DIDACTICA MATHEMATICA, Vol. 36 (2018), Pages 65-71

FRUMUSEŢEA UNOR PROBLEME DE GIMNAZIU

Ioana-Alexandra Şomîtcă

Lucrarea colectează 10 probleme care se adresează în special elevilor de gimnaziu. Aceste probleme au fost extrase din [1] şi [2]. Domeniile vizate de aceste probleme sunt în principal logica matematică şi teoria numerelor. Motivaţia principală a articolului este de a oferi materiale pentru orele de clasă şi cercuri de elevi. Soluţiile problemelor sunt detaliate dând posibilitatea de a fi înţelese de cititorii elevi. Precizăm că unale soluţii sunt diferite de cele care apar în [2].

Problema 1. [1, *Problema 8*] Aflaţi toate perechile de numere naturale (a, b), $a > b$, a căror sumă este 137 şi pentru care 37 divide diferenţa lor.

Soluţie. Din enunţ deducem

$$a + b = 137 \text{ şi } a - b = 37k, \text{ unde } k \in \mathbb{N}.$$

Astfel $2b = 137 - 37k$ ceea ce implică faptul că numărul k este impar.

Pentru $k = 1$, avem $b = 50$ şi $a = 87$.

Pentru $k = 3$, avem $b = 13$ şi $a = 124$.

Pentru $k \geq 5$, $2b + 37k \geq 2b + 185 > 137$ şi nu mai avem soluţii. Astfel, perechile căutate sunt $(87, 50)$ şi $(124, 30)$.

Problema 2. [1, *Problema 1 de la pagina 99*] Determinaţi numerele naturale n, $n + 2$ şi $n + 4$ ştiind că sunt simultan numere prime.

Soluţie. *Cazul 1.* Dacă $n = 2$, obţinem tripletul $(2, 4, 6)$ care nu sunt simultan prime.

Cazul 2. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Atunci n are una dintre următoarele forme: $3k$, $3k + 1$ sau $3k + 2$.

Dacă $n = 3k$ şi n este prim, rezultă $n = 3$. Tripletul $(3, 5, 7)$ satisface cerinţele problemei.

Dacă $n = 3k + 1$, atunci $(n + 2)$ este divizibil cu 3.

Dacă $n = 3k + 2$, atunci $(n + 1)$ este divizibil cu 3.

În consecinţă nu mai obţinem alte soluţii.

Comentarii. 1) Două numere prime a căror diferenţă este 2 se numesc numere prime gemene. De exemplu (5,7), (11,13), (17,19).

2) Problema precedentă arată că există o singură formaţie de 3 numere prime trigemene, adică de forma n, $n + 2$, $n + 4$. Aceasta este $(3, 5, 7)$.

Problema 3. [2, *Problema 235*] Un copil are trei borcane cu vopsele de culori diferite. În câte moduri diferite poate vopsi un gard format din 10 scânduri astfel încât orice două scânduri alăturate să aibă culori diferite şi el să folosească culori din toate cele trei vase?

Soluţie. Fie c_1, c_2, c_3 cele 3 culori. Prima scândură poate fi vopsită în oricare dintre cele 3 culori (adică vor fi 3 variante). Pentru continuarea raţionamentului, reamintim un principiu elementar de calcul, şi anume:

Dacă un lucru poate fi făcut în p moduri şi altul în q moduri, atunci cele două lucruri pot fi realizate în $p \cdot q$ moduri.

În cazul nostru fiecare scândură din cele 9 poate fi vopsită în una dintre cele două culori diferite de cea anterioară. Astfel obţinem

$$3 \times \underbrace{2 \times 2 \times \ldots \times 2}_{\text{9 poziţii}} = 3 \times 2^9 = 1536.$$

În cazurile de mai sus, au fost incluse şi variantele în care s-au folosit doar două culori. De exemplu, dacă primele două scânduri au culorile c_1, c_2, atunci respectând ipoteza avem următoarea posibilitate de a vopsi cele 10 scânduri

$$(c_1, c_2),\ (c_1, c_2),\ (c_1, c_2),\ (c_1, c_2),\ (c_1, c_2).$$

Analog pentru cazurile (c_2, c_1), (c_1, c_3), (c_3, c_1), (c_2, c_3), (c_3, c_2).

S-au obţinut 6 cazuri în care s-au folosit doar 2 culori. Soluţia problemei este

$$1536 - 6 = 1530.$$

Problema 4. [2, *Problema 109*] O lăcustă sare pe un plan astfel încât lungimea fiecărei sărituri este de două ori mai mare decât a săriturilor precedente. Poate lăcusta să se întoarcă vreodată în punctul de plecare?

Soluţie. Să presupunem că lungimea primei sărituri este egală cu d ($d > 0$) şi după n sărituri ($n \geq 3$) s-ar întoarce în punctul iniţial. Atunci drumul lăcustei ar fi o linie frântă închisă $A_1A_2 \ldots A_nA_1$ cu segmente de lungimi $d, 2d, 2^2d, \ldots, 2^{n-1}d$. Deoarece cea mai scurtă distanţă dintre A_1 şi A_n este A_1A_n, putem scrie

$$A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{n-1}A_n > A_1A_n$$
$$d + 2d + 2^2d + \ldots + 2^{n-2}d > 2^{n-1}d.$$

Se obţine $2^{n-1} - 1 > 2^{n-1}$ ceea ce este o contradicţie.

În concluzie, lăcusta nu se poate întoarce niciodată în punctul de plecare.

Problema 5. [2, *Problema 1*] Se poate plăti suma de 125 unităţi bancare cu 50 de monede/bancnote de valori 1, 3 şi 5? Precizăm că trebuie folosite toate cele 3 tipuri de monede/bancnote.

Soluţie. Fie a, b respectiv c numărul monedelor/bancnotelor cu valoarea de 1, 3 respectiv 5 unităţi bancare. Din enunţul problemei deducem ecuaţiile:

$$1 \cdot a + 3 \cdot b + 5 \cdot c = 125, \tag{1}$$
$$a + b + c = 50. \tag{2}$$

Dacă vom considera toate numerele a, b, c pare, deducem că relaţia (1) este falsă.

Dacă un singur număr este impar, relaţia (2) este falsă.

Dacă două numere sunt impare, relaţia (1) este falsă.

Dacă toate numere sunt impare, relaţia (2) este falsă.

În concluzie, nu se poate plăti suma cerută în condiţiile date.

Problema 6. [2, *Problema 2.2*] Mai mulţi copii grupaţi în perechi (o fată şi un băiat) au venit într-o pădure pentru a culege ciuperci. În final s-a constatat că în cadrul fiecărei perechi, băiatul a cules fie de două ori mai multe ciuperci decât fata, fie de două ori mai puţine ciuperci decât fata. Este posibil ca întregul grup de copii să fi cules 2018 ciuperci?

Soluţie. Precizăm că pentru fiecare pereche sunt doar două moduri posibile de culegerea a ciupercilor..

(i) Fata a cules x ciuperci şi băiatul $2x$ ciuperci

sau

(ii) Băiatul a cules y ciuperci şi fata $2y$ ciuperci.

În ambele cazuri, numărul ciupercilor culese de fiecare pereche este divizibil cu 3. În consecinţă, grupul a cules un număr de ciuperci divizibil cu 3. Deoarece 2018 nu este divizibil cu 3, răspunsul este negativ.

Problema 7. [2, *Problema R70*] Avem o echipă de 3 persoane. Fiecare persoană a scris pe o coală de hârtie câte 100 cuvinte distincte. După aceea, confruntând listele au şters cuvintele care au fost scrise de cel puţin două ori. În final, pe prima foaie au rămas 45 cuvinte, pe a doua au rămas 68 şi pe a treia au rămas 54. Să se demonstreze că cel puţin un singur cuvânt a fost scris de toate cele 3 persoane.

Soluţie. Presupunem prin reducere la absurd că pe cele 3 liste apar doar cuvintele scrise o singură dată sau scrise de două ori. Conform enunţului problemei, cuvintele care apar de două ori pe liste se elimină, deci numărul cuvintelor şterse poate fi $0, 2, 4, \ldots, 150$, altfel scris $2k$, $0 \leq k \leq 75$. Numărul de cuvinte scris pe cele 3 liste este 300. Eliminând cuvintele scrise de două ori, vom obţine un număr par de cuvinte şi anume $300 - 2k$, $0 \leq k \leq 75$.

În realitate, au rămas $45 + 68 + 54 = 167$ cuvinte (număr impar), ceea ce este o contradicţie. Astfel, cel puţin un cuvânt a fost scris de 3 ori.

Problema 8. [2, *Problema R35*] Considerăm o suprafaţă pătratică care asemănător tablei de şah, este împărţită în 15×15 pătrate. Fiecare pătrat se colorează în una din următoarele 3 culori distincte: c_1, c_2, c_3. Ştiind că s-au folosit toate cele 3 culori, să se demonstreze că există cel puţin două linii ale suprafeţei în care pătratele care au o aceeaşi culoare sunt în număr egal.

Soluţie. Afirmăm: pentru a nu avea două linii cu acelaşi număr de pătrate vopsite în culoarea c_1, ar trebui să avem cel puţin 105 pătrate ale tablei vopsite în culoarea c_1.

Justificare. Considerăm că pe linia i sunt k_i pătrate vopsite cu culoarea c_1, $1 \leq i \leq 15$.

(a) Pe de o parte toate numerele k_i, $1 \leq i \leq 15$, trebuie să fie distincte (altfel am avea două linii care conţin acelaşi număr de pătrate vopsite cu culoarea c_1).

(b) Pe de altă parte pentru a obţine ca $\sum_{i=1}^{15} k_i$ să aibă valoarea cea mai mică, având în vedere (a), această suma va fi

$$0 + 1 + \ldots + 14 = 105.$$

Analog pentru culorile c_2 şi c_3. Se obţin

$$3 \cdot 105 = 315 \text{ pătrate.}$$

Contradicţie cu faptul că tabla are 225 pătrate.

Problema 9. [2, *Problema R134*] La întrebarea despre vârsta copiilor săi, un matematician a răspuns:

"Noi avem 3 copii. Când s-a născut primul, vârsta însumată a membrilor familiei era 45 ani, când s-a născut al treilea, cu un an în urmă, era 70, iar în acest an vârstele însumate ale copiilor sunt 14 ani."

Care sunt vârstele copiilor matematicianului?

Soluţie. Fie a respectiv b, vârsta actuală a mamei, respectiv a tatălui. Fie x respectiv y vârsta actuală a primului, respectiv al celui de-al doilea copil $(x > y)$. Conform textului problemei, în prezent, cel de-al treilea copil are 1 an. Tot din enunţ, rezultă

$$x + y + 1 = 14. \tag{1}$$

Deoarece la naşterea primului copil, părinţii aveau suma vârstelor 45 ani, putem scrie

$$(a - x) + (b - x) = 45. \tag{2}$$

Tot din enunţul problemei deducem

$$(a - 1) + (b - 1) + (x - 1) + (y - 1) = 70,$$

adică

$$a + b + x + y = 74. \tag{3}$$

Din (1) şi (3) obţinem $a + b = 61$. De aici relaţia (2) implică $x = 8$ şi în final, folosind (1), obţinem $y = 5$.

Problema 10. [2, *Problema 202*] Un copil a plecat la cules ciuperci între orele opt şi nouă dimineaţa, atunci când cele două ace ale ceasului său erau suprapuse. S-a întors acasă între orele două şi trei ziua, când acele erau în prelungire. Cât a durat plimbarea copilului?

Soluţie. Reamintim: lungimea cercului este $2\pi r$, lungimea unui arc de cerc (văzut din centru sub un unghi de 1°) este $\dfrac{2\pi r}{360^\circ}$ şi lungimea unui arc de cerc de α° este $\dfrac{2\pi r}{360^\circ} \cdot \alpha^\circ$.

Pe un ceas vom analiza pe rând traseul pe care îl parcurge minutarul respectiv orarul.

Fie x minutul când după ora 8 acele se suprapun.

Notăm cu B punctul care corespunde orei 8 şi fie S punctul de pe cerc (situat între 8 şi 9) unde acele se suprapun.

Minutarul în 60 minute face 360°, deci minutarul parcurge 6° pe minut.

Orarul în 12 ore face 360°. Rezultă că în 60 minute el face 30°, cu alte cuvinte orarul face $0,5°$ pe minut.

Pasul 1. Momentul plecării (Figura 1).

Intervalul orar $8-9$.

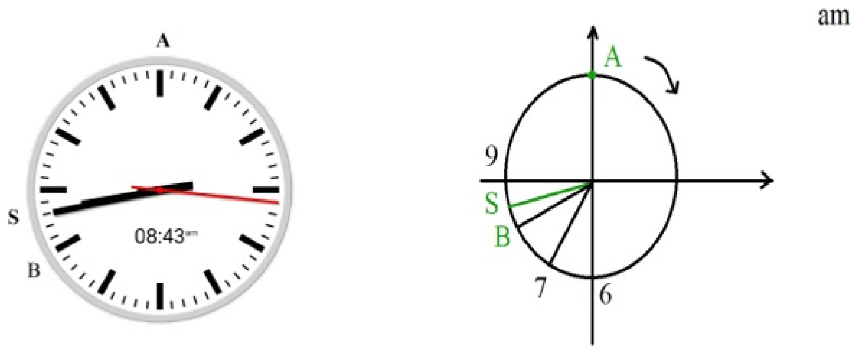

Figura 1. *Momentul plecării*

Fie x minutul când se suprapun cele două ace, în ipoteza de mai sus, respectiv după ora 8. Lungimea arcului $\widehat{ABS}$ generat de orar este

$$\frac{2\pi r}{360^\circ}(240^\circ + 0,5^\circ x). \tag{1}$$

Lungimea arcului $\widehat{ABS}$ generat de minutar este

$$\frac{2\pi r}{360^\circ} \cdot 6^\circ x. \tag{2}$$

Deoarece ne interesează momentul suprapunerii celor două ace, egalăm relaţiile (1) şi (2)

$$\frac{2\pi r}{360^\circ}(240^\circ + 0,5^\circ x) = \frac{2\pi r}{360^\circ} \cdot 6^\circ x,$$

obţinând

$$240^\circ = 5,5^\circ x,$$

adică

$$x = \frac{480}{11} = 43\frac{7}{11}.$$

Deci la ora 8 şi $43\frac{7}{11}$ minute, copilul pleacă de acasă.

Pasul 2. Momentul sosirii (Figura 2).

Vom proceda analog pasului 1, aplicând acelaşi raţionament pentru intervalul orar $14-15$.

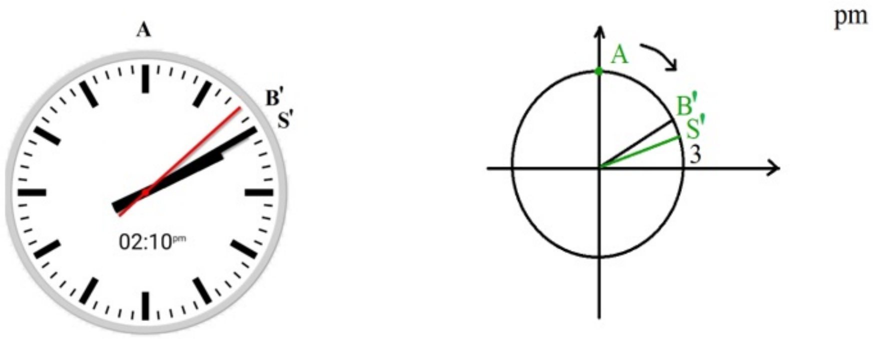

Figura 2. *Momentul întoarcerii*

Fie y minutul când se suprapun cele două ace în intervalul $14 - 15$.

Deoarece a fost depăşit intervalul de 12 ore în care orarul face $360°$, vom considera ora 12 ca fiind ora 0.

Lungimea arcului $\widehat{AB'S'}$ generat de orar este

$$\frac{2\pi r}{360°}(60° + 0,5° y). \tag{3}$$

Lungimea arcului $\widehat{AB'S'}$ generat de minutar este

$$\frac{2\pi r}{360°} \cdot 6° y. \tag{4}$$

Egalând relaţiile (3) şi (4), obţinem

$$60° = 5,5y,$$

adică

$$y = \frac{120}{11} = 10\frac{10}{11}.$$

Plimbarea a durat $16\frac{4}{11}$ minute $+ 5$ ore $+ 10\frac{10}{11}$ minute, adică 5 ore şi $27\frac{3}{11}$ minute.

Precizăm că soluţia dată în [2, Problema 202] indică doar o valoare aproximativă a timpului scurs, deci nu are rigoarea demonstraţiei prezentate de noi.

Relativ la acest tip de problemă poate fi luată în considerare următoarea generalizare.

La miezul zilei şi la miezul nopţii minutarul şi orarul oricărui ceasornic se suprapun. De câte ori, între miezul zilei şi miezul nopţii, se mai suprapune minutarul cu orarul?

O soluţie detaliată a fost dată, de exemplu, de Cristina Vuşcan, vezi [3]. Sunt 10 astfel de suprapuneri. Indicăm mai jos momentele şi poziţiile de pe cadran corespunzătoare acestor suprapuneri.

Suprapunerea	*Ora*	*Poziţia de pe cadran*
1	13 h $5\frac{5}{11}$ min	$32°\frac{8}{11}$
2	14 h $10\frac{10}{11}$ min	$65°\frac{5}{11}$
3	15 h $16\frac{4}{11}$ min	$98°\frac{2}{11}$
4	16 h $21\frac{9}{11}$ min	$130°\frac{10}{11}$
5	17 h $27\frac{3}{11}$ min	$163°\frac{7}{11}$
6	18 h $32\frac{8}{11}$ min	$196°\frac{4}{11}$
7	19 h $38\frac{2}{11}$ min	$229°\frac{1}{11}$
8	20 h $43\frac{7}{11}$ min	$261°\frac{9}{11}$
9	21 h $49\frac{1}{11}$ min	$294°\frac{6}{11}$
10	22 h $54\frac{5}{11}$ min	$327°\frac{3}{11}$

Pentru a încheia într-o notă optimistă, dacă rezolvarea acestor probleme va mai păstra, în mintea cititorilor elevi, afirmaţia *,,M-am săturat de matematică până în gât"*, ei bine, le vom aduce aminte citatul lui Grigore C. Moisil (1906-1973) ,,Matematica se face de la gât în sus."

BIBLIOGRAFIE

[1] M. Linţ, D. Linţ, R. Marinescu, D. Şt. Marinescu, M. Monea, M. Stroe, *Matematica de excelenţă pentru concursuri, olimpiade şi centre de excelenţă, clasa a X-a*, Editura Paralela 45, 2013.

[2] N. Agahonov, O. Podlipsky, *Olimpiade matematice ruseşti Moscova 1993-2002*, Editura Gil, 2004.

[3] http://www.logicus.ro/index.php/probleme-de-gandire-laterala/878-suprapunere-de-orar-si-minutar

Facultatea de Matematică şi Informatică
Universitatea Babeş-Bolyai Cluj-Napoca
e-mail: `ioana.somitca@gmail.com`