DIDACTICA MATHEMATICA, Vol. 32(2014), pp. 1–8

ASUPRA NOŢIUNII DE CONVERGENŢĂ STATISTICĂ

Octavian Agratini

Abstract. The aim of this paper is to present the notion of statistical convergence. This definition is based on another concept namely density of a subset of natural numbers. Since the article is targeted to high school teachers and students, we tried explaining of the two concepts by presenting several examples and counterexamples through exercises. In this way we consider that the information included here will be easier to assimilate.
MSC 2000. 40A30, 40A35.
Key words. Characteristic function of a set, density of a subset of $\mathbb{N}$, statistical convergence.

1. INTRODUCERE

Articolul se adresează atât profesorilor care predau la liceu cât şi elevilor autodidacţi care doresc să-şi îmbogăţească orizontul matematic.

Prezentăm o noţiune care nu se regăseşte în manualele şcolare dar, în opinia noastră, are meritul de a putea fi uşor asimilată de elevi. Important este faptul că exerciţiile care se bazează pe această noţiune se pot aborda la clasele a XI-a. Pe baza acestor considerente articolul conţine numeroase exerciţii cu rezolvări complete. Precizăm că majoritatea exerciţiilor prezentate au grad mediu de dificultate.

În final menţionăm că acest concept de convergenţă statistică a fost introdus în anii '50 de matematicienii polonezi Fast [1] şi Steinhaus [3]. Având în vedere că analiza matematică predată în liceu operează cu noţiuni şi rezultate introduse cu predilecţie în secolele XVIII-XIX, considerăm că "vârsta fragedă" a convergenţei statistice este un motiv suplimentar de a fi cunoscută şi înţeleasă.

2. DENSITATEA UNEI MULŢIMI

La început reamintim noţiunea de funcţie caracteristică a unei mulţimi.

Fie $A \subseteq \mathbb{R}$. Funcţia definită după cum urmează

$$\aleph_A : \mathbb{R} \to \{0,1\}, \quad \aleph_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus A, \end{cases}$$

se numeşte *funcţia caracteristică a mulţimii A*.

Prezentăm cele mai cunoscute proprietăţi ale funcţiei caracteristice.

1° $\aleph_A = \aleph_B \Leftrightarrow A = B$;

2° dacă $A \subseteq B$ atunci $\aleph_A \leq \aleph_B$; (1)

3° $\aleph_{\overline{A}} = 1 - \aleph_A$ (2)

unde $\overline{A}$ este complementara mulţimii A în raport cu $\mathbb{R}$, adică $\overline{A} = \mathbb{R} \setminus A$;

4° $\aleph_{A\cap B} = \aleph_A \aleph_B$;

5° $\aleph_{A\setminus B} = \aleph_A - \aleph_A \aleph_B$;

6° $\aleph_{A\cup B} = \aleph_A + \aleph_B - \aleph_A \aleph_B$; (3)

7° $\aleph_{A\Delta B} = \aleph_A + \aleph_B - 2\aleph_A \aleph_B$,

unde Δ reprezintă diferenţa simetrică, adică $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Toate aceste proprietăţi constituie simple exerciţii care pot fi propuse la clasă. De exemplu, pentru demonstrarea proprietăţilor $4^\circ - 7^\circ$ se vor considera de fiecare dată patru cazuri: $x \in A \cap B$, $x \in A \setminus B$, $x \in B \setminus A$, respectiv $x \in \mathbb{R} \setminus (A \cup B)$, identităţile respective rezultând imediat.

Pe parcursul articolului considerăm $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. De asemenea, prin $[\alpha]$ vom nota partea întreagă a numărului real α.

Definiţia 1. *Fie $S \subseteq \mathbb{N}$. Dacă există limita*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \aleph_S(j), \tag{4}$$

valoarea limitei se notează cu $\delta(S)$ şi se numeşte densitatea mulţimii S.

Pentru $\delta(S)$ se utilizează şi denumirea de *densitate asimptotică* a mulţimii S. Examinând relaţia (4) observăm că se consideră raportul între numărul elementelor lui S care aparţin mulţimii $\mathcal{M}_N := \{1, \ldots, N\}$ şi numărul total de elemente ale mulţimii $\mathcal{M}_N$. Astfel, $\delta(S)$ va reprezenta comportarea acestui raport pentru N tinzând la infinit, adică comportarea asimptotică a raportului menţionat.

Exerciţiul 1. *Fie $A \subseteq B \subseteq \mathbb{N}$. Demonstraţi $\delta(A) \le \delta(B)$.*

Soluţie. Fie $N \in \mathbb{N}$ fixat arbitrar. Pe baza relaţiei (1) are loc

$$\aleph_A(j) \le \aleph_B(j),\ \ j = \overline{1, N},$$

deci $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} \aleph_A(j) \le \sum_{j=1}^{N} \aleph_B(j)$.

Folosind (4) obţinem $\delta(A) \le \delta(B)$. □

Exerciţiul 2. *Fie A şi B submulţimi ale lui $\mathbb{N}$. Arătaţi că*

$$\delta(A \cup B) \le \delta(A) + \delta(B). \tag{5}$$

Soluţie. Folosind relaţia (3), pentru orice $j \in \mathbb{N}$ putem scrie

$$\aleph_{A\cup B}(j) = \aleph_A(j) + \aleph_B(j) - \aleph_A(j)\aleph_B(j) \le \aleph_A(j) + \aleph_B(j),$$

ceea ce implică

$$\sum_{j=1}^{N} \aleph_{A\cup B}(j) \le \sum_{j=1}^{N} \aleph_A(j) + \sum_{j=1}^{N} \aleph_B(j).$$

Înmulţind ambii membri cu $1/N$ şi trecând la limită în raport cu N, obţinem inegalitatea cerută. $\square$

EXERCIŢIUL 3. *Fie $S \subseteq \mathbb{N}$ o mulţime finită. Determinaţi $\delta(S)$.*

SOLUŢIE. Conform ipotezei $\mathrm{Card}(S) \in \mathbb{N}$, expresia $\sum_{j=1}^{N} \aleph_S(J)$ are valoarea v_N, unde v_N reprezintă numărul elementelor mulţimii $S_N := \{1, 2, \ldots, N\} \cap S$. Deoarece $S_N \subseteq S$, are loc $v_N \leq \mathrm{Card}(S)$. Deducem

$$0 \leq \delta(S) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \aleph_S(j) \leq \lim_{N \to \infty} \frac{\mathrm{Card}(S)}{N} = 0.$$

Deci orice mulţime finită $S \subseteq \mathbb{N}$ are densitatea nulă. $\square$

Rezultatul obţinut implică $\delta(\emptyset) = 0$.

Sunt mulţimi infinite ale lui $\mathbb{N}$ care au densitatea zero? Răspunsul îl dăm prin următorul exerciţiu.

EXERCIŢIUL 4. *Fie $p \geq 2$ un număr natural fixat şi mulţimea*

$$S_p = \{n^p : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Determinaţi $\delta(S_p)$.

SOLUŢIE. Fie $N \geq 1$ fixat arbitrar. Trebuie să determinăm câte puteri de ordinul p ale numerelor naturale există în mulţimea $\{1, \ldots, N\}$. Cel mai mare număr natural n cu proprietatea $n^p \leq N$ este $\left[\sqrt[p]{N}\right]$. Obţinem

$$0 \leq \delta(S_p) = \lim_{N \to \infty} \frac{\left[\sqrt[p]{N}\right]}{N} \leq \lim_{N \to \infty} \frac{\sqrt[p]{N}}{N} = 0.$$

Astfel, are loc relaţia

$$\delta(\{n^p : \ n \in \mathbb{N}\}) = 0, \tag{6}$$

pentru orice număr natural fixat $p \geq 2$. $\square$

EXERCIŢIUL 5. *Determinaţi $\delta(\mathbb{N})$.*

SOLUŢIE. $\sum_{j=1}^{N} \aleph_{\mathbb{N}}(j) = \underbrace{1 + \ldots + 1}_{N-ori} = N$ şi folosind relaţia (4) obţinem $\delta(\mathbb{N}) = 1$. $\square$

Ne punem întrebarea dacă sunt submulţimi proprii ale lui $\mathbb{N}$ care au densitatea 1.

EXERCIŢIUL 6. *Fie $S = \mathbb{N} \setminus \{n^2 : \ n \in \mathbb{N}\}$. Determinaţi $\delta(S)$.*

Soluţie. Fie $N \geq 1$ arbitrar fixat. Numărul pătratelor perfecte mai mici sau egale cu N este $\left[\sqrt{N}\right]$. Astfel, deducem

$$\sum_{j=1}^{N} \aleph_S(j) = N - \left[\sqrt{N}\right]$$

şi $\delta(S) = 1 - \lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{\left[\sqrt{N}\right]}{N} = 1$. S-a folosit $0 \leq \dfrac{\left[\sqrt{N}\right]}{N} \leq \dfrac{1}{\sqrt{N}}$. □

Definiţia 2. *O mulţime $S \subseteq \mathbb{N}$ care are densitatea egală cu 1 se numeşte mulţime statistic densă.*

Exerciţiul 7. *Fie λ un număr raţional supraunitar fixat. Considerăm mulţimea*

$$S_\lambda = \{\lambda n : \ n \in \mathbb{N}\} \cap \mathbb{N}.$$

Demonstraţi

$$\delta(S_\lambda) = \frac{1}{\lambda}. \tag{7}$$

Soluţie. Deoarece $\lambda \in (1, \infty) \cap \mathbb{Q}$, există numerele naturale p, q cu proprietăţile $1 \leq q < p$, $(p, q) = 1$, astfel încât $\lambda = p/q$. Cantitatea $\sum\limits_{j=1}^{N} \aleph_{S_\lambda}(j)$ are valoarea v_N, unde v_N reprezintă cardinalul mulţimii

$$\{1, 2, \dots, N\} \cap \left\{\frac{p}{q} n : \ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Numărul numerelor naturale mai mici sau egale cu N care sunt de forma pn/q este $[qN/p]$. În consecinţă $v_N = [qN/p]$. Pe baza relaţiei (4) obţinem

$$\delta(S_\lambda) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \left[\frac{qN}{p}\right] = \frac{q}{p} = \frac{1}{\lambda}.$$

În calculul limitei ne-am bazat pe dubla inegalitate $\alpha - 1 < [\alpha] \leq \alpha$ şi am aplicat criteriul cleştelui. □

Exerciţiul 8. *Fie $S \subseteq \mathbb{N}$ cu densitatea $\alpha \in [0, 1]$. Arătaţi că $\delta(\overline{S}) = 1 - \alpha$.*

Soluţie. Fie $N \geq 1$ arbitrar fixat. Conform proprietăţii (2) avem

$$\aleph_{\overline{S}}(j) = 1 - \aleph_S(j), \ j = \overline{1, N},$$

ceea ce implică

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \aleph_{\overline{S}}(j) = 1 - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \aleph_S(j).$$

Trecând la limită în raport cu N, obţinem $\delta(\overline{S}) = 1 - \delta(S) = 1 - \alpha$. □

Observaţia 1. *Mulţimea numerelor naturale pare are densitatea* $1/2$*, a se vedea Exerciţiul 7 în care alegem* $\lambda = 2$*. Pe baza Exerciţiului 8 rezultă că mulţimea numerelor naturale impare are de asemenea densitatea* $1/2$*.*

Observaţia 2. *Notând cu* $\Delta(\mathbb{N})$ *mulţimea tuturor submulţimilor lui* $\mathbb{N}$ *care admit densitate, putem considera aplicaţia*

$$\delta : \Delta(\mathbb{N}) \to [0,1], \quad S \mapsto \delta(S).$$

Exerciţiul 3 ne permite să tragem concluzia că funcţia δ *nu este injectivă. Pe baza Exerciţiului 7 deducem că* δ *poate lua orice valoare raţională din* $[0,1]$*. Folosind ca model acest exerciţiu, pentru un număr iraţional* $x \in (0,1)$ *fixat, propunem să se construiască o mulţime* $S_x \subseteq \mathbb{N}$ *astfel încât* $\delta(S_x) = x$*. Astfel vom putea afirma că aplicaţia* δ *este surjectivă.*

3. UN ALT TIP DE CONVERGENŢĂ

O noţiune fundamentală a analizei matematice este cea de limită a unui şir. Reamintim caracterizarea cu ε a limitei unui şir. În cele ce urmează ne interesează doar cazul în care limita este finită. Şirul $x = (x_n)_{n\geq 1}$ de elemente din $\mathbb{R}$ are limita l, $l \in \mathbb{R}$, dacă şi numai dacă

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ N(\varepsilon),\ \forall\ n \geq N(\varepsilon),\ \text{rezultă } |x_n - l| < \varepsilon. \tag{8}$$

Precizăm că $N(\varepsilon)$ este un număr natural care depinde de ε.
Vom nota $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$.

Definiţia 3. *Şirul* $x = (x_n)_{n\geq 1}$ *de elemente din* $\mathbb{R}$ *converge statistic spre* l*,* $l \in \mathbb{R}$*, dacă şi numai dacă*

$$\forall\ \varepsilon > 0, \quad \delta(\{n \in \mathbb{N} :\ |x_n - l| \geq \varepsilon\}) = 0. \tag{9}$$

Precizăm că $\delta(S)$ *reprezintă densitatea mulţimii* S*.*
Vom nota $st - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$*.*

Observaţia 3. *Pe baza Exerciţiului 8 putem reformula definiţia convergenţei statistice, a se vedea relaţia* (9)*.*

Dându-se un şir $(x_n)_{n\geq 1}$ *de elemente din* $\mathbb{R}$ *şi un număr* $l \in \mathbb{R}$*, putem enunţa:*

$$st - \lim_{n\to\infty} x_n = l \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0,\ \delta(\{n \in \mathbb{N} :\ |x_n - l| < \varepsilon\}) = 1.$$

Ne propunem să stabilim legătura între noţiunile definite prin relaţiile (8) şi (9).

Teorema 1. *Fie* $x = (x_n)_{n\geq 1}$ *şir de elemente din* $\mathbb{R}$*. Fie* $l \in \mathbb{R}$*. Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$*, atunci* $st - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$*.*

Demonstraţie. Arătăm că relaţia (8) implică relaţia (9). Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar fixat. Conform ipotezei va exista un rang $N(\varepsilon)$ astfel încât

$$\{n \in \mathbb{N} :\ n > N(\varepsilon) \text{ şi } |x_n - l| \geq \varepsilon\} = \emptyset. \tag{10}$$

În continuare putem scrie

$$\begin{aligned}&\{n\in\mathbb{N}:\ |x_n-l|\geq\varepsilon\}\\ &=\{n\in\mathbb{N}:\ n\leq N(\varepsilon)\text{ şi }|x_n-l|\geq\varepsilon\}\cup\{n\in\mathbb{N}:\ n>N(\varepsilon)\text{ şi }|x_n-l|\geq\varepsilon\}\\ &\overset{(10)}{=}\{n\in\mathbb{N}:\ n\leq N(\varepsilon)\text{ şi }|x_n-l|\geq\varepsilon\}\subseteq\{1,\ldots,N(\varepsilon)\}.\end{aligned}$$

Folosind Exerciţiul 1 deducem

$$\delta(\{n\in\mathbb{N}:\ |x_n-l|\geq\varepsilon\})\leq\delta(\{1,\ldots,N(\varepsilon)\}).$$

Deoarece densitatea unei mulţimi finite este nulă (vezi Exerciţiul 3), are loc relaţia (9) şi astfel demonstraţia este încheiată. □

Reciproca teoremei este falsă, după cum se poate vedea din

EXERCIŢIUL 9. *Fie* $x=(x_n)_{n\geq1}$ *şir de elemente din* $\mathbb{R}$ *definit astfel*

$$x_n=\begin{cases} n, & n\in P,\\ \dfrac{1}{n^2+1}, & n\in\mathbb{N}\setminus P,\end{cases}$$

unde $P=\{k^2:\ k\in\mathbb{N}\}$. *Arătaţi*

(i) nu există $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$,

(ii) $st-\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

SOLUŢIE. (i) Considerăm subşirurile $(x_n)_{n\in P}$ şi $(x_n)_{n\in\overline{P}}$ care au limite diferite, şi anume

$$\lim_{\substack{n\in P\\ n\to\infty}}x_n=\infty,\qquad \lim_{\substack{n\in\overline{P}\\ n\to\infty}}x_n=0.$$

Astfel şirul dat nu are limită.

(ii) Fie $\varepsilon>0$ arbitrar fixat. Mulţimea $\{n:\ |x_n|\geq\varepsilon\}$ o partiţionăm astfel

$$\begin{aligned}\{n:\ |x_n|\geq\varepsilon\}&=\{n\in P:\ |x_n|\geq\varepsilon\}\cup\{n\in\mathbb{N}\setminus P:\ |x_n|\geq\varepsilon\}\\ &=\{n\in P:\ n\geq\varepsilon\}\cup\{n\in\mathbb{N}\setminus P:\ \frac{1}{1+n^2}\geq\varepsilon\}\\ &\subseteq P\cup\{n\in\mathbb{N}\setminus P:\ \frac{1}{1+n^2}\geq\varepsilon\}:=P\cup S.\end{aligned}$$

Folosind Exerciţiul 1 şi relaţia (5) putem scrie

$$\delta(\{n:\ |x_n|\geq\varepsilon\})\leq\delta(P)+\delta(S).$$

Conform Exerciţiului 4, a se vedea (6) cu $p=2$, avem $\delta(P)=0$. De asemenea $\delta(S)=0$ căci S este o mulţime finită. Mai exact S conţine doar acele elemente $n\in\mathbb{N}$ care satisfac relaţia $n^2\leq\dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$. Evident, pentru $\varepsilon\in[1,\infty)$, S devine chiar mulţimea vidă. În concluzie am arătat că

$$\delta(\{n:\ |x_n|\geq\varepsilon\})=0,$$

ceea ce implică $st-\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. □

TEOREMA 2. (caracterizarea convergenţei statistice) *Fie* $x = (x_n)_{n\geq 1}$ *şir de elemente din* $\mathbb{R}$. *Fie* $l \in \mathbb{R}$.

$$st - \lim_{n\to\infty} x_n = l \Leftrightarrow$$
$$\exists\ S = \{n_j:\ n_j < n_{j+1},\ j \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N} \text{ astfel încât } \delta(S) = 1 \text{ şi } \lim_{j\to\infty} x_{n_j} = l. \tag{11}$$

Acest criteriu stabilit în 1980 de matematicianul slovac Tibor Šalát [2] spune că un şir $(x_n)_{n\geq 1}$ converge statistic spre l, $l \in \mathbb{R}$, dacă găsim un subşir al acestuia care converge la l şi mulţimea indicilor subşirului respectiv este statistic densă.

EXERCIŢIUL 10. *Fie* $x = (x_n)_{n\geq 1}$ *şir de elemente din* $\mathbb{R}$ *definit astfel*

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{2n}{3n+5}, & n \quad \text{par}, \\ \dfrac{3n}{2n-1}, & n \quad \text{impar}. \end{cases}$$

Studiaţi convergenţa statistică a şirului.

SOLUŢIE. Conform teoremei de caracterizare a convergenţei statistice va trebui să găsim o mulţime de indici I cu $\delta(I) = 1$ astfel încât subşirul $(x_n)_{n\in I}$ să fie convergent.

Fie $I \subseteq \mathbb{N}$ o astfel de mulţime fixată arbitrar, deci I este infinită şi $\delta(I) = 1$. Descompunem mulţimea I în două submulţimi, I_1 şi I_2, prima fiind formată din toţi indicii impari şi a doua din toţi indicii pari. Deci $I = I_1 \cup I_2$ şi $I_1 \cap I_2 = \emptyset$.

Deoarece $\delta(I) = 1$ afirmăm că atât I_1 cât şi I_2 sunt mulţimi infinite. Într-adevăr, dacă I_1 este finită, putem scrie

$$\delta(I) \leq \delta(I_1) + \delta(I_2) = \delta(I_2) \leq \delta(\{2n:\ n \in \mathbb{N}\}) = \frac{1}{2},$$

a se vedea Exerciţiile 2, 3 şi relaţa (7) cu $\lambda = 2$.

Analog, dacă I_2 este finită, folosind acelaşi raţionament şi luând în considerare Observaţia 1, vom obţine $\delta(I) \leq \dfrac{1}{2}$.

I a fost fixată arbitrar. Cel puţin pentru una din aceste mulţimi trebuie ca şirul $(x_n)_{n\in I}$ să fie convergent. Dar aceasta nu poate avea loc deoarece subşirurile $(x_n)_{n\in I_1}$, $(x_n)_{n\in I_2}$ au limite diferite, şi anume 3/2 respectiv 2/3. Astfel şirul dat nu este statistic convergent. □

4. CONCLUZII

Având în vedere relaţiile (8) şi (9) putem trage următoarele concluzii relative la un şir $(x_n)_{n\geq 1}$ de elemente din $\mathbb{R}$. Fie $l \in \mathbb{R}$.

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l \Leftrightarrow$ în orice vecinătate a lui l de forma $(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$ se află **toţi** termenii şirului începând de la un anumit rang care depinde de ε.

(ii) $st - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = l \Leftrightarrow$ în orice vecinătate a lui l de forma $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$ se află o infinitate de termeni cu proprietatea că mulţimea indicilor acestora este densă, a se vedea relaţia (11). Aceasta nu exclude ca în afara vecinătăţii respective să se afle un număr finit de termeni sau un număr infinit de termeni cu proprietatea că mulţimea indicilor lor are densitatea nulă (a se vedea Exerciţiul 9).

BIBLIOGRAFIE

[1] H. Fast, *Sur la convergence statistique*, Colloquium Mathematicum, **2**(1951), 241-244.
[2] T. Šalát, *On statistically convergent sequences of real numbers*, Math. Slovaca, **30**(1980), 139-150.
[3] H. Steinhaus, *Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique*, Colloquium Mathematicum, **2**(1951), 73-74.

Babeş-Bolyai University
Faculty of Mathematics and Computer Science
Str. Kogălniceanu, no. 1
400084 Cluj-Napoca, Romania
e-mail: `agratini@math.ubbcluj.ro`

Primit la redacţie: 1 Noiembrie, 2014