**DIDACTICA MATHEMATICA, Vol. 36 (2018), Pages 41-46**

# FUNCŢIA FITZPATRICK APLICATĂ SUMEI A DOI OPERATORI MONOTONI

Rebeca Olivia Cristea

**Abstract.** Let $X$ be a Hilbert space and $A, B : X \to 2^{X^*}$ be two monotone operators. In this paper we try to characterize $F_{A+B}$. This is one of Simon Fitzpatrick's open problem. Although this is a difficult problem, there is an upper bound available, so we will try to illustrate it.

**MSC 2000.** 26B25.
**Key words.** Convex function, Fitzpatrick function, monotone operators.

## 1. INTRODUCERE

Definiţia 1. Spunem că un spaţiu $X$ este spaţiu Hilbert dacă este un spaţiu complet şi normat, în care norma provine dintr-un produs scalar, adică

$$||x|| = \sqrt{\langle x|x\rangle}, \text{ pentru orice } x \in X.$$

Fie $X$ un spaţiu vectorial real. O aplicaţie $\langle \cdot|\cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ care are următoarele proprietăţi se numeşte produs scalar:

(1) $\langle x+y|z\rangle = \langle x|z\rangle + \langle y|z\rangle$, pentru orice $x, y, z \in X$;
(2) $\langle \lambda x|y\rangle = \lambda\langle x|y\rangle$, pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$ şi $x \in X$;
(3) $\langle x|y\rangle = \overline{\langle x|y\rangle}$, pentru orice $x, y \in X$;
(4) $\langle x|x\rangle > 0$, pentru orice $x \neq 0$.

Se numeşte normă o funcţie $||\cdot|| : X \to [0, +\infty[$ care satisface următoarele proprietăţi:

(1) $||x|| = 0$ dacă şi numai dacă $x = 0$;
(2) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ pentru orice $x, y \in X$;
(3) $||\lambda x|| = \lambda||x||$ pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$ şi $x \in X$.

Propoziţia 1. (Cauchy-Schwarz) *Fie $X$ un spaţiu Hilbert, fie $x$, $y$ din $X$. Atunci*

$$|\langle x|y\rangle| \leq ||x||\ ||y||.$$

Lema 1. *Fie $X$ un spaţiu Hilbert, fie $x$, $y$, $z$ din $X$. Atunci au loc următoarele propoziţii:*

(1) $||x + y||^2 = ||x||^2 + 2\langle x|y\rangle + ||y||^2$;
(2) $||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2$;
(3) $\langle x|y\rangle = ||x + y||^2 - ||x - y||^2$.

Definiţia 2. Fie $V, W$ spaţii liniare peste corpul $K$. Notăm cu $L(V, W)$ spaţiul aplicaţiilor liniare şi continue $f : V \to W$. Dacă $V$ este un spaţiu normat peste corpul $K$, atunci spaţiul normat $L(V,K)$ se numeşte dualul lui $V$ şi se notează $V^*$. Dacă $V$ este staţiu Hibert atunci $V = V^*$.

Fie $X, Y, Z$ mulţimi nevide şi fie $2^Y$ mulţimea putere a lui $Y$, adică familia submulţimior lui $Y$. Notaţia $T : X \to Y$ înseamnă că operatorul $T$ asociază fiecare punct $x$ din $X$ cu un punct $Tx$ din $Y$. Prin urmare notaţia $A : X \to 2^Y$ înseamnă că $A$ este un operator multivoc de la $X$ la $Y$, adică $A$ asociază fiecare punct $x \in X$ unei mulţimi $Ax \subset Y$.

Graficul lui $A$ este

$$graA = \{(x,u) \in X \times Y | u \in Ax\}.$$

Domeniul lui $A$ este

$$domA = \{x \in X | Ax \neq \emptyset\}.$$

Atunci $A$ este monoton dacă

$$\forall\ (x,u) \in graA,\ \forall\ (y,v) \in graA\ \langle x - y | u - v\rangle \geq 0.$$

O submulţime a lui $X \times X$ este monotnonă dacă este graficul unui operator monoton. Inversul lui A este notat cu $A^{-1}$ şi este definit de graficul său

$$graA^{-1} = \{(u,x) \in Y \times X | (x,u) \in graA\}.$$

Definiţia 3. Fie o funcţie $f : X \to [-\infty, +\infty]$, unde X este un spaţiu topologic. Funcţia f se numeşte inferior semicontinuă într-un punct $x_0 \in X$ dacă

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \inf f(x).$$

Definiţia 4. Spunem că o funcţie convexă $f : X \to [-\infty, +\infty]$ este proprie dacă $domf \neq \emptyset$ şi $f(x) \neq -\infty$, $\forall\ x \in X$.

Definiţia 5. Fie $X$ un spaţiu Hilbert. Funcţia indicator a unei submulţimi $C$ din $X$ este funcţia definită astfel:

$$\imath_C : X \to [-\infty, +\infty] : x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \in C; \\ +\infty, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Definiţia 6. Fie $X$ spaţiu Hilbert, fie $f : X \to [-\infty, +\infty]$. Conjugata lui $f$ este

$$f^* : X \to [-\infty, +\infty] : u \mapsto \sup_{x \in X}(\langle x | u\rangle - f(x)), \tag{1}$$

iar biconjugata lui $f$ este $f^{**} = (f^*)^*$.

Definiţia 7. Fie $A : X \to 2^{X^*}$ un operator monoton. Funcţia Fitzpatrick asociată lui $A$ este

$$F_A : X \times X^* \to [-\infty, +\infty],\ (x, x^*) \mapsto \sup_{(y,y^*) \in graA} (\langle y | x^*\rangle + \langle x | y^*\rangle - \langle y | y^*\rangle). \tag{2}$$

Definiţia 8. Mulţimea funcţiilor convexe, inferior semicontinue de la $X$ la $[-\infty, +\infty]$ se notează cu $\Gamma_0(X)$.

PROPOZIŢIA 2. *Fie $X$ un spaţiu Hilbert, fie $A : X \to 2^X$ un opertor monoton atfel încât $graA \neq \emptyset$ şi fie $(x, u) \in X \to X$. Atunci au loc următoarele propoziţii:*

(1) *Presupunem că $(x, u) \in graA$. Atunci $F_A(x, u) = \langle x|u\rangle$;*
(2) *$F_A = (\imath_{graA^{-1}} + \langle\cdot|\cdot\rangle)^* \in \Gamma_0(X \times X)$;*
(3) *$F_A(x, u) \leq \langle x|u\rangle$ dacă şi numai dacă $\{(x, u)\} \cup graA$ este monoton;*
(4) *$F_A(x, u) \leq F_A^*(u, x)$;*
(5) *Presupunem că $(x, u) \in graA$. Atunci $F_A^*(u, x) = \langle x|u\rangle$;*
(6) *$F_A(x, u) = F_{A^{-1}}(u, x)$.*

PROPOZIŢIA 3. *Dacă $domA \neq \emptyset$ atunci funcţia $F_A$ este inferior semicontinuă şi convexă pe $X \times X^*$.*

COROLARUL 1 ([2]). *Pentru fiecare operator monoton $A$ pe $X$ avem*

$$Ax \subseteq A_{F_A}x, \ \forall\ x \in X.$$

*Dacă $A$ este operator monoton maximal atunci $A = A_{F_A}$.*

TEOREMA 1 ([2]). *Dacă $A$ este un operator monoton pe $X$ atunci $A$ este operator monoton maximal dacă şi numai dacă $F_A(x, x^*) > \langle x^*, x\rangle$ atunci când $x \in X$ şi $x^* \in X^* \backslash A(x)$.*

COROLARUL 2 ([2]). *Fie $A$ un operator monoton maximal pe $X$. Atunci*

$$F_A(x, x^*) \geq \langle x^*, x\rangle, \ \forall\ x \in X$$

*şi $x^* \in X^*$ şi $F_A(x, x^*) = \langle x^*, x\rangle$ dacă şi numai dacă $x^* \in Ax$.*

TEOREMA 2 ([2]). *Fie $A$ un operator monoton pe $X$. Dacă $f$ este o funcţie convexă pe $X \times X^*$ cu $f(x, x^*) \geq \langle x^*|x\rangle$ $\forall\ x \in X$ şi $x^* \in X^*$ şi dacă*

$$f(y, y^*) = \langle y^*|y\rangle, \ \forall\ (y, y^*) \in graA$$

*atunci $F_A \leq f$.*

## 2. FUNCTIA FITZPATRICK A UNEI SUME

Una dintre problemele deschise propuse de Simon Fitzpatrick este aceea de a caracteriza funcţia Fitzpatrick aplicată sumei a doi operatori.

Fie $A$ şi $B$ doi operatori monotoni de la $X$ la $2^{X^*}$. Fitzpatrick cere caracterizarea lui $F_{A+B}$. Această problemă nu are o soluţie simplă. Cu toate acestea, există o limita superioară şi o vom ilustra folosind câteva exemple.

DEFINIŢIA 9. Fie $X$ un spaţiu Hilbert, fie $f, g$ două funcţii de la $X$ la $]-\infty, +\infty]$. Convoluţia infimală a lui $f$ şi $g$ este

$$f \square g : X \to [-\infty, +\infty] : x \mapsto \inf_{y \in X} (f(x) + g(x - y)).$$

DEFINIŢIA 10. Pentru doi operatori monotoni daţi $A$ şi $B$ de la $X$ la $2^{X^*}$, definim $\Phi_{\{A,B\}}$, prin:

$$\Phi_{\{A,B\}} : X \times X^* \to ]-\infty, +\infty] : (y, y^*) \longmapsto (F_A(y, \cdot) \square F_B(y, \cdot))(y^*). \tag{3}$$

PROPOZIŢIA 4. *Presupunem că $A$ şi $B$ sunt doi operatori monotoni de la $X$ la $2^{X^*}$. Atunci*

$$F_{A+B} \leq \Phi_{\{A,B\}}. \tag{4}$$

*Demonstraţie.* Fie $(y, y^*) \in X \times X$ şi $(x, x^*) \in (A + B)$, spunem că

$$x^* = a^* + b^*,$$

unde $a^* \in Ax$ şi $b^* \in Bx$.
De asemenea, vom scrie $y^* = u^* + v^*$, unde $\{u^*, v^*\} \subset X^*$. Atunci

$$\begin{aligned}
&\langle x|y^*\rangle + \langle y|x^*\rangle - \langle x|x^*\rangle \\
&= \langle x|u^* + v^*\rangle + \langle y|a^* + b^*\rangle - \langle x|a^* + b^*\rangle \\
&= \langle x|u^*\rangle + \langle y|a^*\rangle - \langle x|a^*\rangle) + (\langle x|v^*\rangle + \langle y|b^*\rangle - \langle x|b^*\rangle) \\
&\leq F_A(y, u^*) + F_B(y, v^*).
\end{aligned} \tag{5}$$

Dacă folosim supremum peste $(x, x^*) \in A + B$ rezultă

$$F_{A+B}(y, y^*) \leq F_A(y, u^*) + B_B(y, v^*),$$

în schimb dacă folosim infimum peste $y^* = u^* + v^*$ atunci se verifică (4). □

OBSERVAŢIA 1. Limita superioară $\Phi_{\{A,B\}}$ din Propoziţia 1 este câteodată, nu întotdeauna, compactă. Ar fi interesant să caracterizăm perechile de operatori monotoni $(A, B)$ care satisfac identitatea $F_{A+B} = \Phi_{\{A,B\}}$.

EXEMPLUL 1. Presupunem că $X$ este un spaţiu Hilbert şi $C$, $D$ sunt două mulţimi convexe şi închise în $X$ astfel încât să aibă loc constrângerea

$$C \cap intD \neq \emptyset.$$

Atunci $F_{N_C+N_D} = \Phi_{\{N_C,N_D\}}$.

*Demonstraţie.* Fie $(y, y^*) \in X \times X$. Folosind funcţia indicator, obţinem

$$\begin{aligned}
&\Phi_{\{N_C,N_D\}}(y, y^*) = (F_A(y, \cdot)\Box F_B(y, \cdot))(y^*) \\
&= \inf_{u^*+v^*=y^*}(F_{N_C}(y, u^*) + F_{N_D}(y, v^*)) \\
&= \inf_{u^*+v^*=y^*}(\imath_C(y) + \imath_C^*(u^*) + \imath_D(y) + \imath_D^*(v^*)) \\
&= \imath_C(y) + \imath_D(y) + (\imath_C^*\Box\imath_D^*)(y^*) \\
&= \imath_{C\cap D}(y) + (\imath_C + \imath_C)^*(y^*) \\
&= \imath_{C\cap D}(y) + \imath_{C\cap D}^*(y^*) \\
&= F_{N_{C\cap D}}(y, y^*) \\
&= F_{N_C+N_D}(y, y^*).
\end{aligned} \tag{6}$$

Prin urmare $F_{N_C+N_D} = \Phi_{\{N_C,N_D\}}$. □

EXEMPLUL 2. Presupunem că $X$ este un spaţiu real Hilbert şi $C$ este o mulţime convexă, nevidă şi închisă în $X$. Atunci $F_{Id+N_C} = \Phi_{\{Id,N_C\}}$.

*Demonstraţie.* Aceasta este o continuare a exemplului unde este folosită funcţia energie şi funcţia indicator din [3, Exemplul 3.13], astfel încât vom împrumuta notaţiile de acolo şi aici.

Fie $(y, y^*) \in X \times X$.

$$\begin{aligned}
&\Phi_{\{Id,N_C\}}(y, y^*) = (F_{Id}(y, \cdot)\Box F_{N_C}(y, \cdot))(y^*) \\
&= \inf_{u^*+v^*=y^*}(F_{Id}(y, u^*) + F_{N_C}(y, v^*)) \\
&= \inf_{u^*+v^*=y^*}(\tfrac{1}{4}\| u^* + y \|^2 + \imath_C(y) + \imath_C^*(v^*)).
\end{aligned} \tag{7}$$

Mai mult

$$\begin{aligned}
&= \inf_{u^*+v^*=y^*}(\tfrac{1}{4}\| u^* + y \|^2 + \imath_C^*(v^*)) \\
&= \inf_{z^*}(\tfrac{1}{4}\| (y + y^*) - z^* \|^2 + \imath_C^*(z^*)) \\
&= \inf_{z^*}(\tfrac{1}{4}(\| (y + y^*) \|^2 - 2\langle y + y^*|z^*\rangle + \| z \|^2) + \imath_C^*(z^*)) \\
&= \tfrac{1}{4}\| (y + y^*) \|^2 + \inf_{z^*}(-\langle \tfrac{1}{2}(y + y^*)|z^*\rangle + \tfrac{1}{4}\| z^* \|^2 \imath_C^*(z^*)) \\
&= \tfrac{1}{4}\| (y + y^*) \|^2 - \sup_{z^*}(\langle \tfrac{1}{2}(y + y^*)|z^*\rangle - (\tfrac{1}{4}\| \cdot \|^2 + \imath_C^*(z^*))) \\
&= \tfrac{1}{4}\| (y + y^*) \|^2 - (\tfrac{1}{4}\| \cdot \|^2 + \imath_C^*)^*(\tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2}y^*).
\end{aligned} \tag{8}$$

Folosind împreună rezultatele de mai sus, avem

$$\begin{aligned}
&\Phi_{\{Id,N_C\}}(y, y^*) = \inf_{u^*+v^*=y^*}(\tfrac{1}{4}\| u^* + y \|^2 + \imath_C(y) + \imath_C^*(v^*)) \\
&= \imath_C(y) + \tfrac{1}{4}\| (y + y^*) \|^2 - (\tfrac{1}{4}\| \cdot \|^2 + \imath_C^*)^*(\tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2}y^*) \\
&= F_{Id+N_C}(y, y^*).
\end{aligned} \tag{9}$$

Prin urmare $\Phi_{\{Id,N_C\}}(y, y^*) = F_{Id+N_C}(y, y^*)$. □

EXEMPLUL 3. Presupunem că $X$ este un spaţiu real Hilbert şi $K$ este un subspaţiu închis a lui $X$. Atunci $F_{Id} = F_{P_K+P_{K^\perp}} = \Phi_{\{P_K,P_{K^\perp}\}}$.

*Demonstraţie.* Fie $(y, y^*) \in X \times X$. Folosind funcţia energie, obţinem

$$\begin{aligned}
&\Phi_{\{P_K,P_{K^\perp}\}}(y, y^*) = (F_{P_K}(y, \cdot)\Box F_{P_{K^\perp}}(y, \cdot))(y^*) \\
&= \inf_{z^*\in X}(F_{P_K}(y, z^*) + F_{P_{K^\perp}}(y, y^* - z^*)) \\
&= \inf_{z^*\in X}(\imath_X(z^*) + \tfrac{1}{4}\| P_K(y + z^*) \|^2 + \imath_{K^\perp}(y^* - z^*) \\
&\quad +\tfrac{1}{4}\| P_{K^\perp}(y + y^* - z^*) \|^2) \\
&= \tfrac{1}{4}\| P_K(y + P_K y^*) \|^2 + \tfrac{1}{4}\| P_{K^\perp}(y + P_{K^\perp}y^*) \|^2 \\
&= \tfrac{1}{4}(\| P_K(y + y^*) \|^2 + \| P_{K^\perp}(y + y^*) \|^2) \\
&= \tfrac{1}{4}\| y + y^* \|^2 \\
&= F_{Id}(y, y^*) = F_{P_K+P_{K^\perp}}(y, y^*).
\end{aligned} \tag{10}$$

Prin urmare demonstraţia e completă. □

EXEMPLUL 4. Presupunem că $X = \mathbb{R}$ şi $K = [0, +\infty[$. Atunci

$$F_{P_K+P_{-K}} = F_{Id} \neq \Phi_{\{P_K,P_{-K}\}}.$$

*Demonstraţie.* Este clar faptul că $F_{P_K+P_{-K}} = F_{Id}$. Considerăm punctul $(-1, 1) \in \mathbb{R}^2$.

$$F_{Id}(-1, 1) = \frac{1}{4}| - 1 + 1|^2 = 0. \tag{11}$$

Pe de altă parte, obţinem

$$
\begin{aligned}
&\Phi_{\{P_K,P_{-K}\}}(-1,1)\\
&= \inf_{\rho\in\mathbb{R}}(\imath_K(\rho) + \tfrac{1}{4}|P_K(-1+\rho)|^2 + \imath_{-K}(1-\rho)\\
&\quad + \tfrac{1}{4}|P_{-K}(-1+1-\rho)|^2)\\
&= \tfrac{1}{4}\inf_{\rho\geq 1}(|P_K(\rho-1)|^2 + |P_{-K}(-\rho)|^2)\\
&= \tfrac{1}{4}\inf_{\rho\geq 1}(|\rho-1|^2 + |\rho|^2) = \tfrac{1}{4}.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

În final rezultă că $F_{Id} \neq \Phi_{\{P_K,P_{-K}\}}$. $\square$

**BIBLIOGRAFIE**


[1] H.H. Bauschke, P.L. Combettes, *Convex Analysis and Monototne Operator Theory in Hilbert Spaces*, Second Edition, Springer International Publishing AG, 2017.

[2] S. Fitzpatrick, *Representing monotone operators by convex functions*, Workshop/Miniconference on Functional Analysis and Optimization (Canberra 1988), Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis, Australian National University vol. 20, Canberra, Australia, pp. 59-65, 1988.

[3] H.H. Bauschke, D.A. McLaren, H.S. Sendov, *Fitzpatrick functions: inequalities, examples, and remarks on a problem by S. Fitzpatrick*, J. Convex Anal., June 23, 2005.



*Faculty of Mathematics and Computer Science*
*"Babeş-Bolyai" University*
*Str. Kogălniceanu, no. 1*
*400084 Cluj-Napoca, Romania*