DIDACTICA MATHEMATICA, Vol. 36 (2018), Pages 47-59

MULŢIMEA PUNCTELOR DE ACUMULARE: EXEMPLE UTILE ŞI GREŞELI TIPICE

Anca Grad

Abstract. It is a common practice for the high-school students to compute derivatives of certain functions by applying formulas, ignoring the depth of the problem concerning the actual domain on which such derivatives should be studied. Understanding thoroughly the concept of the set of accumulation points holds the key in correctly studying limits of functions, derivatives and obviously, asymptotes. In this article we give the definition and characterization of the set of accumulation points, accompanied by some tricky examples which challenge the understanding of the students, as observed in the years of practice with Mathematics and Mathematics and Computer Science students at the lecture and seminar of Calculus 1.
MSC 2000. 54H25.
Key words. Topology, convergence, the set of the accumulation points.

1. INTRODUCERE

Practica cu studenţii de la specializările din domeniul Matematică conduce înspre concluzia că din păcate, întelegerea profundă a noţiunilor cu care operează la analiză matematică, nu este foarte temeinică. Un accent deosebit trebuie pus pe cazurile particulare care nu au un comportament intuitiv. Articolul de faţă se axează pe mulţimea punctelor de acumulare, legătura dintre mulţimea punctelor de acumulare şi şiruri, precum şi exemple importante mai apoi în exerciţii privind limte de funţii sau derivabilitate.

2. PRELIMINARII TEORETICE

2.1. **Noţiuni topologice.** Fie $x_0 \in \mathbb{R}$ un punct şi $r > 0$. Numim **bilă de centru** x_0 **şi rază** r, intervalul centrat în punctul x_0, de lungime $2r$, deci

$$B(x_0, r) = (x_0 - r, x_0 + r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\}.$$

Folosirea acestei notaţii se justifică mai ales atunci când se trece la spaţii vectoriale multidimensionale, în particular, în $\mathbb{R}^3$ bila (definită prin înlocuirea modulului cu norma Euclidiană), devine chiar sfera centrată în punctul x_0 de rază r.

Acestă bilă reprezintă de fapt piatra de temelie care stă la baza tuturor rezultatelor clasice ale analizei matematice. Ea admite extinderi şi la capetele axei reale. Astfel pentru $r > 0$, vom folosi următoarele noţiuni: bilă centrată în ∞ de rază r, mulţimea

$$B(\infty, r) = (r, \infty] = \{x \in \mathbb{R} : x < r\}$$

şi bilă centrată în $-\infty$ de rază r, mulţimea

$$B(-\infty, r) = [-\infty, -r) = \{x \in \mathbb{R} : x < -r\}.$$

O generalizare a acestor intervale centrate în jurul unui punct o reprezintă vecinătăţile.

DEFINIŢIA 1. O submulţime $V \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ este o **vecinătate** a punctului $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ dacă

$$\exists r > 0 \text{ astfel încât } B(x_0, r) \subseteq V.$$

Mulţimea tuturor vecinătăţilor punctului x_0 va fi notată cu $\mathcal{V}(x_0)$.

DEFINIŢIA 2. Fie $D \subseteq \mathbb{R}$ o submulţime de numere reale. Elementul $y \in \overline{\mathbb{R}}$ se numeşte **punct de aderenţă** sau **de închidere** al mulţimii D dacă

$$\forall V \in \mathcal{V}(y) \text{ are loc } V \cap D \neq \emptyset.$$

Mulţimea tuturor punctelor de aderenţă ale mulţimii D se notează cu clD.

DEFINIŢIA 3. Elementul $y \in \overline{\mathbb{R}}$ se numeşte **punct de acumulare** al mulţimii D dacă

$$\forall V \in \mathcal{V}(y) \text{ are loc } V \cap D \backslash \{y\} \neq \emptyset.$$

Mulţimea tuturor punctelor de acumulare ale mulţimii D se notează cu D'.

Se contată că noţiunile de punct de acmulare şi punct de aderenţă sunt destul de asemănătoare. Privind cu atenţie constatăm că atunci când verificăm definiţiile, punctele de acumulare au o condiţie mai restrictivă. Astfel

$$D' \subseteq clD \tag{1}$$

deoarece

$$V \cap D \backslash \{y\} \neq \emptyset \quad \Longrightarrow V \cap D \neq \emptyset.$$

DEFINIŢIA 4. Punctul $x_0 \in D$ se numeşte **punct izolat** al mulţimii D dacă

$$\exists V \in \mathcal{V}(x_0) \text{ astfel încât } V \cap D = \{x_0\}.$$

Mulţimea tuturor punctelor izolate ale mulţimii D se notează cu $Izo(D)$.

PROPOZIŢIA 1. *Mulţimea punctelor de acumulare este disjunctă cu mulţimea punctelor de izolate, deci*

$$D' \cap IzoD = \emptyset. \tag{2}$$

Demonstraţie. Folosim metoda reducerii la absurd, presupunând că există cel puţin un punct $y \in D' \cap IzoD$. Din faptul că $y \in IzoD$, rezultă că există cel puţin o vecinătate $V_y \in \mathcal{V}(y)$, pentru care

$$V_y \cap D = \{y\}, \quad \text{deci} \quad V_y \cap D \backslash \{y\} = \emptyset,$$

astfel $y \notin D'$, ajungând astfel la o contradicţie. □

OBSERVAŢIA 1. Propoziţia 1 ne conduce la concluzia că în cazul în care $IzoD \neq \emptyset$,

$$D \nsubseteq D'.$$

Propoziţia 2. *Are loc următoarea egalitate de mulţimi:*

$$D' = clD \backslash IzoD. \tag{3}$$

Demonstraţie. Vom demonstra această egalitate prin dubla incluziune:
$\subseteq$: Folosind relaţiile (1) şi (2), concluzionăm uşor că $D' \subseteq clD \backslash IzoD$.
$\supseteq$: Considerăm acum $y \in clD \backslash IzoD$ arbitrar ales. Pentru a arăta că acesta este un punct de acumulare, considerăm $V \in \mathcal{V}(y)$, o vecinătate a acestuia arbitrar aleasă. Atunci

$$y \in clD \Longrightarrow V \cap D \neq \emptyset$$

iar

$$y \notin IzoD \Longrightarrow V \cap D \neq \{y\}.$$

În concluzie

$$V \cap D \backslash \{y\} \neq \emptyset.$$

Deoarece V a fost aleasă arbitrar, rezultă că proprietatea are loc pentru orice vecinătate a lui y, deci $y \in D'$. Astfel

$$clD \backslash IzoD \subseteq D'.$$

Din dubla incluziune obţinem egalitatea dorită. □

Propoziţia 3. *Are loc următoare egalitate de mulţimi:*

$$D \cap D' = D \backslash IzoD. \tag{4}$$

Proof. Folosind Propoziţiile 2 şi 1, ajungem la următorul şir de egalităţi:

$$D \cap D' = D \cap (clD \backslash IzoD) = (D \cap clD) \backslash IzoD = D \backslash IzoD.$$ □

Propoziţia 4. *Fie mulţimile $A \subseteq B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Atunci*

$$A' \subseteq B'.$$

Proof. Fie $y \in A'$ arbitrar ales, şi fie $V \in \mathcal{V}(y)$ arbitrar aleasă. Atunci

$$\emptyset \neq V \cap A \backslash \{y\} \subseteq V \cap B \backslash \{y\}.$$

Deoarece V a fost aleasă arbitrar, $y \in B'$. Cum y a fost ales arbitrar în A', obţinem

$$A' \subseteq B'.$$ □

Observaţia 2. Pentru introducerea sau demonstrarea unor proprietăţi topologice ale mulţimilor, se poate folosi în mod echivalent limbajul cu bile sau cel cu vecinăţăţi. Deoarece

$$\forall V \in \mathcal{V}(y) \Longleftrightarrow \forall r > 0 ... B(y, r)$$

şi

$$\exists V \in \mathcal{V}(y) \Longleftrightarrow \exists r > 0 ... B(y, r).$$

Observaţia 3. Definiţia unui punct de acumulare se poate exprima în mod echivalent în limbaj de bile astfel:

$$y \in D' \iff \forall r > 0, \quad B(y,r) \cap D \backslash \{x_0\} \neq \emptyset.$$

Atunci când explicităm aceste bile, trebuie luate în considerare următoarele 3 cazuri distincte:

a) $y \in \mathbb{R}$. Astfel

$$y \in D' \iff \forall r > 0, \quad \exists x_r \in D \backslash \{y\} \quad \text{cu} \quad |x_r - y| < r. \tag{5}$$

b) $y = -\infty$. Astfel

$$-\infty \in D' \iff \forall r > 0, \exists x_r \in D \quad \text{cu} \quad x_r < -r. \tag{6}$$

c) $y = \infty$. Astfel

$$\infty \in D' \iff \forall r > 0, \exists x_r \in D \quad \text{cu} \quad x_r > r. \tag{7}$$

2.2. Şiruri de numere reale.

Observaţia 4. Specificăm că pe parcusul acestui articol, mulţimea numerelor naturale este $\mathbb{N} = \{1, 1+1, 1+1+1, ...\}$. Astfel, cititorul trebuie să ia în considerare că în toate definiţiile, atunci când vorbim despre mulţimea numerelor naturale, 0 nu îi aparţine.

Fie $k \in \mathbb{N}$. Mulţimea tuturor numerelor naturale mai mari sau egale cu k va fi notată prin

$$N_k := \{n \in \mathbb{N} : n \geq k\}.$$

Un **şir de numere reale** este o funcţie

$$x : \mathbb{N}_k \to \mathbb{R},$$

pentru care folosim, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}_k$, notaţia

$$x(n) := x_n.$$

Notaţiile uzuale folosite pentru un şir de numere reale sunt:

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}_k} = (x_n)_{n \geq k} = (x_n).$$

Pe parcusul acestui articol, vom considera $k = 1$ şi vom folosi notaţia simplă (x_n) pentru un şir de numere reale. Menţionăm că am ales această particularizare doar din motive de simplificare a expunerii.

Elementul $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ se numeşte **limită** a şirului de numere reale (x_n) dacă,

$$\forall V \in \mathcal{V}(x_0), \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ astfel încât } \forall n \geq n_0, x_n \in V.$$

Această definiţie se exprimă în mod echivalent, prin bile astfel:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ astfel încât } \forall n \geq n_0, x_n \in B(x_0, \varepsilon).$$

Constatăm că atunci când renunţăm la vecinătaţi, pentru a caracteriza limita unui şir de numere reale avem nevoie de trei cazuri distincte.

TEOREMA 1. *Elementul* $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ *este limita şirului de numere reale* (x_n) *dacă şi numai dacă*

a) *pentru cazul* $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ astfel încât } \forall n \geq n_0, |x_n - x_0| < \varepsilon;$$

b) *pentru cazul* $x_0 = \infty$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ astfel încât } \forall n \geq n_0, x_n > \varepsilon;$$

c) *pentru cazul* $x_0 = -\infty$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ astfel încât } \forall n \geq n_0, x_n < -\varepsilon.$$

3. EXEMPLE TEORETICE CONCRETE

EXEMPLUL 1. Fie $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ astfel încât $a < b$. Atunci mulţimea $[a, b]$ reprezintă mulţimea punctelor de acumulare pentru oricare din intervalele

$$(a, b), \quad (a, b], \quad [a, b) \quad \text{sau} \quad [a, b]. \tag{8}$$

Proof. "$\subseteq$" Vom defalca demonstraţia în 3 cazuri. Vom nota prin A' mulţimea punctelor de acumulare pentru mulţimea A, care poate fi luat oricare din cele patru intervale din (8).

Caz 1. $(a, b) \subset A'$. Fie $c \in (a, b)$ arbitrar ales. Vom demonstra că el este un punct de acumulare folosind observaţia 3 a). Fie $r > 0$ arbitrar ales. Fie

$$t := \min\{b - c, c - a\} \quad \text{şi} \quad u := \min\{t, r\}.$$

Atunci punctul

$$x_r := c + \frac{u}{2} \in B(c, r) \cap A \backslash \{c\} \neq \emptyset.$$

Deoarece r a fost ales arbitrar, rezultă ca indiferent de alegerea lui, intersecţia este nevida. Deci

$$c \in A'.$$

În concluzie

$$(a, b) \subset A'.$$

Caz 2. $a \in A'$. Din cauza faptului că a ar putea fi chiar $-\infty$ vom distinge doua subcazuri.

Subcaz 2.a) $a = -\infty$. Avem de demonstrat că $-\infty \in A'$. Utilizăm Observaţia 3 c).

Fie $r > 0$ arbitrar ales. Notam

$$t := \min\{b, -r\},$$

şi constatăm că

$$x_r := t - 1 \in B(-\infty, r) \cap A = B(-\infty, r) \cap A \backslash \{-\infty\} \neq \emptyset.$$

Deoarece r a fost ales arbitrar, rezultă ca indiferent de alegerea lui, intersecţia este nevida. Deci

$$-\infty \in A'.$$

Subcaz 2.b) $a \in \mathbb{R}$**.** Utilizăm Observaţia 3 a). Acest subcaz are o demontraţie identică cu a cazului 1. Astfel, considerând $r > 0$ arbitrar ales. Fie

$$t := \min\{b - c, c - a\} \quad \text{şi} \quad u := \min\{t, r\}.$$

Atunci punctul

$$x_r := a + \frac{u}{2} \in B(a, r) \cap A \backslash \{a\} \neq \emptyset.$$

Deoarece r a fost ales arbitrar, rezultă ca indiferent de alegerea lui, intersecţia este nevida. Deci

$$a \in A'.$$

Constatăm că pentru această demonstraţie, apartenenţa lui a la mulţima A este irelevantă. Relevantă este însă situarea lui a exact lângă A.

Caz 3. $b \in A'$. Din cauza faptului că b ar putea fi chiar ∞ vom distinge doua subcazuri.

Subcaz 3.a) $b \in \mathbb{R}$**.** Utilizăm Observaţia 3 a). Acest subcaz are o demontraţie similară conceptual cu cea cazului 1. Astfel, considerând $r > 0$ arbitrar ales. Fie

$$t := \min\{b - c, c - a\} \quad \text{şi} \quad u := \min\{t, r\}.$$

Atunci punctul

$$x_r := b - \frac{u}{2} \in B(a, r) \cap A \backslash \{b\} \neq \emptyset.$$

Deoarece r a fost ales arbitrar, rezultă ca indiferent de alegerea lui, intersecţia este nevida. Deci

$$b \in A'.$$

Subcaz 3.b) $b = \infty$**.** Avem de demonstrat că $\infty \in A'$. Utilizăm Observaţia 3 b).

Fie $r > 0$ arbitrar ales. Notam

$$t := \min\{a, r\},$$

şi constatăm că

$$x_r := t + 1 \in B(\infty, r) \cap A = B(\infty, r) \cap A \backslash \{\infty\} \neq \emptyset.$$

Deoarece r a fost ales arbitrar, rezultă ca indiferent de alegerea lui, intersecţia este nevida. Deci

$$\infty \in A'.$$

Constatăm că pentru această demonstraţie, ca şi în cazul lui a, apartenenţa lui b la mulţima A este irelevantă. Relevantă este însă situarea lui b în imediata apropiere a lui A.

Folosind Cazurile 1, 2 şi 3 putem concluziona că

$$[a, b] \subseteq A'.$$

"$\subseteq$" Utilizăm metoda reducerii la absurd, presupunând că există $y \in \overline{\mathbb{R}} \backslash [a, b]$, cu $y \in A'$.

Caz 4. $y < a$**.** Precizăm că acest caz este posibil doar dacă $a \neq -\infty$.

Subcaz 4.a) $y = -\infty$ Atunci, există $r := \|a\| + 1 > 0$, astfel încât

$$B(-\infty, r) \cap A \backslash \{-\infty\} = \emptyset,$$

deci $y \notin A'$.

Subcaz 4.b) $y \in \mathbb{R}$. Atunci, pentru $r := \left\{ \frac{a-y}{2} \right\} > 0$,

$$B(y, r) \cap A \backslash \{y\} = \emptyset.$$

Deci $y \notin A'$.

Caz 5. $b < y$**.** Precizăm că acest caz este posibil doar dacă $b \neq \infty$.

Subcaz 5.a) $y \in \mathbb{R}$. Atunci, pentru $r := \left\{ \frac{y-b}{2} \right\} > 0$,

$$B(y, r) \cap A \backslash \{y\} = \emptyset.$$

Deci $y \notin A'$.

Subcaz 5.b) $y = \infty$ Atunci, există $r := |b| + 1 > 0$, astfel încât

$$B(\infty, r) \cap A \backslash \{-\infty\} = \emptyset,$$

deci $y \notin A'$.

Din Cazurile 4 şi 5 rezultă că am ajuns la o contradicţie, deoarece nu avem nicio posibilitate ca pentru $y \in A' \cap (\overline{\mathbb{R}} \backslash [a, b])$ De aceea

$$A' \subseteq [a, b].$$

Folosind cele doua incluziuni, concluzionăm

$$A' = [a, b]. \qquad \square$$

Exemplul 2. Fie $F \subset \mathbb{R}$ o submulţime finită de numere reale şi fie $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ astfel încât $a < b$, astefel încât $F \cap [a, b] \neq \emptyset$. Atunci mulţimea $[a, b]$ reprezintă mulţimea punctelor de acumulare pentru oricare din mulţimile

$$(a, b) \cup F, \quad (a, b] \cup F, \quad [a, b) \cup F \quad \text{sau} \quad [a, b] \cup F. \tag{9}$$

Proof. Din exemplul anterior ştim că $[a, b]$ este mulţimea punctelor de acumulare pentru mulţimea A, care poate fi luat oricare din cele patru intervale $(a, b), [a, b), (a, b]$ sau $[a, b]$. Dorim să determinăm de fapt $(A \cup F)'$.

Deoarece $F \cap [a, b] = \emptyset = F \cap A'$, si din faptul că F este finită, obţinem de fapt că

$$F = Izo(A \cup F).$$

Aplicând Propoziţia 1, concluzionăm că

$$(A \cup F)' \cap F = \emptyset.$$

Deoarece $cl(A \cup F) = clA \cup F$, apelând la Propoziţia 2 obţinem

$$(A \cup F)' = cl(A \cup F) \backslash Izo(A \cup F) = clA \cup F \backslash F = clA \backslash F = A'. \qquad \square$$

Exemplul 3. Fie $n \in \mathbb{N}$ şi pentru fiecare $i \in \{1, ..., n\}$, fie $a_i < b_i \in \overline{\mathbb{R}}$. Notăm prin A_i oricare dintre intervalele

$$(a_i, b_i), \quad [a_i, b_i), \quad (a_i, b_i] \quad \text{sau} \quad [a_i, b_i].$$

Presupunem de asemenea că $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i, j \in \{1, ..., n\}$. Atunci

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)' = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i)'$$

Demonstraţie. "$\supseteq$" Deoarece pentru oricare $i \in \{1, ..., \}$

$$A_i \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

Folosind Propoziţia 4 constatăm că

$$A_i' \subset \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)'.$$

De aceea

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i' \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left(A_i\right)'.$$

"$\subseteq$" Folosim metoda reducerii la absurd. Presupunem că există

$$y \in \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)' \setminus \bigcup_{i=1}^{n} (A_i)'.$$

Deci, pentru oricare $i \in \{1, ..., n\}$, există cel puţin o vecinătate $V_i \in \mathcal{V}(y)$ astfel încât

$$V_i \cap A_i \setminus \{y\} = \emptyset.$$

Notăm prin $W := \bigcap_{i=1}^{n} V_i \in \mathcal{V}(y)$. Folosind cele de mai sus, rezultă că pentru oricare $i \in \{1, ..., n\}$ are loc $W \cap A_i \setminus \{y\} = \emptyset$, astfel

$$W \bigcap \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \setminus \{y\} = \emptyset.$$

Deci, conform acestei afirmatii, $y \notin \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)'$, ceea ce este o contradicţie. □

Exemplul 4. Determinaţi mulţimea punctelor de acumulare, A' pentru:

a) $A = (-1, 2]$;
b) $A = (-1, 2] \cup \{3\}$;
c) $A = (-\infty, 0)$;
d) $A = (-\infty, 0) \cup \{3\}$;
e) $A = (-\infty, 0] \cup (3, \infty)$.

Proof. Folosind Exemplul 1, este clar că

$$(1,2]' = [-1,2] \quad \text{şi} \quad \big(-\infty,0\big)' = [-\infty,0],$$

astfel a) şi c) sunt rezolvate. Constatăm că 3 este un punct izolat al mulţimilor de la b) şi d). Folosind acum Exemplele 1 şi 2, concluzionăm că

$$\Big((-1,2]\cup\{3\}\Big)' = [1,2] \quad \text{şi} \quad \Big((-\infty,0)\cup\{3\}\Big)' = [-\infty,0].$$

Aplicând Exemplul 3, deducem că

$$\Big((-\infty,0]\cup(3,\infty)\Big)' = [-\infty,0]\cup[3,\infty]. \qquad \square$$

4. CARACTERIZAREA SECVENŢIALĂ A MULŢIMII PUNCTELOR DE ACUMULARE

TEOREMA 2. *Fie $D \subseteq \mathbb{R}$ o submulţime nevidă, şi fie $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Atunci x_0 un punct de acumulare al mulţimii D dacă şi numai dacă există un şir de puncte $(x_n) \subset D\backslash\{x_0\}$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Astfel*

$$x_0 \in D' \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \quad (x_n) \subset D\backslash\{x_0\}, \ cu \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

Proof. **Necesitatea.** Presupunem că $x_0 \in D'$. Demonstraţia trebuie defapcată pe trei subcazuri.

Subcaz 1, $x_0 \in \mathbb{R}$**:** Vom folosi Observaţia 3a), şi mai explicit relaţia (5), considerând succesiv, în loc de r, raportul $\frac{1}{n}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Astfel

$$x_0 \in D' \cap \mathbb{R} \overset{(5)}{\Longleftrightarrow} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists x_n \in D\backslash\{x_0\} \quad \text{cu} \quad |x_n - x_0| < \frac{1}{n}.$$

Constatăm că se generează în acest mod un şir $(x_n) \in D\backslash\{x_0\}$, căruia, dacă îi aplicăm criteriul cleştelui, ajungem la concluzia că

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - x_0) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

Subcaz 2, $x_0 = +\infty$**:** Vom folosi Observaţia 3b), şi mai explicit relaţia (7), considerând succesiv, în loc de r,n, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Astfel

$$\infty \in D' \overset{(7)}{\Longleftrightarrow} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists x_n \in D \quad \text{cu} \quad x_n > n.$$

Constatăm că se generează în acest mod un şir $(x_n) \in D = D\backslash\{\infty\}$, căruia, dacă îi aplicăm criteriul majorării, ajungem la concluzia că

$$\lim_{n\to\infty} x_n \geq \lim_{n\to\infty} n = \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \infty.$$

Subcaz 3, $x_0 = -\infty$**:** Vom folosi Observaţia 3c), şi mai explicit relaţia (6), considerând succesiv, în loc de r,$-n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Astfel

$$-\infty \in D' \overset{(6)}{\Longleftrightarrow} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists x_n \in D \quad \text{cu} \quad x_n < -n.$$

Constatăm că se generează în acest mod un şir $(x_n) \in D = D\backslash\{-\infty\}$, căruia, dacă îi aplicăm criteriul majorării, ajungem la conzluzia că

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} -n = -\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty.$$

Suficienţa. De data aceasta lucrăm în ipoteza că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Pentru a demonstra că x_0 este un punct de acumulare al lui D, pentru a avea o abordare unitară, fără subcazuri, aplicăm Definiţia 3. Considerăm $V \in \mathcal{V}(x_0)$ o vecinătate arbitrară a lui x_0. Deoarece

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0,$$

prin aplicarea definiţiei limitei unui şir, obţinem

$$\exists n_V \in \mathbb{N} \quad \text{a.î.} \quad \forall n \geq n_V, \quad x_n \in V.$$

În particular, $x_{n_V} \in D\backslash\{x_0\} \cap V$, şi astfel

$$D\backslash\{x_0\} \cap V \neq \emptyset.$$

Deoarece V a fost aleasă arbitrar, rezultă că proprietatea are loc pentru orice vecinătate, astfel, conform Definiţiei 3, concluzionăm că

$$x_0 \in D'.$$ □

5. GREŞELI TIPICE

Pe parcursul acestei secţiuni vor fi prezentate nişte exemple în rezolvarea cărora este nevoie de o atenţie sporită pentru a evita greşeli tipice, întâlnite î practica cu studenţii de anul 1.

EXEMPLUL 5. Determinaţi mulţimea punctelor de acumulare pentru $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Demonstraţie. Datorită modului ales pentru despcrierea mulţimii, unii elevi ajung la concluzia greşită cum că 0 ar fi un punct izolat al acestei mulţimi. El nu are această calitate, fiind de fapt un punct exclus din mulţime, care, dacă este exprimată echivalent ca $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ poate fi abordată prin intermediul Exemplului 3, conducându-ne la conluzia că:

$$\Big(\mathbb{R}\backslash\{0\}\Big)' = \Big((-\infty, 0) \cup (0, \infty)\Big)' = [-\infty, 0] \cup [0, \infty] = \overline{\mathbb{R}}.$$

O demonstraţie alternativă faptul că 0 este un punct de acumulare al mulţimii, chiar dacă nu este un element al mulţimii, se poate face cu Teorema 1, prin evidenţierea şirului cu termenul general

$$x_n = \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

care satisface condiţiile $(x_n) \subset \mathbb{R}\backslash\{0\}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. □

EXEMPLUL 6. Determinaţi mulţimea punctelor de acumulare pentru $A = \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$.

Demonstraţie. Ca în cazul exemplului anterior, se poate ajunge la greşeala tipică de a considera punctele lui $\mathbb{N}$ ca fiind puncte izolate ale mulţimii iniţiale. Ele sunt de fapt puncte excluse. Constatăm că pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$

$$(n, n+1) \subset A \quad \overset{P4}{\Longrightarrow} \quad [n, n+1] \subset A'.$$

Astfel,

$$[1, \infty] = \bigcup_{n=1}^{\infty} [n, n+1] \subset A'.$$

Deaorece $A = (-\infty, 1) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (n, n+1)$, deducem că

$$A' = [-\infty, 1] \cup [1, \infty] = \overline{\mathbb{R}}.$$

O demonstraţie alternativă faptul că ∞ este un punct de acumulare al mulţimii, chiar dacă nu este un element al mulţimii, se poate face cu Teorema 1, prin evidenţierea şirului cu termenul general

$$x_n = n + \frac{1}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

care satisface condiţiile $(x_n) \subset \mathbb{R} \backslash \{\infty\}$ şi $\lim_{n \to \infty} x_n = \infty$. □

Exemplul 7. Determinaţi mulţimea punctelor de acumulare pentru $\mathbb{N}$ şi $\mathbb{Z}$.

Proof. În contrast cu primele două exemple ale acestei secţiuni, de această dată avem de a face cu puncte izolate. Astfel $Izo\mathbb{N} = \mathbb{N}$ şi $Izo\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. Atunci, conform Propoziţiei 1, $\mathbb{N} \not\subset \mathbb{N}'$ şi $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{Z}'$. Fie acum $y \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{N}$, arbitrar ales. Considerăm $r := \min \left\{ y - [y], [y] + 1 - y \right\} > 0$. Atunci

$$B(y, r) \cap \mathbb{N} = B(y, r) \cap \mathbb{N} \backslash \{y\} = \emptyset.$$

Deci, $y \notin \mathbb{N}'$. Conform tuturor observaţiilor din această demonstraţie, aflăm că

$$\mathbb{R} \not\subset \mathbb{N}'.$$

Se poate ajunge astfel la o altă greşeala tipică, şi anume concluzia eronată că mulţimea de acumulare a lui $\mathbb{N}$ este vidă. Folosind Teorema 1, prin evidenţierea şirului cu termenul general

$$x_n = n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

care satisface condiţiile $(x_n) \subset \mathbb{N} \backslash \{\infty\}$ şi $\lim_{n \to \infty} x_n = \infty$, demonstrăm că

$$\infty \in \mathbb{N}'.$$

Este destul de clar că $-\infty \notin \mathbb{N}$ deoarce nu există niciun şir de numere naturale care să aibă limita aceasta. În concluzie

$$\mathbb{N}' = \{\infty\}.$$

Similar, se demonstrează că

$$\mathbb{Z}' = \{-\infty, \infty\}. \qquad \square$$

Exemplul 8. Determinaţi mulţimea punctelor de acumulare pentru mulţimea $(-\infty, 0) \cup \mathbb{N}$.

Demonstraţie. Folosind exemplul anterior şi Exemplul 1, se ajunge la concluzia că

$$\Big((-\infty, 0) \cup \mathbb{N}\Big)' = [-\infty, 0] \cup \{-\infty\}.$$

Greşeala tipică aferentă acestui exemplu constă în omiterea lui ∞ din mulţimea punctelor de acumulare. $\square$

Exemplul 9. Determinaţi mulţimea punctelor de acumulare pentru mulţimea

$$A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Proof. Deoarece, dacă pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$,

$$B\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) \cap A = \left\{\frac{1}{n}\right\},$$

este adevărată egalitatea $IzoA = A$, deci $A \not\subset A'$. Pornind de la această concluzie, s-ar putea ajunge la greşeala tipică că această mulţime nu are de fapt puncte de acumulare. Totusi, nu este aşa.

0 este un punct de acumulare al mulţimii, chiar dacă nu este un element al mulţimii. Folosind Teorema 1, prin evidenţierea şirului cu termenul general

$$x_n = \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

care satisface condiţiile $(x_n) \subset A \backslash \{0\}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Lăsăm cititorului demonstraţia faptului că dacă $y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, atunci $y \notin A'$ (cazul $y \in A$ fiind deja explicat, iar celelalte necesitând doar alegerea unei raze pentru o bilă convenabilă cu intersecţie vida în raport cu $A\backslash\{y\}$). Astfel

$$A' = \{0\}. \qquad \square$$

Exemplul 10. Determinaţi mulţimea punctelor de acumulare pentru mulţimile $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.

Demonstraţie. Vom demonstra că

$$\mathbb{Q}' = \Big(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\Big)' = \mathbb{R}' = \overline{\mathbb{R}}.$$

Fie $y \in \overline{\mathbb{R}}$, arbitrar ales. Utilizând Teorema 3 şi Observaţia 7 din [4], se demonstrează că există şirurile $(s_n) \subset \mathbb{Q}\backslash\{y\}$ şi $(t_n) \subset \Big(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\Big)\backslash\{y\}$, cu

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} t_n = y.$$

Atunci, conform Teoremei 1, $y \in \mathbb{Q}'$ şi $y\left(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\right)'$. Mai mult, $y \in \mathbb{R}'$, datorită ambelor şiruri, care sunt de numere reale, astfel $y \in \mathbb{R}'$. Deoarece y a fost ales arbitrar în $\overline{\mathbb{R}}$, concluzionăm că

$$\mathbb{Q}' = \left(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\right)' = \mathbb{R}' = \overline{\mathbb{R}}.$$

Greşelile tipice conectate acestui exemplu constă în faptul că mulţimile $\mathbb{Q}$ sau $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ ar putea fi confundate cu nişte mulţimi de puncte izolate. Acest fapt este fals datorită teoremei de densitate, care ne asigură că între două numere reale oarecare se află o infinitate de numere raţionale şi iraţionale. □

Închiem acest articol cu speranţa că va aduce lămuriri solide privind structura mulţimii punctelor de acumulare pentru cei cărora le este adresat, şi anume elevii claselor a 11-a şi a 12- a, precum şi studenţii de la profilele reale din anul 1. Pentru a întelege mai bine rolul mulţimii punctelor de acumulare relativ al limite de funcţii şi deci implict la funcţii continue şi respectiv derivabile menţionăm referinţa [5].

BIBLIOGRAFIE

[1] D. Andrica, D.I. Duca, I. Purdea, I. Pop, *Matematica de bază*, Editura Studium, Cluj-Napoca, 2005.

[2] D.I. Duca, *Analiză matematică* (vol. I), Casa Cărţii de Ştiinţă, Cluj-Napoca, 2013.

[3] D.I. Duca, E. Duca, *Exerciţii şi probleme de Analiză matematică* (vol. 1 şi 2), Casa Cărţii de Ştiinţă, Cluj-Napoca, 2009.

[4] A. Grad, *Abordare metodică a separării topologice a mulţimilor $\mathbb{Q}$ şi $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$*, Didactica Mathematica 35, 2017, 33-44.

[5] A. Grad, *Abordare metodică a problemei continuităţii unei funcţii reale*, Lucrările simpozionului de matematică "In memoriam profesor Ioan Boţ", Ed. V. Solschi şi T. Lazăr, Editura Citadela Satu Mare, 2018.

Faculty of Mathematics and Computer Science
"Babeş-Bolyai" University
Str. Kogălniceanu, no. 1
400084 Cluj-Napoca, Romania
e-mail: `ancagrad@math.ubbcluj.ro`