DIDACTICA MATHEMATICA, Vol. 32(2014), pp. 19–23

CAUCHY-SCHWARZ VIA BESSEL ŞI APLICAŢII

Valeriu Anisiu

Abstract. The paper presents an integral inequality obtained from two classical results in Analysis (complete proofs included, adapted to our context), which are not usually used in our high schools: the Gram-Schmidt orthogonalization and Bessel's inequality.

MSC 2000. 00-01, 26D15
Key words. Dot product, Cauchy-Schwarz inequality, orthogonalization

1. INTRODUCERE

Inegalitatea Cauchy-Schwarz integrală (v. [1], [3]) se exprimă sub forma

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x}$$

unde f, g sunt funcţii continue definite pe intervalul $[a, b]$. Vom nota cu $\mathcal{C}$ mulţimea acestor funcţii.

$\mathcal{C}$ formează un spaţiu vectorial (operaţiile fiind cele uzuale).

Expresia

$$\text{(PS)} \qquad \langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

(numită *produsul scalar* al funcţiilor f, g în $\mathcal{C}$) apare frecvent în Analiza matematică şi permite scrierea inegalităţii Cauchy-Schwarz sub forma

$$\langle f, g\rangle \le \sqrt{\langle f, f\rangle} \cdot \sqrt{\langle g, g\rangle}$$

Pe baza proprietăţilor integralei funcţiilor continue sunt uşor de stabilit următoarele proprietăţi ale produsului scalar:

1. $\langle f, f\rangle \ge 0$.
2. $\langle f, f\rangle = 0 \iff f = 0$
3. $\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle$
4. $\langle rf, g\rangle = r\,\langle f, g\rangle$
5. $\langle f + g, h\rangle = \langle f, h\rangle + \langle g, h\rangle$
(unde $f, g, h \in \mathcal{C}$, $r \in \mathbb{R}$).

În plus, din ultimele trei proprietăţi, pentru $f_i, g_j \in \mathcal{C}$ şi $r_i, s_j \in \mathbb{R}$ ($i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$) rezultă relaţia

$$\left\langle \sum_{i=1}^{m} r_i f_i, \sum_{j=1}^{n} s_j g_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} r_i s_j \langle f_i, g_j \rangle$$

În unele probleme de inegalităţi integrale (inclusiv în probleme date la olimpiadele de matematică) utilizarea unei generalizări a inegalităţii Cauchy-Schwarz permite soluţii mai simple. Vom prezenta o astfel de generalizare şi o aplicaţie a acesteia.

2. INEGALITATEA LUI BESSEL

În cele ce urmează ne situăm în spaţiul vectorial $\mathcal{C}$ al funcţiilor reale continue definite pe intervalul $[a, b]$, spaţiu dotat cu produsul scalar (PS).

Două funcţii $f, g \in \mathcal{C}$ se numesc *ortogonale* dacă $\langle f, g\rangle = 0$.

O mulţime finită $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\} \subseteq \mathcal{C}$ se numeşte *ortogonală* (sau *sistem ortogonal*) dacă

$$\langle f_i, f_j\rangle = 0, \forall i, j \in \{1, \ldots n\}, i \neq j.$$

Dacă în plus $\langle f_i, f_i\rangle = 1$, sistemul este numit *ortonormat.*

Este uşor de văzut că dacă sistemul de funcţii nenule $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ este ortogonal, atunci sistemul

$$\left\{ \frac{f_1}{\sqrt{\langle f_1, f_1\rangle}}, \frac{f_2}{\sqrt{\langle f_2, f_2\rangle}}, \ldots, \frac{f_n}{\sqrt{\langle f_n, f_n\rangle}} \right\}$$

este ortonormat.

Următoarele două rezultate clasice, v. [2] (enunţate în contextul nostru) sunt importante în multe ramuri ale matematicii, motiv pentru care vom include şi demonstraţii, accesibile la nivel de liceu.

TEOREMA 1 (Gram-Schmidt). *Dacă $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ este mulţime liniar independentă de funcţii din $\mathcal{C}$ atunci există un sistem ortogonal $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\} \subset \mathcal{C}$ astfel încât $\forall k \in \{1, 2, \ldots n\}$, g_k este combinaţie liniară a funcţiilor $f_1, f_2, \ldots, f_k$.*

Demonstraţie. Demonstraţia este simplă şi se face prin inducţie matematică.

Pentru $n = 1$, se alege $g_1 = \dfrac{f_1}{\sqrt{\langle f_1, f_1\rangle}}$.

Presupunem afirmaţia adevărată pentru n funcţii şi considerăm mulţimea liniar independentă $\{f_1, f_2, \ldots, f_{n+1}\}$. Aplicând ipoteza de inducţie mulţimii $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$, se obţine existenţa unui sistem ortogonal $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\} \subset \mathcal{C}$ ca în enunţ. Rămâne să arătăm că acest sistem poate fi extins cu încă un element g_{n+1}.

În acest scop considerăm funcţia $h = r_1 g_1 + r_2 g_2 + \cdots + r_n g_n + f_{n+1}$ unde $r_k \in \mathbb{R}$ $(k \in \{1, 2, \ldots, n\})$.

Alegem r_k astfel încât $\langle h, g_k\rangle = 0$, ceea ce revine la

$$r_1 \langle g_1, g_k\rangle + \cdots + r_n \langle g_n, g_k\rangle + \langle f_{n+1}, g_k\rangle = 0.$$

Din ortogonalitate obţinem că dintre primii n termeni, doar cel de ordin k poate fi nenul, şi anume $r_k \langle g_k, g_k\rangle = r_k$. Prin urmare relaţia revine la $r_k = -\langle f_{n+1}, g_k\rangle$.

Cu r_k astfel aleşi, sistemul $\{g_1, g_2, \ldots, g_n, h\}$ este ortogonal. În plus, $h \neq 0$ căci altfel f_{n+1} ar depinde liniar de $g_1, \cdots, g_n$, şi deci şi de $f_1, \ldots, f_n$, ceea ce ar contrazice liniar independenţa mulţimii de funcţii $\{f_1, f_2, \ldots, f_{n+1}\}$.Vom putea deci alege $g_{n+1} = \dfrac{h}{\sqrt{\langle h, h\rangle}}$. În felul acesta sistemul $\{g_1, g_2, \ldots, g_n, g_{n+1}\}$ este ortonormat şi f_{n+1} este combinaţie liniară a funcţiilor $g_1, g_2, \ldots, g_n, h$ şi deci şi a funcţiilor $g_1, g_2, \ldots, g_n, g_{n+1}$. □

De remarcat faptul că demonstraţia este *constructivă*, ea conţinând algoritmul de obţinere a sistemului ortonormat.

TEOREMA 2 (Bessel). *Dacă $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ este un sistem ortonormat în $\mathcal{C}$ şi $f \in C$ atunci*

$$\sum_{k=1}^{n} \langle f, g_k\rangle^2 \leq \langle f, f\rangle$$

Demonstraţie. Vom folosi proprietăţile amintite în introducere ale produsului scalar.

Notăm $r_k = \langle f, g_k\rangle$ şi $h = \sum_{k=1}^{n} r_k g_k$.

$$0 \leq \langle f - h, f - h\rangle = \langle f, f\rangle - 2\langle f, h\rangle + \langle h, h\rangle =$$

$$\langle f, f\rangle - 2\left\langle f, \sum_{i=1}^{n} r_i g_i\right\rangle + \left\langle \sum_{i=1}^{n} r_i g_i, \sum_{j=1}^{n} r_j g_j\right\rangle =$$

$$\langle f, f\rangle - 2\sum_{i=1}^{n} r_i \langle f, g_i\rangle + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} r_i r_j \langle g_i, g_j\rangle =$$

$$\langle f, f\rangle - 2\sum_{i=1}^{n} r_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} r_i r_j \langle g_i, g_j\rangle =$$

$$\langle f, f\rangle - 2\sum_{i=1}^{n} r_i^2 + \sum_{i=1}^{n} r_i^2 =$$

$$\langle f, f\rangle - \sum_{i=1}^{n} r_i^2.$$

Rezultă că $\sum_{i=1}^{n} r_i^2 \leq \langle f, f\rangle$. □

OBSERVAŢIA 1. *Inegalitatea lui Bessel pentru $n = 1$ implică inegalitatea Cauchy-Schwarz.*

Într-adevăr dacă $f, g \in \mathcal{C}$ sunt nenule, atunci $\left\{\frac{g}{\sqrt{\langle g,g\rangle}}\right\}$ *este un sistem ortonormat şi deci*

$$\left\langle f, \frac{g}{\sqrt{\langle g,g\rangle}}\right\rangle^2 \leq \langle f,f\rangle \implies \frac{\langle f,g\rangle^2}{\langle g,g\rangle} \leq \langle f,f\rangle \implies \langle f,g\rangle \leq \sqrt{\langle f,f\rangle}\cdot\sqrt{\langle g,g\rangle}.$$

3. APLICAŢIE

TEOREMA 3. *Fie a, b numere reale fixate şi $\mathcal{F}(a,b)$ mulţimea funcţiilor continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ pentru care $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = a$ şi $\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x = b$. Atunci*
a) *Mulţimea $\mathcal{F}(a,b)$ este nevidă dacă şi numai dacă $a^2 \leq b$.*
b) *Dacă $a^2 \leq b$ atunci mulţimea $\left\{\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x : f \in \mathcal{F}(a,b)\right\}$ este intervalul închis*

$$\left[\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{b-a^2}{12}}, \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{b-a^2}{12}}\right].$$

Demonstraţie. **a)** Dacă $f \in \mathcal{F}(a,b)$, inegalitatea Cauchy-Schwarz (pentru $g = 1$) implică

$$a^2 \leq \int_0^1 1\,\mathrm{d}x \int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x = b.$$

Reciproc, presupunem că inegalitatea $a^2 \leq b$ are loc. Este uşor de găsit în $\mathcal{F}(a,b)$ un polinom de gradul I $f(x) = \alpha + \beta x$, şi anume pentru $\alpha = a - \sqrt{3(b-a^2)}$, $\beta = \sqrt{12(b-a^2)}$.

b) Vom considera produsul scalar uzual $\langle f,g\rangle = \int fg$ în spaţiul vectorial (real) al funcţiilor continue definite pe intervalul $[0,1]$. Vom aplica procedeul de ortogonalizare Gram-Schmidt polinoamelor. Se obţine astfel un sistem ortonormat de polinoame $\{\phi_0, \phi_1, \phi_2\}$, unde $\phi_0(x) = 1$, $\phi_1(x) = \sqrt{12}(x - 1/2)$; expresia exactă a lui ϕ_2 nu este necesară.

Notând $c = \int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x$ (pentru $f \in \mathcal{F}(a,b)$) avem $\langle f, \phi_0\rangle = a$, $\langle f,\phi_1\rangle = \sqrt{12}(c - a/2)$.

Utilizând inegalitatea lui Bessel pentru sistemul ortonormat $\{\phi_0, \phi_1\}$ obţinem

$$a^2 + 12(c - a/2)^2 \leq b.$$

Deci, $c \in \left[\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{b-a^2}{12}}, \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{b-a^2}{12}}\right]$, şi prin urmare

$$\left\{\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x : f \in \mathcal{F}(a,b)\right\} \subseteq \left[\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{b-a^2}{12}}, \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{b-a^2}{12}}\right].$$

Rămâne de arătat că are loc şi incluziunea inversă.

Fie $c \in \left[\dfrac{a}{2} - \sqrt{\dfrac{b-a^2}{12}}, \dfrac{a}{2} + \sqrt{\dfrac{b-a^2}{12}}\right]$; trebuie găsită o funcţie $f \in \mathcal{F}(a,b)$ astfel încât $\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x = c$.

Vom alege în acest scop $f = a\phi_0 + \sqrt{12}(c - a/2)\phi_1 + \lambda\phi_2$, unde $\lambda \in \mathbb{R}$.

Utilizând ortonormalitatea sistemului, rezultă că $f \in \mathcal{F}(a,b)$ dacă şi numai dacă

$$a^2 + 12(c - a/2)^2 + \lambda^2 = b.$$

Un astfel de λ există deoarece pentru c din interval avem $b - a^2 - 12(c - a/2)^2 \geq 0$.

Am obţinut în final

$$\left\{\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x : f \in \mathcal{F}(a,b)\right\} = \left[\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{b-a^2}{12}}, \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{b-a^2}{12}}\right]$$

$\square$

BIBLIOGRAFIE

[1] http://ro.wikipedia.org/wiki/Inegalitatea_Cauchy-Schwarz

[2] V. Anisiu – Topologie şi teoria măsurii. Universitatea „Babeş-Bolyai", Cluj-Napoca 1995.

[3] J.M. Steele – The Cauchy-Schwarz Master Class, An Introduction to the Art of Mathematical Inequalities, CUP 2004

Faculty of Mathematics and Computer Science
"Babeş-Bolyai" University
Str. Kogălniceanu, no. 1
400084 Cluj-Napoca, Romania
e-mail: anisiu@math.ubbcluj.ro

Primit la redacţie: 15 Septembrie 2014