DIDACTICA MATHEMATICA, Vol. 32(2014), pp. 53–67

FORMULELE LUI STIRLING, WALLIS, GAUSS ŞI APLICAŢII

Eugenia Duca, Emilia Copaciu şi Dorel I. Duca

Abstract. In this paper are presented the Wallis, Stirling, Gauss formulae and are given some their applications.
MSC 2000. 26A24
Key words. Stirling's formula, Wallis's formula, infinite product

1. FORMULA LUI WALLIS

Formula lui Wallis este prima reprezentare a numărului iraţional π ca limită a unui şir de numere raţionale. Pentru a o obţine, calculăm integralele S_n şi K_n, unde

$$S_n := \int_0^{\pi/2} \sin^n x \mathrm{d}x \quad \text{şi} \quad K_n := \int_0^{\pi/2} \cos^n x \mathrm{d}x,$$

şi $n \geq 0$ este un număr întreg.

Pentru $n = 0$ şi $n = 1$ avem respectiv

$$S_0 = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \quad \text{şi} \quad S_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x \mathrm{d}x = 1.$$

Pentru $n \geq 2$ integrăm prin părţi; obţinem

$$S_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x \sin x \mathrm{d}x = -\int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x \left(\cos x\right)' \mathrm{d}x =$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x \mathrm{d}x =$$

$$= (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \left(1 - \sin^2 x\right) \mathrm{d}x = (n-1) \left(S_{n-2} - S_n\right),$$

de unde rezultă *formula de recurenţă*

$$nS_n = (n-1) S_{n-2}, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},\ n \geq 2.$$

Această formulă de recurenţă, mai exact formula

$$S_n = \frac{n-1}{n} S_{n-2}, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},\ n \geq 2,$$

unde $S_0 = \pi/2$ şi $S_1 = 1$, ne permite să reducem, succesiv, calculul lui S_n la S_0 sau S_1 după cum n este par, respectiv impar. Într-adevăr, dacă $n = 2m$ este par atunci

$$S_{2m} = \frac{(2m-1)\,(2m-3)\cdots 3\cdot 1}{(2m)\,(2m-2)\cdots 4\cdot 2} \times \frac{\pi}{2},$$

iar dacă $n = 2m+1$ este impar, atunci

$$S_{2m+1} = \frac{(2m)\,(2m-2)\cdots 4\cdot 2}{(2m+1)\,(2m-1)\cdots 3\cdot 1}.$$

Acelaşi rezultat obţinem şi pentru K_n. Prin urmare

$$S_n := \int_0^{\pi/2} \sin^n x\mathrm{d}x = K_n := \int_0^{\pi/2} \cos^n x\mathrm{d}x =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\dfrac{\pi}{2}, & \text{dacă } n \text{ este par} \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & \text{dacă } n \text{ este impar.} \end{cases}$$

Pe de altă parte, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ şi $x \in [0, \pi/2]$, avem

$$\sin^{2n+1} x \leq \sin^{2n} x \leq \sin^{2n-1} x.$$

Integrând aceste inegalităţi obţinem că

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leq \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2} \leq \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!},$$

sau

$$\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n+1} \leq \frac{\pi}{2} \leq \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n},$$

de unde deducem că

$$\left|\frac{\pi}{2} - \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n+1}\right| \leq$$

$$\leq \left|\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n} - \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n+1}\right| =$$

$$= \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n\,(2n+1)},$$

oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. Deoarece

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n\,(2n+1)}=0,$$

urmează că

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{(2n+1)}=\frac{\pi}{2},$$

sau

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdots(2n)\,(2n)}{1\cdot 1\cdot 3\cdot 3\cdots(2n-1)\,(2n-1)}\frac{1}{2n+1}=\frac{\pi}{2},$$

relaţie cunoscută în matematică sub numele de *formula lui Wallis.* Formula lui Wallis, celebră din punct de vedere istoric, se foloseşte şi azi în cercetările teoretice.

Comentariu. John Wallis (23 noiembrie 1616, Ashford Kent – 28 octombrie 1703, Oxford) - matematician şi teolog englez - a studiat la Cambridge, după care a îmbrăţişat cariera eclesiastică. La 33 de ani a devenit profesor de geometrie la Oxford. A fost un admirator al matematicii greceşti, editând o parte din operele lui Eutokios (sec. 4 î.H.), Arhimede (sec. 3 î.H.), Aristarh (sec. 3 î.H.) şi Ptolomeu (sec. 2 d.H). Lui i se datorează crearea învăţământului pentru surdomuţi.

2. FORMULA LUI STIRLING

Formula lui Stirling este una din formulele celebre ale analizei matematice, obţinută din formula lui Wallis.

Să considerăm funcţiile $f,g:[1,+\infty[\to\mathbb{R}$ definite prin

$$f(x)=\ln(x+1)-\ln x-\frac{2}{2x+1},\ \text{oricare ar fi } x\in[1,+\infty[,$$

$$g(x)=\ln x-\ln(x+1)+\frac{2x+1}{2x\,(x+1)},\ \text{oricare ar fi } x\in[1,+\infty[.$$

Evident funcţiile f şi g sunt derivabile pe $[1,+\infty[$ şi

$$f'(x)=\frac{-1}{4x\,(x+1)\,(2x+1)^2},\quad g'(x)=\frac{-1}{2x^2\,(x+1)^2},$$

oricare ar fi $x\in[1,+\infty[$. Aşadar ambele funcţii au derivatele negative pe mulţimea de definiţie

$$f'(x)<0,\quad g'(x)<0,\ \text{oricare ar fi } x\in[1,+\infty[.$$

Urmează că atât f cât şi g sunt strict descrescătoare pe $[1,+\infty[$, deci avem

$$f(x)\le f(1)=\ln 2-\frac{2}{3}<0=\lim_{x\to\infty}g(x)<g(x),$$

oricare ar fi $x \in [1, +\infty[$. Prin urmare, pentru orice $x \in [1, +\infty[$ au loc inegalităţile

$$\frac{2}{2x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{2x+1}{2x(x+1)}. \tag{1}$$

Dacă în (1) punem $x = n \in \mathbb{N}$, obţinem că

$$\frac{2}{2n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{2n+1}{2n(n+1)}, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Fie acum $u \in]0, +\infty[$ şi $h :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ funcţia definită prin

$$h(x) := \left(x + \frac{u}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{u}{x}\right) - u, \text{ oricare ar fi } x \in]0, +\infty[.$$

Evident funcţia h este derivabilă de două ori pe $]0, +\infty[$ şi pentru orice $x \in]0, +\infty[$ avem

$$h'(x) = \ln \frac{x+u}{x} - \frac{u(2x+u)}{2x(x+u)}, \quad h''(p) = \frac{u^3}{2x^2(x+u)^2}.$$

Întrucât $h''(x) > 0$, oricare ar fi $x \in]0, +\infty[$, deducem că derivata h' este strict crescătoare pe $]0, +\infty[$. Urmează că

$$h'(x) < \lim_{t\to\infty} h'(t) = 0, \text{ oricare ar fi } x \in]0, +\infty[,$$

şi deci funcţia h este strict descrescătoare pe $]0, +\infty[$. Aşadar avem

$$h(x) > \lim_{t\to\infty} h(t) = 0, \text{ oricare ar fi } x \in]0, +\infty[.$$

Ţinând seama de expresia funcţiei h şi de faptul că $u > 0$ a fost ales oarecare, obţinem că

$$\left(x + \frac{u}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{u}{x}\right) > u, \text{ oricare ar fi } x, u \in]0, +\infty[,$$

sau echivalent

$$\exp u < \left(1 + \frac{u}{x}\right)^{x+\frac{u}{2}}, \text{ oricare ar fi } x, u \in]0, +\infty[. \tag{3}$$

Cu aceste pregătiri, putem demonstra formula lui Stirling.

TEOREMA 1. (*formula lui Stirling*) *Şirul* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *cu termenul general*

$$x_n := \frac{n!}{n^n\sqrt{n}\exp n}, \quad (n\in\mathbb{N})$$

este convergent şi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n\sqrt{n}\exp n} = \sqrt{2\pi}. \quad (\textit{formula lui Stirling}) \tag{4}$$

Demonstraţie. Evident $x_n > 0$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$. Pe de altă parte, din (3) avem că

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\mathrm{e}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1/2}} < 1, \text{ oricare ar fi } n\in\mathbb{N}. \tag{5}$$

Prin urmare şirul (x_n) este strict descrescător şi mărginit inferior, aşadar convergent. Fie

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Evident $x_0\in[0,x_1[$.

Vom arăta, pentru început, că $x_0\neq 0$. Din (5), obţinem că

$$0<\ln x_n - \ln x_{n+1} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\left[\ln(n+1)-\ln n\right]-1,$$

oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$. Cum, din (2), avem

$$\ln(n+1)-\ln n < \frac{2n+1}{2n(n+1)},$$

oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$, obţinem că

$$\ln x_n - \ln x_{n+1} < \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{2n+1}{2n(n+1)} - 1 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right),$$

oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$. Aşadar

$$0<\ln x_n-\ln x_{n+1}<\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right), \text{ oricare ar fi } n\in\mathbb{N}. \tag{6}$$

Din (6), deducem că pentru orice $n\in\mathbb{N}$, avem

$$\begin{array}{l}
0<\ln x_2-\ln x_3<\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\\
0<\ln x_3-\ln x_4<\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
0<\ln x_{n-1}-\ln x_n<\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)
\end{array}$$

de unde, prin adunare membru cu membru, obţinem

$$0 < \ln x_2 - \ln x_n < \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)$$

sau

$$1 < \frac{x_2}{x_n} < \exp\left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)\right)$$

sau

$$\exp\left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\right)\right) < \frac{x_n}{x_2} < 1. \tag{7}$$

Dacă acum, în (7), facem $n \to \infty$ obţinem

$$\exp\left(\frac{-1}{8}\right) \le \frac{x_0}{x_2}$$

şi deci $x_0 \neq 0$.

Cum, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, avem

$$\frac{x_n^2}{x_{2n}} = \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!}\sqrt{\frac{2}{n}} = \frac{2 \cdot 4 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}\sqrt{\frac{2}{n}} =$$

$$= \frac{2 \cdot 4 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)\sqrt{2n+1}}\sqrt{\frac{2(2n+1)}{n}},$$

în baza formulei lui Wallis, deducem că

$$x_0 = \sqrt{2\pi}.$$

□

Comentariu. James Stirling (mai 1692, Garden, Stirlingshire – 5 decembrie 1770, Edinburgh) - matematician scoţian - a studiat la Oxford, Padova şi Veneţia. A fost membru al Academiei Regale din Berlin. Formula, care azi îi poartă numele, se găseşte în tratatul *Methodus Differentialis*, publicat în 1780.

2.1. Funcţiile beta şi gama ale lui Euler. Funcţiile beta şi gama au fost introduse şi studiate de către Euler în 1730.

2.2. Funcţia beta a lui Euler. Dacă x şi y sunt numere reale astfel încât $x > 0$, $y > 0$, atunci funcţia $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(t) := t^{x-1}(1-t)^{y-1}, \text{ oricare ar fi } t \in]0,1[,$$

este integrabilă impropriu pe $]0,1[$ (vezi, de exemplu, [2]).

Funcţia $B :]0,+\infty[\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ definită prin

$$B(x,y) := \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t, \text{ oricare ar fi } x,y \in]0,+\infty[,$$

se numeşte **funcţia beta a lui Euler** (sau **integrala lui Euler de prima speţă**).

Câteva proprietăţi ale funcţiei beta a lui Euler sunt date în teorema următoare.

Teorema 2. *Următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

1^0 $B(x,y) = B(y,x)$, *oricare ar fi* $x,y > 0$.

2^0 $B(x+1,y) = \dfrac{x}{x+y}B(x,y)$, *oricare ar fi* $x,y > 0$.

3^0 $B(x,y+1) = \frac{y}{x+y}B(x,y)$, *oricare ar fi* $x,y > 0$.

4^0 $B(x,y) = \displaystyle\int_{0+0}^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(t+1)^{x+y}}\mathrm{d}t$, *oricare ar fi* $x,y > 0$.

5^0 $B(x,1) = \frac{1}{x}$, *oricare ar fi* $x > 0$.

6^0 $B(x,n) = \dfrac{(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}$, *oricare ar fi* $x > 0$ *şi* $n \in \mathbb{N}$.

7^0 $B(m,n) = \dfrac{(m-1)!\,(n-1)!}{(m+n-1)!}$, *oricare ar fi* $n,m \in \mathbb{N}$.

8^0 $B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \pi$.

Demonstraţie. 1^0 Facem schimbarea de variabilă $t := 1-u$.

2^0 Integrăm prin părţi; obţinem

$$B(x+1,y) = \left.\frac{-1}{y}t^x(1-t)^y\right|_0^1 + \frac{x}{y}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{x}{y}\int_0^1 t^{x-1}\left[(1-t)^{y-1} - (1-t)^y t\right]\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{x}{y}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t - \frac{x}{y}\int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{x}{y}B(x,y) - \frac{x}{y}B(x+1,y),$$

de unde deducem formula din afirmaţia 2^0.

3^0 Se aplică 1^0 şi 2^0.

4^0 Facem schimbarea de variabilă

$$t := \frac{u}{u+1};$$

obţinem

$$B(x,y) = \int_{0+0}^{+\infty} \left(\frac{u}{u+1}\right)^{x-1} \left(\frac{1}{u+1}\right)^{y-1} \frac{1}{u+1} \mathrm{d}u =$$

$$= \int_{0+0}^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(u+1)^{x+y}} \mathrm{d}u.$$

5^0 Avem

$$B(x,1) = \int_{0+0}^{1-0} t^{x-1} \mathrm{d}t = \frac{1}{x} t^{\alpha} \Big|_0^1 = \frac{1}{x}.$$

6^0 În baza afirmaţiilor anterioare, avem

$$B(x,n) = \frac{n-1}{x+n-1} B(x,n-1) = \frac{n-1}{x+n-1} \frac{n-2}{x+n-2} B(x,n-2) = \cdots =$$

$$= \frac{n-1}{x+n-1} \frac{n-2}{x+n-2} \cdots \frac{n-(n-1)}{x+n-(n-1)} B(x,1) =$$

$$= \frac{(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}.$$

7^0 Se aplică 6^0 şi 1^0.

8^0 Facem schimbarea de variabilă

$$t := \cos^2 u, \quad u \in]0, \pi/2[;$$

obţinem

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \int_{0+0}^{1-0} \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} \mathrm{d}t = \int_{0+0}^{\pi/2-0} \frac{2\cos u \sin u}{\sqrt{\cos^2 u \left(1-\cos^2 u\right)}} \mathrm{d}u =$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}u = \pi.$$

□

2.3. Funcţia gama a lui Euler. Funcţia $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(t) := \exp(-t)\, t^{x-1} \mathrm{d}t, \text{ oricare ar fi } t \in]0,+\infty[,$$

este integrabilă impropriu pe $]0,+\infty[$ (vezi, de exemplu, [2]).

Funcţia $\Gamma :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ definită prin

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} \exp(-t)\, t^{x-1} \mathrm{d}t, \text{ oricare ar fi } x \in]0,+\infty[,$$

se numeşte **funcţia gama a lui Euler** (sau **integrala lui Euler de speţa a doua**).

Câteva proprietăţi ale funcţiei gama a lui Euler sunt date în teorema următoare.

TEOREMA 3. *Următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

1^0 $\Gamma(1) = 1$.

2^0 $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, *oricare ar fi* $x > 0$.

3^0 $\Gamma(n+1) = n!$, *oricare ar fi* $n \in \mathbb{N}$.

4^0 $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$, *oricare ar fi* $x > 0$ (*formula lui Gauss*).

5^0 $B(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$, *oricare ar fi* $x, y > 0$.

6^0 $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = B(x, 1-x)$, *oricare ar fi* $x \in]0,1[$.

7^0 $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \dfrac{1}{x\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{x^2}{n^2}\right)}$, *oricare ar fi* $x \in]0,1[$.

8^0 $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\sin \pi x}$, *oricare ar fi* $x \in]0,1[$ (*formula lui Euler*).

9^0 $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Demonstraţie. 1^0 Avem

$$\Gamma(1) := \int_0^{+\infty} \exp(-t)\, t^{1-1} \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \exp(-t)\, \mathrm{d}t = -\exp(-t)\Big|_0^{+\infty} = 1.$$

2^0 Integrând prin părţi obţinem

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} \exp(-t)\, t^{x} \mathrm{d}t = -\exp(-t)\, t^x\Big|_0^{+\infty} + x\int_0^{+\infty} \exp(-t)\, t^{x-1} \mathrm{d}t =$$
$$= x\Gamma(x).$$

3^0 În baza afirmaţiilor 1^0 şi 2^0, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem

$$\begin{aligned}
&\Gamma(1) = 1\\
&\Gamma(2) = 1\Gamma(1)\\
&\Gamma(3) = 2\Gamma(2)\\
&\cdots\cdots\\
&\Gamma(n) = (n-1)\,\Gamma(n-1)\\
&\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)
\end{aligned}$$

Înmulţind aceste egalităţi membru cu membru obţinem egalitatea din afirmaţia 3^0.

4^0 Fie $x \in]0,+\infty[$. Pentru $n \in \mathbb{N}$, considerăm integrala

$$I_n := \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\mathrm{d}t.$$

Integrând prin părţi, obţinem

$$I_n = \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \frac{t^x}{x}\Big|_0^n + \frac{n}{x}\frac{1}{n}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1} t^x\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{n}{x}\frac{1}{n}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1} t^x\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{n}{x}\frac{1}{n}\frac{t^{x+1}}{x+1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\Big|_0^n + \frac{n\,(n-1)}{x\,(x+1)}\frac{1}{n^2}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-2} t^{x+1}\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{n\,(n-1)}{x\,(x+1)}\frac{1}{n^2}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-2} t^{x+1}\mathrm{d}t = \cdots =$$

$$= \frac{n!}{x\,(x+1)\cdots(x+n-1)}\frac{1}{n^n}\int_0^n t^{x+n-1}\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{n!n^x}{x\,(x+1)\cdots(x+n)}.$$

Întrucât

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n = \exp(-t)\,,\ \text{oricare ar fi } t \in]0,+\infty[,$$

deducem că

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \exp(-t)\,t^{x-1}\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\mathrm{d}t,$$

de unde rezultă concluzia.

5^0 Fie $x, y, s > 0$. Cu schimbarea de variabilă

$$t = (s+1)\,u, \quad u \in]0, +\infty[,$$

obţinem

$$\Gamma(x+y) = \int_0^{+\infty} \exp(-t)\, t^{x+y-1} \mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{+\infty} \exp(-(s+1)\,u)\,(s+1)^{x+y}\, u^{x+y-1} \mathrm{d}u =$$

$$= (s+1)^{x+y} \int_0^{+\infty} \exp(-(s+1)\,u)\, u^{x+y-1} \mathrm{d}u,$$

de unde, rezultă că

$$\frac{\Gamma(x+y)\, s^{x-1}}{(s+1)^{x+y}} = s^{x-1} \int_0^{+\infty} \exp(-(s+1)\,u)\, u^{x+y-1} \mathrm{d}u.$$

De aici, prin integrare de la 0 la $+\infty$, obţinem

$$\Gamma(x+y) \int_0^{+\infty} \frac{s^{x-1}}{(s+1)^{x+y}} \mathrm{d}s = \int_0^{+\infty} \left(s^{x-1} \int_0^{+\infty} \exp(-(s+1)\,u)\, u^{x+y-1} \mathrm{d}u \right) \mathrm{d}s,$$

prin urmare

$$\Gamma(x+y)\, B(x,y) =$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \exp(-(s+1)\,u)\, u^{x+y-1} s^{x-1} \mathrm{d}s \right) \mathrm{d}u =$$

$$= \int_0^{+\infty} \exp(-u)\, u^{x+y-1} \frac{\Gamma(x)}{u^y} \mathrm{d}u = \Gamma(x) \int_0^{+\infty} u^{x-1} \exp(-u)\, \mathrm{d}u$$

$$= \Gamma(x)\,\Gamma(y).$$

6^0 Fie $x \in]0,1[$. Atunci punând $y := x-1 > 0$ în relaţia din 5^0, obţinem

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = B(x, 1-x)\,\Gamma(1) = B(x, 1-x).$$

7^0 Din 6^0 şi 4^0 deducem că pentru orice $x \in]0,1[$,

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = B(x, 1-x) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} \times \frac{n!n^{1-x}}{(1-x)(2-x)\cdots(n+1-x)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n\,(n!)^2}{x(1-x^2)\cdots(n^2-x^2)(n+x-1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)\left(\frac{n+1}{n}-\frac{x}{n}\right)} = .$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{x\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{x^2}{n^2}\right)}.$$

8^0 Întrucât

$$\sin x = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right), \text{ oricare ar fi } x\in\mathbb{R},$$

şi deci

$$\sin \pi x = \pi x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right), \text{ oricare ar fi } x\in\mathbb{R},$$

din egalitatea stabilită la 7^0, obţinem că, oricare ar fi $x\in]0,1[$, avem

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) =$$

$$= \frac{\pi}{\pi x\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{x^2}{n^2}\right)} = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

9^0 Punem $x = 1/2$ în egalitatea din afirmaţia 5^0; obţinem

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right) = B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \pi.$$

Rezultă $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. $\square$

3. APLICAŢII

În baza teoremei 3, pentru orice $x, y \in]0,1[$, avem

$$\frac{\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)}{\Gamma(y)\,\Gamma(1-y)} = \frac{\sin \pi y}{\sin \pi x} =$$

$$= \frac{y \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{y^2}{n^2}\right)}{x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)} =$$

$$= \frac{y}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 - \frac{y^2}{n^2}\right)}{\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)} = \frac{y}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - y^2}{n^2 - x^2}$$

şi deci

$$\frac{\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)}{\Gamma(y)\,\Gamma(1-y)} = \frac{y}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(n-y)\,(n+y)}{(n-x)\,(n+x)}. \tag{8}$$

1^0 Dacă în (8) luăm $x = 1/6$ şi $y = 1/4$ membrul întâi devine

$$\frac{\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)}{\Gamma(y)\,\Gamma(1-y)} = \frac{\Gamma(1/6)\,\Gamma(5/6)}{\Gamma(1/4)\,\Gamma(3/4)} = \frac{\sin(\pi/4)}{\sin(\pi/6)} = \sqrt{2},$$

iar membrul al doilea

$$\frac{y}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(n-y)\,(n+y)}{(n-x)\,(n+x)} = \frac{6}{4} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{(4n-1)(4n+1)}{4^2}}{\frac{(6n-1)(6n+1)}{6^2}} = \frac{6}{4} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(12n-3)\,(12n+3)}{(12n-2)\,(12n+2)} =$$

$$= \frac{3 \cdot 9}{2 \cdot 10} \cdot \frac{15 \cdot 21}{14 \cdot 20} \cdots \frac{(12n+3)\,(12n+9)}{(12n+2)\,(12n+10)} \cdots$$

$$= \prod_{n=0}^{\infty} \frac{(12n+3)\,(12n+9)}{(12n+2)\,(12n+10)}.$$

Aşadar

$$\sqrt{2} = \frac{3 \cdot 9}{2 \cdot 10} \cdot \frac{15 \cdot 21}{14 \cdot 20} \cdots \frac{(12n+3)\,(12n+9)}{(12n+2)\,(12n+10)} \cdots \tag{9}$$

Formula (9) a fost obţinută de Catalan în anul 1873 (vezi [3]).

2^0 Dacă în (8) luăm $x = 3/8$ şi $y = 1/4$ membrul întâi devine

$$\frac{\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)}{\Gamma(y)\,\Gamma(1-y)} = \frac{\Gamma(3/8)\,\Gamma(5/8)}{\Gamma(1/4)\,\Gamma(3/4)} = \frac{\sin(\pi/4)}{\sin(3\pi/8)}.$$

Cum

$$\sin 3\frac{\pi}{8} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 + \cos(\pi/4)}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2},$$

obţinem că
$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}{\Gamma(y)\Gamma(1-y)}=\frac{\sin\dfrac{\pi}{4}}{\sin 3\dfrac{\pi}{8}}=\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$
Pe de altă parte, membrul al doilea al relaţiei (8) , este
$$\frac{y}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(n-y)(n+y)}{(n-x)(n+x)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{8}}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{(4n-1)(4n+1)}{4^2}}{\frac{(8n-3)(8n+3)}{4^2}}=\frac{2}{3}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(8n-2)(8n+2)}{(8n-3)(8n+3)}=$$
$$=\frac{2\cdot 6}{3\cdot 5}\cdot\frac{10\cdot 14}{11\cdot 13}\cdots\frac{(8n+2)(8n+6)}{(8n+3)(8n+5)}\cdot\cdot\cdot$$
$$=\prod_{n=0}^{\infty}\frac{(8n+2)(8n+6)}{(8n+3)(8n+5)}.$$
Aşadar
$$\sqrt{2-\sqrt{2}}=\frac{2\cdot 6}{3\cdot 5}\cdot\frac{10\cdot 14}{11\cdot 13}\cdots\frac{(8n+2)(8n+6)}{(8n+3)(8n+5)}\cdots.$$

3^0 În (8) să luăm $x=1/6$ şi $y=5/12$. Atunci membrul întâi devine
$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}{\Gamma(y)\Gamma(1-y)}=\frac{\Gamma(1/6)\Gamma(5/6)}{\Gamma(5/12)\Gamma(7/12)}=\frac{\sin(5\pi/12)}{\sin(\pi/6)}.$$
Întrucât
$$\sin 5\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)=\cos\frac{\pi}{12}=\sqrt{\frac{1+\cos(\pi/6)}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2},$$
obţinem că
$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}{\Gamma(y)\Gamma(1-y)}=\frac{\sin 5\dfrac{\pi}{12}}{\sin\dfrac{\pi}{6}}=\frac{\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

Pe de altă parte, membrul al doilea al relaţiei (8) , devine
$$\frac{y}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(n-y)(n+y)}{(n-x)(n+x)}=\frac{\frac{5}{12}}{\frac{1}{6}}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{(12n-5)(12n+5)}{12^2}}{\frac{(6n-1)(6n+1)}{6^2}}=\frac{5}{2}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(12n-5)(12n+5)}{(12n-2)(12n+2)}=$$
$$=\frac{5\cdot 7}{2\cdot 10}\cdot\frac{17\cdot 19}{14\cdot 22}\cdots\frac{(12n+5)(12n+7)}{(12n+2)(12n+10)}\cdot\cdot\cdot$$
$$=\prod_{n=0}^{\infty}\frac{(12n+5)(12n+7)}{(12n+2)(12n+10)}.$$
Aşadar
$$\sqrt{2+\sqrt{3}}=\frac{5\cdot 7}{2\cdot 10}\cdot\frac{17\cdot 19}{14\cdot 22}\cdots\frac{(12n+5)(12n+7)}{(12n+2)(12n+10)}\cdot\cdot\cdot$$

4^0 În (8) să luăm $x = 1/3$ şi $y = 1/6$. Atunci membrul întâi devine

$$\frac{\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)}{\Gamma(y)\,\Gamma(1-y)} = \frac{\Gamma(1/3)\,\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/6)\,\Gamma(5/6)} = \frac{\sin(\pi/3)}{\sin(\pi/6)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

Pe de altă parte, membrul al doilea al relaţiei (8) , devine

$$\frac{y}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(n-y)\,(n+y)}{(n-x)\,(n+x)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{6}}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{(3n-1)(3n+1)}{3^2}}{\frac{(6n-1)(6n+1)}{6^2}} = \frac{2}{1}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(6n-2)\,(6n+2)}{(6n-1)\,(6n+1)} =$$

$$= \frac{2\cdot 4}{1\cdot 5}\cdot\frac{8\cdot 10}{7\cdot 11}\cdots\frac{(6n+2)\,(6n+4)}{(6n+1)\,(6n+5)}\cdots$$

$$= \prod_{n=0}^{\infty}\frac{(6n+2)\,(6n+4)}{(6n+1)\,(6n+5)}.$$

Aşadar

$$\sqrt{3} = \frac{2\cdot 4}{1\cdot 5}\cdot\frac{8\cdot 10}{7\cdot 11}\cdots\frac{(6n+2)\,(6n+4)}{(6n+1)\,(6n+5)}\cdots$$

BIBLIOGRAFIE

[1] Duca D.I.: *Analiză matematică* (vol. 1), Casa Cărţii de Ştiinţă, Cluj-Napoca, 2013

[2] Duca D.I.: *Analiză matematică* (vol. 2), Casa Cărţii de Ştiinţă, Cluj-Napoca, 2014

[3] Catalan E.: *Sur la constant d'Euler et la function de Binet*, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. Math., 77 (1873), 198 – 201

[4] Melzak Z.A.: *Infinite products for πe and π/e*, American Mathematical Monthly, 68 (1961), no. 1, 39 – 41

[5] Osler T.J.: *The union of Vieta's and Wallis's products for pi*, Amer. Math. Monthly, 106 (1999), 774 – 776

[6] Stirling J.: *Methodus Differentialis*, London, 1730

[7] Wallis J.: *Arithmetica Infinitorum*, Oxford, 1656

Universitatea Tehnică Cluj-Napoca
Departamentul de Matematică
str. Gh. Bariţiu, nr. Cluj-Napoca, Romania
e-mail: `jeniduca@yahoo.com`

Colegiul Tehnic "Ana Aslan"
str. Decebal, nr. 41, Cluj-Napoca, Romania
e-mail: `emiliacopaciu@yahoo.com`

Universitatea "Babeş-Bolyai"
Faculatea de Matematică şi Informatică
str. Kogălnceanu, nr. 1, Cluj-Napoca, Romania
e-mail: `dduca@math.ubbcluj.ro; dorelduca@yahoo.com`

Primit la redacţie: 1 Decembrie 2014