DIDACTICA MATHEMATICA, Vol. 34(2016), pp. 67–76

SISTEME DE INECUAŢII DEFINITE PRIN FUNCŢII CONVEXE

Iulia Todică

Abstract. In this paper we present results for system of inequalities defined by convex functions. We are interested in characterizations, compatibility and alternative theorems. We also discuss several examples.

MSC 2000. 26A51, 90-01.

Key words. convex function, strong linear dependency, incompatible systems

1. INTRODUCERE

Subiectul lucrării de faţă constă în prezentarea unor rezultate referitoare la sistemele de inecuaţii definite prin funcţii convexe. Aceste rezultate cuprind condiţii, teoreme de caracterizare, teoreme de alternativă şi exemple relative la compatibilitatea sistemelor în discuţie, respectiv la liniar independenţa precum şi tare - liniar independenţa funcţiilor convexe, care alcătuiesc un sistem de inecuaţii.

2. CÂTEVA NOŢIUNI DE BAZĂ

Noţiunile şi rezultatele acestei secţiuni sunt extrase din [2] şi [3].

Pentru orice puncte $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, \cdots, y_n)$, notăm segmentul $[x, y] := \{(1-t)x + ty \,|\, t \in [0, 1]\}$, respectiv produsul scalar din R^n $\langle x, y\rangle := x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$.

Definiţia 1. O mulţime $S \subseteq \mathbb{R}^n$ se numeşte convexă dacă $[x, y] \subseteq S$, $\forall\, x, y \in S$.

Definiţia 2. Fie $M \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime. Se numeşte *învelitoarea convexă* a lui M mulţimea definită astfel:

$$\mathrm{conv\,M} = \bigcap \{\mathrm{S} \subseteq \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \,|\, \mathrm{S\ este\ o\ mulţime\ convexă\ şi\ M} \subseteq \mathrm{S}\}$$

Definiţia 3. Se numeşte *hiperplan* în $\mathbb{R}^n$ orice mulţime de forma:

$$H(a, \alpha) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, a\rangle = \alpha\},$$

unde $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$ and $\alpha \in \mathbb{R}$. În acest caz, mulţimile

$$\begin{aligned} H^{\leqslant}(a, \alpha) &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, a\rangle \le \alpha\} \\ H^{\geqslant}(a, \alpha) &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, a\rangle \ge \alpha\} \end{aligned}$$

se numesc *semispaţiile închise*, iar mulţimile

$$\begin{aligned} H^{<}(a, \alpha) &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, a\rangle < \alpha\} \\ H^{>}(a, \alpha) &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, a\rangle > \alpha\} \end{aligned}$$

se numesc *spaţiile deschise* determinate de hiperplanul $H(a, \alpha)$.

DEFINIŢIA 4. Fie M un subspaţiu liniar al spaţiului liniar $\mathbb{R}^n$. Funcţia $f : M \to \mathbb{R}$ se numeşte liniară dacă

$$\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall\, x, y \in M : f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

DEFINIŢIA 5. Fie M, $L \subseteq \mathbb{R}^n$ două mulţimi nevide. Spunem că M şi N se pot *separa printr-un hiperplan* dacă există $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o funcţie liniară nenulă astfel încât:

$$\sup_{x \in L} f(x) \leq \inf_{x \in M} f(x).$$

TEOREMA 1. (Teorema de separare a mulţimilor convexe) *Fie $S, T \in \mathbb{R}^n$ două mulţimi nevide, convexe şi disjuncte. Atunci S şi T se pot separa printr-un hiperplan.*

DEFINIŢIA 6. Fie $D \in \mathbb{R}^n$ o mulţime nevidă. Funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ se numeşte:

- *convexă*, dacă $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2), \forall\, x_1, x_2 \in D, \forall\, \alpha_1, \alpha_2 \geqslant 0$, cu $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$;
- *concavă*, dacă $-f$ este convexă.

3. INCOMPATIBILITATE. SISTEME INCOMPATIBILE AVÂND SUBSISTEMELE PROPRII COMPATIBILE

În continuare, vom considera X un spaţiu vectorial real şi $K \subseteq X$ o submulţime nevidă şi convexă a sa.

DEFINIŢIA 7. Fie $f_i : K \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, \cdots, m\}$, m funcţii convexe. Sistemul de inecuaţii

$$\begin{cases} f_i(x) < 0,\ i \in \{1, \cdots, m\} \\ x \in K \end{cases} \tag{1}$$

se numeşte:

- *compatibil*, dacă există un element $x \in K$ care să satisfacă toate cele m inecuaţii;
- *incompatibil*, dacă (1) nu este compatibil;
- *incompatibil având subsistemele proprii compatibile*, dacă sistemul (1) este incompatibil şi orice subsistem propriu al său este compatibil.

PROPOZIŢIA 1. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1°. Sistemul (1) este incompatibil având subsistemele proprii compatibile;

2°. Sistemul (1) este incompatibil şi pentru orice $i \in \{1, \cdots, m\}$, subsistemul

$$\begin{cases} f_j(x) < 0,\ j \in \{1, \cdots, m\} \setminus \{i\} \\ x \in K \end{cases} \tag{2}$$

este compatibil.

Demonstraţie. $1^\circ \Rightarrow 2^\circ$ Decurge din definiţie.
$2^\circ \Rightarrow 1^\circ$ Admitem că 2° are loc. Atunci sistemul (1) este incompatibil. Pentru a demonstra 1° considerăm un subsistem propriu al sistemului (1):

$$\begin{cases} f_j(x) < 0,\ j \in J \\ x \in K \end{cases} \tag{3}$$

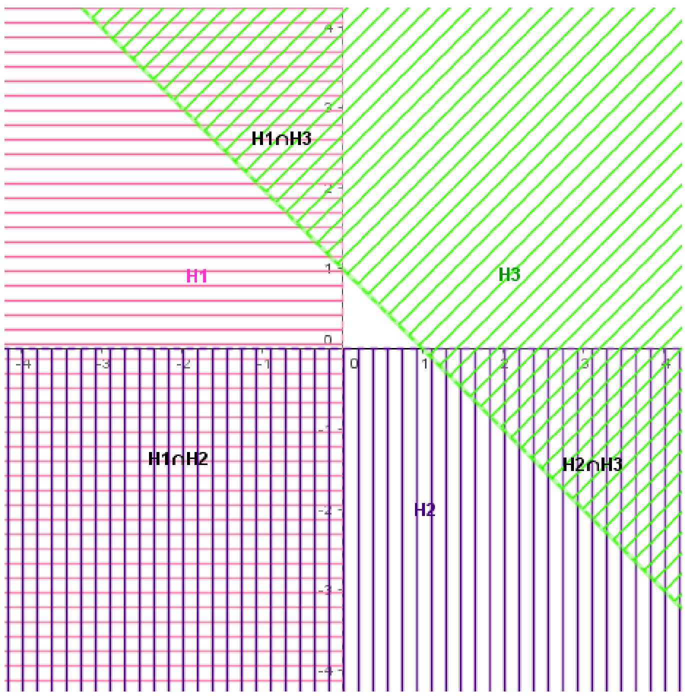
unde $J \subseteq \{1, \cdots, m\}$, $\emptyset \neq J \neq \{1, \cdots, m\}$. Atunci există $I \subseteq \{1, \cdots, m\}$ astfel încât $J \subseteq I$ şi card $I = m - 1$. Fie $i \in \{1, \cdots, m\}$ astfel încât $I = \{1, \cdots, m\} \setminus \{i\}$. Conform 2° rezultă că sistemul (2) este compatibil. Fie x^0 o soluţie a sa. Cum $f_j(x^0) < 0$, $\forall j \in I$ şi $J \subset I$, rezultă că x^0 este o soluţie a subsistemului (3).

□

Observaţia 1. Dacă un sistem incompatibil posedă un subsistem propriu compatibil, nu rezultă, în general, că sistemul are toate subsistemele proprii compatibile. Acest lucru arată că, în Propoziţia de mai sus condiţia card $I = m - 1$ este esenţială.

Exemplul 1. Să considerăm următorul sistem:

$$\begin{cases} f_1(x) := x_1 < 0 \ (H_1) \\ f_2(x) := x_2 < 0 \ (H_2) \\ f_3(x) := -x_1 - x_2 + 1 < 0 \ (H_3) \\ x = (x_1, x_2) \in K := \mathbb{R}^2 \end{cases} \tag{4}$$



Graficul sistemului (4), reprezentat în figura următoare, ne permite să observăm, cu uşurinţă, că acest sistem este incompatibil, dar orice subsistem propriu al său este compatibil, deci sistemul (4) este un sistem incompatibil având toate subsistemele proprii compatibile.

4. FUNCŢII CONVEXE LINIAR INDEPENDENTE RESPECTIV TARE - LINIAR INDEPENDENTE

DEFINIŢIA 8. O familie finită de funcţii convexe $\{f_1, \cdots, f_m\}$, pentru care $f_i : K \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, \cdots, m\}$ se numeşte *tare - liniar independentă* (liniar independentă în sens Fan, Glicksberg, Hoffman) dacă:

$$\forall\, \lambda_1, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{R},\ \text{cu}\ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) \geq 0,\ \forall\, x \in K,\ \text{atunci}\ \lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0.$$

Fie $\mathcal{F}(K, \mathbb{R})$ spaţiul liniar al funcţiilor definite pe K cu valori în $\mathbb{R}$. Reamintim că originea sa este funcţia constantă nulă, $\theta : K \to \mathbb{R}$, $\theta(x) = 0$, $\forall\, x \in K$.

DEFINIŢIA 9. Fiind date funcţiile $f_1, \cdots, f_m \in \mathcal{F}(K, \mathbb{R})$, familia $\{f_1, \cdots, f_m\}$ se numeşte *liniar independentă* dacă:

$$\forall\, \lambda_1, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{R},\ \text{cu}\ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i = \theta\,,\ \text{rezultă că}\ \lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0.$$

OBSERVAŢIA 2. Cu alte cuvinte, familia $\{f_1, \cdots, f_m\}$ este liniar independentă dacă:

$$\forall\, \lambda_1, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{R},\ \text{cu}\ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) = 0,\ \forall\, x \in K,\ \text{rezultă că}\ \lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0.$$

Prin urmare, dacă $\{f_1, \cdots, f_m\}$ este tare - liniar independentă, atunci $\{f_1, \cdots, f_m\}$ este liniar independentă în $\mathcal{F}(K, \mathbb{R})$.

PROPOZIŢIA 2. Fie $f_i : X \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, \cdots, m\}$, funcţii liniare. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1°. Familia $\{f_1, \cdots, f_m\}$ este tare - liniar independentă;
2°. Familia $\{f_1, \cdots, f_m\}$ este liniar independentă în spaţiul $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$.

Demonstraţie. 1° $\Rightarrow$ 2° Are loc conform Observaţiei precedente.
2° $\Rightarrow$ 1° Fie $\lambda_1, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) \geq 0,\ \forall\, x \in K \tag{5}$$

Vrem să demonstrăm că $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$.
• Caz I
Dacă $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) = 0, \forall\, x \in X$, atunci, conform 2°, rezultă că $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$.

• Caz II

Presupunem că $\exists\, x^0 \in X$ astfel încât $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) > 0$. Cum o combinaţie liniară de funcţii liniare este tot o funcţie liniară, rezultă că $f(x) := \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x)$ este o funcţie liniară. Atunci f este surjectivă. Pe de altă parte, $f(x^0) > 0$ deci $f(-x^0) = -f(x^0) < 0$. Cum $x_0 \in X$ rezultă o contradicţie cu (5).

$\square$

Exemplul 2. Acest exemplu se găseşte în [1].

Fie $X = \mathbb{R}$ şi $K = [0,1]$. Pentru fiecare $i \in \mathbb{N}^*$, considerăm funcţiile $f_i : K \to \mathbb{R}$, definite prin

$$f_i(x) = x^i - \frac{1}{i+1},\ \forall\, x \in K.$$

Avem

$f_i'(x) = ix^{i-1}$;

$f_i''(x) = i(i-1)x^{i-2} \geq 0,\ \forall\, x \in K = [0,1],\ \forall\, i \in \mathbb{N}^*$.

Prin urmare, f_i este convexă, $\forall\, i \in \mathbb{N}^*$.

Acum, pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$ şi $\forall\, \lambda_1, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ considerăm relaţia:

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) \geq 0,\ \forall\, x \in K,$$

adică

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \Big(x^i - \frac{1}{i+1}\Big) \geq 0,\ \forall\, x \in [0,1],$$

Funcţia $f(x) := \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \big(x^i - \frac{1}{i+1}\big)$ este continuă pe $[0,1]$. Calculăm

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)\,dx &= \int_0^1 \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \Big(x^i - \frac{1}{i+1}\Big)\,dx \\
&= \sum_{i=1}^{m} \int_0^1 \lambda_i \Big(x^i - \frac{1}{i+1}\Big)\,dx \\
&= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \Big(\frac{x^{i+1}}{i+1} - \frac{x}{i+1}\Big)\Big|_0^1 \\
&= \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{i+1}[(1-1)-(0-0)] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Reamintim următoarea lemă:

LEMA 1. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ şi fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie cu următoarele proprietăţi:

1° f este continuă pe intervalul $[a, b]$;
2° $f(x) \geq 0$, $\forall\, x \in [a, b]$;
3° $\int_a^b f(x)\, dx = 0$.

Atunci $f(x) = 0$, $\forall\, x \in [a, b]$.

OBSERVAŢIA 3. Dacă înlocuim ipoteza de continuitate cu cea de integrabilitate, concluzia Lemei anterioare nu mai este adevărată. Fie $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ definită astfel:

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \in [a, b[\\ 1, & \text{dacă } x = b \end{cases}$$

Funcţia g este integrabilă şi $\int_a^b g(x)\, dx = \int_a^b g^*(x)\, dx = 0$ (unde $g^* : [a, b] \to \mathbb{R}$ este funcţia definită astfel $g(x) = 0$, $\forall\, x \in [a, b]$), dar funcţia g nu este identic nulă.

Revenind la funcţia f din exemplul curent şi aplicând Lema 1 obţinem că

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \Big(x^i - \frac{1}{i+1} \Big) = 0, \ \forall\, x \in [0, 1] \tag{6}$$

Dar f este o funcţie polinomială de grad cel mult m, deci f sau este identic nulă, sau are cel mult m rădăcini reale. Din (6), rezultă că f are o infinitate de rădăcini, deci f este identic nulă. Acest lucru are loc dacă $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$. În concluzie, familiile de funcţii $\{f_1\}$, $\{f_1, f_2\}, \ldots, \{f_1, f_2, \cdots, f_n\}, \ldots$ sunt familii tare - liniar independente.

5. PATRU REZULTATE ASUPRA SISTEMELOR DE INECUAŢII DEFINITE PRIN FUNCŢII CONVEXE

Enunţul şi demonstraţia următoarelor patru teoreme, prezentate în această secţiune, au fost preluate din [1].

Să considerăm $f_i : K \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, \cdots, m\}$, m funcţii convexe şi sistemul de inecuaţii (1).

TEOREMA 2. *Una şi numai una dintre cele două afirmaţii este adevărată:*

1°. *Sistemul* (1) *este compatibil;*
2°. *Există m numere reale pozitive λ_i, cel puţin unul dintre ele strict pozitiv astfel încât*

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) \geqslant 0, \ \forall\, x \in K. \tag{7}$$

Demonstraţie. Să considerăm mulţimile:
$A = \Big\{\big(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x)\big) \,|\, x \in K\Big\} \subseteq \mathbb{R}^m$.
Fie B învelitoarea convexă a lui A.
Fie $N = \{(n_1, n_2, \cdots, n_m) \,|\, n_i \leqslant 0\} \subseteq \mathbb{R}^m$, mulţime deschisă, convexă.
Fie $\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m) \subseteq B$.
Atunci există $x_1, x_2, \cdots, x_n \in K$, există $\lambda_j \geq 0$, $j = \overline{1, n}$, cu $\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$ astfel încât $\xi_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j f_i(x_j)$, $i \in \{1, \cdots, m\}$. Pe de altă parte, f_i sunt funcţii convexe, deci avem

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_i(x_j) \geq f_i\big(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j\big),\ i \in \{1, \cdots, m\} \tag{8}$$

Să presupunem că sistemul (1) e incompatibil. Rezultă că există cel puţin un $i \in \{1, \cdots, m\}$ astfel încât $f_i\Big(\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j f_i(x_j)\Big) \geq 0$.
Din relaţia (8) avem că $\xi_i \geq 0$. Aşadar mulţimea B are cel puţin un element diferit faţă de mulţimea N.
Din Teorema (1) (Teorema de separare a mulţimilor convexe), vom avea că există m numere λ_i, nu toate zero, astfel încât

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \xi_i < 0,\ \text{pentru } (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m) \in N \tag{9}$$

şi

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \xi_i \geq 0,\ \text{pentru } (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m) \in B \tag{10}$$

Din (9) avem că $\lambda_i \geq 0$, $\forall\, i \in \{1, \cdots, m\}$, iar din (10) obţinem chiar (7). $\square$

Teorema 3. *Fie sistemul* (1) *compatibil şi fie $g : K \to \mathbb{R}$ o funcţie concavă. Atunci au loc următoarele:*
(i) Inegalitatea

$$g(x) \leq 0 \tag{11}$$

este o consecinţă pentru (1) *(orice $x \in K$ care satisface* (1) *va satisface şi* (11)*) dacă şi numai dacă există m numere $\lambda_i \geq 0$, astfel încât*

$$g(x) \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x),\ \forall\, x \in K.$$

(ii) Fie $S = \{x \in K \,|\, x$ soluţie pentru (1)*\}. Atunci $\gamma := \sup\limits_{x \in S} g(x) \in \mathbb{R}$ dacă şi*

numai dacă există m numere $\lambda_i \geq 0$, astfel încât funcţia $g(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x)$ să fie mărginită pe K. În acest caz,

$$\gamma = \min_{\lambda_i \geq 0} \sup_{x \in K} \Big\{ g(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) \Big\}. \tag{12}$$

Demonstraţie. (i) " $\Rightarrow$ " Presupunem că $g(x) \leq 0$ este o consecinţă pentru sistemul (1). Adăugând sistemului (1) inecuaţia $-g(x) < 0$, el va deveni incompatibil. Utilizând, acum, teorema (2), pentru noul sistem obţinut rezultă că există $m+1$ numere $\lambda'_i \geq 0$, cel puţin unul strict pozitiv, astfel încât:

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda'_i f_i(x) - \lambda'_{m+1} g(x) \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} \lambda'_i f_i(x) \geq \lambda'_{m+1} g(x) \Leftrightarrow \tag{13}$$

$$g(x) \leq \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda'_i}{\lambda'_{m+1}} f_i(x), \text{ dacă } \lambda'_{m+1} \neq 0$$

Notând $\lambda_i := \frac{\lambda'_i}{\lambda'_{m+1}}$, $i \in \{1, \cdots, m\}$, obţinem $g(x) \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x)$.
Presupunând ca $\lambda'_{m+1} = 0$ atunci (13) devine $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) \geq 0$, unde $\lambda_i \geq 0$, $i \in \{1, \cdots, m\}$, cu cel puţin unul strict pozitiv, ceea ce este imposibil conform teoremei (2), pentru că (1) este compatibil.
" $\Leftarrow$ " Reciproc, dacă există m numere $\lambda_i \geq 0$ astfel încât

$$g(x) \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x), \, \forall \, x \in K,$$

cunoscând că sistemul (1) e compatibil şi aplicând teorema (2), obţinem că

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) < 0, \, \forall \, x \in S.$$

Rezultă, deci, că şi $g(x) < 0$, $\forall \, x \in S$.
(ii) " $\Rightarrow$ " Presupunem γ finit. Atunci $g(x) - \gamma \leq 0$ este o consecinţă pentru (1). Aplicând (i) rezultă că există m numere $\rho_i \geq 0$ astfel încât

$$g(x) - \gamma \leq \sum_{i=1}^{m} \rho_i f_i(x), \, \forall \, x \in K \Leftrightarrow g(x) - \sum_{i=1}^{m} \rho_i f_i(x) \leq \gamma, \, \forall \, x \in K$$

Pe de altă parte, $\forall \, \epsilon > 0$, $\exists \, x_\epsilon \in S$, astfel încât $g(x_\epsilon) > \gamma - \epsilon$.
Fie $\lambda_i \geq 0$, $i \in \{1, \cdots, m\}$ şi fie $\alpha := \sup_{x \in K} \Big(- \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) \Big) \Rightarrow g(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) \leq$

α, $\forall\, x \in K$. Avem

$$\gamma - \epsilon < g(x_\epsilon) \le \alpha + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x),\ \forall\, \epsilon > 0 \tag{14}$$

Dar $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) < 0$ datorită compatibilităţii sistemului (1), deci

$$\alpha + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) \le \alpha \tag{15}$$

Din (14) şi (15) obţinem $\gamma - \epsilon < \alpha$, $\forall\, \epsilon > 0$. Făcându-l pe ϵ să tindă la 0, rezultă că $\gamma \le \alpha$ şi are loc (12). $\square$

TEOREMA 4. *Fie sistemul* (1) *compatibil şi fie* $g : K \to \mathbb{R}$ *o funcţie concavă. Dacă* $g(x) \le 0$ *este o consecinţă a sistemului* (1), *dar nu este o consecinţă a niciunui subsistem al sistemuui* (1), *atunci funcţiile convexe* $f_1, \dots, f_m$ *sunt tare - liniar independente.*

Demonstraţie. Dacă $g(x) \le 0$ este o consecinţă a sistemului (1), atunci, din teorema (2), (i), rezultă că există m numere $\lambda_i \ge 0$ astfel încât $g(x) \le \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x)$, $\forall\, x \in K$. Apoi, din faptul că $g(x) \le 0$ nu este o consecinţă a niciunui subsitem al lui (1) vom avea că $\lambda_i > 0$, $i \in \{1, \cdots, m\}$.
Presupunem că funcţiile $f_1, f_2, \dots, f_m$ nu sunt tare - liniar dependente. Rezultă că există numerele reale $\mu_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, \cdots, m\}$, nu toate nule, astfel încât:

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i f_i(x) \ge 0,\ \forall\, x \in K.$$

Dar (1) este compatibil, deci $\exists\, i \in \{1, \dots, m\}$ astfel încât $\mu_i < 0$.
Să considerăm mulţimea $I = \{i \,|\, \mu_i < 0\}$ şi $\nu = \max\limits_{i \in I} \frac{\lambda_i}{\mu_i} < 0$.
Notăm $\eta_i := \lambda_i - \nu \mu_i$, $i \in \{1, \cdots, m\}$. Atunci avem:

$$g(x) \le \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) \le \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) - \nu \sum_{i=1}^{m} \mu_i f_i(x) = \sum_{i=1}^{m} \eta_i f_i(x),\ \forall\, x \in K.$$

Dar $\eta_i \ge 0$ şi cel puţin unul este 0, deci, conform teoremei (2), (i), $g(x) \le 0$ va fi o consecinţă a unui subsistem al sistemului (1), ceea ce este o contradicţie. Rezultă, aşadar, că $f_1, f_2, \dots, f_m$ sunt tare - liniar independente. $\square$

TEOREMA 5. *Sistemul* (1) *este incompatibil având subsistemele proprii compatibile dacă şi numai dacă sunt satisfăcute următoarele condiţii:*
(i) Oricare $m-1$ *funcţii dintre funcţiile convexe* $f_1, \cdots, f_m$ *sunt tare - liniar independente.*

(ii) Există m numere $\lambda_i \geq 0$ astfel încât

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x) \geq 0, \forall\, x \in K.$$

Demonstraţie. " $\Rightarrow$ " Să presupunem că sistemul (1) este incompatbil ireductibil. Atunci afirmaţia (ii) rezultă chiar din teorema (2).
Inegalitatea $-f_m(x) \leq 0$ este o consecinţă a faptului că sistemul

$$f_i(x) < 0,\ i = \overline{1, m-1} \tag{16}$$

este compatibil. Pe de altă parte, inegalitatea de mai sus nu este o consecinţă a niciunui subsistem al lui (16). Utilizând teorema (4), obţinem (i), adică cele $m-1$ funcţii convexe $f_1, \cdots, f_m$ sunt liniar independente.
" $\Leftarrow$ " Reciproc, considerând (i), din teorema (2) rezultă că orice subsistem al sistemului (1) este compatibil. Pe de altă parte, dacă afirmaţia (ii) este adevărată, utilizând, din nou, teorema (2), obţinem că sistemul (1) este incompatibil. Unind cele două rezultate, găsim că sistemul (1) este incompatibil ireductibil.

□

BIBLIOGRAFIE

[1] K. Fan, I. Glicksberg, A. J. Hoffman: *Systems of inequalities involving convex functions*, Proceedings of the American Mathematical Society 8 (1957), 617 - 622.
[2] B. E. Breckner, N. Popovici: *Convexity and Optimization: An introduction* EFES, Cluj - Napoca, 2006.
[3] W. W. Breckner: *Cercetare operaţională*, Curs Litografiat, Universitatea "Babeş - Bolyai", Facultatea de Matematică, Cluj - Napoca, 1981.

Facultatea de Matematică şi Informatică
Secţia Matematică Didactică, An II
Universitatea "Babeş-Bolyai"
Str. Kogălniceanu, nr. 1
400084 Cluj - Napoca, Romania
e-mail: `juliatodicutza@yahoo.com`

Primit la redacţie: 20 Mai 2016