DIDACTICA MATHEMATICA, Vol. 38 (2020), pp. 9–19

RECIPROCE ALE TEOREMEI DE MEDIE A LUI LAGRANGE

Dorel I. DUCA

Abstract. The mean value theorem of Lagrange says that if the function $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ is continuous on $[a, b]$, differentiable on (a, b), then there exists a point $c \in (a, b)$ such that

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c).$$

In this paper, there are formulated two converses, weak and strong, of the mean value theorem of Lagrange. Some sufficient conditions for these statements to be true are given.

1. RECIPROCE ALE TEOREMEI DE MEDIE A LUI LAGRANGE

Teorema de medie a lui Lagrange afirmă că dacă funcţia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este continuă pe $[a, b]$ şi derivabilă pe (a, b), atunci există cel puţin un punct $c \in (a, b)$ astfel încât

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Din punct de vedere geometric, teorema de medie a lui Lagrange afirmă că dacă funcţia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este continuă pe $[a, b]$ şi derivabilă pe (a, b), atunci există cel puţin un punct $c \in (a, b)$ astfel încât tangenta la graficul funcţiei f în punctul $(c, f(c))$ este paralelă cu dreapta care trece prin punctele $(a, f(a))$ şi $(b, f(b))$.

Urmează că, dacă funcţia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este continuă pe $[a, b]$ şi derivabilă pe (a, b), atunci oricare ar fi subintervalul $(a_0, b_0) \subseteq (a, b)$, există cel puţin un punct $c \in (a_0, b_0)$ astfel încât tangenta la graficul funcţiei f în punctul $(c, f(c))$ este paralelă cu dreapta care trece prin punctele $(a_0, f(a_0))$ şi $(b_0, f(b_0))$. (vezi [2])

Să considerăm acum următoarea problemă: Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este continuă pe $[a, b]$ şi derivabilă pe (a, b), atunci pentru fiecare punct $c \in (a, b)$, există un subinterval $(a_0, b_0) \subseteq (a, b)$ astfel încât $c \in (a_0, b_0)$ şi tangenta la graficul funcţiei f în punctul $(c, f(c))$ este paralelă cu dreapta care trece prin punctele $(a_0, f(a_0))$ şi $(b_0, f(b_0))$.

Să formulăm mai precis această afirmaţie, afirmaţie cunoscută sub numele de *reciproca tare a teoremei de medie a lui Lagrange.*

Problema 1. (*reciproca tare a teoremei de medie a lui Lagrange*) *Dacă funcţia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este continuă pe $[a, b]$ şi derivabilă pe (a, b), atunci* *pentru fiecare* $c \in (a,b)$ *există două puncte* a_0, $b_0 \in [a,b]$ *cu* $a_0 < b_0$ *astfel încât* $c \in (a_0, b_0)$ *şi*

$$f(b_0) - f(a_0) = (b_0 - a_0) f'(c).$$

Alternativ, putem formula şi următoarea problemă: Dacă funcţia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este continuă pe $[a,b]$ şi derivabilă pe (a,b), atunci pentru fiecare $c \in (a,b)$ există un subinterval $(a_0, b_0) \subseteq (a,b)$ astfel încât tangenta la graficul funcţiei f în punctul $(c, f(c))$ să fie paralelă cu dreapta care trece prin punctele $(a_0, f(a_0))$ şi $(b_0, f(b_0))$.

Să formulăm mai precis această afirmaţie, afirmaţie cunoscută sub numele de *reciproca slabă a teoremei de medie a lui Lagrange.*

Problema 2. (*reciproca slabă a teoremei de medie a lui Lagrange*) *Dacă funcţia* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *este continuă pe* $[a,b]$ *şi derivabilă pe* (a,b), *atunci pentru fiecare* $c \in (a,b)$, *există două puncte distincte* a_0, $b_0 \in [a,b]$ *cu* $a_0 < b_0$ *astfel încât*

$$f(b_0) - f(a_0) = (b_0 - a_0) f'(c).$$

Un exemplu simplu arată că reciprocele teoremei de medie a lui Lagrange, atât cea slabă cât şi cea tare, nu sunt numaidecât adevărate. Într-adevăr, pentru funcţia $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = x^3, \text{ oricare ar fi } x \in [-1,1]$$

avem $f'(0) = 0$ în timp ce

$$\frac{f(b_0) - f(a_0)}{b_0 - a_0} = \frac{b_0^3 - a_0^3}{b_0 - a_0} = \left(b_0 + \frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} a_0^2 > 0 = f'(0),$$

oricare ar fi $a_0, b_0 \in [-1,1]$ cu $a_0 < b_0$.

Prin urmare, pentru $c = 0$, nu există a_0, $b_0 \in [-1,1]$ cu $a_0 < b_0$ astfel încât

$$f(b_0) - f(a_0) = (b_0 - a_0) f'(c). \quad \text{(reciproca slabă)}$$

şi cu atât mai mult, pentru $c = 0$, nu există a_0, $b_0 \in [-1,1]$ cu $a_0 < c < b_0$ astfel încât

$$f(b_0) - f(a_0) = (b_0 - a_0) f'(c). \quad \text{(reciproca tare).}$$

În continuare vom da câteva condiţii suficiente pentru ca reciprocele teoremei de medie a lui Lagrange să fie adevărate.

Teorema 3. (*reciprocă tare a teoremei de medie a lui Lagrange*) *Fie* a *şi* b *două numere reale cu* $a < b$ *şi* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *o funcţie. Dacă:*

(*i*) *funcţia* f *este derivabilă pe* $[a,b]$;

(*ii*) *funcţia* f *este convexă* (*sau concavă*) *pe* $[a,b]$,

atunci pentru fiecare $c \in (a,b)$ *există două puncte* a_0, $b_0 \in [a,b]$ *cu* $a_0 < c < b_0$ *astfel încât*

$$f(b_0) - f(a_0) = (b_0 - a_0) f'(c).$$

Demonstraţie. Fie $c \in (a,b)$ şi $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin

$$g(x) = f(x) - f(c) - (x-c) f'(c), \text{ oricare ar fi } x \in [a,b].$$

Distingem trei cazuri după cum: $a)$ $g(a) = g(b)$; $b)$ $g(a) < g(b)$; $c)$ $g(a) > g(b)$.

$a)$ Deoarece

$$\begin{cases} g(a) = f(a) - f(c) - (a-c) f'(c) \\ g(b) = f(b) - f(c) - (b-c) f'(c), \end{cases}$$

ţinând seama că $g(a) = g(b)$, obţinem

$$f(b) - f(a) = (b-a) f'(c).$$

Prin urmare, teorema are loc cu $a_0 := a$, $b_0 := b$.

$b)$ Funcţia f fiind convexă, avem

$$f(x) - f(c) \geq (x-c) f'(c), \text{ oricare ar fi } x \in [a,b].$$

de unde, dacă ţinem seama că $g(a) < g(b)$, obţinem

$$g(c) = 0 \leq g(a) < g(b).$$

Pe de altă parte, funcţia g fiind continuă pe $[a,b]$, are proprietatea lui Darboux pe $[a,b]$; atunci există cel puţin un punct $b_0 \in [c,b)$ cu proprietatea că $g(b_0) = g(a)$. Întrucât

$$\begin{cases} g(a) = f(a) - f(c) - (a-c) f'(c) \\ g(b_0) = f(b_0) - f(c) - (b_0-c) f'(c), \end{cases}$$

ţinând seama că $g(a) = g(b_0)$, obţinem

$$f(b_0) - f(a) = (b_0 - a) f'(c).$$

Prin urmare teorema are loc luând $a_0 := a$.

$c)$ Dacă $g(a) > g(b)$, se raţionează similar cazului b). □

Din această teoremă urmează imediat următoarea afirmaţie:

Corolarul 4. *Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie. Dacă:*
(i) funcţia f este derivabilă de două ori pe I;
(ii) $f''(x) \geq 0$ (sau $f''(x) \leq 0$) oricare ar fi $x \in I$,
atunci oricare ar fi punctul $c \in \operatorname{int} I$, există două puncte distincte $a, b \in I$ cu proprietatea că $a < c < b$ şi

$$f(b) - f(a) = (b-a) f'(c).$$

Demonstraţie. Se aplică teorema 3. □

Din acest corolar putem deduce rezultate interesante.

Propoziţia 5. *Oricare ar fi $c \in \mathbb{R}$ există $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care avem*

$$a < c < b \quad \text{şi} \quad e^b - e^a = (b-a) e^c.$$

Demonstraţie. Se aplică corolarul 4 pentru funcţia

$$f(x)=\mathrm{e}^x, \text{ oricare ar fi } x\in\mathbb{R}.$$

□

PROPOZIŢIA 6. *Oricare ar fi $c\in(0,+\infty)$ există $a,b\in(0,+\infty)$ cu proprietatea că*

$$a<c<b \quad \textit{şi} \quad \ln\frac{b}{a}=\frac{b-a}{c}.$$

Demonstraţie. Se aplică corolarul 4 pentru funcţia

$$f(x)=\ln x, \text{ oricare ar fi } x\in(0,+\infty).$$

□

PROPOZIŢIA 7. *Oricare ar fi $c\in(0,\pi)$ există $a,b\in[0,\pi]$ cu proprietatea că*

$$a<c<b \quad \textit{şi} \quad \sin b-\sin a=(b-a)\cos c.$$

Demonstraţie. Se aplică corolarul 4 pentru funcţia

$$f(x)=\sin x, \text{ oricare ar fi } x\in[0,\pi].$$

□

PROPOZIŢIA 8. *Fie a_0, a_1, ..., $a_n\in[0,+\infty)$. Atunci oricare ar fi $c\in\mathbb{R}$ există $a,b\in\mathbb{R}$ pentru care avem*

$$a<c<b$$

şi

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\left[2kc^{2k-1}-\left(b^k+a^k\right)\sum_{i=0}^{k-1} a^ib^{k-1-i}\right]=0.$$

Demonstraţie. Se aplică corolarul 4 pentru funcţia

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_kx^{2k}, \text{ oricare ar fi } x\in\mathbb{R}.$$

□

În cele ce urmează vom da o reciprocă slabă a teoremei de medie a lui Lagrange. (vezi [4])

TEOREMA 9. (*reciprocă slabă a teoremei de medie a lui Lagrange*) *Fie a şi b două numere reale cu $a<b$ şi $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcţie. Dacă*

(*i*) *funcţia f este continuă pe $[a,b]$;*

(*ii*) *funcţia f este derivabilă pe (a,b),*

atunci pentru fiecare punct $c\in(a,b)$ cu proprietatea că

$$\inf\{f'(x):\ x\in(a,b)\}\neq f'(c)\neq\sup\{f'(x):\ x\in(a,b)\}, \tag{1}$$

există două puncte distincte a_0, $b_0\in(a,b)$ cu proprietatea că

$$f(b_0)-f(a_0)=(b_0-a_0)f'(c).$$

Demonstraţie. Fie $c \in (a,b)$ cu proprietatea (1) ; atunci există două puncte distincte d, $e \in (a,b)$ astfel încât

$$f'(d) < f'(c) < f'(e).$$

Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că $d < e$. Întrucât

$$f'(d) = \lim_{x \to d} \frac{f(x) - f(d)}{x - d},$$

există un număr real $\delta_d \in \left(0, \frac{1}{2}\min\{d-a, e-d\}\right)$ cu proprietatea

$$\frac{f(x) - f(d)}{x - d} < f'(c), \text{ oricare ar fi } x \in (d - \delta_d, d + \delta_d) \setminus \{d\}.$$

Alegem un punct $a_0 \in (d - \delta_d, d)$; urmează că

$$\frac{f(a_0) - f(d)}{a_0 - d} < f'(c).$$

Pe de altă parte, funcţia $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ definită prin

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{f(a_0) - f(x)}{a_0 - x}, & \text{dacă } x \in [a,b] \setminus \{a_0\} \\ f'(a_0), & \text{dacă } x = a_0, \end{cases}$$

este continuă pe $[a,b]$ şi $\varphi(d) < f'(c)$; deducem că există un număr real $\widehat{\delta}_d \in (0, \delta_d)$ cu proprietatea că

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(a_0)}{x - a_0} < f'(c), \text{ oricare ar fi } x \in \left(d - \widehat{\delta}_d, d + \widehat{\delta}_d\right) \setminus \{a_0\}.$$

Alegem un punct $s \in \left(d, d + \widehat{\delta}_d\right)$; urmează că

$$\varphi(s) = \frac{f(s) - f(a_0)}{s - a_0} < f'(c).$$

Analog, din

$$f'(c) > f'(e) = \lim_{x \to e} \frac{f(x) - f(e)}{x - e}$$

există un număr real $\delta_e \in \left(0, \frac{1}{2}\min\{e-d, b-e\}\right)$ cu proprietatea

$$\frac{f(x) - f(e)}{x - e} > f'(c), \text{ oricare ar fi } x \in (e - \delta_e, e + \delta_e) \setminus \{e\}.$$

Alegem un punct $r \in (e, e + \delta_e)$; urmează că

$$\frac{f(r) - f(e)}{r - e} > f'(c).$$

Pe de altă parte, funcţia $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ definită prin

$$\psi(x) = \begin{cases} \dfrac{f(r) - f(x)}{r - x}, & \text{dacă } x \in [a,b] \setminus \{r\} \\ f'(r), & \text{dacă } x = r, \end{cases}$$

este continuă pe $[a,b]$ şi $\psi(e) > f'(c)$; deducem că există un număr real $\widehat{\delta}_e \in (0,\delta_e)$ cu proprietatea că

$$\psi(x) = \frac{f(x)-f(r)}{x-r} > f'(c), \text{ oricare ar fi } x \in \left(e-\widehat{\delta}_e, e+\widehat{\delta}_e\right)\setminus\{r\}.$$

Alegem un punct $u \in \left(e-\widehat{\delta}_e, e\right)$; urmează că

$$\psi(u) = \frac{f(u)-f(r)}{u-r} > f'(c).$$

Din modul cum au fost alese numerele δ_d, $\widehat{\delta}_d$, δ_e, $\widehat{\delta}_e$ avem că

$$a < a_0 < d < s < u < r < b.$$

Fie

$$K := \frac{f(r)-f(a_0)}{r-a_0}.$$

Distingem trei cazuri:

Cazul $K = f'(c)$. În acest caz concluzia teoremei are loc cu $a_0 := a_0$, $b_0 := r$.

Cazul $K > f'(c)$. Funcţia φ este continuă pe $[a,b]$ şi

$$\varphi(s) < f'(c) < K = \varphi(r).$$

Urmează că există un punct $\widehat{x} \in (s,r) \subseteq (a_0,r) \subseteq [a,b]$ cu proprietatea că $\varphi(\widehat{x}) = f'(c)$, adică

$$\frac{f(a_0)-f(\widehat{x})}{a_0-\widehat{x}} = f'(c).$$

Prin urmare, concluzia teoremei are loc cu $a_0 := a_0$, $b_0 := \widehat{x}$.

Cazul $K < f'(c)$. Funcţia ψ este continuă pe $[a,b]$ şi

$$\psi(a_0) = K < f'(c) < \psi(u).$$

Urmează că există un punct $\widehat{y} \in (a_0,u) \subseteq (a_0,r) \subseteq [a,b]$ cu proprietatea că $\psi(\widehat{y}) = f'(c)$, adică

$$\frac{f(r)-f(\widehat{y})}{r-\widehat{y}} = f'(c).$$

Prin urmare, concluzia teoremei are loc cu $a_0 := \widehat{y}$, $b_0 := r$.

Teorema este demonstrată. □

În cele ce urmează vom da o altă reciprocă tare a teoremei de medie a lui Lagrange. (vezi [4])

TEOREMA 10. (*reciprocă tare a teoremei de medie a lui Lagrange*) *Fie a şi b două numere reale cu $a < b$ şi $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie. Dacă*

(i) funcţia f este continuă pe $[a,b]$;

(ii) funcţia f este derivabilă pe (a,b),

atunci pentru fiecare punct $c \in (a,b)$ pentru care (*a*) *c nu este punct de optim local al funcţiei* f' *relativ la* (a,b);

şi

(*b*) *c nu este punct de acumulare al mulţimii*

$$A := \{x \in (a,b): \ f'(x) = f'(c)\},$$

există un interval $(a_0, b_0) \subseteq (a,b)$ *cu* $c \in (a_0, b_0)$ *astfel încât*

$$f(b_0) - f(a_0) = (b_0 - a_0) f'(c).$$

Demonstraţie. Fie $c \in (a,b)$ un punct pentru care sunt satisfăcute condiţiile (a) şi (b).

Punctul c nefiind de optim local al funcţiei f' relativ la (a,b), există un interval $(a^*, b^*) \subseteq (a,b)$ astfel încât $c \in (a^*, b^*)$ şi

$$\inf\{f'(x): \ x \in (a^*, b^*)\} \neq f'(c) \neq \sup\{f'(x): \ x \in (a^*, b^*)\},$$

Fie

$$a_1^* := \frac{a^* + c}{2}, \ \ b_1^* := \frac{b^* + c}{2}$$

şi

$$a_{n+1}^* := \frac{a_n^* + c}{2}, \ \ b_{n+1}^* := \frac{b_n^* + c}{2}, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}.$$

Deducem imediat că, pentru orice număr natural n, avem

$$a^* < a_1^* < \cdots < a_n^* < \cdots < c < \cdots < b_n^* < \cdots < b^*,$$

şi

$$\lim_{n\to\infty} a_n^* = \lim_{n\to\infty} b_n^* = c.$$

În baza teoremei 9, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, există un interval $(a_n, b_n) \subseteq (a_n^*, b_n^*)$ astfel încât

$$f(b_n) - f(a_n) = (b_n - a_n) f'(c).$$

Vom arăta, folosind metoda reduceii la absurd, că există un număr natural n, astfel încât $c \in (a_n, b_n)$.

Presupunem aşadar, că

$$c \notin (a_n, b_n), \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

În baza teoremei de medie a lui Lagrange, pentru fiecare număr natural n, există un punct

$$c_n \in (a_n, b_n) \subseteq (a_n^*, b_n^*), \tag{3}$$

astfel încât

$$f(b_n) - f(a_n) = (b_n - a_n) f'(c_n).$$

Urmează că

$$f'(c) = f'(c_n), \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}.$$

Ţinând seama de (2) şi (3), deducem că

$$c_n \neq c, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}.$$

Pe de altă parte, din

$$(a_n, b_n) \subseteq (a_n^*, b_n^*)\,,\ \text{oricare ar fi } n \in \mathbb{N}$$

şi

$$\lim_{n\to\infty} (b_n^* - a_n^*) = 0,$$

deducem că şirul (c_n) nu este constant. Urmează că există un subşir $(c_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ al şirului (c_n) pentru care avem

$$\lim_{k\to\infty} c_{n_k} = c$$

şi

$$c_{n_k} \neq c,\ \text{oricare ar fi } k \in \mathbb{N}.$$

Aşadar c este punct de acumulare al mulţimii A, ceea ce contrazice ipoteza.

Urmează că există un număr natural n astfel încât $c \in (a_n, b_n)$ şi teorema este demonstrată. □

Observaţia 11. *Ipoteza că c nu este punct de acumulare al mulţimii A este esenţială, aşa cum ne arată exemplul următor:*

Examplul 12. *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin*

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x} - \frac{x^2}{2}, & \text{dacă } x < 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \\ x^3 \sin \frac{1}{x} + \frac{x^2}{2}, & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$$

Funcţia f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x} - x, & \text{dacă } x < 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \\ 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x} + x, & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$$

Punctul $c = 0$ nu este punct de optim local al derivatei f' relativ la $\mathbb{R}$ deoarece

$$f'\left(\frac{1}{(2n+1)\pi}\right) = \frac{2}{(2n+1)\pi} > 0,\ \text{oricare ar fi } n \in \mathbb{N},$$

şi

$$f'\left(\frac{-1}{\left(2n+1-\frac{1}{n^2}\right)\pi}\right) =$$

$$= \frac{-3}{\left[\left(2n+1-\frac{1}{n^2}\right)\pi\right]^2} \sin\frac{\pi}{n^2} - \frac{1}{\left(2n+1-\frac{1}{n^2}\right)\pi}\left(\cos\frac{\pi}{n^2} - 1\right) =$$

$$= \frac{-3}{4\pi n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) < 0,\ \text{oricare ar fi } n \in \mathbb{N},\ \text{suficient de mare.}$$

Întrucât

$$f'\left(\frac{-1}{(2n+1)\pi}\right) = f'\left(\frac{1}{2n\pi}\right) = 0,\ \text{oricare ar fi } n \in \mathbb{N},$$

punctul $c = 0$ *este punct de acumulare al mulţimii*

$$A := \left\{ x \in \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2} \right) : \ f'(x) = f'(0) \right\}.$$

Pe de altă parte, pentru funcţia f *avem*

$$f(x) \geq -x^3 + \frac{x^2}{2} = x^2 \left(\frac{1}{2} - x \right) > 0 = f(c), \ \textit{oricare ar fi } x \in \left(0, \frac{1}{2} \right],$$

$$f(x) \leq x^3 - \frac{x^2}{2} < 0 = f(c), \ \textit{oricare ar fi } x \in \left[\frac{-1}{2}, 0 \right),$$

şi deci

$$0 < \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \ \textit{oricare ar fi } a, \ b \textit{ cu } -\frac{1}{2} < a < 0 < b < \frac{1}{2}.$$

Aşadar, nu există nici un interval $(a, b) \subseteq \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2} \right)$ *cu* $c = 0 \in (a, b)$ *astfel încât*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) = 0.$$

Prin urmare, ipoteza că c *nu este punct de acumulare al mulţimii* A *este estenţială.* $\square$

Observaţia 13. *Ipoteza că* c *nu este punct de optim al funcţiei* f' *relativ la* (a, b) *este esenţială aşa cum ne arată exemplul următor:*

Examplul 14. *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *funcţia definită prin*

$$f(x) = x^3, \ \textit{oricare ar fi } x \in \mathbb{R}.$$

Funcţia f *este derivabilă şi*

$$f'(x) = 3x^2 > 0 = f'(0), \ \textit{oricare ar fi } x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}.$$

Prin urmare, $c = 0$ *este punct de minim al funcţiei* f' *relativ la* $[a, b] = [-1, 1]$.

Pe de altă parte, pentru $c = 0$ *nu există nici un interval* $(a_0, b_0) \subseteq (a, b)$ *cu proprietatea că*

$$f(b_0) - f(a_0) = (b_0 - a_0) f'(c) = 0.$$

Aşadar, ipoteza că c *nu este punct de optim al funcţiei* f' *relativ la* (a, b) *este esenţială.* $\square$

Teorema 15. *Fie* a *şi* b *două numere reale cu* $a < b$, $c \in (a, b)$ *şi* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *o funcţie continuă pe* $[a, b]$ *şi derivabilă pe* (a, b). *Dacă există două puncte* $a^*, b^* \in (a, b)$ *cu* $a^* < b^*$ *astfel încât* $c \in (a^*, b^*)$ *şi* c *este punct de optim al funcţiei* f' *relativ la* (a^*, b^*), *atunci are loc una din următoarele două afirmaţii:*

1^0 *Funcţia* f *este liniară pe* (a^*, b^*).

2^0 *Oricare ar fi* $a_0, b_0 \in (a^*, b^*)$ *cu* $a_0 < c < b_0$ *avem*

$$f'(c) \neq \frac{f(b_0) - f(a_0)}{b_0 - a_0}.$$

Demonstraţie. Este suficient să considerăm funcţii f pentru care avem:

$$f\left(c\right)=0 \quad \text{şi} \quad f'\left(c\right)=0,$$

deoarece putem înlocui funcţia f cu funcţia $\widehat{f}:[a,b]\to\mathbb{R}$ definită prin

$$\widehat{f}\left(x\right)=f\left(x\right)-\left(f\left(c\right)+f'\left(c\right)\left(x-c\right)\right), \text{ oricare ar fi } x\in[a,b].$$

1^0 Dacă f este liniară pe (a^*,b^*), teorema este demonstrată.

2^0 Presupunem că există $a_0,b_0\in(a^*,b^*)$ cu $a_0<c<b_0$ astfel încât

$$0=f'\left(c\right)=\frac{f\left(b_0\right)-f\left(a_0\right)}{b_0-a_0}.$$

Dacă $f\left(a_0\right)=f\left(b_0\right)>0$, în baza teoremei de medie a lui Lagrange aplicată funcţiei f pe intervalele $[a_0,c]$ şi respectiv $[c,b_0]$, există $c_1\in(a_0,c)$ şi $c_2\in(c,b_0)$ astfel încât

$$f'\left(c_1\right)=\frac{f\left(c\right)-f\left(a_0\right)}{c-a_0}=-\frac{f\left(a_0\right)}{c-a_0}<0=f'\left(c\right)$$

şi

$$f'\left(c_2\right)=\frac{f\left(b_0\right)-f\left(c\right)}{b_0-c}=\frac{f\left(b_0\right)}{b_0-c}>0=f'\left(c\right),$$

ori aceasta contrazice faptul că c este punct de optim al lui f' relativ la (a_0,b_0).

Dacă $f\left(a_0\right)=f\left(b_0\right)<0$, obţinem o contradicţie similară.

Dacă $f\left(a_0\right)=f\left(b_0\right)=0$, atunci $f\left(x\right)=0$, oricare ar fi $x\in(a_0,b_0)$. □

BIBLIOGRAFIE

[1] Almeida R.: *An elementary proof of a converse mean-value theorem*, International Journal of Mathematical Education Science and Technology, 39 (2008), no. 8, 1110 − 1111

[2] Duca I. Dorel: *Analiză matematică*, vol. I, Casa Cărţii de Ştiinţă, Cluj-Napoca, 2013

[3] Mortici Cristinel: *A converse of the mean value theorem made easy*, International Journal of Mathematical Education Science and Technology, 42 (2011), no. 1, 89 − 91

[4] Tong J., and Braza P.: *A converse of the mean value theorem*, American Mathematical Monthly, 104 (1997), no.10, 939 − 942

Facultatea de Matematică şi Informatică,
Universitatea Babeş-Bolyai Cluj-Napoca
Str. M. Kogălniceanu, no. 1
400084 Cluj-Napoca, Romania
e-mail: dorelduca@yahoo.com