţii şi centro-afinităţi

O *translaţie* pe un spaţiu afin $\mathcal{A}$ este o afinitate $\sigma : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, cu proprietatea că aplicaţia liniară indusă este aplicaţia identică $t = 1_V : V \to V$. Rezultă că o translaţie este unic determinată de o pereche de puncte corespondente.

Fie $\sigma : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ o translaţie, $O \in \mathcal{A}$ şi $\sigma(O) \in \mathcal{A}$ corespondentul lui O prin σ. Aplicaţia liniară indusă de σ este 1_V, deci, pentru orice $P \in \mathcal{A}$, avem $OP = t(OP) = \sigma(O)\sigma(P)$. În consecinţă,

$$OP = O\sigma(O) + \sigma(O)\sigma(P) + \sigma(P)P,$$

de unde rezultă că

$$\forall\ P \in \mathcal{A}, \qquad O\sigma(O) = P\sigma(P).$$

Vectorul $v = P\sigma(P) \in V$, (care depinde numai de σ), poartă numele de *vectorul translaţiei* σ.

Propoziţie. *Mulţimea translaţiilor unui spaţiu afin $\mathcal{A}$ este un subgrup al grupului afinităţilor* $\mathrm{GA}(\mathcal{A})$*, izomorf cu grupul aditiv al lui V. Este, deci, un grup comutativ.*

Dem: Fie

$$\mathrm{GT}(\mathcal{A}) = \{\sigma : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, t = 1_V\}$$

mulţimea translaţiilor spaţiului afin $\mathcal{A}$. Este evident că produsul (compunerea) a două translaţii este o translaţie (dacă σ_1, σ_2 sunt translaţii, atunci aplicaţia liniară indusă de produlul $\sigma_2 \circ \sigma_1$ este $t_2 \circ t_1 = 1_V \circ 1_V = 1_V$) şi că inversa unei translaţii este tot o translaţie (inversa lui 1_V este tot 1_V). Deci $\mathrm{GT}\,(\mathcal{A})$ este un subgrup al lui $\mathrm{GA}\,(\mathcal{A})$.

Orice translaţie σ este unic determinată de vectorul $v = P\sigma(P) \in V$, iar acest vector este independent de alegerea lui $P \in \mathcal{A}$. Considerăm aplicaţia

$$h : \mathrm{GT}\,(\mathcal{A}) \to V, \quad \sigma \to v = P\sigma(P).$$

- h este un morfism de grupuri.

Într-adevăr, fie σ_1, $\sigma_2 \in$ GT $(\mathcal{A})$, v_1, respectiv v_2 vectorii corespunzători şi fie $P \in \mathcal{A}$ un punct fixat. Avem

$$h(\sigma_2 \circ \sigma_1) = P(\sigma_2 \circ \sigma_1)(P) = P\sigma_1(P) + \sigma_1(P)(\sigma_2 \circ \sigma_1)(P) = v_1 + v_2 = h(\sigma_1) + h(\sigma_2).$$

- h este injectivă.

Dacă $h(\sigma_1) = h(\sigma_2)$, atunci $P\sigma_1(P) = P\sigma_2(P)$, $\forall\ P \in \mathcal{A}$, deci $\sigma_1(P) = \sigma_2(P) \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2$.

- h este surjectivă.

Pentru orice $v \in V$ şi $P \in \mathcal{A}$, fixat, există un unic punct $Q \in \mathcal{A}$, astfel încât $PQ = v$. Notând $Q = \sigma(P)$, aplicaţia h este surjectivă.

Deci h este un izomorfism de grupuri. Deoarece V este abelian, şi grupul translaţiilor GT $(\mathcal{A})$ este abelian. □

Izomorfismul de mai sus ne permite să definim pe grupul abelian al translaţiilor GT $(\mathcal{A})$ o structură de $\mathbb{K}$-spaţiu vectorial. Operaţia externă este dată de

$$\mathbb{K} \times \mathrm{GT}\,(\mathcal{A}) \to \mathrm{GT}\,(\mathcal{A}), \quad (\lambda, \sigma) \to \sigma' = \lambda\sigma,$$

unde translaţia $\lambda\sigma$ este definită prin

$$P\sigma'(P) = \lambda P\sigma(P), \quad \forall\ P \in \mathcal{A}.$$

O *centro-afinitate de centru* O a spaţiului afin $\mathcal{A}$ este o afinitate $\sigma : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, cu proprietatea că $\sigma(O) = O$.

Dacă $t : V \to V$ este aplicaţia liniară indusă de aplicaţia afină $\sigma : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, atunci σ este o centro-afinitate dacă şi numai dacă

$$t(OP) = O\sigma(P), \quad \forall\ P \in \mathcal{A}.$$

Notăm prin $\mathrm{GCA}_O(\mathcal{A})$ mulţimea centro-afinităţilor de centru O ale spaţiului afin $\mathcal{A}$.

Propoziţie. $\mathrm{GCA}_O(\mathcal{A})$ *este un subgrup al grupului afinităţilor* $\mathrm{GA}(\mathcal{A})$*, izomorf cu grupul* $\mathrm{GL}(V)$ *al transformărilor liniare ale spaţiului director* V*.*

Dem: Este evident că produsul (compunerea) a două centro-afinităţi de centru O este o centro-afinitate de centru O (dacă σ_1, σ_2 sunt centro-afinităţi, $\sigma_1(O) = O$, $\sigma_2(O) = O$, deci $\sigma_2 \circ \sigma_1(O) = O$) şi că inversa unei centro-afinităţi este tot o centro-afinitate (dacă $\sigma(O) = O$, atunci $\sigma^{-1}(O) = O$). Deci $\mathrm{GCA}_O(\mathcal{A})$ este un subgrup al lui GA $(\mathcal{A})$. Fie

$$h : \mathrm{GCA}_O(\mathcal{A}) \to \mathrm{GL(V)}, \quad \sigma \to t.$$

- h este un morfism de grupuri.

Într-adevăr, fie σ_1, $\sigma_2 \in \mathrm{GCA}_O(\mathcal{A})$ şi t_1, respectiv t_2 aplicaţiile liniare induse. Avem

$$h(\sigma_2 \circ \sigma_1) = t_2 \circ t_1 = h(\sigma_1) \circ (\sigma_2).$$

- h este injectivă.

Dacă $h(\sigma_1) = h(\sigma_2)$, atunci $t_1 = t_2$, deci $t_1(OP) = t_2(OP) \Rightarrow O\sigma_1(P) = O\sigma_2(P) \Rightarrow \sigma_1(P) = \sigma_2(P) \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2$.

- h este surjectivă.

Fie $t \in$GL(V) şi $O \in \mathcal{A}$ fixat. Pentru orice $P \in \mathcal{A}$, există un unic punct $Q \in \mathcal{A}$, astfel încât $t(OP) = OQ$. Notând $Q = \sigma(P)$, aplicaţia h este surjectivă.

Deci h este un izomorfism de grupuri. $\square$

Teoremă. *Fie $O \in \mathcal{A}$. Orice afinitate $\sigma : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ se scrie, în mod unic, sub forma $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_O$, unde $\sigma_O \in \mathrm{GCA}_O(\mathcal{A})$ şi $\sigma_1 \in \mathrm{GT}(\mathcal{A})$.*

Dem: Fie σ_1 translaţia definită de perechea de puncte O şi $\sigma(O)$. Deci $O\sigma_1(O) = O\sigma(O)$, adică $\sigma(O) = \sigma_1(O)$. Evident, σ_1, definită în acest fel, este unică. Fie $\sigma_O = \sigma_1^{-1} \circ \sigma$. Deoarece

$$\sigma_O(O) = \sigma_1^{-1}(\sigma(O)) = \sigma_1^{-1}(\sigma_1(O)) = O,$$

rezultă că σ_O este o centro-afinitate de centru O şi $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_O$. $\square$

2.7.2 Proiectori şi automorfisme afine involutive

Un *proiector afin* pe un spaţiu afin $\mathcal{A}$ este un endomorfism afin $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, cu proprietatea că $\pi^2 = \pi$.

- Aplicaţia liniară $p : V \to V$, asociată unui proiector afin $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, satisface $p^2 = p$, adică este un proiector vectorial. În consecinţă, $V = \mathrm{Im}\ p \oplus \ker p$.

- Fiecare punct $P \in \mathrm{Im}\ \pi$ este un **punct fix** pentru π. Într-adevăr, dacă $P \in \mathrm{Im}\ \pi$, atunci $P = \pi(Q)$ şi $\pi(P) = \pi^2(Q) = \pi(Q) = P$. Deci $\mathcal{A}_1 = \mathrm{Im}\ \pi$ este un subspaţiu de puncte fixe. Mai mult, orice proiector afin $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ reprezintă o proiecţie a lui $\mathcal{A}$ pe subspaţiul său $\mathcal{A}_1 =$Im π, făcută paralel cu un subspaţiu $\mathcal{A}_2$, de direcţie suplimentară $V_2 = \ker p$. Dacă $O \in \mathcal{A}_1$, fixat, atunci pentru orice $P \in \mathcal{A}$, avem

  $$OP = O\pi(P) + OP',$$

  unde $O\pi(O) \in \mathrm{Im}\ p$, iar $OP' \in \ker p$.

  (desene)

Un *automorfism afin involutiv* al unui spaţiu afin $\mathcal{A}$ este un endomorfism afin $\sigma : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, cu proprietatea că $\sigma^2 = 1_{\mathcal{A}}$.

- Aplicaţia liniară $s : V \to V$, asociată lui σ, satisface relaţia $s^2 = 1_V$, deci este un automorfism vectorial involutiv. În consecinţă, şi σ este un automorfism afin.

Legătura dintre proiectori şi automorfisme afine este dată de:

- Dacă σ este un automorfism afin involutiv, atunci aplicaţia

  $$\pi_\sigma : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad \pi_\sigma(P) = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}\sigma(P)$$

  este un proiector afin.

- Dacă $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ este un proiector afin, atunci aplicaţia

  $$\sigma_\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \quad \sigma_\pi(P) = 2\pi(P) - P$$

  este un automorfism afin involutiv.

  (desene)

2.7.3 Morfisme de spaţii afine finit dimensionale

Fie $(\mathcal{A}, V, \varphi)$ şi $(\mathcal{B}, W, \psi)$ două spaţii afine finit dimensionale, de dimensiuni n, respectiv m, $\sigma : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ o aplicaţie afină, iar $t : V \to W$ aplicaţia liniară indusă.

Se numeşte *rang* (respectiv *defect*) al aplicaţiei σ, rangul (respectiv defectul) aplicaţiei liniare induse t. Rezultă imediat că

- rang $\sigma = \dim \text{Im } \sigma$;
- $\forall\, Q \in \text{Im } \sigma$, def $\sigma = \dim \sigma^{-1}(Q)$;
- rang $\sigma +$ def $\sigma = n$.

Propoziţie. *Fie $R = (O; (e_1, \ldots, e_n))$ un reper cartezian în $\mathcal{A}$, iar $B' = (O'; (f_1, \ldots, f_m))$ un reper cartezian în $\mathcal{B}$. Dacă $P(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{A}$ şi $P'(y_1, \ldots, y_m) \in \mathcal{B}$, atunci o aplicaţie afină*

$$\sigma : \mathcal{A} \to \mathcal{B}, \quad P \to \sigma(P) = P'$$

este determinată de sistemul de ecuaţii

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i + b_j, \quad j = \overline{1, m}, \tag{2.11}$$

iar aplicaţia liniară indusă

$$t : V \to W$$

are ecuaţiile

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i, \quad j = \overline{1, m}. \tag{2.12}$$

Dem: Ecuaţiile (2.11) sunt numite *ecuaţiile aplicaţiei* σ faţă de reperele R şi R'.

Fie (b_j) coordonatele lui $\sigma(O)$ în reperul R'. Avem

$$O'P' = O'\sigma(P) = O'\sigma(O) + \sigma(O)\sigma(P) = O'\sigma(O) + t(OP),$$

deci

$$\sum_{j=1}^{m} y_j f_j = \sum_{j=1}^{m} b_j f_j + t(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{m} y_j f_j = \sum_{j=1}^{m} b_j f_j + \sum_{i=1}^{n} x_i t(e_i) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{m} y_j f_j = \sum_{j=1}^{m} b_j f_j + \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} a_{ji} f_j \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{m} y_j f_j = \sum_{j=1}^{m} b_j f_j + \sum_{j=1}^{m} (\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i) f_j,$$

de unde rezultă (2.11). Deoarece $t(OP) = \sigma(O)\sigma(P) = O'\sigma(P) - O'\sigma(O)$, obţinem (2.12). $\square$

Sistemul de scalari (a_{ji}, b_j) poartă numele de *coordonatele aplicaţiei afine* σ faţă de reperele R şi R'. Acest sistem este format din coordonatele (a_{ji}) ale aplicaţiei liniare induse t în bazele (e_i) şi (f_j) şi din coordonatele (b_j) ale punctului $\sigma(O)$ în reperul R'.

Ecuaţiile (2.11) se pot scrie sub formă matriceală

$$Y = AX + B,$$

unde $Y = (y_j)$, $X = (x_i)$ şi $B = (b_j)$ sunt matrici coloană, iar $A \in \mathfrak{M}_{mn}(\mathbb{K})$. Această ecuaţie matriceală se mai poate scrie sub forma

$$\begin{pmatrix} 1 \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ X \end{pmatrix},$$

iar matricea $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B & A \end{pmatrix}$ este *matricea asociată* aplicaţiei σ. Rezultă imediat că

$$\operatorname{rang} \sigma = \operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B & A \end{pmatrix}.$$

În cazul unui endomorfism afin, raportăm atât P cât şi $\sigma(P)$ la acelaşi reper R. Ecuaţiile lui σ sunt de acelaşi tip, iar A este o matrice pătratică.

Fie $\sigma : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ un endomorfism afin al spaţiului afin n-dimensional $\mathcal{A}$ şi $R = (O, (e_1, \dots, e_n))$ un reper cartezian. Ecuaţiile lui σ sunt

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i + b_j, \quad j = \overline{1, n},$$

iar ecuaţiile aplicaţiei liniare induse t sunt

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i, \quad j = \overline{1, n}.$$

- σ este un **automorfism afin** dacă şi numai dacă t este un izomorfism de spaţii vectoriale, ceea ce este echivalent cu $\det A = \det(a_{ij}) \neq 0$; avem $X = A^{-1}Y - A^{-1}B$;
- σ este o **translaţie** dacă şi numai dacă $t = 1_V$, adică $A = I_n$, sau $a_{ij} = \delta^i_j$; vectorul corespunzător translaţiei σ are coordonatele $b_j = y_j - x_j$;
- σ este o **centro-afinitate de centru** O dacă şi numai dacă $\sigma(O) = O$, adică $B = 0$, deci $b_j = 0$.

Teoremă 2.7.3.1. *Fie $R = (O; (e_1, \ldots, e_n))$ şi $R' = (O'; (e'_1, \ldots, e'_n)$ două repere carteziene ale unui spaţiu afin n-dimensional $\mathcal{A}$. Există o transformare afină $\sigma : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, unic determinată de*

$$O' = \sigma(O), \quad e'_i = t(e_i), \quad i = \overline{1, n}.$$

Dacă P are coordonatele (x_i) în reperul R şi $\sigma(P)$ are coordonatele (x'_i) în reperul R', atunci ecuaţiile transformării σ în reperele R, R' sunt

$$x'_i = x_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Dem: Există întotdeauna o transformare afină $\sigma : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, pentru care $O' = \sigma(O)$ şi $e'_i = t(e_i)$, $i = \overline{1, n}$. Fie $OP = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ şi $O'P' = \sum\limits_{i=1}^{n} x'_i e'_i$. Avem

$$t(OP) = t(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i t(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i e'_i$$

şi, în acelaşi timp,

$$t(OP) = \sigma(O)\sigma(P) = O'P' = \sum_{i=1}^{n} x'_i e'_i,$$

deci $x'_i = x_i$, $\forall$, $i = \overline{1, n}$.

Deoarece t este unic determinată de valorile sale pe vectorii bazei (e_i), iar σ este determinată de o pereche de puncte corespondente O şi $\sigma(O)$ şi de aplicaţia liniară t indusă, rezultă că σ este unică. □

2.7.4 Ecuaţiile carteziene ale unui p-plan

Considerăm $\mathbb{K}^m$ atât cu structura canonică de $\mathbb{K}$-spaţiu vectorial, cât şi cu structura canonică de spaţiu afin.

Fie $\mathcal{A}$ un spaţiu afin de dimensiune n şi $\sigma : \mathcal{A} \to \mathbb{K}^m$ o aplicaţie afină. *Nucleul* aplicaţiei σ, notat $\ker \sigma$, este subspaţiul afin $\sigma^{-1}(0)$, unde $0 \in \mathbb{K}^m$.

Am văzut că, dacă σ este **surjectivă**, atunci $\ker \sigma$ este un p -plan $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$, unde $p = n - m$. Deci, nucleul unei aplicaţii afine surjective este un p -plan. Mai mult, orice p-plan se poate "vedea" ca nucleul unei aplicaţii afine surjective.

Propoziţie. *Pentru orice p-plan $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$, există o aplicaţie afină surjectivă $\sigma : \mathcal{A} \to \mathbb{K}^{n-p}$, astfel încât* $\ker \sigma = \mathcal{A}'$.

Dem: Fie $R' = \{O; (e_j), j = \overline{1,p}\}$ un reper în $\mathcal{A}'$. Baza acestuia se poate completa până la o bază a spaţiului director al lui $\mathcal{A}$, astfel încât $R = \{O; (e_j, e_\beta), j = \overline{1,p}, \beta = \overline{p+1,n}\}$ este un reper cartezian în $\mathcal{A}$. Considerăm reperul canonic $\{O; (f_\gamma), \gamma \in \overline{1,n-p}\}$ al lui $\mathbb{K}^{n-p}$.

Conform Teoremei 2.7.3.1, există o aplicaţie afină $\sigma : \mathcal{A} \to \mathbb{K}^{n-p}$, caracterizată prin

$$\sigma(O) = 0, \quad t(e_1) = \ldots = t(e_p) = 0,$$

$$t(e_{p+1}) = f_1, \ldots, t(e_n) = f_{n-p},$$

unde t este aplicaţia liniară indusă de σ. Coordonatele lui σ sunt

$$b_j = 0, \quad j = \overline{1,n-p}, \qquad (a_{ji}) = (\mathbf{\Theta}_p, \mathbf{I}_{n-p}), \quad j = \overline{1,p},\ i = \overline{1,n}.$$

- $P \in \mathcal{A}' \Longleftrightarrow \sigma(P) = 0$;
- rang $(a_{ji}) = n - p$, deci σ este surjectivă. $\square$

Fie $(x_1, \ldots, x_n)$ coordonatele unui punct $P \in \mathcal{A}$ faţă de un reper cartezian $R = \{O; (e_1, \ldots, e_n)\}$ din $\mathcal{A}$ şi fie $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ un p-plan. Acesta coincide, deci, cu nucleul unei aplicaţii afine surjective $\sigma : \mathcal{A} \to \mathbb{K}^{n-p}$, $\mathcal{A}' = \ker \sigma$. Ţinând cont de ecuaţiile unei aplicaţii afine (2.11), rezultă că $P \in \mathcal{A}'$ dacă şi numai dacă sistemul de coordonate $(x_1, \ldots, x_n)$ este o soluţie a sistemului de ecuaţii

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i + b_j = 0, \quad j = \overline{1,n-p}, \quad \text{rang } (a_{ji}) = n - p. \tag{2.13}$$

Spaţiul director V' al lui $\mathcal{A}'$ este determinat de $\ker t$, unde t este aplicaţia liniară indusă de σ. Folosind (2.12), rezultă că un vector v se află în subspaţiul director al p-planului $\mathcal{A}'$, $v = (v_1, \ldots, v_n) \in V'$, dacă şi numai dacă componentele sale $(v_1, \ldots, v_n)$ verifică sistemul de ecuaţii omogene

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i = 0, \quad j = \overline{1,n-p}, \quad \text{rang } (a_{ji}) = n - p. \tag{2.14}$$

Sistemul de ecuaţii (2.13) poartă numele de *ecuaţiile carteziene generale ale p-planului afin* $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ în raport cu reperul R, iar (2.14) *ecuaţiile p-planului vectorial director.*

- Dacă p-planul considerat este un **hiperplan**, el va fi determinat de o singură ecuaţie carteziană
$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b = 0, \quad \text{rang } (a_i) = 1.$$

- O **dreaptă** afină într-un spaţiu afin 3-dimensional va fi determinată de un sistem de ecuaţii de forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_1 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_2 = 0 \end{cases}, \quad \text{rang} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = 2.$$

  Un sistem de coordonate pentru un vector director al acestei drepte va fi o soluţie a sistemului omogen

$$\begin{cases} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + a_{13}v_3 = 0 \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + a_{23}v_3 = 0 \end{cases}, \quad \text{rang} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = 2.$$

- Un **plan** afin dintr-un spaţiu afin 3-dimensional va fi determinat de o ecuaţie de forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + b = 0, \quad \text{rang}\ (a_1, a_2, a_3) = 1.$$

  Coordonatele unui vector din spaţiul său director vor fi o soluţie a ecuaţiei omogene

$$a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = 0, \quad \text{rang}\ (a_1, a_2, a_3) = 1.$$

2.8 Forme afine

Fie $(\mathcal{A}, V)$ un $\mathbb{K}$-spaţiu afin, iar pe corpul $\mathbb{K}$ vom considera atât structura canonică de $\mathbb{K}$-spaţiu vectorial, cât şi structura canonică de spaţiu afin.

Se numeşte *formă afină* pe spaţiul afin $\mathcal{A}$ o aplicaţie afină $F : \mathcal{A} \to \mathbb{K}$. Deci

$$F(\alpha P + \beta Q) = \alpha F(P) + \beta F(Q), \quad \forall\ P, Q \in \mathcal{A},\ \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \alpha + \beta = 1.$$

Orice aplicaţie afină induce o aplicaţie liniară între spaţii vectoriale. Deci, formei afine $F : \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ i se asociază forma liniară $f : V \to \mathbb{K}$, cu următoarea proprietate: dacă $O \in \mathcal{A}$ este un punct arbitrar, numit *origine*, atunci $f(OP) = F(O)F(P)$, $\forall\ P \in \mathcal{A}$. Dar, în $\mathbb{K}$, $F(O)F(P) = F(P) - F(O)$, deci

$$f(OP) = F(P) - F(O), \quad \forall\ P \in \mathcal{A}.$$

Vom nota cu $r = OP$ *vectorul de poziţie* al punctului P faţă de originea O şi $b = F(O) \in \mathbb{K}$. Rezultă că

$$F(P) = f(r) + b, \quad \forall\ P \in \mathcal{A}. \tag{2.15}$$

- Forma afină F este, deci, determinată de forma liniară indusă f şi de valoarea b a lui F în originea O.

- O formă afină F este **constantă** dacă şi numai dacă forma liniară indusă f este forma nulă.

- Dacă $\mathcal{A}$ este un spaţiu afin n-dimensional, iar $R = (O; (e_1, \ldots, e_n))$ este un reper cartezian, atunci, exprimând vectorul $r = OP = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$, vom avea
$$f(r) = f(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} f(e_i) x_i = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i, \quad a_i = f(e_i),$$
deci o formă afină este dată de o funcţie polinomială de gradul I, în coordonatele (x_i) ale punctului P,
$$F(P) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b, \quad \forall\ P(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{A}.$$
Sistemul de scalari $(a_i = f(e_i), b = F(O))$ poartă numele de *coordonatele formei* F în reperul R.

Hiperplane afine

Se numeşte *nucleu* al formei afine $F : \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ subspaţiul afin $F^{-1}(0_{\mathbb{K}})$,
$$\ker F = F^{-1}(0) = \{P \in \mathcal{A}, F(P) = 0 \in \mathbb{K}\}.$$

Propoziţie. *Condiţia necesară şi suficientă pentru ca o submulţine nevidă $\mathcal{H} \subset \mathcal{A}$ să fie hiperplan afin este să existe o formă afină neconstantă $F : \mathcal{A} \to \mathbb{K}$, astfel încât $\mathcal{H} = \ker F$.*

Dem: "$\Longrightarrow$" Fie $\mathcal{H}$ un hiperplan afin al lui $\mathcal{A}$. Spaţiul său director este un hiperplan vectorial H. Fixăm un punct $P_0 \in \mathcal{H}$. Atunci
$$H = \{P_0P, \quad P \in \mathcal{H}\}.$$
H fiind un hiperplan vectorial al spaţiului director V al lui $\mathcal{A}$, rezultă că H coincide cu nucleul unei forme liniare nenule pe V, adică există $f : V \to \mathbb{K}$, $f \neq 0$, astfel încât $H = \ker f$. Deci $f(P_0P) = 0 \in \mathbb{K}$, $\forall\ P_0P \in H$, adică $f(P_0P) = 0 \in \mathbb{K}$, $\forall\ P \in \mathcal{H}$.

Fixăm un punct origine $O \in \mathcal{A}$. Avem
$$\forall\ P \in \mathcal{H}, \quad f(OP) = f(OP_0) + f(P_0P) = f(OP_0).$$
Definim $F : \mathcal{A} \to \mathbb{K}$, prin
$$F(P) = f(OP) + F(O), \quad \forall\ P \in \mathcal{A}, \text{ unde } F(O) = -f(OP_0).$$
Aceasta este o formă afină neconstantă pe $\mathcal{A}$ şi, în plus,
$$P \in \ker F \Longleftrightarrow F(P) = 0 \Longleftrightarrow f(OP) = -F(O) = f(OP_0) \Longleftrightarrow P \in \mathcal{H}.$$
"$\Longleftarrow$" Fie $F : \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ o formă afină neconstantă şi fie $\mathcal{H} = \ker F$. Nucleul lui F este un subspaţiu afin al lui $\mathcal{A}$, având spaţiul director $\ker f$, unde $f : V \to \mathbb{K}$ este forma liniară asociată lui F. Deoarece F este neconstantă, rezultă că f este nenulă, deci $\ker f$ este un hiperplan vectorial al lui V. În consecinţă, $\mathcal{H}$ este un hiperplan afin. $\square$

Fie F_1 şi F_2 două forme afine neconstante pe $\mathcal{A}$.

- Hiperplanele afine $\ker F_1$ şi $\ker F_2$ **coincid** dacă şi numai dacă F_1 şi F_2 sunt proporţionale.

$$\ker F_1 = \ker F_2 \Longleftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0,\ F_1(P) = \lambda F_2(P), \quad \forall\, P \in \mathcal{A}.$$

Într-adevăr,

$$\ker F_1 = \ker F_2 \Rightarrow \ker f_1 = \ker f_2 \Rightarrow\ \exists \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0, f_1(OP) = \lambda f_2(OP),\ O \in \mathcal{A} \text{ fixat}, \forall P \in \mathcal{A} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_1(P) - F_1(O) = \lambda(F_2(P) - F_1(O)) \Rightarrow F_1(P) = \lambda F_2(P) + [F_1(O) - \lambda F_2(O)] \Rightarrow$$

$$F_1(P) = \lambda F_2(P) + [-f_1(OP_0) + \lambda f_2(OP_0)] = \lambda F_2(P).$$

Reciproc, dacă $F_1(P) = \lambda F_2(P)$, este evident că $\ker F_1 = \ker F_2$.

- Hiperplanele afine $\ker F_1$ şi $\ker F_2$ sunt **paralele** dacă şi numai dacă formele liniare f_1 şi f_2 induse sunt proporţionale.

Evident, deoarece spaţiile vectoriale $\ker f_1$ şi $\ker f_2$ trebuie să coincidă, deci f_1 şi f_2 să fie proporţionale.

Ecuaţia generală a unui hiperplan afin este

$$f(r) + b = 0, \quad r = OP,\ b = F(O),\ f \neq 0. \tag{2.16}$$

Dacă spaţiul afin $\mathcal{A}$ este n-dimensional şi este raportat la un reper cartezian, obţinem din nou ecuaţia carteziană generală a unui hiperplan

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b = 0, \quad \text{rang } (a_i) = 1.$$

Poziţia unei drepte faţă de un hiperplan

Fie $(\mathcal{A}, V)$ un spaţiu afin, $\mathcal{D}$ o dreaptă a lui $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{H}$ un hiperplan. Ecuaţiile lui $\mathcal{D}$ şi $\mathcal{H}$ sunt

$$\mathcal{D} : r = r_0 + tv, \quad t \in \mathbb{K},\ v \in D,$$

$$\mathcal{H} : f(r) + b = 0, \quad f \neq 0, b \in \mathbb{K}.$$

Poziţia lui $\mathcal{D}$ faţă de $\mathcal{H}$ va fi dată de soluţiile sistemului

$$\begin{cases} r = r_0 + tv \\ f(r) + b = 0 \end{cases}.$$

Eliminând pe r, obţinem

$$f(v) \cdot t + f(r_0) + b = 0.$$

- Dacă $f(v) \neq 0$, ecuaţia (în t) are o singură soluţie $t_1 = -\dfrac{f(r_0) + b}{f(v)}$. Dreapta şi hiperplanul vor avea un punct comun P_1, cu vectorul de poziţie $r_1 = r_0 + t_1 v$. **Dreapta intersectează hiperplanul**.

- Dacă $f(v) = 0$, rezultă că orice vector v din spaţiul director al lui $\mathcal{D}$ este conţinut în nucleul lui f, deci în spaţiul director al hiperplanului $\mathcal{H}$. **Dreapta este paralelă cu hiperplanul**.
  - Dacă $f(r_0) + b \neq 0$, ecuaţia nu are soluţii, deci $\mathcal{D}$ şi $\mathcal{H}$ nu au nici un punct comun. Ele sunt **strict paralele**; $\mathcal{D} \parallel \mathcal{H}$.
  - Dacă $f(r_0) + b = 0$, ecuaţia are o infinitate de soluţii. Dreapta este **conţinută** în hiperplan; $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$.

Snop de hiperplane

Fie $(\mathcal{A}, V)$ un spaţiu afin şi $(\mathcal{A}', V')$ un subspaţiu afin al său.

Snopul de hiperplane de centru subspaţiul $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ este mulţimea tuturor hiperplanelor din $\mathcal{A}$ care conţin pe $\mathcal{A}'$.

Snopul de hiperplane de direcţie subspaţiul $V' \prec V$ este mulţimea tuturor hiperplanelor din $\mathcal{A}$, al căror spaţiu director conţine pe V'.

În continuare, presupunem că $\mathcal{A}$ este un spaţiu afin de dimeniune n.

Fie $\mathcal{A}'$ un p-plan afin din $\mathcal{A}$. Acesta este dat de un sistem de $n-p$ ecuaţii liniare:

$$\mathcal{A}' : \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i + b_j = 0, \quad j = \overline{1, n-p}, \quad \text{rang } (a_{ji}) = n - p. \tag{2.17}$$

Fie $\mathcal{H}$ un hiperplan din $\mathcal{A}$, dat printr-o ecuaţie liniară:

$$\mathcal{H} : \quad \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b = 0, \quad \text{rang } (a_i) = 1. \tag{2.18}$$

Hiperplanul $\mathcal{H}$ aparţine snopului de hiperplane de centru p-planul $\mathcal{A}'$ dacă şi numai dacă mulţimea soluţiilor sistemului (2.17) este conţinută în mulţimea soluţiilor ecuaţiei (2.18). Aceasta se întâmplă dacă şi numai dacă rangul matricei extinse a sistemului determinat de ecuaţiile lui (2.17) şi (2.18) este egal cu rangul matricei (a_{ji}) a sistemului (2.17), deci cu $n-p$,

$$\text{rang} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-p1} & a_{n-p2} & \cdots & a_{n-pn} & b_{n-p} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n & b \end{pmatrix} = n - p,$$

ceea ce este echivalent cu faptul că ultima linie a matricei de mai sus este o combinaţie liniară a celorlalte linii.

În consecinţă, hiperplanul $\mathcal{H}$ aparţine snopului de hiperplane de centru p-planul $\mathcal{A}'$ dacă şi numai dacă există scalarii $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-p}$, nu toţi nuli, astfel încât

$$a_i = \sum_{j=1}^{n-p} \lambda_j a_{ji}, \ i = \overline{1, n}, \quad b = \sum_{j=1}^{n-p} \lambda_j b_j.$$

Evident, ecuaţia unui hiperplan din snopul de hiperplane de centru p-planul $\mathcal{A}'$ dat prin (2.17) este

$$\sum_{j=1}^{n-p}\lambda_j(\sum_{i=1}^{n}a_{ji}x_i+b_j)=0,\quad \lambda_j\in\mathbb{K}.$$

În particular, dacă $\mathcal{A}$ este un spaţiu afin 3-dimensional, atunci un snop de plane de centru punctul $P_0(x_{10},x_{20},x_{30})$ poartă numele de *stea de plane* de centru P_0. Un plan din acest snop va avea ecuaţia de forma

$$\lambda_1(x_1-x_{10})+\lambda_2(x_2-x_{20})+\lambda_3(x_3-x_{30})=0.$$

Tot într-un spaţiu afin 3-dimensional $\mathcal{A}$, un snop de plane de centru dreapta

$$\mathcal{D}:\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+b_1=0\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+b_2=0\end{cases},\quad \text{rang }(a_{ij})=2,$$

se numeşte *fascicul de plane* de axă $\mathcal{D}$. Un plan din acest fascicul are o ecuaţie de forma

$$\lambda_1(a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+b_1)+\lambda_2(a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+b_2)=0.$$

Fie $\mathcal{H}\subset\mathcal{A}$ un hiperplan din $(\mathcal{A},V)$, a cărui ecuaţie este

$$\mathcal{H}:\quad \sum_{i=1}^{n}a_ix_i+b=0,\quad \text{rang }(a_i)=1$$

şi fie $V'\prec V$ un subspaţiu vectorial p-dimensional al lui V,

$$V':\quad \sum_{i=1}^{n}a_{ji}x_i=0,\quad j=\overline{1,n-p},\quad \text{rang }(a_{ji})=n-p.$$

Hiperplanul $\mathcal{H}$ aparţine snopului de hiperplane paralele de direcţie V' dacă şi numai dacă există scalarii $\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-p}$, nu toţi nuli, astfel încât

$$a_i=\sum_{j=1}^{n-p}\lambda_ja_{ji},\quad i=\overline{1,n}.$$

În consecinţă, orice hiperplan paralel cu un p-plan de ecuaţii (2.17) va avea o ecuaţie de forma

$$\sum_{j=1}^{n-p}\lambda_j(\sum_{i=1}^{n}a_{ji}x_i)+\lambda=0,\quad \lambda\in\mathbb{K},\quad \text{rang }(\lambda_j)=1.$$

În particular, un hiperplan paralel cu un hiperplan de ecuaţie (2.18) va avea o ecuaţie de forma

$$\sum_{i=1}^{n}a_ix_i+\lambda=0,\quad \lambda\in\mathbb{K}.$$

Într-un spaţiu afin 3-dimensional $\mathcal{A}$, un plan din snopul de plane paralele cu o dreaptă $\mathcal{D}$, de ecuaţii

$$\mathcal{D}: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_1 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_2 = 0 \end{cases}, \quad \text{rang } (a_{ij}) = 2$$

va avea o ecuaţie de forma

$$\lambda_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + \lambda_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) + \lambda = 0, \text{rang } (\lambda_1, \lambda_2) = 1.$$

2.9 Forme biafine

Se numeşte *formă biafină* pe spaţiul afin $\mathcal{A}$ o aplicaţie $G : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{K}$, afină în fiecare argument.

$$G(\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2, Q) = \alpha_1 G(P_1, Q) + \alpha_2 G(P_2, Q), \quad \forall\, P_1, P_2, Q \in \mathcal{A}, \quad \forall\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}, \alpha_1 + \alpha_2 = 1,$$

$$G(P, \alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2) = \alpha_1 G(P, Q_1) + \alpha_2 G(P, Q_2), \quad \forall\, P, Q_1, Q_2 \in \mathcal{A}, \quad \forall\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}, \alpha_1 + \alpha_2 = 1.$$

Propoziţie 2.9.1. *Fie $O \in \mathcal{A}$ un punct origine şi $\mathcal{A}^O$ spaţiul tangent în O la $\mathcal{A}$. Aplicaţia $G : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ este o formă biafină pe $\mathcal{A}$ dacă şi numai dacă există o formă biliniară $g : \mathcal{A}^O \times \mathcal{A}^O \to \mathbb{K}$, două forme liniare $f^1 : \mathcal{A}^O \to \mathbb{K}$, $f^2 : \mathcal{A}^O \to \mathbb{K}$ şi o constantă $c \in \mathbb{K}$, astfel încât*

$$G(P, Q) = g(OP, OQ) + f^1(OP) + f^2(OQ) + c, \quad \forall\ P, Q \in \mathcal{A}.$$

Dem: "$\Longrightarrow$" (Orice formă afină $F : \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ este de forma $F(P) = f(OP) + F(O)$, unde $f : \mathcal{A}^O \to \mathbb{K}$ este aplicaţia liniară indusă de F). Folosind faptul că aplicaţia $G : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ este afină în primul argument, rezultă că există (pentru orice $Q \in \mathcal{A}$, fixat) o formă liniară $F^1 : \mathcal{A}^O \times \{Q\} \to \mathbb{K}$, astfel încât

$$G(P, Q) = F^1(OP, Q) + G(O, Q).$$

Aplicaţia F^1 este liniară în primul argument şi afină în al doilea. Folosind faptul că F^1 este afină în al doilea argument, rezultă că există o formă biliniară $g : \mathcal{A}^O \times \mathcal{A}^O \to \mathbb{K}$, astfel încât

$$F^1(OP, Q) = g(OP, OQ) + F^1(OP, O).$$

Aplicaţia G este afină în al doilea argument, deci există o formă liniară $F^2 : \{O\} \times \mathcal{A}^O \to \mathbb{K}$ (asociată lui $G(O, Q)$), astfel încât

$$G(O, Q) = F^2(O, OQ) + G(O, O).$$

În consecinţă, avem

$$G(P, Q) = g(OP, OQ) + F^1(OP, O) + F^2(O, OQ) + G(O, O),$$

unde $F^1 : \mathcal{A}^O \times \{O\} \to \mathbb{K}$ şi $F^2 : \{O\} \times \mathcal{A}^O \to \mathbb{K}$ sunt liniare. Definim

$$f^1 : \mathcal{A}^O \to \mathbb{K}, f^1(OP) = F^1(OP, O),$$

$$f^2 : \mathcal{A}^O \to \mathbb{K}, f^2(OQ) = F^2(O, OQ),$$

$$c = G(O, O).$$

Aplicaţiile f^1 şi f^2 sunt forme liniare şi, în plus,

$$G(P, Q) = g(OP, OQ) + f^1(OP) + f^2(OQ) + c.$$

"$\Longleftarrow$" Vom verifica faptul că o aplicaţie $G : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{K}$, de forma $G(P, Q) = g(OP, OQ) + f^1(OP) + f^2(OQ) + c$ este biafină. Fie $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$, cu $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ şi fie $P_1, P_2, Q \in \mathcal{A}$. Avem

$$G(\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2, Q) = g(\alpha_1 OP_1 + \alpha_2 OP_2, OQ) + f^1(\alpha_1 OP_1 + \alpha_2 OP_2) + f^2(OQ) + c =$$

$$= \alpha_1[g(OP_1, OQ)+f^1(OP_1)]+\alpha_2[g(OP_2, OQ)+f^1(OP_2)]+(\alpha_1+\alpha_2)f^2(OQ)+(\alpha_1+\alpha_2)c =$$

$$= \alpha_1 G(P_1, Q) + \alpha_2 G(P_2, Q).$$

Analog se verifică faptul că G este afină în al doilea argument. □

Oricărei forme biafine G i se asociază un sistem de patru forme (g, f^1, f^2, c), unde c este considerat ca o formă afină constantă pe $\mathcal{A}$. Evident, acest sistem depinde de alegerea punctului origine O, prin relaţiile

$$f^1(OP) = F^1(OP, O) = G(P, O) - G(O, O),$$

$$f^2(OQ) = F^2(O, OQ) = G(O, Q) - G(O, O),$$

$$g(OP, OQ) = G(P, Q) - G(P, O) - G(O, Q) + G(O, O).$$

Alegând un alt punct origine O', formei biafine G i se asociază sistemul (g', f'^1, f'^2, c'), unde

$$G(P, Q) = g'(O'P, O'Q) + f'^1(O'P) + f'^2(O'Q) + c', \quad c' = G(O', O').$$

Vom determina legătura dintre sistemul de forme asociat punctului O şi cel asociat lui O'. Avem

$$g'(O'P, O'Q) = G(P, Q) - G(P, O') - G(O', Q) + G(O', O') =$$

$$= g(OP, OQ)+f^1(OP)+f^2(OQ)+G(O, O)-[g(OP, OO')+f^1(OP)+f^2(OO')+G(O, O)]-$$

$$-[g(OO', OQ)+f^1(OO')+f^2(OQ)+G(O, O)]+g(OO', OO')+f^1(OO')+f^1(OO')+G(O, O) =$$

$$= g(OP, OQ)-g(OP, OO')-g(OO', OQ)+g(OO', OO') = g(OP, O'Q)-g(OO', O'Q) = g(O'P, O'Q),$$

deci

$$g'(O'P, O'Q) = g(O'P, O'Q),$$

de unde rezultă că g nu depinde de alegerea punctului origine O. Vom spune că g este *forma biliniară pe V asociată lui G* (unde V este spaţiul director al lui $\mathcal{A}$).

Relativ la cele două forme liniare f^1 şi f^2, avem

$$\mathbf{f'^1(O'P)} = G(P, O') - G(O', O') =$$

$$= g(OP, O') + f^1(OP) + f^2(OO') + G(O, O) - [g(OO', OO') + f^1(OO') + f^2(OO') + G(O, O)] =$$

$$= f^1(OP) - f^1(OO') + g(OP, OO') - g(OO', OO') = \mathbf{f^1(O'P)} + \mathbf{g(O'P, OO')}$$

şi, analog,

$$\mathbf{f'^2(O'Q)} = G(O', Q) - G(O', O') = \mathbf{f^2(O'Q)} + \mathbf{g(OO', O'Q)}.$$

Forma constantă c se schimbă după relaţia

$$c = G(O', O') = c + f^1(OO') + f^2(OO') + g(OO', OO').$$

Presupunem că spaţiul afin $\mathcal{A}$ este de dimensiune n şi fie $R = (O; (e_1, \ldots, e_n))$ un reper cartezian în $\mathcal{A}$. Fie $G : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ o formă biafină. Punctelor $P, Q \in \mathcal{A}$ li se asociază, respectiv, vectorii de poziţie OP şi OQ, iar $OP = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ şi $OQ = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j e_j$. Avem

$$G(P, Q) = g(OP, OQ) + f^1(OP) + f^2(OQ) + c = g(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j) + f^1(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) + f^2(\sum_{j=1}^{n} y_j e_j) + c =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j g(e_i, e_j) + \sum_{i=1}^{n} x_i f^1(e_i) + \sum_{j=1}^{n} y_j f^2(e_j) + c.$$

Notând

$$a_{ij} = g(e_i, e_j), \quad b_{1i} = f^1(e_i), \quad b_{2j} = f^2(e_j),$$

expresia formei biafine G, în raport cu reperul R, este

$$G(P, Q) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j + \sum_{i=1}^{n} b_{1i} x_i + \sum_{j=1}^{n} b_{2j} y_j + c, \quad c = G(O, O),$$

unde $P(x_1, \ldots, x_n)$ şi $Q(y_1, \ldots, y_n)$.

Expresia matriceală a formei biafine G este

$$G(P, Q) = {}^t XAY + B^1 X + B^2 Y + c,$$

unde

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), B^1 = (b_{11} \ldots b_{1n}), B^2 = (b_{21} \ldots b_{2n}).$$

Matricea asociată formei biafine G în reperul R este matricea

$$D = \begin{pmatrix} A & {}^tB^1 \\ B^2 & c \end{pmatrix},$$

iar expresia matriceală a lui G devine

$$G(P,Q) = ({}^tX 1) D \begin{pmatrix} Y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Fie $R' = (O'; (e'_1, \dots, e'_n))$ un alt reper cartezian în $\mathcal{A}$ şi $X = PX' + P_0$, $Y = PY' + P_0$, $\det P \neq 0$, formulele de schimbare de coordonate. Înlocuind în

$$G(P,Q) =^t XAY + B^1X + B^2Y + c$$

şi indentificând cu

$$G(P,Q) =^t X'A'Y' + B'^1X' + B'^2Y' + c',$$

coordonatele formei biafine G se schimbă după formulele matriceale

$$A' =^t PAP,$$

$$B'^1 = ({}^tP_0^tA + B^1)P,$$

$$B'^2 = ({}^tP_0^tA + B^2)P,$$

$$c' =^t P_0AP_0 + B^1P_0 + B^2P_0 + c.$$

Dacă scriem transformarea de coordonate sub forma

$$\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & P_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ 1 \end{pmatrix},$$

atunci matricea D, asociată formei G, se transformă după regula

$$D' = \begin{pmatrix} {}^tP & 0 \\ {}^tP_0 & 1 \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} P & P_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Deoarece

$$\det \begin{pmatrix} {}^tP & 0 \\ {}^tP_0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} P & P_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \det P \neq 0,$$

rezultă că rang $D' =$ rang D.

Se numeşte *rang al formei biafine G* rangul matricei asociate D, într-un reper oarecare.

Propoziţie. *Între rangul formei biafine G şi rangul formei biliniare asociate g avem relaţia*

$$\text{rang } g \leq \text{ rang } G \leq 2 + \text{ rang } g.$$

Dacă G este o formă biafină pe un spaţiu afin $\mathcal{A}$ de dimeniune n, în raport cu un reper R, considerăm forma biliniară g asociată lui G, matricea D asociată formei biafine G şi matricea A asociată formei biliniare g. Notăm $\Delta = \det D$ şi $\delta = \det A$, *determinantul mare*, respectiv *determinantul mic* al formei biafine G.

Efectuând o schimbare de reper, relativ la un reper R' în $\mathcal{A}$, vom avea matricele A', D' şi determinanţii Δ', δ'.

Deoarece
$$\text{rang } A' = \text{ rang } A, \quad \text{rang } D' = \text{ rang } D,$$
vom spune că **rangul lui G şi rangul formei biliniare asociate g sunt invarianţi absoluţi** ai formei G.

Ţinând cont de faptul că
$$A' = {}^t PAP, \qquad D' = \begin{pmatrix} {}^tP & 0 \\ {}^tP_0 & 1 \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} P & P_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
rezultă că
$$\Delta' = (\det P)^2\Delta, \qquad \delta' = (\det P)^2\delta.$$
Vom spune că Δ şi δ sunt **invarianţi relativi de pondere** 2 ai formei G. Dacă $\delta \neq 0$, atunci $\dfrac{\Delta'}{\delta'} = \dfrac{\Delta}{\delta}$, deci câtul celor doi determinanţi este un invariant absolut al formei G. De asemenea, sign (Δ) şi sign (δ) sunt invarianţi absoluţi ai formei G.

Am văzut că, la o schimbare a coordonatelor $X = PX' + P_0$, matricea A, asociată formei biliniare g induse de G, se schimbă după relaţia
$$A' = {}^t PAP,$$
iar termenul liber
$$c' = {}^t P_0AP_0 + B^1P_0 + B^2P_0 + c.$$
Rezultă că toţi coeficienţii formei g sunt invarianţi faţă de subgrupul translaţiilor (dacă schimbarea de variabile este o translaţie, atunci P este matricea unitate, deci $A' = A$), iar termenul liber c este invariant faţă de grupul centro-afinităţilor de centru O (o centro-afinitate are proprietatea că $O' = O$, deci $P_0 = 0$ şi $c' = c$).

2.10 Forme pătratice afine. Aducerea la forma canonică

O formă biafină $G : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ se numeşte *simetrică* dacă
$$G(P,Q) = G(Q,P), \quad \forall\ P,Q \in \mathcal{A}.$$
În consecinţă, G este simetrică dacă şi numai dacă g este simetrică şi $f^1 = f^2$.

Dacă $O \in \mathcal{A}$ este un punct origine ales arbitrar, atunci o formă biafină simetrică este de forma
$$G(P,Q) = g(OP, OQ) + f(OP + OQ) + G(O,O),$$

unde $g : \mathcal{A}^O \times \mathcal{A}^O \to \mathbb{K}$ este o formă biliniară **simetrică**, iar $f : \mathcal{A}^O \to \mathbb{K}$ este o formă liniară. g şi f se numesc *formele induse* de G, relativ la originea O.

Dacă $\mathcal{A}$ este un spaţiu afin de dimensiune n şi $R = (O; (e_1, \ldots, e_n))$ este un reper cartezian în $\mathcal{A}$, atunci

$$G(P, Q) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j + \sum_{i=1}^{n} b_i (x_i + y_i) + c,$$

unde $OP = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$, $OQ = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j e_j$, $a_{ij} = g(e_i, e_j)$, $a_{ji} = a_{ij}$, $b_i = f^1(e_i) = f^2(e_i)$ şi $c = G(O, O)$. Matriceal, expresia lui G se scrie

$$G(P, Q) =^t XAY + B(X + Y) + c, \quad {}^tA = A.$$

Matricea D ataşată formei biafine simetrice G este

$$D = \begin{pmatrix} A & {}^tB \\ B & c \end{pmatrix},$$

deci o formă afină G este simetrică dacă şi numai dacă matricea sa este simetrică: ${}^tD = D$.

Dacă $G : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ este o formă biafină simetrică, notăm cu H restricţia sa la diagonala lui $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$,

$$H : \mathcal{A} \to \mathbb{K}, \quad H(P) = G(P, P).$$

Funcţia H se numeşte *formă pătratică afină* pe spaţiul afin $\mathcal{A}$, asociată formei biafine simetrice G.

Deoarece

$$H(\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q) = \frac{1}{4}H(P) + \frac{1}{2}G(P, Q) + \frac{1}{4}H(Q), \quad \forall\ P, Q \in \mathcal{A},$$

rezultă că

$$G(P, Q) = 2H(\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q) - \frac{1}{2}[H(P) + H(Q)], \quad \forall\ P, Q \in \mathcal{A},$$

deci funcţia G este perfect determinată de H.

Forma biafină simetrică G, dedusă din forma pătratică H se numeşte *forma polară* (sau *forma dedublată*) a lui H.

Dacă $O \in \mathcal{A}$ este un punct origine, atunci

$$H(P) = h(OP) + 2f(OP) + c,$$

unde $h : \mathcal{A}^O \to \mathbb{K}$ este forma pătratică asociată formei biliniare simetrice g induse de G, iar $c = H(O)$.

Dacă $\mathcal{A}$ este un spaţiu afin n-dimensional, atunci, în raport cu un reper cartezian $R = (O; (e_1, \dots, e_n))$, avem

$$H(P) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + c,$$

unde $OP = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$, $a_{ij} = g(e_i, e_j)$, $a_{ji} = a_{ij}$, $b_i = f(e_i)$ şi $c = H(O)$.
Matriceal, avem

$$H(P) =^t XAX + 2BX + c, \quad {}^tA = A.$$

Fie $G : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ o formă biafină simetrică, $H : \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ forma pătratică afină asociată lui G, $g : \mathcal{A}^O \times \mathcal{A}^O \to \mathbb{K}$ forma biliniară asociată lui g, iar $h : \mathcal{A}^O \to \mathbb{K}$ forma pătratică (liniară) asociată lui H. Fie $D = \begin{pmatrix} A & {}^tB \\ B & c \end{pmatrix}$ matricea asociată lui G. Avem, evident

$$\rho = \text{ rang } H = \text{ rang } G = \text{ rang } D,$$

$$r = \text{ rang } h = \text{ rang } g = \text{ rang } A.$$

Numerele $\rho = \text{rang } H$ şi $r = \text{rang } h$ sunt *invarianţii formei pătratice* H şi verifică

$$r \le \rho \le r + 2.$$

Teoremă 2.11. *Fie H o formă pătratică afină pe un spaţiu afin n-dimensional $\mathcal{A}$ şi h forma pătratică indusă. Există întotdeauna o schimbare de reper în $\mathcal{A}$, astfel încât expresia lui H să aibă una din formele:*

a) $H(P) = \lambda_1 u_1^2 + \ldots + \lambda_r u_r^2$, *dacă* $\rho = r$,

b) $H(P) = \lambda_1 u_1^2 + \ldots + \lambda_r u_r^2 + \mu$, *dacă* $\rho = r + 1$,

c) $H(P) = \lambda_1 u_1^2 + \ldots + \lambda_r u_r^2 - 2u_{r+1}$, *dacă* $\rho = r + 2$,

unde $r = \text{rang } h$, *iar* $\rho = \text{rang } H$.

Oricare din expresiile de mai sus ale lui H se numeşte ***forma canonică*** *a lui H, iar reperul faţă de care H are forma canonică se numeşte* ***reper canonic***.

Dem: Fie $O \in \mathcal{A}$ un punct origine. Forma pătratică afină H se scrie

$$H(P) = h(OP) + 2f(OP) + c,$$

sau, în raport cu un reper cartezian oarecare $R = (O; (e_1, \dots, e_n))$ în $\mathcal{A}$,

$$H(P) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + c, \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

Forma pătratică asociată h este

$$h(OP) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j, \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

Fie $A = (a_{ij})$ matricea lui h şi $D = \begin{pmatrix} A & {}^tB \\ B & c \end{pmatrix}$ matricea lui H.

Dacă rang $h = r$, atunci există o schimbare de coordonate (deci o schimbare de baze în spaţiul director $\mathcal{A}^O$ al lui $\mathcal{A}$) de forma $x_i = \sum\limits_{j=1}^{n} p_{ji}y_j$, $j = \overline{1,n}$, cu $\det P \neq 0$, astfel încât forma pătratică h se reduce la expresia canonică

$$h(OP) = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_r y_r^2, \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_r \neq 0.$$

Faţă de acest reper, H va avea forma

$$H(P) = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_r y_r^2 + 2\sum_{i=1}^{n} b'_i y_i + c.$$

Efectuăm translaţia

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + \dfrac{b'_1}{\lambda_1} \\ \quad\vdots \\ z_r = y_r + \dfrac{b'_r}{\lambda_r} \\ z_{r+1} = y_{r+1} \\ \quad\vdots \\ z_n = y_n \end{cases}.$$

Expresia formei H devine

$$H(P) = \lambda_1 z_1^2 + \ldots + \lambda_r z_r^2 + 2b'_{r+1}z_{r+1} + \ldots + 2b'_n z_n + c'.$$

Matricele ataşate lui h şi H sunt, respectiv

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{I_r} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \mathbf{I_r} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & {}^t\mathbf{B}' \\ \mathbf{O} & \mathbf{B}' & c' \end{pmatrix}.,$$

unde $B' = (b'_{r+1} \ldots b'_n)$.

a) Dacă rang $H = r$, atunci rang $D = r$, deci $b'_{r+1} = \ldots = b'_n = 0$ şi $c' = 0$. Expresia lui H este

$$H(P) = \lambda_1 z_1^2 + \ldots + \lambda_r z_r^2.$$

b) Dacă rang $H = r + 1$, atunci $b'_{r+1} = \ldots = b'_n = 0$ şi $c' \neq 0$.Notând $c' = \mu$, obţinem

$$H(P) = \lambda_1 z_1^2 + \ldots + \lambda_r z_r^2 + \mu.$$

c) Dacă rang $H = r+2$, atunci cel puţin unul din coeficienţii b'_i este nenul. Presupunem că $b'_{r+1} \neq 0$. Efectuând schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} z_1 = u_1 \\ \vdots \\ z_r = u_r \\ z_{r+1} = -\dfrac{1}{b'_{r+1}}(u_{r+1} + b'_{r+2}u_{r+2} + \ldots + b'_n u_n + \dfrac{c'}{2}) \\ z_{r+2} = u_{r+2} \\ \vdots \\ z_n = u_n \end{cases},$$

expresia lui H devine

$$H(P) = \lambda_1 u_1^2 + \ldots + \lambda_r u_r^2 - 2u_{r+1}. \quad \square$$

Presupunem că spaţiul afin $\mathcal{A}$ este **real** şi că H are valori reale. Printre cei r termeni pătratici din expresia canonică a lui H, există p termeni ai căror coeficienţi sunt pozitivi şi $r-p$ termeni cu ceoficientul negativ. Eventual renumerotând, putem presupune că $\lambda_1, \ldots, \lambda_p > 0$ şi că $\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_r < 0$. Efectuând schimbarea de variabilă

$$\begin{cases} v_1 = \sqrt{\lambda_1}u_1 \\ \vdots \\ v_p = \sqrt{\lambda_p}u_p \\ v_{p+1} = \sqrt{|\lambda_{p+1}|}u_{p+1} \\ \vdots \\ v_r = \sqrt{|\lambda_n|}u_r \\ v_{r+1} = u_{r+1} \\ \vdots \\ v_n = u_n \end{cases},$$

obţinem *formele normale* ale expresiei lui H:

a) $H(P) = v_1^2 + \ldots + v_p^2 - v_{p+1}^1 - \ldots - v_r^2$, dacă $\rho = r$,

b) $H(P) = v_1^2 + \ldots + v_p^2 - v_{p+1}^1 - \ldots - v_r^2 + \mu$, dacă $\rho = r+1$,

c) $H(P) = v_1^2 + \ldots + v_p^2 - v_{p+1}^1 - \ldots - v_r^2 - 2v_{r+1}$, dacă $\rho = r+2$.

Am văzut că numărul p este un invariant al lui h. Rezultă că invarianţii absoluţi ai unei forme pătratice reale sunt ρ, r şi p.

2.12 Centre de simetrie

Fie $\mathcal{A}$ un spaţiu afin şi $H : \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ o formă pătratică afină. Un punct $P_0 \in \mathcal{A}$ se numeşte *centru de simetrie* pentru H (sau *centru*) dacă H ia valori egale în orice pereche de puncte ale lui $\mathcal{A}$, simetrice faţă de P_0.

Dacă $P \in \mathcal{A}$, atunci simetricul lui P faţă de P_0 este $2P_0 - P$, deci P_0 este centru pentru H dacă şi numai dacă

$$H(P) = H(2P_0 - P), \quad \forall\ P \in \mathcal{A}.$$

Avem

$$H(2P_0 - P) = G(2P_0 - P, 2P_0 - P) = 4H(P_0) - 4G(P_0, P) + H(P),$$

deci P_0 este centru pentru H dacă şi numai dacă

$$H(P_0) = G(P_0, P), \quad \forall\ P \in \mathcal{A}. \tag{2.19}$$

Propoziţie. *O formă pătratică afină H este constantă pe mulţimea centrelor sale.*

Dem: Fie P_0, Q_0 două centre ale lui H. Avem

$$H(P_0) = G(P_0, P) \quad \forall\ P \in \mathcal{A}, \quad H(Q_0) = G(Q_0, Q), \quad \forall\ Q \in \mathcal{A}.$$

În consecinţă,

$$H(P_0) = G(P_0, P) = G(P_0, Q_0) = G(Q_0, P_0) = H(Q_0). \quad \square$$

Propoziţie 2.13. *Mulţimea $\mathcal{C}$ a centrelor unei forme pătratice afine H este un subspaţiu afin al lui $\mathcal{A}$. Dacă $\mathcal{C} \neq \emptyset$, atunci spaţiul său director coincide cu spaţiul nul al formei biliniare asociate g.*

Dem: Dacă $\mathcal{C} = \emptyset$, atunci $\mathcal{C}$ este un subspaţiu afin al lui $\mathcal{A}$. Presupunem că $\mathcal{C} \neq \emptyset$.
Fie $O \in \mathcal{A}$ un punct origine, fixat.

$$P_0 \in \mathcal{C} \iff H(P_0) = G(P_0, P), \quad \forall\ P \in \mathcal{A} \iff$$

$$\iff h(OP_0) + 2f(OP_0) + c = g(OP_0, OP) + f(OP_0 + OP) + c, \quad \forall\ P \in \mathcal{A} \iff$$
$$\iff h(OP_0) + f(OP_0) = g(OP_0, OP) + f(OP), \quad \forall\ P \in \mathcal{A} \iff$$
$$\iff g(OP_0, OP_0) + f(OP_0) = g(OP_0, OP) + f(OP), \quad \forall\ P \in \mathcal{A}.$$

Notând $v = OP_0 - OP \in V$ (unde V este spaţiul director al lui $\mathcal{A}$), rezultă că

$$P_0 \in \mathcal{C} \iff g(OP_0, v) + f(v) = 0, \quad \forall\ v \in V. \tag{2.20}$$

Fie $v \in V$, arbitrar. Definim aplicaţia

$$F_v : \mathcal{A} \to \mathbb{K}, \quad F_v(Q) = g(OQ, v) + f(v).$$

- F_v este o formă afină.

Într-adevăr, este uşor de verificat că

$$F_v(\alpha Q + \beta M) = \alpha F_v(Q) + \beta F_v(M), \quad \forall\, Q, M \in \mathcal{A},\ \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \alpha + \beta = 1.$$

- $P_0 \in \mathcal{C} \Longleftrightarrow P_0 \in \ker F_v,\ \forall\, v \in V$.

Avem

$$P_0 \in \mathcal{C} \Longleftrightarrow F_v(P_0) = g(OP_0, v) + f(v) \overset{(2.20)}{=} 0.$$

Rezultă că

$$\mathcal{C} = \bigcap_{v \in V} \ker F_v.$$

Deoarece F_v este o formă afină, nucleul său $\ker F_v$ este un hiperplan afin, deci mulţimea $\mathcal{C}$ a centrelor formei pătratice afine H este o intersecţie de hiperplane afine, deci un subspaţiu afin al lui $\mathcal{A}$.

Fie W spaţiul director al lui $\mathcal{C}$. Dacă $P_0 \in \mathcal{C}$, atunci W este

$$W = \{P_0P_0', P_0' \in \mathcal{C}\}.$$

Vom arăta că $W = N(g)$, unde

$$N(g) = \{P_0P_0' \in W, g(P_0P_0', Q_0Q_0') = 0, \forall\, Q_0Q_0' \in W\}.$$

Incluziunea $N(g) \subseteq W$ fiind evidentă, fie $P_0P_0' \in W$. Avem

$$g(P_0P_0', Q_0Q_0') = g(OP_0' - OP_0, Q_0Q_0') = g(OP_0', Q_0Q_0') - g(OP_0, Q_0Q_0') \overset{(2.20)}{=} -f(Q_0Q_0') + f(Q_0Q_0') = 0,$$

deci $P_0P_0' \in N(g)$ şi $W = N(g)$. $\square$

Presupunem că spaţiul afin $\mathcal{A}$ este n-dimensional şi fie $R = (O; (e_1, \ldots, e_n))$ un reper cartezian în $\mathcal{A}$. În raport cu acest reper, forma pătratică afină H are ecuaţia

$$H(P) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{j=1}^{n} b_j x_j + c, \quad \forall\, P(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{A}.$$

Forma biliniară asociată este

$$g : \mathcal{A}^O \times \mathcal{A}^O \to \mathbb{K}, \quad g(OP, OQ) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j,$$

iar forma liniară asociată este

$$f : \mathcal{A}^O \to \mathbb{K}, \quad f(OQ) = \sum_{j=1}^{n} b_j x_j.$$

Conform (2.20),

$$P \in \mathcal{C} \Longleftrightarrow g(OP, v) + f(v) = 0, \quad \forall\, v \in V.$$

Dacă $OP = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$, iar $v = \sum\limits_{j=1}^{n} v_j e_j$, atunci

$$P(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{C} \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i v_j + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j = 0, \quad \forall\, v_j \in \mathbb{K} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i + b_j) v_j = 0, \quad \forall\, v_j \in \mathbb{K}.$$

În consecinţă, coordonatele $(x_1, \ldots, x_n)$ ale unui centru sunt soluţii ale sistemului de ecuaţii

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i + b_j = 0, \quad j = \overline{1, n}. \tag{2.21}$$

Se observă că $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} x_i + b_j = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial H}{\partial x_j}$, deci mulţimea centrelor este dată de soluţiile sistemului de ecuaţii

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial x_1} = 0 \\ \quad\vdots \\ \dfrac{\partial H}{\partial x_n} = 0 \end{cases}.$$

De fapt, $P \in \mathcal{C} \Longleftrightarrow P \in C(H)$ (P este un punct critic al lui H).

Exemplu: Dacă $H(P) = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) - 4$, atunci $\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}$.

- O formă pătratică afină H are centre de simetrie dacă şi numai dacă sistemul (2.21) este compatibil, ceea ce este echivalent cu faptul că rang A = rang $(A, {}^t B)$. În această ipoteză, dim $\mathcal{C} = n-$ rang A.

- Forma pătratică afină H are **centru unic** dacă şi numai dacă sistemul (2.21) are soluţie unică, adică rang $A = n$, sau $\delta \neq 0$. Deci H are centru unic dacă şi numai dacă forma pătratică asociată este nedegenerată.

  În acest caz, putem alege originea reperului în centrul său unic P_0. Vom avea $B = 0$ şi $c = H(P_0)$. Expresia lui H va fi $H(P) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_i + c$. Matricele ataşate sunt $A = (a_{ij})$ şi $D = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & H(P_0) \end{pmatrix}$, deci $\Delta = \delta H(P_0)$. În consecinţă, când originea reperului este aleasă în centrul unic al formei, expresia lui H este

$$H(P) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_i + \frac{\Delta}{\delta}.$$

Formele care admit centre au expresia canonică de tipul a) sau b). Cele care nu admit centre au expresia canonică de tipul c).

Observaţie: Există cazuri în care $\mathcal{C} = \emptyset$, deşi $N(g) \neq \{0_V\}$. De exemplu, dacă $H(P) = z^2 - 2(x+y)$, atunci $\mathcal{C} = \emptyset$, iar $N(g) =< (1,0,0), (0,1,0) >$.

Dacă P_0 este un centru pentru H şi $N(g) \neq \{0_V\}$, atunci orice dreaptă afină $\mathcal{D}$, determinată de P_0 şi de spaţiu director $D \prec N(g)$, este o dreaptă de centre pentru H. O dreaptă vectorială $D \prec N(g)$ se numeşte *direcţie centrală* a formei H.

2.14 Varietăţi pătratice

Nucleul unei forme pătratice afine $H : \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ este mulţimea

$$\ker H = H^{-1}(0) = \{P \in \mathcal{A}, H(P) = 0\}.$$

- O submulţime $\mathcal{H} \subset \mathcal{A}$ se numeşte *varietate pătratică* a lui $\mathcal{A}$ dacă există o formă pătratică afină $H : \mathcal{A} \to \mathbb{K}$, astfel încât $\mathcal{H} = \ker H$.
- O varietate pătratică dintr-un plan ($\dim \mathcal{A} = 2$) se numeşte *conică* (sau *curbă plană de gradul* 2).
- O varietate pătratică dintr-un spaţiu afin 3-dimensional ($\dim \mathcal{A} = 3$) se numeşte *cuadrică* (sau *suprafaţă de gradul* 2).
- O varietate pătratică dintr-un spaţiu afin $\mathcal{A}$, cu $\dim \mathcal{A} > 3$, se numeşte *hipercuadrică* (sau *hipersuprafaţă pătratică*).

Când nu este pericol de confuzie, vom spune hipercuadrică în spaţiul afin $\mathcal{A}$, în loc de varietate pătratică. *Ecuaţia unei hipercuadrice* este

$$H(P) = 0.$$

Fie $O \in \mathcal{A}$ un punct origine şi $r = OP$ vectorul de poziţie al punctului $P \in \mathcal{A}$. Ecuaţia hipercuadricei se scrie sub forma

$$h(r) + 2f(r) + c = 0,$$

unde $h : \mathcal{A}^O \to \mathbb{K}$ este forma pătratică asociată lui H, $f : \mathcal{A}^O \to \mathbb{K}$ este forma liniară asociată lui H, iar $c = H(O)$.

Dacă spaţiul afin $\mathcal{A}$ este n-dimensional, raportat la un reper cartezian $R = \{O; (e_1, \ldots, e_n)\}$, un punct $P \in \mathcal{H}$, de coordonate $P(x_1, \ldots, x_n)$, verifică

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + c = 0, \quad a_{ij} = a_{ji},$$

sau, matriceal,

$$^tXAX + 2BX + c = 0, \quad ^tA = A,$$

sau

$$(^tX1)\begin{pmatrix} A & ^tB \\ B & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad ^tA = A.$$

- Un punct $P_0 \in \mathcal{A}$ este *centru pentru hipercuadica* $\mathcal{H}$ dacă este centru pentru forma H.
- Un punct $P_0 \in \mathcal{H}$ este *punct singular* dacă este centru pentru hipercuadrica $\mathcal{H}$.
- Un punct $P_0 \in \mathcal{H}$ care nu este singular se numeşte *ordinar*.

Folosind (2.20), rezultă că $P_0 \in \mathcal{A}$ este **centru** pentru $\mathcal{H}$ dacă $g(OP_0, v) + f(v) = 0$, $\forall$ $v \in V = \mathcal{A}^O$, adică forma liniară $g_{OP_0} + f : \mathcal{A}^O \to \mathbb{K}$ este forma nulă.

În cazul în care $\mathcal{A}$ este n-dimensional, **centrele** unei hipercuadrice $\mathcal{H}$ sunt soluţiile sistemului de ecuaţii

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i + b_j = 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

O hipercuadrică $\mathcal{H}$ admite centre dacă acest sistem este compatibil, deci rang $A =$ rang (A^tB) ($\Longleftrightarrow \rho = r$ sau $\rho = r + 1$, unde $r =$ rang A, iar $\rho =$ rang $D = \begin{pmatrix} A & ^tB \\ B & c \end{pmatrix}$).

Din (2.19), rezultă că $P_0 \in \mathcal{H}$ este un **punct singular** al hipercuadricei $\mathcal{H}$ dacă $G(P_0, P) = H(P_0) = 0$, $\forall$ $P \in \mathcal{A}$, deci forma afină $G_{P_0} : \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ este forma nulă.

Dacă $\mathcal{A}$ este un spaţiu afin n-dimensional, atunci **punctele singulare** ale hipercuadricei $\mathcal{H}$ sunt soluţiile sistemului de ecuaţii

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}x_i + b_j = 0, \quad j = \overline{1, n} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} b_i x_i + c = 0 \end{cases}.$$

O hipercuadrică admite puncte singulare dacă sistemul de mai sus este compatibil, deci rang $A =$ rang $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} =$ rang D ($\Longleftrightarrow \rho = r$).

Propoziţie. *Fie $\mathcal{A}$ un spaţiu afin n-dimensional* ***real****. Ecuaţia unei hipercuadrice $\mathcal{H} \subset \mathcal{A}$ poate fi adusă, printr-o schimbare de reper şi, eventual, înmulţirea cu un scalar nenul, la una din următoarele forme normale:*

a) $x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_r^2 = 0$, *dacă* $\rho = r$;

b) $x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_r^2 = 1$, *dacă* $\rho = r + 1$;

c) $x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_r^2 = 2x_{r+1}$, *dacă* $\rho = r + 2$, *unde* $\rho =$ rang H, *iar* $r =$ rang h.

Hipercuadricele pentru care rang $H = r + 1$ ($\Delta \neq 0$) se numesc *hipercuadrice propriu-zise*, cele pentru care rang $H =$ rang $h \leq n$ ($\Delta = 0$) se numesc *hipercuadrice singulare*, iar hipercuadricele singulare pentru care rang $H \leq 2$ se numesc *hipercuadrice degenerate*.

2.14.1 Clasificarea afină a conicelor

O conică este o varietate pătratică dintr-un plan afin. Dacă planul este raportat la un reper cartezian, atunci conica $\mathcal{H}$ este dată de

$$\mathcal{H} = \{P(x, y), H(P) = 0\},$$

unde

$$H(P) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c, \quad a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0. \tag{2.22}$$

Matricele asociate formei conicei sunt

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{pmatrix}.$$

Invarianţii conicei sunt

$$\rho = \text{ rang } D, \quad r = \text{ rang } A, \quad p = \text{ indicele conicei.}$$

Asociem determinanţii

$$\Delta = \det D, \qquad \delta = \det A.$$

Dacă $\Delta \neq 0$, avem o *conică propriu-zisă* (sau *nedegenerată*), iar dacă $\Delta = 0$, conica este *singulară* sau *degenerată*.

Centrele unei conice sunt soluţiile sistemului de ecuaţii

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + b_1 = 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + b_2 = 0 \end{cases}.$$

- Dacă $\delta \neq 0$ ($r = 2$ şi $\rho = 2$ sau $\rho = 3$), atunci rang $A =$ rang $(A\ {}^tB) = 2$ şi conica are un centru unic.
- Dacă $\delta = 0$ ($r = 1$), putem avea mai multe situaţii:
  - Dacă $\rho = 1$, atunci rang $A =$ rang $(A\ {}^tB) = 1$ şi conica are o dreaptă de centre.
  - Dacă $\rho = 2$, atunci rangul lui $(A\ {}^tB)$ poate fi 1 sau 2. Dacă rang $(A\ {}^tB) = 1$, atunci conica are o dreaptă de centre. Dacă rang $(A\ {}^tB) = 2$, atunci conica nu are centru.

– Dacă $\rho = 3$, atunci rang $(A\ {}^tB) = 2$ şi conica nu are centru.

<table>
<tr><th>ρ</th><th>r</th><th>p</th><th>Ecuaţia normală</th><th colspan="2">Denumirea conicei</th><th>Natura conicei</th></tr>
<tr><td rowspan="4">3</td><td rowspan="3">2</td><td>2</td><td>$x^2 + y^2 = 1$</td><td colspan="2">elipsă ($\delta > 0$)</td><td rowspan="4">$\Delta \neq 0$ conice propriu-zise</td></tr>
<tr><td>1</td><td>$x^2 - y^2 = 1$</td><td colspan="2">hiperbolă ($\delta < 0$)</td></tr>
<tr><td>0</td><td>$-x^2 - y^2 = 1$</td><td colspan="2">elipsă vidă</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>$x^2 = 2y$</td><td colspan="2">parabolă ($\delta = 0$)</td></tr>
<tr><td rowspan="4">2</td><td rowspan="2">2</td><td>1</td><td>$x^2 + y^2 = 0$</td><td colspan="2">un punct dublu ($\delta > 0$)</td><td rowspan="5">$\Delta = 0$ conice singulare</td></tr>
<tr><td>1</td><td>$x^2 - y^2 = 0$</td><td colspan="2">pereche de drepte secante ($\delta < 0$)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td>1</td><td>$x^2 = 1$</td><td>pereche de drepte paralele ($\delta = 0$)</td><td rowspan="3">conice degenerate</td></tr>
<tr><td>0</td><td>$-x^2 = 1$</td><td>pereche vidă de drepte ($\delta = 0$)</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>$x^2 = 0$</td><td>dreaptă dublă</td></tr>
</table>

O conică propriu-zisă poate fi elipsă, hiperbolă sau parabolă. O conică degenerată constă din o pereche de drepte (paralele sau secante), o dreaptă dublă sau un punct dublu.

Conicele propriu-zise cu centru unic sunt elipsa şi hiperbola. Conicele degenerate cu centru unic sunt perechea de drepte secante şi punctul dublu.

Singura conică fără centru este parabola, iar conicele degenerate în două drepte paralele sau confundate admit o dreaptă de centre.

(desene-reprezentarea grafică a conicelor faţă de un reper normal)

2.14.2 Clasificarea afină a cuadricelor

O cuadrică este o varietate pătratică dintr-un spaţiu afin 3-dimensional. Raportând spaţiul la un reper cartezian, cuadrica $\mathcal{H}$ este dată de

$$\mathcal{H} = \{P(x, y, z), H(P) = 0\},$$

unde

$$H(P) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yx + +2b_1x + 2b_2y + +2b_2z + c, \quad (2.23)$$

cu $a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2 \neq 0$. Asociem matricele

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & c \end{pmatrix}.$$

Invarianţii cuadricei sunt

$$\rho = \text{ rang } D, \quad r = \text{ rang } A, \quad p = \text{ indicele cuadricei.}$$

Considerăm determinanţii

$$\Delta = \det D, \qquad \delta = \det A.$$

Dacă $\Delta \neq 0$, avem o *cuadrică propriu-zisă* (sau *nedegenerată*), iar dacă $\Delta = 0$, cuadrica este *singulară*; dacă, în plus, rang $H \leq 2$, cuadrica este *degenerată*.

Centrele unei cuadrice sunt soluţiile sistemului de ecuaţii

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + b_1 = 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z + b_2 = 0 \\ a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + b_3 = 0 \end{cases}.$$

- Dacă $\delta \neq 0$ $(r = 3)$ atunci cuadrica are un centru unic.
- Dacă $\delta = 0$ $(r < 3)$, putem avea mai multe situaţii:
  - Dacă $\rho \geq 3$, atunci cuadrica nu are centru.
  - Dacă $r = 2$ şi $\rho = 3$ sau $\rho = 2$, atunci cuadrica are o dreaptă de centre.
  - Dacă $r = 1$ şi $\rho = 2$ sau $\rho = 1$, cuadrica are un plan de centre.

Un punct $P(x, y, z)$ este punct singular pentru $\mathcal{H}$ dacă este centru şi, în plus, $P \in \mathcal{H}$, adică $H(P) = 0$. În consecinţă, $P(x, y, z)$ este punct singular dacă este soluţie a sistemului de ecuaţii

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + b_1 = 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z + b_2 = 0 \\ a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + b_3 = 0 \\ b_1x + b_2y + b_3z + c = 0 \end{cases}.$$

ρ	r	p	Ecuaţia normală	Denumirea cuadricei		Natura cuadricei
4	3 ($\delta \neq 0$)	3	$x^2 + y^2 + z^2 = 1$	elipsoid		cuadrice propriu-zise $\Delta \neq 0$
		2	$x^2 + y^2 - z^2 = 1$	hiperboloid cu o pânză		
		1	$x^2 - y^2 - z^2 = 1$	hiperboloid cu două pânze		
		0	$-x^2 - y^2 - z^2 = 1$	elipsoid vid		
	2 ($\delta = 0$)	2	$x^2 + y^2 = 2z$	paraboloid eliptic		
		1	$x^2 - y^2 = 2z$	paraboloid hiperbolic		
3	3 ($\delta \neq 0$)	3	$x^2 + y^2 + z^2 = 0$	punct dublu		cuadrice singulare $\Delta = 0$
		2	$x^2 + y^2 - z^2 = 00$	con		
	2 ($\delta = 0$)	2	$x^2 + y^2 = 1$	cilindru eliptic		
		1	$x^2 - y^2 = 1$	cilindru hiperbolic		
		0	$-x^2 - y^2 = 1$	cilindru vid		
	1 ($\delta = 0$)	1	$x^2 = 2y$	cilindru parabolic		
2	2	2	$x^2 + y^2 = 0$	dreaptă dublă	cuadrice degenerate	
	2 ($\delta = 0$)	1	$x^2 - y^2 = 0$	pereche de plane secante		
	1	1	$x^2 = 1$	pereche de plane paralele		
	($\delta = 0$)	0	$-x^2 = 1$	pereche vidă de plane		
1	1 ($\delta = 0$)	1	$x^2 = 0$	plan dublu		

O cuadrică propriu-zisă poate fi elipsoid, hiperboloid sau paraboloid. O cuadrică singulară nedegenerată poate fi con sau cilindru. O cuadrică singulară poate degenera în o pereche de plane, un plan dublu, o dreaptă dublă sau un punct dublu.

O cuadrică cu centru unic pate fi un elipsoid, un hiperboloid, un con sau un punct dublu. O cuadrică fără centru este un paraboloid sau un cilindrul parabolic. O cuadrică cu o dreaptă de centre este un cilindru eliptic, un cilindru hiperbolic, o pereche de plane secante sau o dreaptă dublă, iar o cuadrică cu un plan de centre este o pereche de plane paralele sau un plan dublu.

Numai cuadricele singulare sau degenerate pot avea puncte singulare. Acestea sunt: un con, o pereche de plane secante, un plan dublu, o dreaptă dublă sau un punct dublu.

(desene-reprezentarea grafică a cuadricelor faţă de un reper normal)

Bibliography

[1] Popescu, I.P. *Geometrie afină şi euclidiană*, Editura Facla, Timişoara, 1984

[2] Vasiu, A., *Geometrie afină şi metrică*, Litografia UBB, Cluj-Napoca, 1993

[3] Galbură, Gh., Rado, F., *Geometrie*, EDP, Bucureşti, 1979

[4] Postelnicu, T.V., Stoka, M.I., Vrânceanu. G.G., *Culegere de probleme de geometrie analitică şi diferenţială*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1970

[5] Rado, F., Groze, V., Orban B., Vasiu, A., *Culegere de probleme de geometrie*, Litografia UBB, Cluj-Napoca, 1979

[6] Craioveanu, M., Albu, I.D., *Geometrie afină şi euclidiană. Exerciţii*, Ed. Facla, Timişoara, 1982

[7] Delode, C., *Géométrie affine et euclidienne*, Dunod, Paris, 2000

[8] Miron, R., *Geometrie euclidiană...*

[9] Albu, A.C., Obădeanu, V., Popoescu, I.P., Rado, F., Smaranda, D., *Geometrie pentru perfecţionarea profesorilor*, EDP, Bucureşti, 1983

[10] Murgulescu, E., ...