DIDACTICA MATHEMATICA, Vol. 37 (2019) , pp. 9–16

STRATEGII DE ABORDARE A PROBLEMELOR DE URMĂRIRE

Diana Nicoleta DANCIU

Abstract. The purpose of this article is to present some solutions of a classical "chase problem". Its solution will be treated using the arithmetic method and the algebraic method.

Key words. chase problem, arithmetic method, algebraic method

1. INTRODUCERE

Problemele de mişcare îi ajută pe elevi să îşi dezvolte creativitatea, stimulează flexibilitatea gândirii, capacitatea de analiză şi sinteză, originalitatea, modalităţile de rezolvare, fiind variate (în rezolvare putem folosi atât metode aritmetice, cât şi modul de abordare algebric).

Vom clasifica problemele de mişcare astfel:

- probleme de mişcare în acelaşi sens (numite probleme de urmărire) şi
- probleme de mişcare în sensuri contrare (numite probleme de întâlnire).

Problema de matematică reprezintă transpunerea unei situaţii practice în relaţii cantitative în care intervin valori numerice cunoscute şi necunoscute, relaţii pe baza cărora se solicită determinarea valorilor necunoscute.

Rezolvarea corectă a unei probleme de matematică nu este posibilă decât în urma unei analize profunde a datelor, analiză care să permită o serie de reformulări ale problemei, apropiindu-ne astfel, din etapă în etapă, de soluţie. În activitatea de rezolvare a unei probleme se parcurg mai multe etape. În fiecare etapă are loc un proces de reorganizare a datelor şi de reformulare a problemei, pe baza activităţii de orientare a rezolvitorului pe drumul şi în direcţia soluţiei problemei. Aceste etape sunt :

(1) Cunoaşterea enunţului problemei
(2) Înţelegerea enunţului problemei
(3) Analiza problemei şi întocmirea planului logic
(4) Alegerea şi efectuarea operaţiilor corespunzătoare succesiunii judecăţilor din plan logic
(5) Activităţi suplimentare :
    (a) verificarea rezultatului
    (b) scrierea sub forma de exerciţiu
    (c) găsirea altei căi sau metode de rezolvare
    (d) generalizare
    (e) compunere de probleme după o schemă asemanătoare

Lucrarea de faţă îşi propune să abordeze diferite strategii de rezolvare ale unei probleme de urmărire clasice, şi anume:

Problema. *Un câine de vânătoare urmăreşte un iepure care are* ***N*** *sărituri înaintea lui. Câte sărituri va face câinele până să-l ajungă pe iepurele, ştiind că el face* ***a*** *sărituri, în timp ce iepurele face* ***b*** *şi că, în* ***p*** *sărituri, câinele parcurge aceeaşi distanţă pe care o parcurge iepurele în* ***q*** *sărituri.*

2. STRATEGII DE ABORDARE

2.1. Strategia 1. Problemele care se rezolvă folosind *metoda comparaţiei* se caracterizează prin faptul că se dau două mărimi (care sunt comparate "în acelaşi mod") şi legătura care există între ele. Aceste mărimi sunt caracterizate prin câte două valori fiecare şi de fiecare dată se cunoaşte legătura dintre ele. Metoda constă în a face ca una din cele două mărimi să aibă aceeaşi valoare şi astfel problema devine mai simplă, având o singură necunoscută. Din această cauză poartă şi numele de "aducerea la acelaşi termen de comparaţie".
Observaţie. Metoda comparaţiei stă la baza rezolvării sistemelor de ecuaţii cu două necunoscute prin metoda reducerii.

Vom organiza datele problemei astfel:
În timp ce câinele face a sărituri ...... iepurele face b sărituri
p sărituri de câine fac cât ...... q sărituri de iepure
Transformăm datele pentru a le putea compara, cu alte cuvinte, aducem la acelaşi termen de comparaţie astfel:
În timp ce câinele face a sărituri ...... iepurele face b sărituri $/\cdot p$
p sărituri de câine fac cât ...... q sărituri de iepure $/\cdot a$
şi obţinem:
În timp ce câinele face $a \cdot p$ sărituri ...... iepurele face $b \cdot p$ sărituri
$a \cdot p$ sărituri de câine fac cât ...... $a \cdot q$ sărituri de iepure
Comparând acum rezultatele constatăm că, în timp ce câinele face $a \cdot p$ sărituri, iepurele face $b \cdot p$ sărituri, dar cele $a \cdot p$ sărituri ale câinelui fac cât $a \cdot q$ sărituri ale iepurelui.

După fiecare $a \cdot p$ sărituri câinele se apropie de iepure cu $a \cdot q - b \cdot p$ sărituri. Pentru a determina de câte ori trebuie să facă câinele câte $a \cdot p$ sărituri pentru a acoperi distanţa de N sărituri (de care se află faţă de iepure) împărţim N la $(a \cdot q - b \cdot p)$. Câte sărituri face câinele pentru a ajunge iepurele? $(a \cdot p) \cdot N : (a \cdot q - b \cdot p)$

2.2. Strategia 2.

Notăm cu x numărul de sărituri necesare câinelui pentru a ajunge iepurele
y numărul de sărituri pe care le face iepurele din momentul începerii urmăririi şi până în momentul în care iepurele este ajuns de câine.

În aceeaşi unitate de timp, câinele face a sărituri iar
iepurele face b sărituri,
prin urmare, pe durata urmăririi, trebuie să avem:

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b} \iff bx - ay = 0 \tag{1}$$

Dar lungimea a p sărituri ale câinelui este egală cu lungimea a q sărituri ale iepurelui.

Pe aceeaşi distanţă, adică din punctul în care începe urmărirea şi până în punctul în care se termină câinele face x sărituri, iar
iepurele face $N + y$ sărituri.

şi cum raportul dintre numărul săriturilor efectuate pe aceeaşi distanţă este egal cu raportul dintre lungimile săriturilor lor, deducem

$$\frac{x}{N + y} = \frac{p}{q} \iff qx - py = pN \tag{2}$$

Obţinem astfel sistemul

$$\begin{cases} bx - ay = 0 \\ qx - py = pN \end{cases} \tag{3}$$

Deoarece $p > 0$, $N > 0$, are soluţie (unică) dacă ecuaţia obţinută prin reducerea necunoscutei y (înmulţind cu $-p$ prima ecuaţie a sistemului şi cu a pe cea de-a doua)

$$(aq - bp)x = apN$$

are soluţie unică, adică

$$\frac{a}{b} \neq \frac{p}{q}, \tag{4}$$

respectiv raportul dintre lungimea săriturilor efectuate în unitatea de timp este diferit de raportul dintre numărul săriturilor efectuate în unitatea de distanţă. Presupunând (4) satisfăcută, obţinem soluţia

$$\begin{cases} x = \frac{apN}{aq-bp} \\ y = \frac{bpN}{aq-bp}. \end{cases} \tag{5}$$

Ţinând seama de semnificaţia mărimilor x şi y, care sunt numere pozitive (în general, întregi), trebuie să avem $aq - bp > 0$, adică

$$\frac{a}{b} > \frac{p}{q}, \tag{6}$$

pentru ca problema să nu se îndeparteze de semnificaţia ei practică. Ceea ce înseamnă că, pentru a ajunge câinele, iepurele este necesar şi suficient să fie îndeplinită condiţia (6). Aşadar câinele are nevoie de $\frac{apN}{aq-bp}$ sărituri pentru a ajunge iepurele. Acesta a făcut $\frac{bpN}{aq-bp}$ sărituri din momentul începerii urmăririi şi până când a fost ajuns.

Observaţia 1. Ecuaţia (2) poate fi obţinută şi astfel:
p sărituri câine ... fac cât q sărituri iepure
x sărituri câine ... fac cât $N + y$ sărituri iepure,
deci, regula de trei simplă pentru mărimi direct proporţionale ne dă

$$p(N + y) = xq$$

2.3. Strategia 3.

Notăm cu S distanţa parcursă de câine în timpul urmăririi
z lungimea unei sărituri a câinelui
t lungimea unei sărituri a iepurelui.

Atunci avem

$$pz = qt \tag{7}$$

Dacă iepurele a făcut m sărituri în timpul urmăririi, atunci el a făcut $N + m$ sărituri pentru a parcurge distanţa S, deci

$$S = (m + N) \cdot t$$

Pe de altă parte, dacă n este numărul săriturilor câinelui, atunci

$$S = n \cdot z$$

deci

$$(m + N) \cdot t = n \cdot z$$

care ţinând seama de (7), ne dă

$$(m + N) \cdot p = n \cdot q \tag{8}$$

Pe de altă parte, raportul dintre numărul săriturilor efectuate de câine şi numărul săriturilor efectuate de iepure în aceeaşi perioadă de timp trebuie să fie $\frac{a}{b}$, deci

$$\frac{n}{m} = \frac{a}{b} \tag{9}$$

Din (8) şi (9) obţinem acum

$$n = \frac{apN}{aq - bp}$$

şi

$$m = \frac{bpN}{aq - bp}$$

Observaţia 2. Este uşor de văzut că ecuaţiile (8) şi (9) coincid cu ecuaţiile (2) şi (1) obţinute prin cea de-a doua strategie.

2.4. Strategia 4. Amintim următoarele noţiuni fizice:

Corpul de referinţă este corpul considerat fix faţă de care se determină poziţia corpului studiat.

Sistemul de referinţă este ansamblul format din corpul de referinţă, rigla pentru determinarea poziţiei corpului studiat şi ceasornicul pentru indicarea timpului. Pentru studierea unui fenomen fizic trebuie precizat (obligatoriu) sistemul de referinţă la care ne raportăm.

Un corp este *în mişcare* faţă de un sistem de referinţă dacă îşi schimbă, în fiecare moment, poziţia faţă de sistemul de referinţă ales. Un corp este *în repaus* faţă de un sistem de referinţă dacă nu-şi schimbă poziţia faţă de sistemul de referinţă ales.

Mobilul este un model folosit pentru reprezentarea unui corp în mişcare căruia îi neglijăm forma, dimensiunile şi masa.

Traiectoria este curba obţinută unind poziţiile succesive pe care le ocupă un mobil în timpul mişcării faţă de un sistem de referinţă.

Viteza medie este mărimea fizică numeric egală cu raportul dintre distanţa parcursă de un mobil şi durata parcurgerii acestei distanţe de către mobil.

$$v = \frac{d}{\Delta t} \tag{10}$$

Un metru pe secundă este viteza unui mobil care parcurge distanţa de un metru în timp de o secundă.

Mişcarea rectilinie este mişcarea în care traiectoria este o linie dreaptă.

Mişcarea rectilinie uniformă este mişcarea rectilinie în care viteza mobilului nu se modifică; este mişcarea rectilinie în care mobilul parcurge distanţe egale în intervale de timp egale.

$$v = constant$$

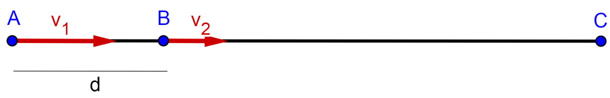
În cazul mobilelor care se deplasează pe aceaşi direcţie şi in acelaşi sens (se urmăresc) viteza de apropiere a unuia faţă de celălalt este egală cu diferenţa vitezelor celor două mobile.

Legea mişcării rectilinii uniforme În mişcarea rectilinie uniformă distanţa parcursă de un mobil este direct proporţională cu durata mişcării.

$$d = v \cdot \Delta t \tag{11}$$

Mişcarea relativă este mişcarea punctului în raport cu reperul mobil. Traiectoria, viteza şi acceleraţia punctului în această mişcare se numesc corespunzător relative.

Notăm, în continuare cu: d distanţa dintre iepure şi câine
l_1 lungimea unei sărituri a câinelui
l_2 lungimea unei sărituri a iepurelui
v_1 viteza câinelui
v_2 viteza iepurelui.



ncepem rezolvarea problemei printr-un desen unde: A reprezintă poziţia câinelui,
B reprezintă poziţia iepurelui iar
C este punctul de întîlnire.

Prima condiţie. Într-un interval de timp t câinele face a sărituri iar iepurele face b sărituri.

Distan c ta parcursă de câine: $d_1 = v_1 \cdot t$, de unde $t = \frac{d_1}{v_1}$

iepure: $d_2 = v_2 \cdot t$, de unde $t = \frac{d_2}{v_2}$

de unde $\frac{d_1}{v_1} = \frac{d_2}{v_2}$

Pe de altă parte, $d_1 = l_1 \cdot a$

$d_2 = l_2 \cdot b$

Prin urmare

$$\frac{a \cdot l_1}{v_1} = \frac{b \cdot l_2}{v_2} \tag{12}$$

Fie intervalul de timp (durata) necesar câinelui pentru al ajunge pe iepure: t_c

distanţa dintre A i B: $d = N \cdot l_2$

viteza relativă: $v_1 - v_2$

Atunci

$$t_c = \frac{N \cdot l_2}{v_1 - v_2} \tag{13}$$

Câinele are nevoie de X sărituri pentru a ajunge iepurele, iar distanţa A-C(distanţa pe care o parcurge câinele în timpul urmăririi) este egală cu $X \cdot l_1$.

$$t_c = \frac{X \cdot l_1}{v_1} \tag{14}$$

Condiţia a doua. Distanţa parcursă de câine în p sărituri este aceeaşi cu cea parcursă de iepure în q sărituri.

$$p \cdot l_1 = q \cdot l_2 \iff l_1 = \frac{q \cdot l_2}{p} \tag{15}$$

Din (12) rezultă $\frac{v_1}{v_2} = \frac{al_1}{bl_2}$, folosind apoi proporţiile derivate obţinem:

$$\frac{v_1}{v_1 - v_2} = \frac{al_1}{al_1 - bl_2} \tag{16}$$

Egalând (2) cu (3) avem: $x \cdot l_1 = \frac{v_1}{v_1 - v_2} \cdot N \cdot l_2$ Prin înlocuirea lui l_1 din (15) şi raportul vitezelor din (16) rezultă că: $X = \frac{N \cdot l_2 \cdot a}{a \cdot \frac{q \cdot l_2}{p} - b \cdot l_2}$.

În urma efectuării calculelor, ajungem la rezultatul problemei şi anume,

$$X = \frac{N \cdot p \cdot a}{a \cdot q - b \cdot q}$$

3. CONCLUZII

Se ştie că după rezolvarea unui număr de probleme asemănătoare, în mintea rezolvitorului se formează o schemă pe care o reproduce în condiţii similare. Aceasta însă se bazează pe analiza şi înţelegerea relaţiilor dintre datele problemei, pe efortul făcut de gândirea lui până la sesizarea acestor relaţii.

O analiză profundă a problemei trebuie să-i pună pe rezolvitori în situaţia de a recunoaşte şirul de raţionamente şi atunci când se schimbă tematica problemei şi mărimea valorilor numerice, şi atunci când în enunţul problemei valorile numerice îşi schimbă locul. Rezolvitorii trebuie să le aprecieze după semnificaţia lor, după relaţia pe care o reprezintă, şi nu după simpla poziţie pe care o au în cadrul enunţului problemei.

Lăsăm cititorului misiunea de a aborda următoarele probleme:

1. Un ogar urmăreşte o vulpe care are 60 sărituri înaintea lui. Peste câte sărituri va ajunge ogarul vulpea, ştiind că, pe când ogarul face 6 sărituri, vulpea face 9, dar că 3 sărituri de-ale ogarului fac cât 7 de-ale vulpii?
R: Ogarul ajunge vulpea peste 72 sriturі.

2. Mădălina trebuie să parcurgă 1200 paşi în cadrul antrenamentului său. Ea se antrenează împreună cu Ruxandra care a făcut deja 80 paşi când Mădălina îşi începe antrenamentul. Ştiind că în timp ce Mădălina face 5 paşi, Ruxandra face 4 şi că 7 paşi de-ai Mădălinei fac cât 6 paşi de-ai Ruxandrei, să se spună dacă Mădălina o va ajunge în timpul antrenamentului său pe Ruxandra.
R: Mădălina nu o ajunge pe Ruxandra deoarece ea parcurge doar 1200 de paşi în timpul antrenamentului său.

3. Două echipe de muncitori efectuează lucrări identice. A doua echipă a început lucrarea cu 30 de zile mai repede. Să se afle după câte zile echipele vor ajunge în aceeaşi fază de execuţie a lucrării, ştiind că productivitatea muncii în prima echipă este de două ori mai mică decât cea din echipa a doua, dar că prima echipă are de trei ori mai mulţi muncitori decât a doua. (Admitem că echipele sunt omogene, adică toţi muncitorii dintr-o echipă lucrează la fel).
R: După 30 de zile cele două echipe vor ajunge în aceeaşi fază de execuţie a lucrării.

4. Un ogar urmăreşte o vulpe care are 25 sărituri înaintea lui. Ştiind că, în timp ce ogarul face 3 sărituri, vulpea face 7, şi că 2 sărituri de-ale ogarului

fac cât n sărituri de-ale vulpii, să se determine:
a) n minim astfel încât ogarul să ajungă vulpea;
b) n maxim astfel încât ogarul să nu ajungă vulpea.
R. a) n minim=5; b) n maxim=4.

BIBLIOGRAFIE

[1] M. Alixandraoaea: *Strategii de rezolvare a problemelor de matematică la clasele I-IV*, Editura Rovimed Publishers, Bacău, 2010

[2] V. Berinde: *Două strategii de abordare a problemelor de urmărire* , Lucrările Seminarului de creativitate matematică, vol.3 (1993-1994), 29-42

[3] D. Gurgui: *Probleme de mişcare*, Editura Sitech, Bucureşti, 2007.

[4] N. Oprescu: *Modernizarea învăţământului matematic în ciclul primar*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1974

Şcoala Profesională Band
Mureş, Romania
e-mail: dianna_vas@yahoo.com