DIDACTICA MATHEMATICA, Vol. 34(2016), pp. 21–31

VIZUALIZAREA UNOR LOCURI GEOMETRICE CU GEOGEBRA

Bianca Huza

Abstract. The article "Visualizing geometric places with Geogebra" is oriented to transmit both of theoretical and practical concepts, with focus on solving in an interactive way geometric places, using the educational software Geogebra. The main curves studied are: Ellipse, Hyperbola, Parabola, Cissoid of Diocles, Cycloid, Epicycloid , Cardioid, Hypocycloid, respectively Astroid.

The simulations of this geometric places can be visualized at the link: `https://www.geogebra.org/huzabianca`

MSC 2000. 51N99.

Key words. Geogebra, geometric places, curves

1. INTRODUCERE

GeoGebra este un program interactiv ce face parte din categoria programelor Freeware, realizat de către Markus Hohenwarter de la Universitatea din Salzburg pentru utilizarea acestuia în educație.

Software-ul dinamic permite realizarea construcțiilor geometrice cu obiecte elementare precum puncte, vectori, segmente, drepte sau conice ce pot fi salvate și modificate ulterior. Pe de altă parte, ecuațiile și coordonatele pot fi introduse direct. GeoGebra dispune de posibilitatea utilizării de variabile pentru numere, vectori sau puncte și de obținerea derivatei sau integralei unei funcții. Cea mai importantă caracteristică a software-ului este urmtoarea: unei expresii din fereastra corespunzătoare algebrei îi corespunde un obiect în fereastra corespunzătoare geometriei și invers.

Programul interactiv Geogebra poate fi utilizat atât de profesori în procesul de predare-învățare la rezolvarea unor probleme de analiza /geometrie ce necesită cunoștințe ample, cât și de către elevi /studenți pentru însușirea unor cunoștințe noi sau pentru consolidarea acestora. De asemenea, elevii pot utiliza programul pentru a vizualiza și construi figuri geometrice exacte.

Printre principalele dezavantaje ale utilizarii acestui program este faptul ca acest software matematic nu dispune si de un meniu special adresat elevilor care doresc sa iși verifice cunoștințele dobândite, respectiv de a se evalua.

DEFINIŢIA 1. *Prin loc geometric se înțelege figura plană formată din mulțimea $\mathcal{L}$, a tuturor punctelor care au aceeași proprietate, $\mathcal{P}$, și numai pe aceea.*

După modul în care este formulată problema de loc geometric, deosebim:

(1) problemele în carelocul geometric este precizat prin enunț;
(2) probleme în care enunțul cere stabilirea locului geometric.

La problemele în formularea cărora nu apare propoziția de demonstrat, adică cele în care locul geometric nu este precizat, trebuie să se găsească proprietăți caracteristice tuturor punctelor locului geometric, care să reducă problema dată la una cunoscută.

După modul în care este definit locul geometric, deosebim:

(1) Probleme în care punctul mobil este legat, printr-una sau mai multe relații de distanță, de unul sau mai multe puncte fixe;
(2) Probleme în care punctul mobil este legat, printr-una sau mai multe relații de distanță, de una sau mai multe drepte fixe sau, combinat, atunci când relațiile de distanța se referă la puncte fixe și la drepte fixe;
(3) Problemele în care punctul mobil se află la intersecția a două curbe variabile, supuse la anumite condiții.

Ce este de reținut este faptul că pentru problemelor de loc geometric nu există o metodă generală de rezolvare pe cale sintetică, așa cum există în geometria analitică.

Etapele de rezolvare a problemelor de loc geometric:

(1) Se construiesc puncte care au proprietatea locului geometric, arătând că mulțimea punctelor care îl formează nu este vidă.
(2) Se observă elementele geometrice de poziție fixă sau de măsură constantă, precum și legătura lor cu cele variabile, folosind proprietățile corespunzătoare cunoscute.
(3) Pe baza celor stabilite în etapa a doua și folosind, eventual, locuri geometrice remarcabile, se ghicește cărei mulțimi de puncte îi aparțin punctele locului geometric cerut de problema respectivă.
(4) Se demonstrează că:
    (a) orice punct cu proprietatea locului geometric cerut aparține mulțimii stabilite
    (b) orice punct care aparține mulțimii stabilite are proprietatea locului geometric cerut de problemă.

2. EXEMPLE DE LOCURI GEOMETRICE ÎN PLAN

2.1. Elipsa.

Definiţia 2. *Fie F, F' două puncte în plan și $a > 0$. Locul geometric al punctelor M din plan cu proprietatea*

$$MF + MF' = 2a$$

se numește elipsă.

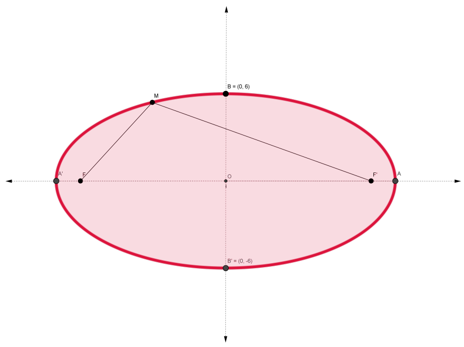


FIGURA. 2.1 – Elipsa

Ecuaţia elipsei

Pentru a găsi ecuația elipsei alegem ca axă a absciselor axa focală FF', iar ca axă a ordonatelor mediatoarea segementului FF'. Prin urmare, originea reperului este mijlocul segmentului FF', notat în figura de mai sus cu punctul O. Fie punctul $M(x,y)$ aparținând elipsei și focarele cu coordonatele $F(c,0)$, respectiv $F'(-c,0)$.

$$MF=\sqrt{(x-c)^2+y^2},\quad MF'=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

Din definiția elipsei, punctul $M(x,y)$ aparține elipsei dacă și numai dacă:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a \quad\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2} \quad\Leftrightarrow$$

$$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2 \quad\Leftrightarrow$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

Notând $b^2=a^2-c^2$ ecuația anterioară devine

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

ecuație care se numește ecuația carteziană implicită a elipsei.

Observații

(1) Dacă $M(x,y)$ este un punct pe elipsă, atunci și simetricul lui față de Ox, punctul de coordonate $M'(x,-y)$ verifică ecuația elipsei, deci Ox este axă de simetrie a elipsei.
(2) Simetricul lui M față de Oy, punctul de coordonate $M''(-x,y)$ verifică ecuația elipsei, deci Oy este axă de simetrie a elipsei.
(3) Simetricul lui M față de O, punctul de coordonate $(-x,-y)$ verifică ecuația elipsei, deci O este centru de simetrie al elipsei.
(4) Intersecțiile elipsei cu axele de coordonate, punctele $A(a,0)$, $A'(-a,0)$, $B(0,b)$, $B'(0,-b)$ se numesc vârfurile elipsei.

2.2. Hiperbola.

DEFINIŢIA 3. *Fie F, F' două puncte în plan și $a>0$. Locul geometric al punctelor M din plan cu proprietatea*

$$|MF+MF'|=2a$$

se numește hiperbolă.

Ecuaţia hiperbolei

Pentru a găsi ecuaţia carteziană implicită a hiperbolei alegem ca axă a absciselor axa focală FF', iar ca axă a ordonatelor mediatoarea segementului FF'. Prin urmare, originea reperului este mijlocul segmentului FF', notat în figura de mai sus cu punctul O. Fie punctul $M(x, y)$ aparţinând hiperbolei și focarele cu coordonatele $F(c, 0)$, respectiv $F'(-c, 0)$.

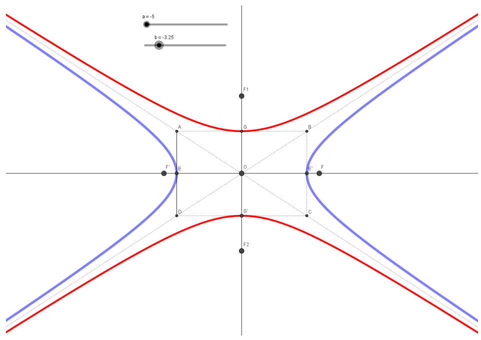


Figura. 2.2 – Hiperbola

Așadar,

$$MF = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \quad MF' = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Din definiţia hiperbolei, punctul $M(x, y)$ aparţine hiperbolei dacă și numai dacă:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a \quad \Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a \quad \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2 + 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \quad \Leftrightarrow$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Notând $b^2 = c^2 - a^2$ ecuaţia anterioară devine

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ecuaţie care se numește ecuaţia carteziană implicită a hiperbolei.

Observaţii

(1) Axele Ox și Oy sunt axe de simetrie ale hiperbolei;
(2) Intersecţiile hiperbolei cu axa Ox, punctele $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$, se numesc vârfurile hiperbolei, iar axa Ox se numește axa transversală a hiperbolei;

2.3. Parabola.

Definiţia 4. *Fie o dreaptă fixă din plan și un punct fix $F \notin d$. Locul geometric al punctelor M din plan cu proprietatea că distanţa la punctul F este egală cu distanţa la dreapta d se numește parabolă.*

Punctul F se numește focar, iar dreapta d se numește dreaptă directoare. Distanţa de la focar la dreapta directoare se numește parametrul parabolei și se notează cu p.

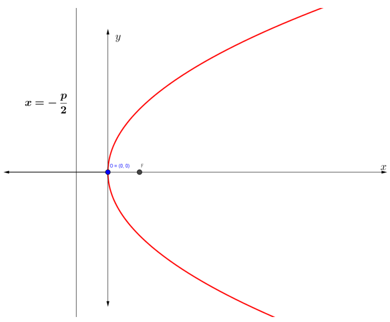


FIGURA. 2.3 – Parabola

Ecuaţia parabolei

Pentru a găsi ecuaţia parabolei alegem ca axă a absciselor perpendiculara dusă prin F la d, care intersectează dreapta d în punctul A și are sensul pozitiv de la directoare către focar, iar axa ordonatelor este mediatoarea segmentului AF.

Focarul F are coordonatele $(\frac{p}{2}, 0)$, iar prin definiție un punct oarecare $M(x, y)$ se află pe parabolă dacă și numai dacă $MF = MB$ unde B este proiecția lui M pe dreapta d și are coordonatele $(-\frac{p}{2}, y)$. Obținem:

$$\sqrt{x - \frac{p}{2} + y^2} = x + \frac{p}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

de unde se obține ecuația carteziană implicită a parabolei: $y^2 = 2px$.

2.4. **Cisoida lui Diocles.** Se consideră un cerc de rază dată a și o tangentă într-un punct A fixat pe cerc. O secantă oarecare, dusă prin punctul O, diametral opus lui A, taie cercul în punctul C și tangenta în B.

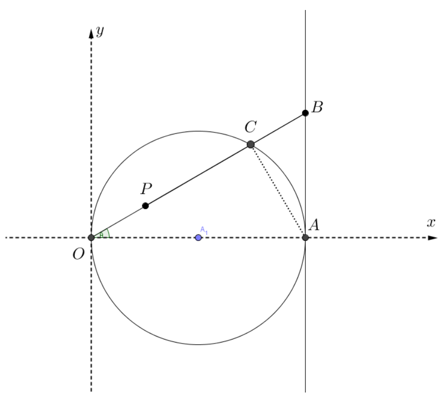


FIGURA. 2.4 – Constructia cisoidei

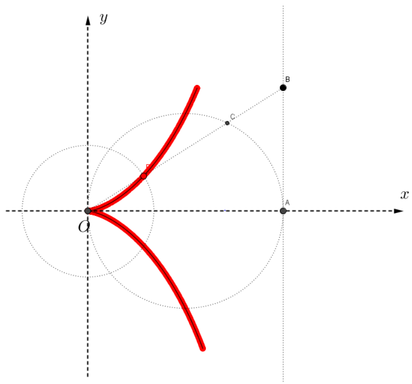


FIGURA. 2.5 – Locul geometric

DEFINIŢIA 5. *Locul geometric al punctului P care are proprietatea*

$$BP = OC$$

este curba care poartă numele de cisoida lui Diocles.

Pentru a determina ecuația locului geometric, se consideră punctul O originea reperului, axa Ox dreapta OA și axa Oy perpendiculara în O pe OA. Fie θ unghiul variabil format de secantă cu axa Ox și ρ lungimea segmentului OP.

Coordonatele x, y ale punctului P sunt:

$$x = \rho\cos\theta \qquad y = \rho\sin\theta$$

Deoarece ρ variază cu θ, trebuie exprimat ρ în funcție de θ. Astfel, obținem:

$$\rho = OP = OB - BP = OB - OC = \frac{2a}{\cos\theta} - 2a\cos\theta$$

Așadar,

$$\rho = 2a\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$$

relație care reprezintă ecuația cisoidei în coordonare polare.

Prin introducerea valorii lui ρ în expresiile pentru x și y, obținem:

$$\begin{cases} x = 2a\sin^2\theta \\ y = 2a\frac{\sin^3}{\theta}, \end{cases}$$

relații ce exprimă reprezentarea parametrică a cisoidei.

Prin eliminarea între cele două ecuații a parametrului θ, se obține:

$$\frac{y}{x} = \tan\theta, \qquad \sin^2\theta = \frac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{y^2}{x^2+y^2},$$

deci:

$$x = 2a\frac{y^2}{x^2+y^2} \quad \Leftrightarrow \quad x^3 + xy^2 - 2ay^2 = 0,$$

relație care constitue reprezentarea implicită a cisoidei.

2.5. Cicloida.

Definiţia 6. *Cicloida este curba plană descrisă de un punct fix al unui cerc, care se rostogolește fără alunecare pe o dreaptă fixă, situată în planul cercului.*

Cercul mobil se numește cerc generator, iar dreapta pe care se rostogolește bază sau directoare.

Fie O un punct fix al unui cerc de rază a, tangent în O la dreapta d. Pentru a determina ecuația cicloidei se consideră punctul fix O drept origine a reperului, axa Ox fiind directoarea d, respectiv axa Oy - perpendiculara in punctul O.

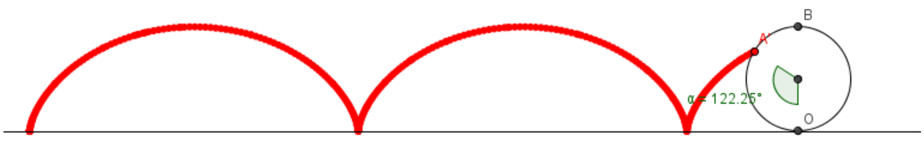


Figura. 2.6 – Cicloida

Reprezentarea parametrică a cicloidei:

$$\begin{cases} x = a\varphi - a\sin\varphi \\ y = a - a\cos\varphi \end{cases}$$

unde a este raza cercului mobil, iar φ este unghiul de rulare.

Etapele construcției geometrice cu ajutorul softului Geogebra:

(1) Considerăm axa Ox ca fiind dreata directoare pe care se rotește cercul dat
(2) Fie dreapta de ecuație $y = 1$
(3) Fie punctul $P(a, 1)$
(4) Trasăm cercul de centru P și rază 1
(5) Ducem perpendiculara prin punctul de intersecție al cercului cu dreapta directoare
(6) Intersectând perpendiculara cu $C(P, 1)$ obținem punctul B și O
(7) Aflăm punctul A' astfel încât masura unghiului $A'PO$ să fie 45 de grade.
(8) Miscarea punctului P generează traiectoria punctului A', obținându-se curba cicloidală.

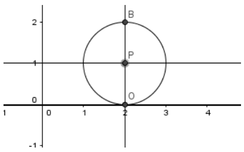


Figura. 2.7 – Etapele 1-6

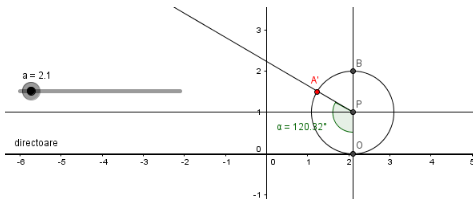


Figura. 2.8 – Etapa7

2.6. Epicicloida. Cardioida.

Definiția 7. *Epicicloida este curba descrisă de un punct de pe un cerc care rulează, fără să alunece, pe un alt cerc exterior.*

Reprezentarea parametrică a epicicloidei este:

$$\begin{cases} x = (a+b)\cos\varphi - b\cos\frac{a+b}{b}\varphi \\ y = (a+b)\sin\varphi - b\cos\frac{a+b}{b}\varphi \end{cases}$$

unde a este raza cercului fix, b este raza cercului mobil, iar φ este unghiul de rulare a cercului mobil pe cercul fix.

Etapele de construcție cu ajutorul softului Geogebra:

(1) Construim cercul fix $C(A, R)$, unde R este raza cercului, iar A originea sistemului de coordonate
(2) Fie B intersectia cercului construit cu axa Ox
(3) Rotim punctul B față de centrul cercului cu unghiul $-\alpha$, obținându-se astfel punctul B'

(4) Construim cercul $C(B', r)$, unde r este raza cercului mobil.
(5) Fie semidreapta cu originea în A, ce trece prin punctul B'. Această semidreapta intersecteaza cercul $C(B', r)$ î punctul C.
(6) Fie cercul de rază r cu centrul în punctul C
(7) Rotim punctul B' față de C cu unghiul $-\alpha \cdot k$, unde $k = \frac{R}{r}$. Fie acest punct, punctul B''
(8) Mișcarea punctului B' generează traiectoria punctului B'', obținându-se astfel curba numită epiciloidă.

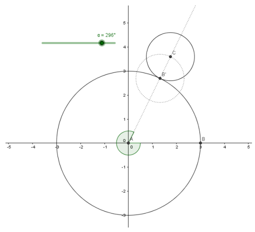


FIGURA. 2.9 – Etapele 1-6

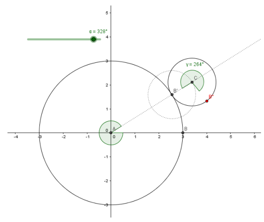


FIGURA. 2.10 – Etapa 7

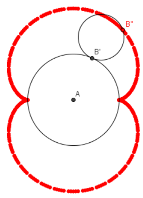


FIGURA. 2.11 – Nefroida

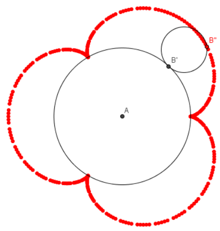


FIGURA. 2.12 – Epicicloida cu 3 bucle

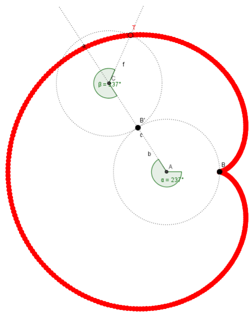
DEFINIŢIA 8. *Cardioida este epicicloida în care cele două cercuri, cel fix și cel mobil, au raze egale.*

Dacă se consideră $a = b$ în reprezentarea parametrică a epicicloidei, se obține reprezentarea parametrică a cardioidei:

$$\begin{cases} x = a(2\cos\varphi - \cos 2\varphi) \\ y = a(2\sin\varphi - \sin 2\varphi) \end{cases}$$

Prin translatarea reperului xOy în punctul A, punctul de abscisă x devine $x + a$ și deci:

$$\begin{cases} x = 2a\cos\varphi(1 - \cos\varphi) \\ y = 2a\sin\varphi(1 - \cos\varphi) \end{cases}$$



Prin eliminarea între cele două ecuații a parametrului φ, se obține:

$$\tan\varphi = \frac{y}{x} \qquad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

deci:

$$x = 2a\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right),$$

adică:

$$(x^2+y^2-2ax)^2 - 4a^2(x^2+y^2) = 0.$$

Ultima ecuație reprezintă reprezentarea implicită rațională a cardioidei.

Pentru realizarea construcției se procedează analog etapelor de la curba epicicloidală, considerându-se $R = r$, unde R este raza cercului fix, iar r raza cercului mobil.

2.7. Hipocicloida. Astroida.

Definiţia 9. *Hipocicloida este curba descrisă de un punct de pe cerc care se rostogolește, fără să alunece, în interioriul altui cerc mai mare*

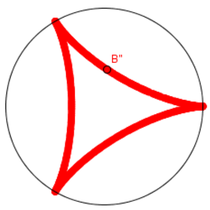


Figura. 2.13 – Deltoida

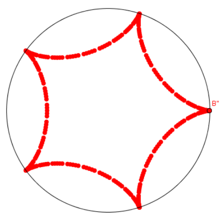


Figura. 2.14 – Hipocicloida cu 5 bucle

Reprezentarea parametrică a hipocicloidei este dată de ecuațiile:

$$\begin{cases} x = (a-b)\cos\varphi + b\cos\frac{a-b}{b}\varphi \\ y = (a-b)\sin\varphi + b\cos\frac{a-b}{b}\varphi \end{cases}$$

unde a reprezintă raza cercului fix, iar b raza cercului mobil, respectiv φ unghiul de rulare a cercului mobil în interiorul cercului fix.

Pentru realizarea construcției geometrice cu ajutorul softului Geogebra se lucrează analog etapelor de la curba epicicloidală, ținând cont de faptul că cercul mobil se rotește în interiorul cercului fix.

Definiţia 10. *Astroida este hipocicloida care are patru vârfuri.*

Un cerc cu raza de $\frac{1}{4}$ se învârte în interiorul unui cerc de rază 1 și un punct de pe circumferința lui delimitează o astroidă. Așadar dacă considerăm $a = 4b$ în relațiile parametrice ale hipocicloidei obținem:

$$\begin{cases} x = b(3\cos\varphi + 3\cos\varphi) \\ y = b(3\sin\varphi + 3\sin\varphi) \end{cases}$$

care constitue reprezentarea parametrică a astroidei.

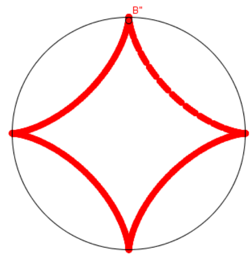


FIGURA. 2.15 – Astroida

Această reprezentare se mai poate rescrie și sub forma:

$$\begin{cases} x = 4b\cos^3\varphi \\ y = 4b\sin^3\varphi. \end{cases}$$

Prin eliminarea parametrului φ între cele două ecuații, se obține reprezentarea implicită a astroidei:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Construcția geometrică se realizează analog curbei hipocicloidale, ținând seama de faptul că $R = 4r$, unde R este raza cercului fix, iar r este raza cercului mobil.

BIBLIOGRAFIE

[1] P. Blaga, *Construcții geometrice*, Curs Universitatea Babeș Bolyai, Cluj-Napoca, 2014-2015.

[2] V. Călugăr, *Culegere de probleme de geometrie pentru gimnaziu și liceu*, Editura Mega, Cluj-Napoca, 2006.

[3] A. Iordan, *Sistem informatic educațional pentru geometrie*, Editura Politehnica, Timișoara, 2009.

[4] C.P. Nicolescu, *Teste de geometrie*, Editura Albatros, București, 1986.

[5] G. Procopiuc, *Probleme de algebră liniară și geometrie*, Universitatea Tehnică Gheorghe Asachi, Iași, 2005.

[6] D. Vâlcan, *Metodologia rezolvării problemelor de Matematică*, UBB, Cluj-Napoca, 2015-2016.

[7] `http://images3.wikia.nocookie.net/nccmn/ro/images/e/e7/Geometrie_diferentiala.pdf`

[8] `http://www.geogebra.org/about`

Faculty of Mathematics and Computer Science
"Babeș-Bolyai" University
Str. Kogălniceanu, no. 1
400084 Cluj-Napoca, Romania
e-mail: `huzabianca@yahoo.com`

Primit la redacţie: 20 Mai 2016