

## MODELE MATEMATICE CARE CARACTERIZEAZA TORSIUNEA UNEI ARIPI PENTRU MONOPOSTRUILE DE FORMULA 1

Daniela DĂRĂBUT

**Abstract.** This paper describes mathematically the torsional divergence of an unswept flexible Formula 1 car front and back wing. The mathematical "tool" used to model this behaviour is an inear and non-homogeneous ordinary differential equation of order two. The mathematical model is based on a simplified unswept flexible airplane wing.

**Keywords** Front wing torsional divergence, Rear wing torsional divergence, Ordinary differential equations, Mathematical modelling

### 1. INTRODUCERE

Aeroelasticitatea reprezintă interacțiunea dintre inerție, aerodinamica și forțele elastice. Interacțiunea dintre cel puțin două forțe menționate anterior produce diverse fenomene aeroelastice precum divergența, flutter-ul, control reversal ,buffeting și stabilitatea dinamică. În această lucrare voi descrie divergența torsională a unei aripi a unui monopost de formula 1.

Divergența torsională este cel mai întâlnit tip de divergență care apare atunci când unghiul local al aripii crește până în punctul în care cauzează cedarea structurală. Acest fenomen se petrece când forțele de ridicare pe o aripă induc un moment de torsiune care răsucesce aripa în jurul axei sale elastice. Această răsucire are ca rezultat creșterea unghiului local de atac al aripii, care la rândul său, produce o nouă răsucire.

Obiectul studiului fiind aripa unui monopost, nu vom discuta despre o forță de portanță ci vom aduce în prim-plan downforce-ul (forța de apăsare). Downforce-ul este o forță de ridicare (asemănătoare portanței), dar aceasta este aplicată de sus în jos și apare datorită caracteristicilor aerodinamice ale unui vehicol/ componentă a unui vehicol. Scopul acestei forțe de apăsare este de a permite mașinii să se deplaseze mai repede prin creșterea forșei verticale asupra pneurilor, creând astfel mai multă aderență.

Aripa frontală a unui monopost este compusă din două aripi simetrice față de botul monopostului care le leagă. Datorită acestei simetrii, în continuare voi analiza doar despre una dintre cele două aripi.

Articolul principal luat drept punct de pornire discută despre un model matematic al unei aripi de avion [1], care este de fapt o aripă de monopost răsturnată orizontal precum se observă în imaginea următoare:

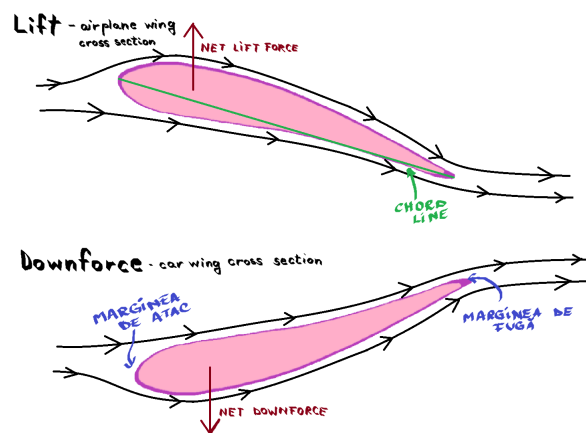


Figure. 1.1 – Diferența dintre secțiunea transversală a unei aripi de avion și cea de mașină

## 2. PRELIMINARII

Această lucrare detaliază unele aspecte legate de aeroelasticitate, astfel consider că este necesară o secțiune care explică terminologia folosită.

În cazul aeronavelor cu aripi subțiri și drepte în consolă, există două moduri tipice de mișcare. Primul este un mod de încovoiere în care vârful aripii se îndoaie în sus și în jos în raport cu rădăcina fixă a aripii. Acest efect se numește divergență.

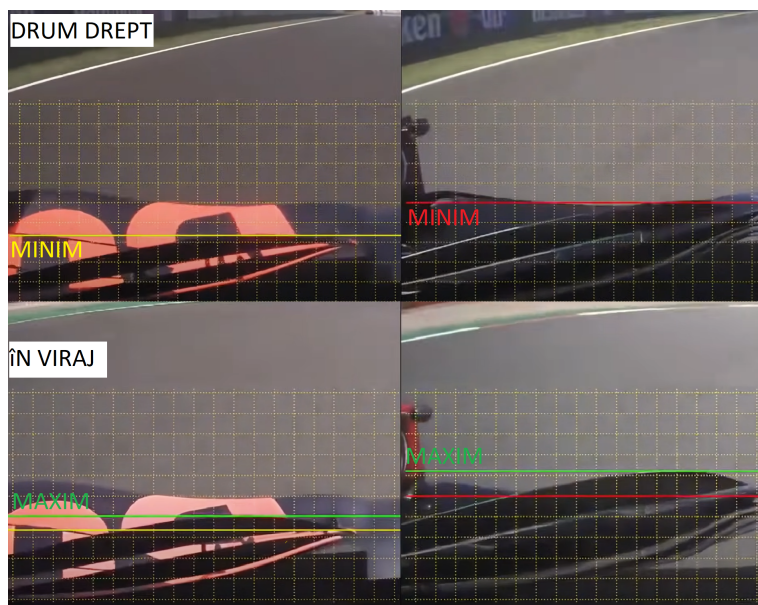


Figure. 2.2 – Exemplu de de divergență a unei aripi frontale pentru monopostul Mercedes și Redbull

În acest caz, momentul produs de sarcina de aer este mai mare decât rigiditatea structurală la torsiune a aripii și, prin urmare, aceasta va fi răsucită de pe vehicul. Viteza de prag pentru apariția acestui tip de defecțiune se numește viteză de divergență și se speră că va fi mult mai mare decât orice viteză normală de funcționare a vehiculului.

Al doilea este un mod de răsucire, în care aripa se rotește în jurul axei sale de rigiditate, acest efect se numește flutter.

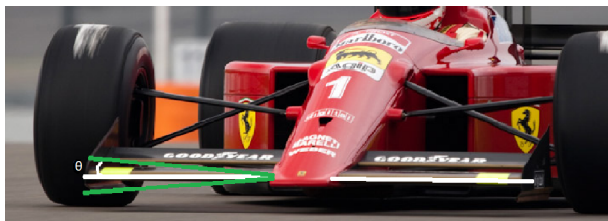


Figure. 2.3 – Exemplu de de flutter a unei aripi frontale dusă la extrem cu scop explicativ, în realitate  $\theta$  este foarte mic

### 3. MODELUL MATEMATIC CARE DESCRIE DIVERGENȚA TORSIONALĂ A UNEI ARIPI FRONTALE

Interacțiunea dintre sarcinile aerodinamice și deformarea prin răsucire a aripii subțiri poate fi idealizată astfel încât condițiile de echilibru să fie reprezentate cu ajutorul unor ecuații diferențiale.

În acest caz, structura este distribuită uniform de-a lungul aripii, astfel încât orice deformare va fi distribuită continuu de-a lungul aripii.

În această lucrare vom folosi un model clasic (discutat în mod curent în toate textele de aeroelasticitate) pentru a descoperi efectele aeroelasticii asupra unui model de aripă de fidelitate mai mare. În special, modelul ne permite să prezicem modul în care se redistribuie încărcăturile de aer din cauza aeroelasticii.

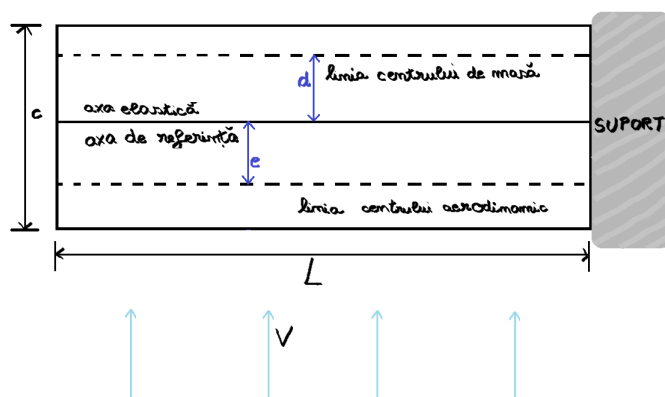


Figure. 3.4 – Forma de plan a aripii

Structura flexibilă continuă a aripii, prezentată în plan în figura 3, are doar libertate de răsucire, în ciuda faptului că aripa se va îndoi și sub acțiunea sarcinilor aerodinamice distribuite. În cazul aripii, structura se extinde continuu de la bază(suport) până la vârf și este încorporată într-o aripă cu coardă constantă. Coarda unei aripi (în aeronautică) este o linie dreaptă imaginară care unește marginea de atac și marginea de fugă a unei aripi.

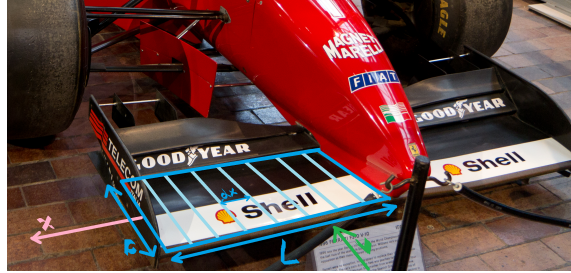


Figure. 3.5 – Aripa frontala a Ferrari F310

Modelul are o linie de referință a centrelor aerodinamice și o linie a centrelor de forfecare (numită axa elastică), astfel încât între cele două există o distanță constantă,  $e$ . În plus, masa aripii este luată în considerare prin distribuirea unei mase constante pe unitatea de lungime de-a lungul aripii la o distanță  $d$  în spatele axei elastice.

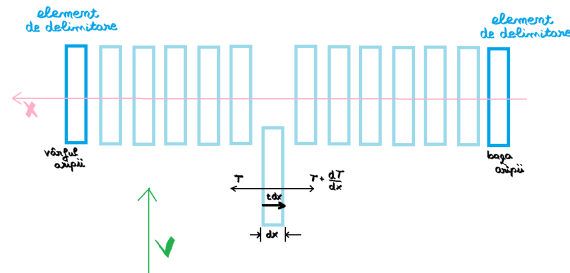


Figure. 3.6 – Idealizare a torsiunii aripii neinclinate care arată un element tipic de torsiune

Figura 5 prezintă structura continuă a aripii subdivizată în secțiuni infinitezimale mici cu lungimi  $dx$  împreună cu o diagramă tipică de corp liber. Forțele de portanță sunt distribuite, orientate în sus de la pagină, de-a lungul liniei centrelor aerodinamice ceea ce înseamnă că downforce-ul  $l(x)$  este distribuit cu o orientare în jos de la pagina. Forțele de portanță produc un cuplu în jurul axei elastice a aripii.

Pentru un aeroplan, portanța pe unitate de lungime, în funcție de unghiul inițial de atac și de torsiunea distribuită,  $\theta$  este:

$$p(x) = q c c_{l_\alpha} \alpha(x) = q c a_0 (\alpha_0 + \theta(x))$$

unde  $q$  este presiunea dinamică măsurată în Pascali,  $c$  este coarda la coordonata  $x$ ,  $\alpha$  este unghiul de deformare iar  $\alpha_0$  este unghiul inițial înainte de deformare.

Deoarece în cazul nostru vehicolul înaintează, unghiul inițial înaintea deformării va fi mai mare ca cel de după deformare, astfel  $\alpha(x) = \alpha_0 - \theta(x)$ .

Notăția  $a_0$  este utilizată ca prescurtare pentru panta curbei de ridicare locală  $c_{l_\alpha}$ . Panta curbei de ridicare locală a unei aripi are semnul contrar pantei curbei de ridicare locală a unui aeroplan, precum se poate observa și în figura 1. Astfel  $a_0$  este utilizată ca prescurtare pentru panta curbei de ridicare locală  $c_{l_\alpha}$  și putem deduce astfel Downforce-ul pe unitatea de lungime, în funcție de unghiul inițial de atac și de torsiunea distribuită,  $\theta(x)$ , este:

$$l(x) = -q c a_0 (\alpha_0 - \theta(x))$$

Această reprezentare aerodinamică este adesea denumită teoria benzilor, în care interacțiunea aerodinamică între elemente este ignorată. În plus, un moment aerodinamic de tangaj este distribuit de-a lungul deschiderii la centrul aerodinamic.

$$m_{ac} = q c^2 c_{mac}$$

Unde  $c_{mac}$  este coeficientul momentului secțional (presupus, de asemenea, constant de-a lungul aripii) în jurul axei linia mediană aerodinamică. În cele din urmă, greutatea distribuită a aripii  $w$  creează momentul forței (torque in eng.),  $t_w$

$$t_w = n w d$$

unde  $n$  este factorul de sarcină normal la suprafața aripii și  $d$  este distanța dintre linia centrului de masă și axa elastică. Combinând aceste sarcini, se obține cuplul distribuit, prezentat în figura 5 , și pozitiv, după cum se arată, este:

$$t(x) = e \cdot l(x) + m_{ac} + t_w$$

$$t(x) = -q c e a_0 (\alpha_0 - \theta(x)) + q c^2 c_{mac} + n w d$$

unde amintim ca  $e$  este distanța dintre centrul aerodinamic și axa elastică.

Relația dintre deformarea prin răsucire pe lungimea acestei structuri și o deformare internă de rezultantă a secțiunii transversale interne,  $T(x)$ , prezentată în figura 3, este dată de relația

$$T(x) = GJ \frac{d\theta}{dx}$$

unde  $GJ$  este rigiditatea efectivă la torsiune a secțiunii transversale a aripii. Echilibrul momentelor forțelor interne și externe în jurul axei  $x$  dă:

$$\Sigma M_x = 0$$

$$T(x) - t(x)dx - \left( T(x) + \frac{dT}{dx} dx \right) = 0$$

$$\left( -t(x) - \frac{dT}{dx} \right) dx = 0 \quad , dx > 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dT}{dx} = -t(x)$$

Folosind ecuația de mai sus putem obține o relație între deformarea de torsiune  $\theta$  și momentul forței extern aplicat  $t(x)$  astfel :

$$\frac{dT}{dx} = \frac{d}{dx} \left( GJ \frac{d\theta}{dx} \right) = -t(x)$$

Substituind cele necesare obținem :

$$\frac{d}{dx} \left( GJ \frac{d\theta}{dx} \right) = -qcea_0(\alpha_0 - \theta(x)) + qc^2c_{mac} + nwd$$

Rearanjăm termenii din ecuația de mai sus astfel :

$$\frac{d}{dx} \left( GJ \frac{d\theta}{dx} \right) + qcea_0\theta(x) = -qcea_0\alpha_0 + qc^2c_{mac} + nwd$$

Cu scopul de a usura scrierea, vom introduce următoare constantă :

$$K = \frac{(-qcea_0\alpha_0 + qc^2c_{mac} + nwd)}{GJ}$$

Astfel ecuația de mai sus se poate rescrie astfel:

$$GJ \frac{d^2\theta}{dx^2} + qcea_0\theta(x) = -K \cdot GJ$$

Împartind ecuația de mai sus cu constanta  $GJ$  obținem:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + \left( \frac{qcea_0}{GJ} \right) \theta(x) = -K$$

Definim un parametru de aeroelasticitate astfel :

$$\lambda^2 = \frac{qcea_0}{GJ}$$

Iar ecuația diferențială devine:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + \lambda^2\theta = -K$$

Distingem ecuația diferențială ordinară de ordinul doi liniară și neomogenă. Soluția generală a acestui tip de ecuație este:

$$\theta = \theta_0 + \theta_p$$

unde  $\theta_0$  este soluția ecuației diferențiale ordinară de ordinul doi liniară și omogenă asociată, iar  $\theta_p$  este soluția particulară a ecuației inițiale. Ecuația caracteristică asociată ecuației diferențiale de ordinul II omogene și liniare este :

$$r^2 + \lambda^2 = 0$$

Astfel, se obține că:

$$\Delta = -\lambda^2$$

ceea ce înseamnă că soluția generală a ecuației diferențiale va avea forma :

$$\theta_0(x) = A \sin \lambda x + B \cos \lambda x \text{ unde } A, B \in \mathbb{R}$$

Soluția particulară a ecuației  $\theta_p$  are forma:

$$\theta_p = Q_0(x) = C \text{ unde } C \in \mathbb{R}$$

deoarece 0 nu este soluție a ecuației caracteristice asociate. Introducem  $\theta_p$  în ecuația diferențială inițială și obținem :

$$0 + \lambda^2 C = -K \Rightarrow$$

$$C = -\frac{K}{\lambda^2}$$

Astfel, soluția ecuației diferențiale este :

$$\theta(x) = A \sin \lambda x + B \cos \lambda x - \frac{K}{\lambda^2} \text{ unde } A, B \in \mathbb{R}$$

Pentru a afla constantele  $A$  și  $B$ , impunem condiții inițiale la extremitățile aripii astfel:

La baza aripii,  $x = 0$  :

$$\theta(0) = 0 \Rightarrow$$

$$A \sin 0 + B \cos 0 - \frac{K}{\lambda^2} = 0 \Rightarrow$$

$$B = \frac{K}{\lambda^2}$$

Introducem constanta nou aflată și obținem o nouă formă a soluției :

$$\theta(x) = A \sin \lambda x - \frac{K}{\lambda^2}(1 - \cos \lambda x)$$

La vârful aripii,  $x = L$  și cuplu  $T(L) = 0$  deoarece capătul este liber :

$$T(L) = GJ \frac{d}{dx} \theta(L) = 0$$

Calculăm  $\frac{d}{dx} \theta(x)$  :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \theta(x) &= A \cdot \frac{d}{dx} [\sin(\lambda x)] - \frac{K}{\lambda^2} \left( \frac{d}{dx} [-\cos(\lambda x)] + \frac{d}{dx} [1] \right) \\ &= A \cos(\lambda x) \cdot \frac{d}{dx} [\lambda x] - \frac{((-\frac{d}{dx} [\cos(\lambda x)]) + 0) K}{\lambda^2} \\ &= A \cos(\lambda x) \lambda \cdot \frac{d}{dx} [x] + \frac{(-\sin(\lambda x)) \cdot \frac{d}{dx} [\lambda x] \cdot K}{\lambda^2} \\ &= A \cos(\lambda x) \lambda \cdot 1 - \frac{\lambda \cdot \frac{d}{dx} [x] \cdot K \sin(\lambda x)}{\lambda^2} \\ &= A \lambda \cos(\lambda x) - \frac{1K \sin(\lambda x)}{\lambda} \\ &= A \lambda \cos(\lambda x) - \frac{K \sin(\lambda x)}{\lambda} \end{aligned}$$

Astfel,

$$A \lambda \cos(\lambda L) - \frac{K \sin(\lambda L)}{\lambda} = 0$$

Rezolvăm pentru a obține  $A$  :

$$\begin{aligned} A \lambda - \frac{K \tan(\lambda L)}{\lambda} &= 0 \Rightarrow \\ A &= \frac{K \tan(\lambda L)}{\lambda^2} \end{aligned}$$

Astfel scriem soluția ecuației diferențiale ca fiind :

$$\theta(x) = \frac{-K}{\lambda^2} [1 - \cos \lambda x - (\tan \lambda L)(\sin \lambda x)]$$

Unde :

$$K = \frac{(-qcea_0 \alpha_0 + qc^2 c_{\text{mac}} + nwd)}{GJ}$$

și

$$\lambda^2 = \frac{qcea_o}{GJ}$$

Ecuția diferențială de mai sus descrie distribuția răsucirii de-a lungul aripii, de la rădăcină la vârf. Noi nu trebuie să uităm că aripa are, de asemenea, încovoiere flexie, dar flexia de încovoiere nu afectează sarcina aerodinamică a aripii fără încovoiere. Ecuția de mai sus arată că termenul  $\tan\lambda L$  are un efect important asupra răsucirii aripii. Un grafic al  $\tan\lambda L$  în funcție de  $\lambda L$  este prezentat în figura 7.

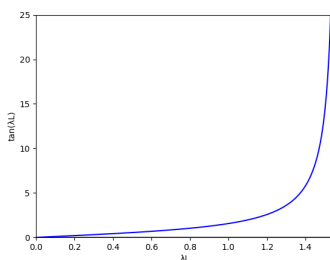


Figure. 3.7 – Coeficientul de amplificare a răsucirii  $\tan\lambda L$

La  $\lambda L = \frac{\pi}{2}$  devine infinit. Dacă  $\lambda = \frac{\pi}{2L}$ , mic sarcini inițiale mici pe aripă produc (teoretic) o infinitate deformații de torsiune infinite. Din punct de vedere fizic, acest lucru nu poate se poate întâmpla deoarece, din motive structurale și/sau aerodinamice aerodinamice ar face ca modelul nostru să fie nu ar invalida ipotezele modelului.

#### 4. MODELUL MATEMATIC CARE DESCRIE DIVERGENȚA TORSIONALĂ A UNEI ARIPI DIN SPATE

O aripă necambrată, cu anvergura  $b$ , este fixată pe ambii pereți ai unui tunel aerodinamic și plasată la un unghi de atac  $\alpha_0$ . Aripa este idealizată ca o aripă flexibilă la torsiune, cu o proprietate uniformă uniformă, precum cea discutată în secțiunea anterioară. Folosiți figura 4 ca referință, dar cu anvergura  $b$  în loc de  $L$  și cu un suport suplimentar în dreapta.

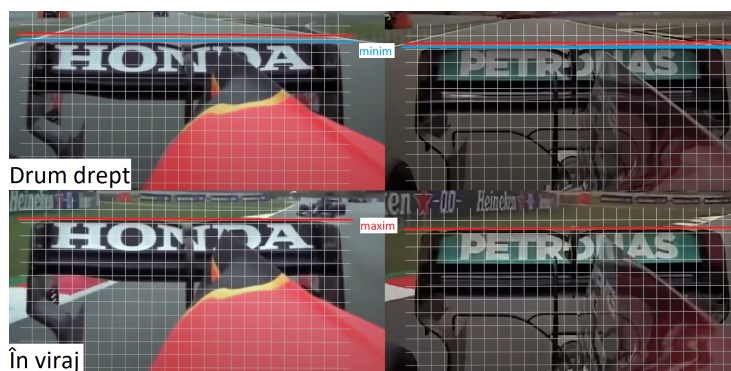


Figure. 4.8 – Exemplu de de divergență a unei aripi din spate pentru monopostul Mercedes și Redbull



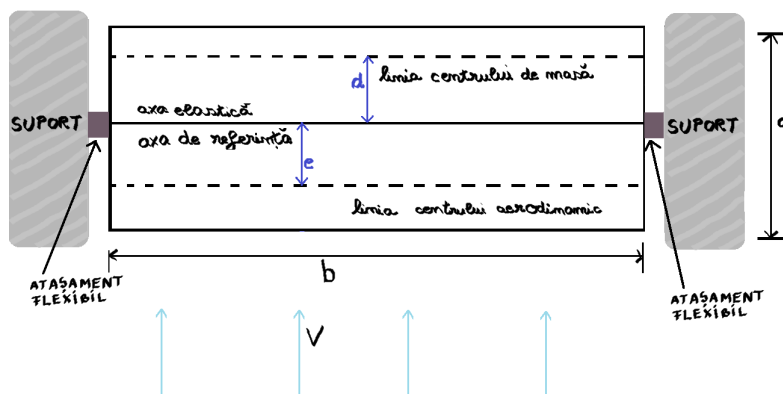


Figure. 4.9 – Forma de plan a aripii

Articulația de fixare a suportului de aripă este flexibilă la torsiune; un resort de torsiune cu rigiditatea  $K_T$  este atașat între rădăcina aripii și suport, astfel încât momentul de restabilire a atașamentului este  $K_T\theta(0)$  atunci când rădăcina aripii se răsucește cu o valoare  $\theta(0)$ . În exemplul anterior, rădăcina a fost restricționată astfel încât  $\theta(0) = 0$ .

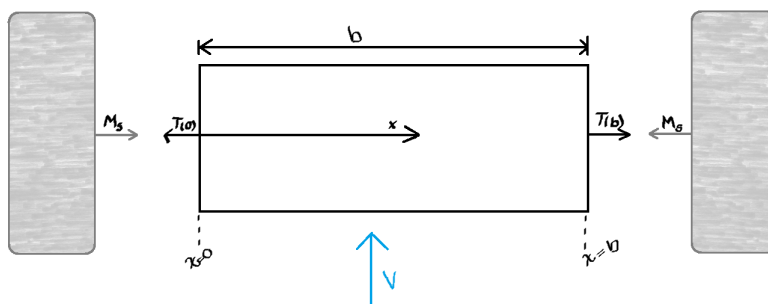


Figure. 4.10 – Diagrama de corp a joncțiunii aripă/suport

Raționamentul pentru aflarea ecuației diferențiale care guvernează modelul matematic este asemănător celui prezentat în secțiunea anterioară, cu precizarea că momentul aerodinamic de tangaj și momentul forței creat de greutatea distribuită a aripii dispar deoarece, în cazul de față, aripra este suportată cu suportți pe ambele capete. Astfel,

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{qcea_0}{GJ}\theta(x) = -\frac{qcea_0\alpha_0}{GJ}$$

Definim un parametru de aeroelasticitate astfel :

$$\lambda^2 = \frac{qcea_0}{GJ}$$

Iar ecuația diferențială de mai sus devine:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + \lambda^2\theta = -\lambda^2\alpha_0$$

Distingem ecuația diferențială ordinară de ordinul doi liniară și neomogenă. Soluția generală a acestui tip de ecuație este:

$$\theta = \theta_0 + \theta_p$$

unde  $\theta_0$  este soluția ecuației diferențiale ordinară de ordinul doi liniară și omogenă asociată, iar  $\theta_p$  este soluția particulară a ecuației inițiale. Ecuația caracteristică asociată ecuației diferențiale de ordinul II omogene și liniare este :

$$r^2 + \lambda^2 = 0$$

Astfel, se obține că:

$$\Delta = -\lambda^2$$

ceea ce înseamnă că soluția generală a ecuației diferențiale va avea forma :

$$\theta_0(x) = A \sin \lambda x + B \cos \lambda x \text{ unde } A, B \in \mathbb{R}$$

Soluția particulară a ecuației  $\theta_p$  are forma:

$$\theta_p = Q_0(x) = C \text{ unde } C \in \mathbb{R}$$

deoarece 0 nu este soluție a ecuației caracteristice asociate. Introducem  $\theta_p$  în ecuația diferențială inițială și obținem :

$$0 + \lambda^2 C = -\lambda^2 \alpha_0 \Rightarrow$$

$$C = -\alpha_0$$

Astfel, soluția ecuației diferențiale este :

$$\theta(x) = A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x) - \alpha_0 \text{ unde } A, B \in \mathbb{R}$$

Diferența majoră dintre ecuația diferențială care guvernează modelul matematic prezentat în secțiunea anterioară și cel din această secțiune este reprezentată de modul în care sunt formulate condițiile inițiale.

Cuplul arcului de fixare,  $M_s$ , și cuplul intern al aripiei,  $T$ , la rădăcina aripiei se definesc astfel

$$M_s \equiv K_T \theta(0)$$

și

$$T(0) \equiv GJ \theta'(0)$$

Echilibrul cuplului la  $x = 0$  este o condiție la limită. După cum se indică în figura 11, cuplul de la resortul de torsiune,  $M_s$ , și cuplul de la rădăcina aripiei trebuie să fie în echilibru astfel încât  $T(0) - M_s = 0$ , sau

$$K_T \theta(0) = GJ \theta'(0) \Rightarrow$$

$$\frac{K_T}{GJ} \theta(0) = \theta'(0)$$

Revenind la soluția aflată, calculăm  $\frac{d\theta}{dx}$

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dx} &= \frac{d}{dx} [A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x) - \alpha_0] \\ &= A \cdot \frac{d}{dx} [\sin(\lambda x)] + B \cdot \frac{d}{dx} [\cos(\lambda x)] + \frac{d}{dx} [-\alpha_0] \\ &= A \cos(\lambda x) \cdot \frac{d}{dx} [\lambda x] + B \cdot (-\sin(\lambda x)) \cdot \frac{d}{dx} [\lambda x] + 0 \\ &= A \cos(\lambda x) \lambda \cdot \frac{d}{dx} [x] - B \lambda \cdot \frac{d}{dx} [x] \cdot \sin(\lambda x) \\ &= A \cos(\lambda x) \lambda \cdot 1 - B \cdot 1 \lambda \sin(\lambda x) \\ &= A \lambda \cos(\lambda x) - B \lambda \sin(\lambda x) \end{aligned}$$

Astfel, simplificând ecuația de mai sus :

$$\frac{d\theta}{dx} = -\lambda \cdot (B \sin(\lambda x) - A \cos(\lambda x))$$

Revenind la condiția inițială, avem:

$$\begin{aligned} \frac{K_T}{GJ} \theta(0) &= \frac{K_T}{GJ} (A \sin(\lambda 0) + B \cos(\lambda 0) - \alpha_0) \Rightarrow \\ \frac{K_T}{GJ} \theta(0) &= B \frac{K_T}{GJ} - \alpha_0 \frac{K_T}{GJ} \end{aligned}$$

Dar,

$$\begin{aligned} \frac{d\theta(0)}{dx} &= -\lambda \cdot (B \sin(\lambda 0) - A \cos(\lambda 0)) \Rightarrow \\ \frac{d\theta(0)}{dx} &= A \lambda \end{aligned}$$

Astfel,

$$B \frac{K_T}{GJ} - \alpha_0 \frac{K_T}{GJ} = A \lambda$$

Lungimea  $b$  fiind strict pozitivă, putem face următorul calcul :

$$\begin{aligned} (B - \alpha_0) \frac{K_T b}{GJ} &= A \lambda b \Rightarrow \\ B - \alpha_0 &= A \lambda b \frac{GJ}{K_T b} \Rightarrow \\ B &= \alpha_0 + A \lambda b \frac{GJ}{K_T b} \Rightarrow \end{aligned}$$

Folosind următoarea notație  $\beta = \frac{GJ}{K_T b}$  obținem :

$$A \beta \lambda b - \alpha_0 = B$$

La cealaltă parte a aripii,  $y = b$ , cuplul de la rădăcina aripii trebuie să fie în echilibru astfel încât  $T(b) - M_s = 0$ , sau

$$\begin{aligned} K_T \theta(b) &= GJ \theta'(b) \Rightarrow \\ \frac{K_T}{GJ} \theta(b) &= \theta'(b) \end{aligned}$$

Claculăm  $\theta(b)$  astfel:

$$\begin{aligned}\theta(b) &= A \sin(\lambda b) + B \cos(\lambda b) - \alpha_0 \Rightarrow \\ \frac{K_T}{GJ} \theta(b) &= \frac{K_T}{GJ} A \sin(\lambda b) + \frac{K_T}{GJ} B \cos(\lambda b) - \frac{K_T}{GJ} \alpha_0\end{aligned}$$

Calculăm  $\theta'(b)$  astfel :

$$\frac{d\theta(b)}{dx} = -\lambda \cdot (B \sin(\lambda b) - A \cos(\lambda b))$$

Egalând cele doua ecuații obținem:

$$\frac{K_T}{GJ} A \sin(\lambda b) + \frac{K_T}{GJ} B \cos(\lambda b) - \frac{K_T}{GJ} \alpha_0 = -\lambda \cdot (B \sin(\lambda b) - A \cos(\lambda b))$$

$$A \sin(\lambda b) + B \cos(\lambda b) - \alpha_0 = -\lambda \frac{GJ}{K_T} \cdot (B \sin(\lambda b) - A \cos(\lambda b))$$

$$A \sin(\lambda b) + (A\beta\lambda b - \alpha_0) \cos(\lambda b) - \alpha_0 = -\lambda \frac{GJ}{K_T} \cdot ((A\beta\lambda b - \alpha_0) \sin(\lambda b) - A \cos(\lambda b))$$

Folosind un software pentru calcul ([www.symbolab.com](http://www.symbolab.com)) aflăm  $A$  si substituind la mometul potrivit  $\beta = \frac{GJ}{K_T b}$  aflam urmatoarele:

$$A = \frac{K_T \alpha_0 \lambda GJ \sin(\lambda b) + K_T^2 \alpha_0 \cos(\lambda b) + K_T^2 \alpha_0}{K_T^2 \sin(\lambda b) + K_T \lambda GJ + \lambda^2 (GJ)^2 \sin(\lambda b) + K_T^2 \cos(\lambda b)} \Rightarrow$$

$$A = \alpha_0 \frac{\lambda \frac{GJ}{K_T} \sin(\lambda b) + \cos(\lambda b) + 1}{\sin(\lambda b) + \lambda \frac{GJ}{K_T} + \lambda^2 \frac{(GJ)^2}{(K_T)^2} \sin(\lambda b) + \cos(\lambda b)} \Rightarrow$$

$$A = \alpha_0 \frac{\lambda \beta b \sin(\lambda b) + \cos(\lambda b) + 1}{\sin(\lambda b) + \lambda \beta b + \lambda^2 \beta^2 b^2 \sin(\lambda b) + \cos(\lambda b)}$$

Atfel, putem afla  $B$  :

$$\alpha_0 \frac{\lambda \beta b \sin(\lambda b) + \cos(\lambda b) + 1}{\sin(\lambda b) + \lambda \beta b + \lambda^2 \beta^2 b^2 \sin(\lambda b) + \cos(\lambda b)} \beta \lambda b - \alpha_0 = B$$

$$B = \alpha_0 \left( \frac{\lambda \beta b \sin(\lambda b) + \cos(\lambda b) + 1}{\sin(\lambda b) + \lambda \beta b + \lambda^2 \beta^2 b^2 \sin(\lambda b) + \cos(\lambda b)} \beta \lambda b - 1 \right)$$

$$B = \alpha_0 \left( \frac{\lambda \beta b \sin(\lambda b) + \cos(\lambda b) + 1}{\beta \lambda b \sin(\lambda b) + 1 + \beta \lambda b \sin(\lambda b) + \beta \lambda b \cos(\lambda b)} - 1 \right)$$

Astfel,

$$\begin{aligned}\theta(x) &= \alpha_0 \frac{\lambda \beta b \sin(\lambda b) + \cos(\lambda b) + 1}{\sin(\lambda b) + \lambda \beta b + \lambda^2 \beta^2 b^2 \sin(\lambda b) + \cos(\lambda b)} \sin(\lambda x) + \\ &+ \alpha_0 \left( \frac{\lambda \beta b \sin(\lambda b) + \cos(\lambda b) + 1}{\sin(\lambda b) + \lambda \beta b + \lambda^2 \beta^2 b^2 \sin(\lambda b) + \cos(\lambda b)} \beta \lambda b - 1 \right) \cos(\lambda x) - \alpha_0\end{aligned}$$

$$\theta(x) = \alpha_0 \frac{\lambda \beta b \sin(\lambda b) + \cos(\lambda b) + 1}{\sin(\lambda b) + \lambda \beta b + \lambda^2 \beta^2 b^2 \sin(\lambda b) + \cos(\lambda b)} (\sin(\lambda x) + \lambda \beta b \cos(\lambda x) - \cos(\lambda x)) - \alpha_0$$

$$\theta(x) = \alpha_0 \frac{\lambda \beta b \sin(\lambda b) + \cos(\lambda b) + 1}{\sin(\lambda b) + \lambda \beta b + \lambda^2 \beta^2 b^2 \sin(\lambda b) + \cos(\lambda b)} (\sin(\lambda x) + \cos(\lambda x)(\lambda \beta b - 1)) - \alpha_0$$

Astfel, am descoperit soluția ecuației diferențiale ordinare de ordinul 2 liniare și neomogene care descrie divergența torsională a unei aripi din spate a unui monopost, unde aripa este flexibilă și nu are înclinare :

$$\theta(x) = \alpha_0 \frac{\lambda\beta b \sin(\lambda b) + \cos(\lambda b) + 1}{\sin(\lambda b) + \lambda\beta b + \lambda^2\beta^2 b^2 \sin(\lambda b) + \cos(\lambda b)} (\sin(\lambda x) + \cos(\lambda x)(\lambda\beta b - 1)) - \alpha_0$$

Ecuția de mai sus descrie distribuția răsucirii de-a lungul aripii.

## 5. CONCLUZII

Modelele aeroelastice trebuie să includă suficiente detalii pentru a ne permite să prezicem ce se întâmplă cu aripile unui monopost atunci când acesta se află la diferite viteze de deplasare. În acest articol am prezentat două modele matematice care descriu modul în care o aripa al unui monopost se poate răsucii în timpul unei curse, folosind ecuații diferențiale ordinare, de ordinul doi liniare și neomogene. Modelele luate în considerare în acest capitol au fost simple și au presupus că atât structura, cât și comportamentul aerodinamic sunt liniare.

Modelul care descrie divergența torsională a unei aripi frontale are ca referință monoposturile de formula 1 din perioada 1975 - 2002, perioadă în care aripile frontale erau drepte. Modelul care descrie divergența torsională a unei aripi din spate are ca referință monoposturile de formula 1 de după anul 1990, dar consider că aceste modele pot descrie comportamentul unui eleron de mașină obișnuit.

Cercetări ulterioare ce se pot efectua folosind aceste modele sunt, spre exemplu având un set de date colectate se poate determina dacă nivelul de torsiune al unei aripi se încadrează în limitele de siguranță impuse de Federația Internațională a Automobilului (FIA). Alte cercetări pot consta în extinderea acestui model pentru toate tipurile de aripi (cele drepte și cele puse la un unghi).

**BIBLIOGRAFIE**

- [1] *Static aeroelasticity (4th edition)*, Terrence A. Weisshaar ,School of Aeronautics and Astronautics, Purdue University, West Lafayette, IN, USA , course material
- [2] *Aero-Structural Optimization of Divergence-Critical Wings*, Scott, Moon University of Toronto, 2009
- [3] *Principiile Zborului (Aerodinamica Zborului)*,Dumitru Popovici, Ionescu Conta Mugurel, București 2009
- [4] *Design & Development of an Aerodynamic Package for an FSAE Race Car* ,Ioannis Oxyzoglou, Volos, Greece, 2017
- [5] *2022 Formula 1 Technical Regulations* Published On 18 February 2022
- [6] *website* [www.formula1-dictionary.net/downforce.html](http://www.formula1-dictionary.net/downforce.html) , accesat la 11.05.2022
- [7] *website* [www.aerodynamics4students.com/aeroelasticity/](http://www.aerodynamics4students.com/aeroelasticity/) , accesat la 11.05.2022
- [8] *website* sursa imagine: [youtu.be/gLFkOf4qSZs](https://youtu.be/gLFkOf4qSZs)
- [9] *website* sursa imagine: [youtu.be/YBWUefS15tI](https://youtu.be/YBWUefS15tI)
- [10] *website* sursa imagine: [rcplanes.online/index2.htm](http://rcplanes.online/index2.htm)
- [11] *website* sursa imagine: [fr.wikipedia.org/wiki/Ferrari\\_F1](https://fr.wikipedia.org/wiki/Ferrari_F1) – 87

*Facultatea de Matematică și Informatică,  
Universitatea "Babeș-Bolyai" Cluj-Napoca  
e-mail: [daniela.darabut@stud.ubbcluj.ro](mailto:daniela.darabut@stud.ubbcluj.ro)*