DIDACTICA MATHEMATICA, Vol. 35 (2017), Pages 17-22

ASUPRA NOŢIUNII DE RELATIV INTERIOR

DIANA-IOANA COTOARBĂ

Rezumat. This article familiarizes the reader with the relative interior of sets and the differences between the topological interior and the relative interior by examples.

MSC 2000. 52A05, 54A99.

Key words. Convex sets, affine sets, convex hull, affine hull, topological interior, relative interior.

1. SUBMULŢIMI ALE UNUI SPAŢIU LINIAR

În această secţiune, se consideră că X este un spaţiu liniar.

Pentru oricare două puncte distincte $x, y \in X$, mulţimea

$$\{\lambda \cdot x + (1-\lambda) \cdot y | \lambda \in \mathbb{R}\}$$

se numeşte **dreapta ce trece prin punctele** x **şi** y.

O submulţime $A \subseteq X$ se numeşte **afină** dacă pentru orice $x, y \in A$ şi orice $\lambda \in \mathbb{R}$, avem $\lambda \cdot x + (1-\lambda) \cdot y \in A$.

OBSERVAŢIA 1.1. În general, o mulţime afină trebuie să conţină, odată cu oricare două puncte distincte, întreaga dreaptă ce trece prin cele două puncte.

Pentru orice $x, y \in X$, mulţimea

$$\{\lambda \cdot x + (1-\lambda) \cdot y | \lambda \in (0,1)\}$$

se numeşte **segment deschis de capete x şi y**, iar mulţimea

$$\{\lambda \cdot x + (1-\lambda) \cdot y | \lambda \in [0,1]\}$$

se numeşte **segment închis de capete x şi y**.

O submulţime $C \subseteq X$ se numeşte **convexă** dacă pentru orice $x, y \in C$ şi orice $\lambda \in [0,1]$, avem $\lambda \cdot x + (1-\lambda) \cdot y \in C$.

PROPOZIŢIA 1.2. *Orice mulţime afină este convexă.*

OBSERVAŢIA 1.3. Mulţimile convexe sunt mai generale decât mulţimile afine deoarece ele trebuie să conţină odată cu două puncte ale sale x şi y, doar o anumită porţiune a dreptei ce trece prin cele două puncte şi anume segmentul închis dintre punctele x şi y.

2. ÎNFĂŞURĂTORI

Fie A o submulţime a lui X. Se numeşte **acoperire afină** (sau **înfăşurătoare afină**) a lui A şi se notează cu $aff(A)$ cea mai mică mulţime afină (în sensul incluziunii) în care este inclusă A, adică

$$aff(A) := \cap\{B \subseteq X \text{ afină } | A \subseteq B\}.$$

Se numeşte **combinaţie afină** a n vectori $x_1, x_2, \ldots, x_n$ din X, orice vector

$$x := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot x_i, \lambda_i \in \mathbb{R}$$

pentru orice $i \in \{1, \ldots, n\}$ şi $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

Prin urmare,

$$aff(A) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot x_i | n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{R}, x_i \in A, \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Fie A o submulţime a lui X. Se numeşte **acoperire convexă** (sau **înfăşurătoare convexă**) a lui A şi se notează cu $conv(A)$ cea mai mică mulţime convexă (în sensul incluziunii) în care este inclusă A, adică

$$conv(A) := \cap\{C \subseteq X \text{ convexă } | A \subseteq C\}.$$

Se numeşte **combinaţie convexă** a n vectori $x_1, x_2, \ldots, x_n$ din X, orice vector

$$x := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot x_i, \lambda_i \geqslant 0,$$

pentru orice $i \in \{1, \ldots, n\}$ şi $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

Prin urmare,

$$conv(A) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot x_i | n \in \mathbb{N}, \lambda_i \geqslant 0, x_i \in A, \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}.$$

3. INTERIOARE DE MULŢIMI

În această secţiune, vom considera că X este un spaţiu metric pe care există metrica $d : X \times X \to \mathbb{R}$.

Pentru orice punct a din X şi orice $r > 0$ se numeşte **bilă (deschisă)** din X centrată în a, de rază r şi se notează cu $B(a, r)$, mulţimea:

$$B(a, r) = \{x \in X | d(a, x) < r\}.$$

Pentru orice punct a din X şi orice $r > 0$ se numeşte **bilă (închisă)** din X centrată în a de rază r şi se notează cu $\overline{B}(a, r)$, mulţimea:

$$\overline{B}(a, r) = \{x \in X | d(a, x) \leqslant r\}.$$

Pentru $A \subseteq X$, se numeşte **interiorul mulţimii A**, şi se notează cu $int(A)$, reuniunea tuturor mulţimilor deschise incluse în A. $Int(A)$ poate fi definit în mod echivalent ca fiind cea mai mare mulţime deschisă conţinută de A. Punctele mulţimii $int(A)$ se numesc **puncte interioare** ale lui A.

OBSERVAŢIA 3.1. În consecinţă, $x \in A$ este **punct interior** al lui A dacă $A \in \mathcal{V}(x)$, unde $\mathcal{V}(x)$ este mulţimea vecinătăţilor lui x, adică dacă există $r > 0$ astfel ca $B(x, r) \subseteq A$.

Dacă $C \subseteq X$ este o mulţime convexă, se numeşte **interiorul relativ al mulţimii C**, şi se notează cu $ri(C)$, interiorul care rezultă atunci când C este privită ca o submulţime a înfăşurătorii sale afine.

Prin urmare, $ri(C)$ constă în punctele $x \in aff(C)$ pentru care există un $\epsilon > 0$ astfel încât $y \in C$ şi $d(x, y) \leqslant \epsilon$.

Cu alte cuvinte,

$$ri(C) := \{x \in aff(C) | \exists \epsilon > 0, \overline{B}(x, \epsilon) \cap aff(C) \subset C\}.$$

3.1. Proprietăţi ale interiorului relativ.

PROPOZIŢIA 3.2. *Dacă $A \subseteq X$ şi notând cu $cl(A)$ închiderea mulţimii A, avem:*

$$ri(A) \subset A \subset cl(A).$$

PROPOZIŢIA 3.3. *Pentru orice mulţime convexă $C \subset X$, avem:*

$$ri(ri(C)) = ri(C).$$

PROPOZIŢIA 3.4. *Pentru orice mulţime convexă $C \subset X$, avem:*

$$cl(ri(C)) = cl(C)$$
$$ri(cl(C)) = ri(C).$$

TEOREMĂ 3.5. *Fie C o mulţime convexă şi fie M o mulţime afină care conţine un punct din $ri(C)$. Atunci $ri(M \cap C) = M \cap ri(C)$.*

Demonstraţie. Pentru o mulţime afină M, $ri(M) = M$ □

4. EXEMPLE

EXEMPLUL 4.1. Fie $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$. **Atunci**:

$$aff(C) := \mathbb{R}^2$$
$$int(C) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 1\}$$
$$ri(C) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 1\}$$

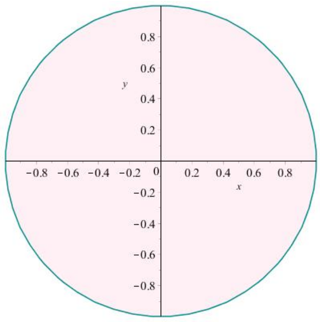

Figura 1: Mulţimea C

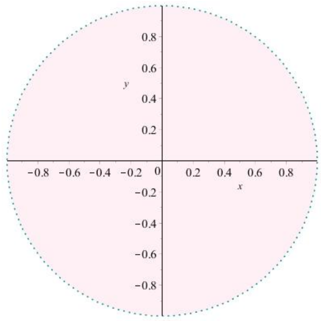

Figura 2: $int(C)$ şi $ri(C)$

Deci, în acest caz, $int(C) = ri(C)$.

În continuare, sunt prezentate exemple în care $int(C) \neq ri(C)$.

Exemplul 4.2. Fie $C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$. **Atunci**:

$$aff(C) := \mathbb{R}^2$$
$$int(C) := \emptyset$$
$$ri(C) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 < 1, z = 0\}$$

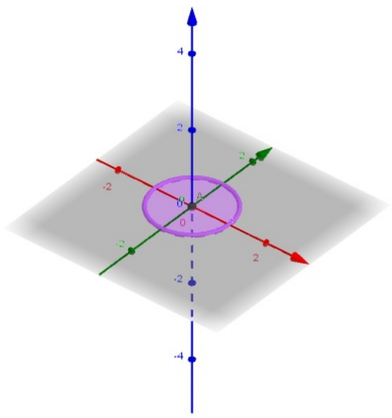

Figura 3: Mulţimea C

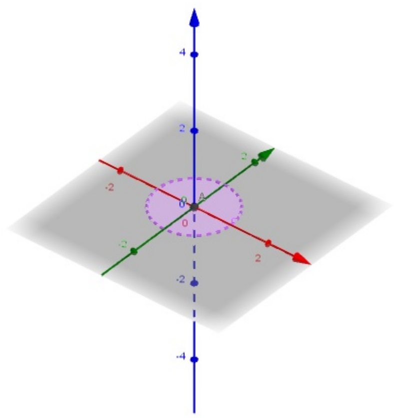

Figura 4: $ri(C)$

Exemplul 4.3. Fie $C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 || x| \leq 1, |y| \leq 1, z = 0\}$. **Atunci**:

$$aff(C) := \mathbb{R}^2$$
$$int(C) := \emptyset$$
$$ri(C) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 || x| < 1, |y| < 1, z = 0\}$$

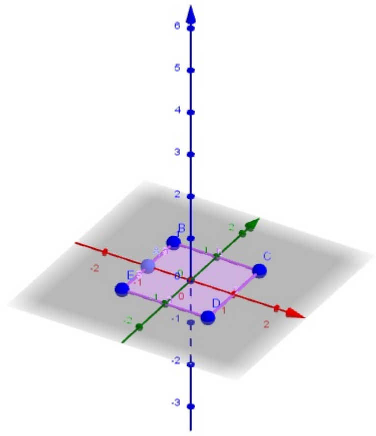

Figura 5: Mulţimea C

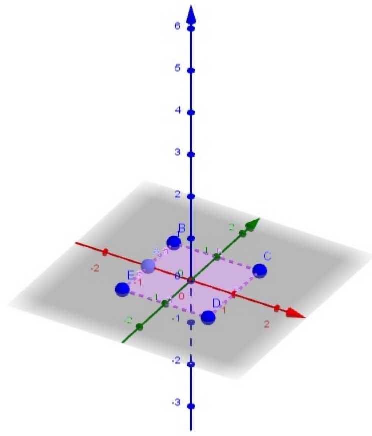

Figura 6: $ri(C)$

Exemplul 4.4. Fie $C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y \leq x^2, y^2 \leq x, z = 0\}$. **Atunci**:

$$aff(C) := \mathbb{R}^2$$
$$int(C) := \emptyset$$
$$ri(C) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y < x^2, y^2 < x, z = 0\}$$

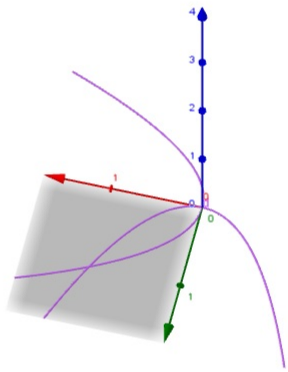

Figura 7: Mulţimea C

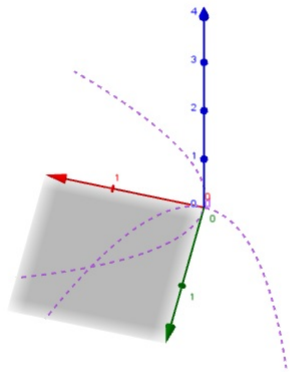

Figura 8: $ri(C)$

BIBLIOGRAFIE

[1] Duca, D.I., *Analiză matematică, vol. I*, Casa Cărţii de Ştiinţă, Cluj-Napoca, 2013.
[2] Boyd, S., *Convex Optimization*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
[3] Rockafellar, R.T., *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, 1970.
[4] Trif, T., *Calcul diferenţial în* $\mathbb{R}^n$.

Facultatea de Matematică şi Informatică
Universitatea Babeş-Bolyai, Cluj-Napoca
e-mail: ioanacotoarba5@gmail.com