DIDACTICA MATHEMATICA, Vol. 35 (2017), Pages 1-8

ASUPRA UNEI PROBLEME DE COMBINATORICĂ

MIRA-CRISTIANA ANISIU

Abstract. We present a problem in arrangements, which was solved in 1934 by M. H. Martin in a constructive way, namely to obtain a sequence of n symbols so that each of the n^r arrangements with repetition of r symbols appears exactly once as a subsequence of length r. We then mention some of the achievements of Martin in his 100 years life, as the foundation of an institute of applied mathematics, the revitalization of a hystorical house and the prizes established for young students and researchers.

MSC 2000. 01-01, 68R15.

Key words. Arrangements, Martin algorithm.

1. O PROBLEMĂ CU ARANJAMENTE CU REPETIŢIE

În 1934, Martin a publicat lucrarea [9] în care se referă la o problemă de combinatorică, despre care afirmă că a apărut în cercetările sale în domeniul dinamicii.

Problema este formulată astfel:

Se consideră cele n^r aranjamente cu repetiţie ale simbolurilor diferite $e_1, e_2, \ldots, e_n$ luate câte r. Se poate construi un şir cu aceste simboluri astfel încât fiecare dintre aceste n^r aranjamente cu repetiţie să apară exact o dată ca o secvenţă de r simboluri consecutive în acel şir?

Aşadar, este vorba de o problemă de existenţă, care este rezolvată constructiv.

Înainte de a prezenta soluţia, autorul dă un exemplu simplu.

Exemplul 1 Pentru $n = 3$ şi $r = 2$, cele $n^r = 9$ aranjamente cu repetiţie sunt

$$\begin{array}{c} e_1e_1, e_1e_2, e_1e_3 \\ e_2e_1, e_2e_2, e_2e_3 \\ e_3e_1, e_3e_2, e_3e_3 \end{array} \tag{1}$$

şi un şir cu proprietatea cerută este

$$e_1e_3e_3e_2e_3e_1e_2e_2e_1e_1, \tag{2}$$

în care remarcăm că primei secvenţe e_1e_3 i se alătură ultimul simbol e_3 al secvenţei următoare e_3e_3, procedeul continuând pe baza înşiruirii de mai jos: $e_1e_3 \to e_3e_3 \to e_3e_2 \to e_2e_3 \to e_3e_1 \to e_1e_2 \to e_2e_2 \to e_2e_1 \to e_1e_1$.

Şirul (2) se poate scrie circular sub forma unui ciclu, renunţându-se la ultimul e_1.

Soluţia problemei este constructivă, prezentându-se un algoritm format din trei reguli simple.

Algoritmul Martin

I. *Fiecare dintre primele* $r-1$ *simboluri se alege egal cu* e_1.

II. *Simbolul* a_m *care se va adăuga şirului*

$$a_1a_2...a_r...a_{m-r+1}...a_{m-1}, \quad a_1 = ... = a_{r-1} = e_1,\ m \geq r \tag{3}$$

(a-urile notează e-urile într-o anumită ordine) este e_i *cu cel mai mare indice astfel încât* $a_{m-r+1}...a_{m-1}a_m$ *nu repetă nicio succesiune de* r *simboluri din şirul (3).*

III. *Regula* II *se aplică întâi pentru* $m = r$ *(caz în care* $a_m = a_r = e_n$*) şi apoi se repetă până când o nouă aplicare este imposibilă.*

Se poate verifica uşor că prin aplicarea algoritmului pentru $n = 3$ şi $r = 2$ se obţine şirul (2).

Exemplul 2 Pentru $n = 2$ şi $r = 3$, cele $n^r = 8$ aranjamente cu repetiţie, scrise pentru simbolurile 0 şi 1, sunt

$$\begin{matrix} 000, 001, 010, 011 \\ 100, 101, 110, 111 \end{matrix} \tag{4}$$

şi aplicând algoritmul lui Martin găsim secvenţele $001 \to 011 \to 111 \to 110 \to 101 \to 010 \to 100 \to 000$, care conduc la şirul

$$0011101000. \tag{5}$$

Presupunând că prin aplicarea Regulii I, urmată de aplicarea repetată a Regulii II se obţine un şir

$$a_1a_2...a_{r-1}a_r...a_{p-r}a_{p-r+1}...a_{p-1}, \quad a_1 = ... = a_{r-1} = e_1,\ p > r, \tag{6}$$

Martin demonstrează două leme, prima referitoare la posibilitatea aplicării Regulii II, iar a doua la ajungerea algoritmului la punctul de stop.

Lema 1 Dacă cel puţin unul dintre simbolurile din secvenţa $a_{p-r+1}...a_{p-1}$ din (6) diferă de e_1, Regula II mai poate fi aplicată cel puţin o dată pentru a adăuga un alt simbol, fie acesta a_p, şirului (6).

Lema 2 Pentru ca Regula II să nu mai poată fi aplicată pentru a adăuga un nou simbol secvenţei $a_{p-r+1}...a_{p-1}$ din (6), este necesar şi suficient ca fiecare simbol din secvenţa $a_{p-r}a_{p-r+1}...a_{p-1}$ să fie egal cu e_1.

În sfârşit, presupunând că pe baza celor două leme s-a ajuns la şirul

$$a_1a_2...a_{r-1}a_r...a_{N-r+1}...a_N, \quad a_j = a_{N-j} = a_N = e_1,\ j = 1, 2, ..., r-1, \tag{7}$$

se demonstrează rezultatul final

Teorema 1 Orice aranjament cu repetiţie al simbolurilor e_1, e_2, ..., e_n luate câte r apare exact o dată ca o secvenţă de r simboluri în şirul (7).

Observaţia 1 Se poate vedea uşor că $N = n^r + r - 1$.

Berstel şi Perrin ([3]) includ în 2007 acest rezultat printre cele din care a apărut *Combinatorica cuvintelor*. Numărul şirurilor care sunt soluţii ale problemei de mai sus pentru $n = 2$ (două simboluri), egal cu $2^{2^{r-1}-r}$, a fost determinat pentru prima dată de Camille Flye Sainte-Marie în 1894 ([5]). Apoi a apărut rezultatul lui Martin, care a fost primul care a indicat un algoritm prin care a construit un astfel de şir, pentru n arbitrar. Independent, problema a fost propusă din nou în 1943 de Klaas Posthumus (1902–1990), un inginer care lucra la Philips Research Laboratories şi care a determinat numărul de cicluri pentru $n = 2$ şi $r = 1, 2, 3, 4, 5$, respectiv $1, 1, 2, 16, 2048$. Ciclurile cu $r = 5$ prezentau interes tehnic. Codul Baudot, inventat în 1870 şi patentat în 1874 de Émile Baudot (1845–1903), foloseşte cuvinte de 5 biţi pentru a coda 32 de caractere. Codarea se obţinea prin rotirea unei roţi cu 32 de contacte electrice. Existenţa unui ciclu pentru $r = 5$ era un element esenţial pentru acest tip de codare, care înlocuise codul Morse, fiind apoi înlocuit de codul ASCII pe 8 biţi aproape un secol mai târziu. N. G. de Bruijn, al cărui nume a rămas legat de aceste cicluri, a devenit interesat de determinarea numărului lor pe când a început să lucreze şi el la Laboratoarele Philips în 1944. El a calculat cu mâna cazul $n = 2$, $r = 6$, determinând 67108864 de cicluri şi folosind metodele pentru a da o formulă care răspundea problemei lui Posthumus. Menţionăm că, pentru $r = 7$, numărul de cicluri are 18 cifre. În 1946, de Bruijn a regăsit ([4]) formula dată de Flye Sainte-Marie.

Problema pentru n simboluri a fost rezolvată în 1951 de van Aardenne-Ehrenfest şi de Bruijn ([1]), numărul de cicluri fiind $n^{-r}(n!)^{n^{r-1}}$. Pentru exemplul lui Martin ($n = 3$, $r = 2$) există 24 de soluţii.

În cele ce urmează vom considera $n = 2$ şi simbolurile 0 şi 1.

Algoritmul lui Martin mai este numit, în acest caz, algoritmul *Preferă* 1. Acest algoritm a fost redescoperit de Ford în 1957 ([6]) şi în multe lucrări îi este atribuit acestuia. Vom da aici formularea din lucrarea recentă [10].

Algoritmul *Preferă* 1

Se pleacă de la secvenţa cu r simboluri egale cu 0. De la orice secvenţă $a_1...a_r$ se continuă cu $a_2...a_r1$ dacă nu a apărut deja; altfel, se alege celălalt succesor $a_2...a_r0$. Când ambii succesori au apărut deja, stop.

Observaţia 2 Şirul care rezultă din acest algoritm este glisat faţă de cel care rezultă din Algoritmul Martin, deoarece se porneşte cu primul simbol repetat de r ori. Dacă se foloseşte reprezentarea circulară, rezultatul este exact acelaşi.

Exemplul 3 Construcţia pentru $r = 3$ şi simbolurile 0 şi 1 se face astfel: $000 \to 001 \to 011 \to 111 \to 110 \to 101 \to 010 \to 100$, generând secvenţa

$$0001110100 \text{ (sau ciclul } (00011101)), \tag{8}$$

care conţine toate cele 2^3 secvenţe de lungime 3 din (4). Analog, pentru $r = 2$ rezultă: $00 \to 01 \to 11 \to 10$, care generează 00110 (sau ciclul (0011)).

De asemenea, în [10] se prezintă şi un alt algoritm, tot simplu de descris, care a fost dat de Alhakim ([2]), numit *Preferă opusul.*

Algoritmul *Preferă opusul*
Se pleacă de la secvenţa cu r simboluri egale cu 0. De la orice secvenţă $a_1...a_r$ se continuă cu $a_2...a_r(1-a_r)$ dacă nu a apărut deja; altfel, se alege celălalt succesor $a_2...a_ra_r$. Când ambii succesori au apărut deja, stop.

Spre deosebire de algoritmul *Preferă* 1, algoritmul *Preferă opusul* nu produce toate secvenţele de lungime r, 1...1 lipsind. Pentru a se remedia acest lucru, trebuie în plus ca 1...1 să fie pus înainte de 1...10.

Exemplul 4 Pentru $r = 3$ obţinem: $000 \to 001 \to 010 \to 101 \to 011 \to 110 \to 100$, respectiv ciclul (0001011). Într-adevăr, 111 nu apare, şi va trebui să-l adaugăm înainte de 110: $000 \to 001 \to 010 \to 101 \to 011 \to 111 \to 110 \to 100$. Rezultă şirul 0001011100, respectiv ciclul (00010111).

Algoritmul lui Martin are avantajul că este foarte uşor de descris şi de implementat. Totuşi, în practică este greu de aplicat, deoarece necesită multă memorie pentru a stoca secvenţele de lungime r care au apărut deja. La fel se întâmplă în cazul *Preferă opusul.*
Folosind operatorul D definit de Lempel ([7]), în [10] se demonstrează o legătură interesantă între algoritmii *Preferă* 1 şi *Preferă opusul.*
Fie $D : \{0,1\}^r \longrightarrow \{0,1\}^{r-1}$ dat de

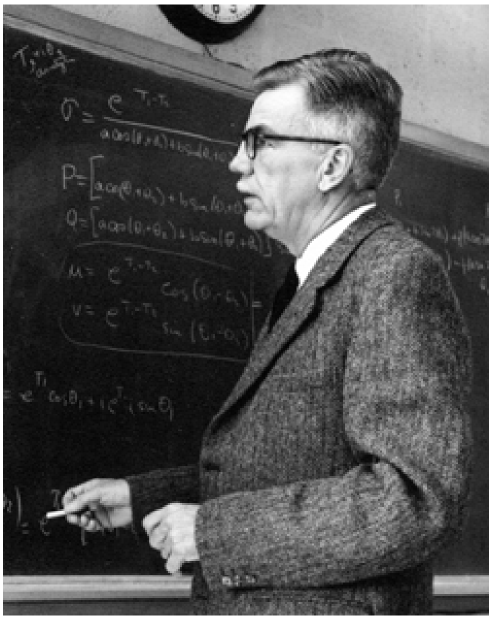
$$D(a_1a_2...a_r) = (a_2 - a_1)\,(a_3 - a_2)\,...\,(a_r - a_{r-1})\,,$$

unde diferenţele se iau modulo 2.
Se observă că, dacă notăm în Exemplul 3 $s_1 = 000$, $s_2 = 001$, $s_3 = 010$, $s_4 = 101$, $s_5 = 011$, $s_6 = 110$, $s_7 = 100$, obţinem aplicând D următoarele imagini: $D(s_1) = 00$, $D(s_2) = 01$, $D(s_3) = 11$, $D(s_4) = 11$, $D(s_5) = 10$, $D(s_6) = 01$, $D(s_7) = 10$. Eliminând repetiţiile, şirul imaginilor este 00, 01, 11, 10, adică exact şirul dat de algoritmul *Preferă* 1 pentru $r = 2$ (obţinut în Exemplul 3). Acest lucru este valabil în general.

Teorema 2 Dacă $(s_i)_{i=1,...,2^r-1}$ este ciclul generat de algoritmul *Preferă opusul*, atunci ciclul $(D(s_i))$, din care s-au eliminat repetiţiile, este ciclul dat de algoritmul *Preferă* 1 pentru $r-1$.

2. M. H. MARTIN (1907-2007)

Monroe Harnish Martin s-a născut în Lancaster, Pasadena pe 7 februarie 1907, fiind cel mai mare dintre cei doi fii ai familiei Amos Zimmerman Martin şi Mary Harnish Martin. A studiat matematica la Lebanon Valley College în Annville. A obţinut doctoratul la Universitatea Johns Hopkins în 1932 cu teza *Asupra matricilor ortogonale infinite*, conducătorul lui fiind Aurel Wintner, autorul unui tratat de mecanică cerească celebru. Martin a scris astfel de lucrări în perioada aceea, pe urmă a trecut la mecanica fluidelor. Tot în 1932



s-a căsătorit cu Virginia Parker din Baltimore. Au avut o fiică, Mary Helen, născută în 1933, doi nepoţi şi doi strănepoţi.

A lucrat cu George David Birkhoff la Universitatea Harvard în domeniul teoriei ergodice, ca National Research Fellow. În 1933-1936, a predat matematica la Trinity College în Hartford, Connecticut, publicând în 1934 lucrarea [9] al cărei rezultat a fost prezentat în secţiunea precedentă. În 1936 s-a mutat la Universitatea Maryland, unde a ramas până la pensionare, fiind întâi conferenţiar şi din 1942 profesor. Martin a condus departmentul de matematică al Universităţii Maryland din 1943 până în 1954 şi a fost director fondator al Institute for Fluid Dynamics and Applied Mathematics (numit acum Institute for Physical Sciences and Technology - IPST), din 1952 până în 1968. Ca membru al Senatului, a contribuit la stabilirea procedurilor de angajare şi promovare în cadrul Universităţii. Între 1969-1970 a condus o cercetare asupra integrării, care este recunoscută pentru importanţa sa în deschiderea de oportunităţi de studiu pentru minorităţi la Universitatea Maryland.

A intuit importanţa crescândă a informaticii şi a meteorologiei şi a atras la universitate personalităţi deosebite din aceste domenii ([12]). Pe baza pusă de el, institutul s-a dezvoltat, ajungând unul din centrele de excelenţă în matematică aplicată şi fizică. Unul dintre regretele sale a fost că nu l-a acceptat în 1950 pe Joseph Smagorinsky, care lucrase cu John von Neumann la Universitatea Princeton, producând primul model numeric al atmosferei pe calculatorul Eniac. Un program de predare şi cercetare în meteorologie a demarat abia la începutul anilor 60, fiind invitat şi E. Lorenz să-şi prezinte lucrarea *Deterministic Non-Periodic Flow* ([8]), care a stat la baza teoriei haosului.

Martin a fost un bun profesor, atât pentru studenţii începători, cât şi pentru avansaţi. A adus contribuţii importante la dinamica fluxurilor atmosferice, precum şi la studiul undelor de şoc generate de particule cu viteză supersonică. Studiile sale sunt importante pentru înţelegerea turbulenţelor generate de avioane şi rachete la depăşirea barierei sunetului. A fost consultant pentru United States Naval Ordnance Laboratory şi i-a încurajat pe colegi să facă la fel, contribuind astfel la apariţia primelor contracte şi granturi guvernamentale la Universitatea Maryland.

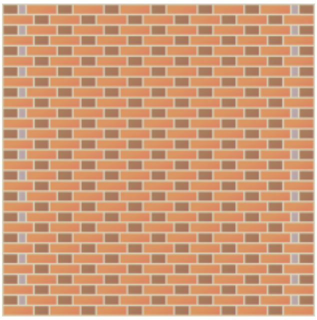
Martin a fost secretar executiv la Division of Mathematics of the National Research Council – National Academy of Sciences între 1955-1959, şi din nou între 1961-1963. A avut funcţia de şef al comitetului acestei divizii de aplicaţii ale matematicii din 1958 până în 1959. A condus comitetul de matematică aplicată al American Mathematical Society între 1951-54. A lucrat la Universitatea St. Andrew's în Scoţia şi la Universitatea din Roma ca John Simon Guggenheim Fellow în 1960.

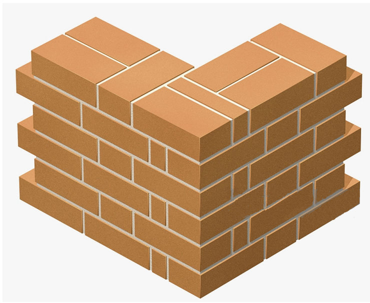
A primit titlul onorific de Doctor of Science la Lebanon Valley College în 1958, şi College's Alumni Citation în 1975.

La pensionarea de la Universitatea Maryland în 1972, a primit titlul de Profesor Emerit [13].

Dupa aceea, Martin şi soţia lui au trăit la Potter Hall, căminul lor istoric datând din perioada colonială. Era situat pe râul Choptank în districtul Carolina. Ei cumpăraseră casa şi parcul în 1951, şi s-au ocupat cu restaurarea lor după o serioasă documentare. Eforturile depuse au condus la listarea Potter Hall în Registrul Istoric Naţional. Familia lor a dat deseori recepţii pentru prieteni şi vizitatori. Martin a continuat să locuiască la Potter Hall şi după moartea soţiei sale, survenită în 1994. În 1997 a primit o distincţie din partea Maryland Historical Trust pentru eforturile lui de păstrare a proprietăţii pentru generaţiile viitoare. *Fondul de conservare Monroe H. and Virginia P. Martin* a fost constituit pentru finanţarea proiectelor de cercetare şi a restaurărilor efectuate de organizaţii non-profit.

Casa are trei secţiuni: una înaltă cu cărămidă flamandă construită în 1808, alăturată celei centrale construite prin 1750, tot cu cărămidă flamandă, şi o aripă cu un singur nivel conţinând o bucătărie, adăugată în 1930. Toate secţiunile au acoperiş mansardat. Potter Hall poartă numele primului proprietar, Zabdiel Potter, care a construit un ponton şi casa mică din cărămidă. El a avut un rol important în transportul tutunului la Baltimore.





Martin a continuat să cerceteze, lucrând cu fiica sa Mary Helen şi cu soţul acesteia Timothy Goldsmith la modele matematice ale deplasării auxinei (un hormon de creştere) în ţesuturile plantelor. Mary Helen Goldsmith este profesor emerit al Universităţii Yale, unde a lucrat din 1963. Domeniul său de predare şi cercetare este Biologia şi fiziologia celulară a plantelor.

În 2007, cu ocazia centenarului său, Monroe H. Martin a fost omagiat pentru realizările de o viaţă în cercetare şi educaţie la Universitatea Maryland într-o proclamaţie semnată de guvernatorul Martin O'Malley [11]. Monroe Harnish Martin a încetat din viaţă la 12 martie 2007, lăsând prin testament un fond pentru înfiinţarea unei catedre care îi poarta numele la IPST. Aceste aspecte biografice se găsesc în [15] şi [16].

La Universitatea Maryland, pentru studenţii la nivel de licenţă în anul terminal există *Premiul Monroe H. Martin în Matematică Aplicată* în valoare de 250 $, fiind acordate cel mult 4 premii anual. Studenţii trebuie să depună o lucrare şi să facă o prezentare de o oră. De asemenea, IPST acordă, din cinci în cinci ani, un premiu internaţional − *Premiul Monroe H. Martin* − tinerilor matematicieni din domeniul matematicii aplicate. Lista celor care au primit premii se poate consulta la adresa [14]. *Bursa de cercetare Monroe H. Martin la nivel Master* este acordată începând cu 2007 pentru a susţine un student la Colegiul de Ştiinţele Naturii, Matematică şi Informatică, interesat atât de matematică, cât şi de fizică.

La Universitatea Johns Hopkins, din 2007 au loc *Prelegerile Monroe H. Martin* susţinute financiar pe baza unui fond caritabil creat de profesorul Martin în timpul vieţii.

BIBLIOGRAFIE

[1] T. van Aardenne-Ehrenfest, N. G. de Bruijn, Circuits and trees in oriented linear graphs, Simon Stevin 28 (1951), 203–217

[2] A. M. Alhakim, A simple combinatorial algorithm for de Bruijn sequences, American Mathematical Monthly, 117 (8) (2010), 728-732

[3] J. Berstel, D. Perrin, The origins of the combinatorics of words, European J. Combin. 28 (2007), 996–1022

[4] N. G. de Bruijn, A combinatorial problem, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. 49 (1946) 758–764 = Indag. Math. 8 (1946), 461–467

[5] C. Flye Sainte-Marie, Solution to question nr. 48, l'Intermédiaire des Mathématiciens, 1 (1894), 107–110

[6] L. R. Ford, Jr., A cyclic arrangement of M-tuples, Report No. P-1071, Rand Corporation, Santa Monica, California, April 23, 1957

[7] A. Lempel, On a homomorphism of the de Bruijn graph and its applications to the design of feedback shift registers, Computers, IEEE Transactions on,100 (12) (1970), 1204-1209

[8] E. N Lorenz, Deterministic nonperiodic flow, J. Atmos. Sci. 20 (1963), 130-141

[9] M. H. Martin, A problem in arrangements, Bull. Amer. Math. Soc. 40 (1934), 859-864

[10] A. Rubin, G. Weiss, Mapping prefer-opposite to prefer-one de Bruijn sequences, Designs, Codes and Cryptography (2016), 1-9

[11] J. Yorke, Monroe H. Martin, 1907–2007, Notices AMS 54 (10), 1348

[12] http://www.ipst.umd.edu/aboutus/files/meteorology_and_ipst.pdf

[13] http://www.mathematics.jhu.edu/new/resources/martin.htm

[14] http://www.ipst.umd.edu/awards/

[15] https://www.newspapers.com/newspage/116116400/

[16] https://www.newspapers.com/newspage/115814617/

Tiberiu Popoviciu Institute of Numerical Analysis
Romanian Academy, Cluj-Napoca
e-mail: `mira@math.ubbcluj.ro`