

## CIRCUMFERINȚA PĂMÂNTULUI ȘI TRIGONOMETRIA

Daniela-Adina Andrei

### 1. ARGUMENT

În zilele noastre, faptul că știm distanța de la Pământ la Lună sau că putem calcula orice distanță de pe planetă nu mai este o curiozitate, dar să nu uităm că rezultatele acestor calcule au la bază munca a multor oameni de știință, desfășurată pe parcursul a mai multor secole. Rezultatele precise pe care mașinile de calcul le oferă astăzi au fost cu succes approximate prin mijloace mai mult sau mai puțin rudimentare ori doar intuite de mulți învățați din vremurile trecute.

Lucrarea de față își propune să facă o scurtă incursiune în veacurile ce au trecut și să prezinte munca unor oameni de știință din secolele trecute, care folosind observarea, triunghiul dreptunghic sau triangularea au calculat circumferința Pământului.

### 2. INTRODUCERE – DEFINIREA NOȚIUNILOR UTILIZATE

#### 2.1. Forma Pământului

Forma de *geoid* a Pământului este determinată de efectele gravitației și ale rotației asupra mineralelor care alcătuiesc planeta.



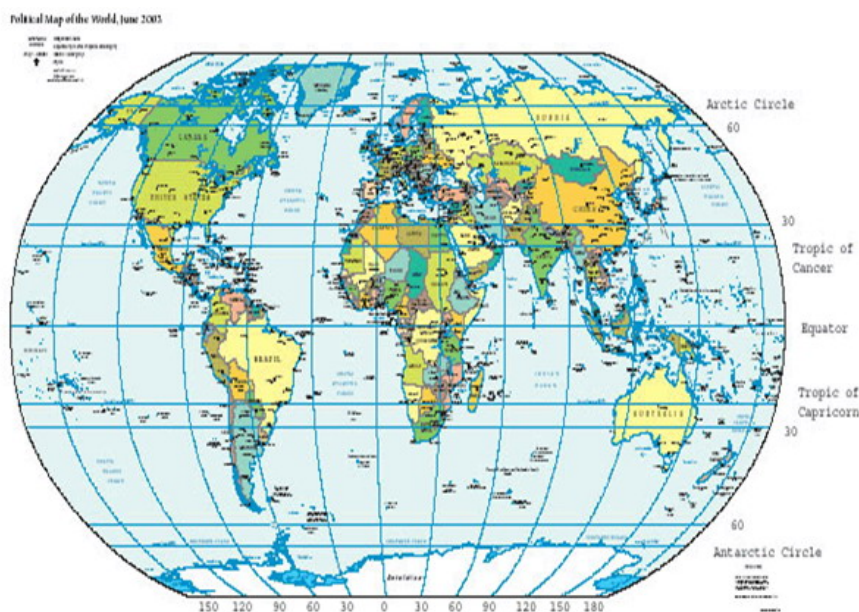
Gravitația dă forma de sferă oricărui obiect suficient de mare – numai corpurile mai mici din sistemul solar sunt de formă nonsferică. Pământul este o sferă aproape perfectă, însă rotația rapidă la fiecare 24 de ore echivalentă cu o mișcare a suprafeței ecuatoriale cu o viteză mai mare de 1600 km/h reduce efectele gravitației la ecuator, ceea ce înseamnă că regiunea ecuatorială este mai bombată cu 21 km comparativ cu regiunile polare.

## 2.2. Meridianul

În astronomie noțiunea de *meridian* reprezintă un cerc imaginar perpendicular pe linia orizontului și pe planul ecuatorului.

În geografie *meridianul* este orice semicerc care unește poli geografici ai Pământului fiind format de punctele având aceeași longitudine.

*Longitudinea* este una dintre cele două coordonate geografice care descriu poziția unui punct pe suprafața Pământului. *Longitudinea unui punct* este unghiul dintre proiecțiile pe planul ecuatorului ale direcțiilor de la centrul Pământului către punctul dat, respectiv către un punct de pe Pământ ales convențional ca origine a longitudinii. Dacă punctul considerat se află la est de originea longitudinii, atunci *longitudinea* lui se numește *estică*, notată cu *E*, iar dacă punctul considerat se află la vest de această origine, atunci *longitudinea* lui se numește *vestică*, notată cu *V*. Faptul că longitudinea este estică sau vestică nu contează pentru punctele cu longitudine  $0^\circ$  sau  $180^\circ$ .



Punctul utilizat în prezent de toată lumea ca origine a longitudinii este Observatorul astronomic din Greenwich, Marea Britanie. Acesta a fost ales prin rezoluția adoptată în 1884 la Conferința internațională a meridianului.

Punctele de pe Pământ care au aceeași longitudine alcătuiesc un semicerc numit *meridian*, având ca extremități cei doi poli și având ca centru centrul Pământului.

Fiecare meridian are un meridian pereche împreună cu care formează un cerc mare numit *cerc meridian*.

Deci, *longitudinea* se exprimă în grade pe un plan perpendicular asupra axei terestre și poate lua valori între  $0^\circ - 180^\circ E$  și  $0^\circ - 180^\circ V$ . Măsurarea longitudinii se face cu un ceas și un meridian. Ceasul trebuie să indice ora Greenwich. Citind ora locală a meridianului și făcând diferența cu cea a ceasului se află longitudinea locală, considerând  $15^\circ$  pentru fiecare oră, adică  $360^\circ$  (grade sexagesimale) pentru 24 ore.

### 2.3. Trigonometria

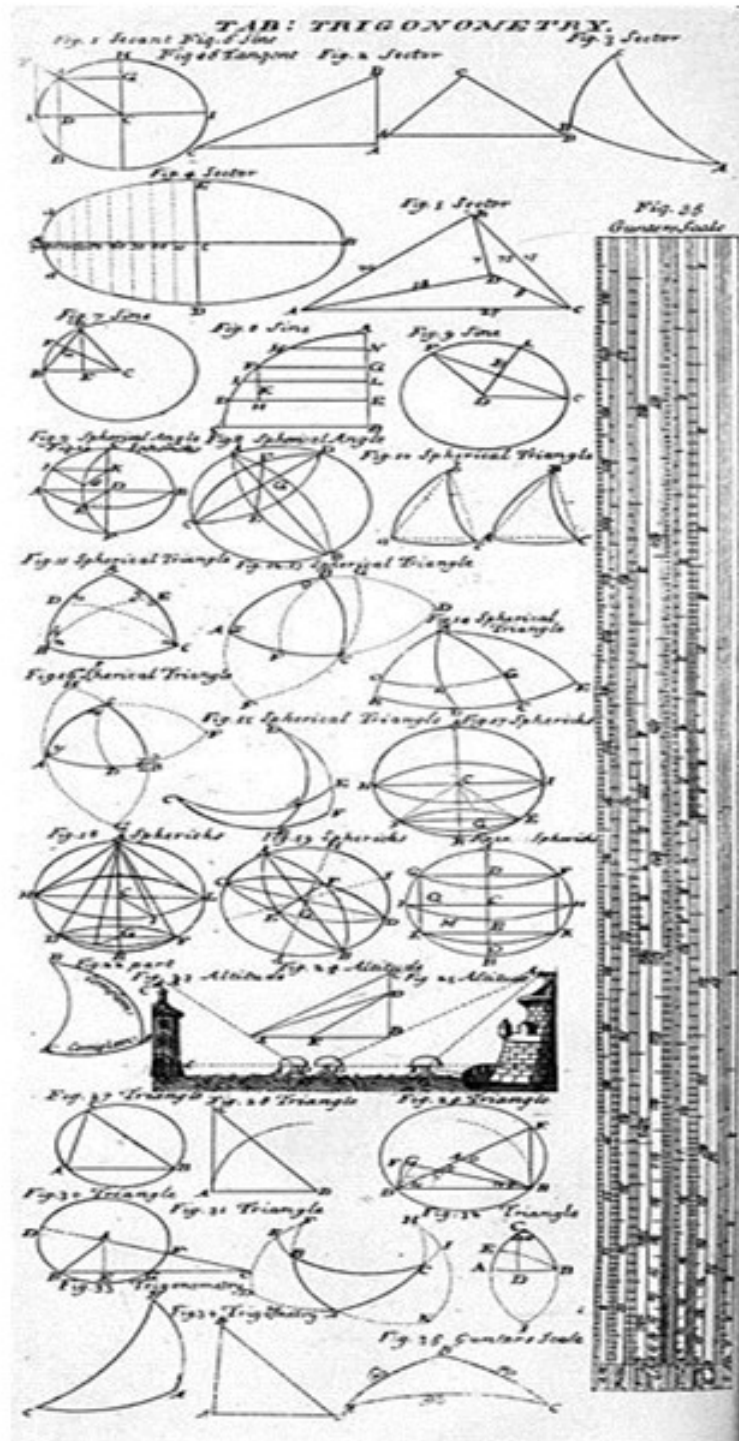
*Trigonometria* (din limba greacă *trigonos* = triunghiular și *metron* = măsură) este o parte a matematicii care se ocupă cu studiul unghiurilor, a triunghiurilor și a funcțiilor trigonometrice precum sinusul, cosinusul, tangenta și cotangenta.

Unii matematicieni consideră *trigonometria* o subdiviziune a geometriei, iar alții o știință matematică distinctă.

Originea *trigonometriei* se consideră a fi în cultura antică din Egipt, Babilon și Valea Indului, acum mai mult de 3000 de ani. Matematicienii indieni au fost pionierii calculului algebric, cu aplicații în astronomie și trigonometrie, iar *Lagadha* este unicul matematician cunoscut care a utilizat geometria și trigonometria pentru astronomie în cartea sa *Vedanga Jyotisha*, dar din păcate multe dintre lucrările sale au fost distruse de către invadatorii Indiei.

Matematicianul grec *Hipparchus* a compilat un tabel trigonometric pentru triunghiuri în jurul anului 150 î.e.n.

Matematicianul de origine sileasă *Bartholemaeus Pitiscus* a publicat o lucrare importantă în trigonometrie în anul 1595 și introdus cuvântul în limbile franceză și engleză.



## 2.4. Triangularea

Există un număr enorm de aplicații pentru trigonometrie. O importanță specială deține *tehnica de triangulație* care este utilizată în astronomie pentru a măsura distanța până la stele apropiate, în geografie pentru a măsura distanțele între repere terestre și în sisteme de satelit pentru navigație (GPS).

*Triangularea* se bazează pe faptul geometric că dacă știi lungimea unei laturi a unui triunghi și două dintre unghiurile sale îi poți calcula toate celelalte dimensiuni. Folosind această metodă în planul terestru cercetătorii secolelor trecute au calculat măsura unui *grad de meridian*.



*Sistemul GPS* este o constelație de 27 de sateliți cu încărcare solară situați la o altitudine de aproximativ 20.000 de kilometri. Orbitele sunt așezate astfel încât din orice punct al planetei poți "vedea" cel puțin 24 de sateliți operaționali. 3 dintre cei 27 de sateliți de pe orbită sunt rezerve pregătite pentru a fi pornite în orice moment în care unul dintre ceilalți cedează.

Fiecare satelit trimite un semnal electromagnetic – un fascicul de microunde – care transmite informații către orice dispozitiv de receptare a semnalului. Deci, în orice moment, un dispozitiv de receptare GPS primește semnal de la patru sateliți. Computerul încorporat folosește aceste semnale pentru a identifica distanța exactă față de fiecare dintre cei patru sateliți și pentru a calcula apoi poziția cu maximă precizie bazată pe aceste distanțe. De fapt, semnalul de la doar trei sateliți este suficient pentru acest proces trilateral. Calcularea

poziției unui punct de pe Pământ se face pe baza distanței punctului respectiv față de cei trei sateliți. Semnalul de la cel de-al patrulea satelit este redundant și este utilizat pentru a confirma rezultatele calculului inițial. Dacă poziția calculată în funcție de sateliții  $A - B - C$  nu corespunde calculului făcut de sateliții  $A - B - D$ , atunci sunt testate alte combinații până este obținut un rezultat corect.

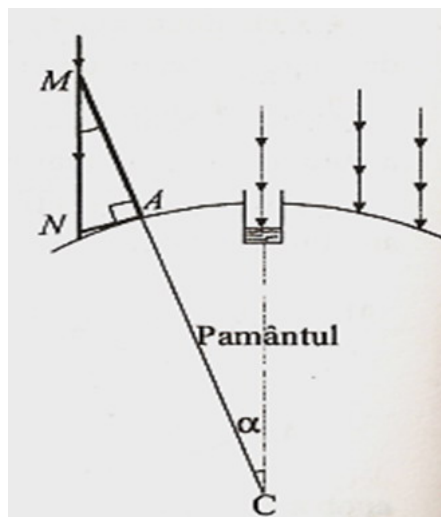
Procesul de măsurare a distanței de la satelit până la dispozitivul GPS este bazat pe semnale temporizate. De exemplu, la o oră fixă, sateliții pot începe să transmită un semnal. Receptorul GPS va începe în același timp să ruleze aceeași secvență la ora fixată, dar nu o va transmite. În momentul în care receptorul GPS primește semnal de la diferiți sateliți, există o desincronizare, pentru că microundele au nevoie de o fracțiune de secundă pentru a ajunge cu viteza luminii de la satelit la receptor. Desincronizarea este transformată cu ușurință în distanța până la fiecare satelit. Mica diferență dintre semnalele fiecărui satelit este utilizată pentru a calcula poziția receptorului.

### 3. APLICAȚII PRACTICE ALE TRIGONOMETRIEI – CALCULAREA CIRCUMFERINȚEI PĂMÂNTULUI

#### 3.1. Cum a calculat Eratostene circumferința Pământului

În secolul II î.e.n., *Eratostene* a observat că în miezul zilei solstițiului de vară la Siena, razele Soarelui luminează apa unei fântâni adânci, prin urmare Soarele se afla exact pe verticala locului. În calculele ulterioare el a considerat că razele cad paralel pe suprafața Pământului.

Deci, în timp ce apa fântânii scânteiază la Siena, la Alexandria razele cad sub un unghi având aceeași măsură  $\alpha$  ca și unghiul  $SCA$  ( $C =$  centrul Pământului,  $S =$  Siena,  $A =$  Alexandria). Astfel, în miezul solstițiului de vară a anului următor, Eratostene a măsurat înălțimea  $AM$  și umbra  $AN$  a obeliscului din Alexandria calculând în  $\triangle AMN$  pe  $\alpha = 7^{\circ}12'$ .

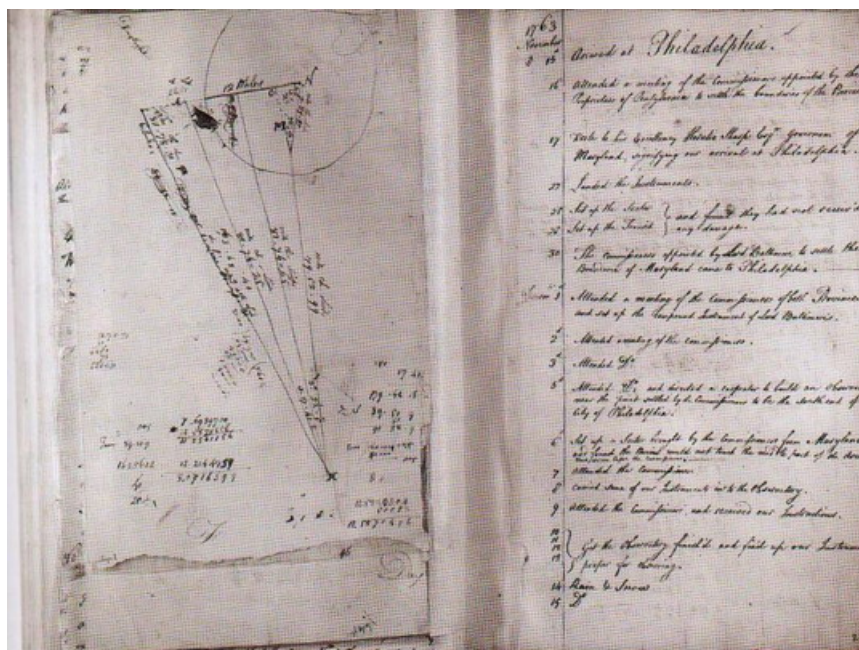


În concluzie, *Eratostene* a aflat că distanța de 5000 de stadii egiptene dintre Siena și Alexandria se vede sub un unghi de  $7^{\circ}12'$  din centrul Pământului. El a obținut că circumferința Pământului este de 250000 stadii egiptene, adică 39375 km (1 stadie = 157,5 m). În realitate, circumferința Pământului este de 40000 km.

### 3.2. Englezii și măsurarea Pământului

În 1686 în lucrarea sa de referință, "Principiile", *Isaac Newton* a demonstrat că Pământul nu este chiar rotund. Vestea nu era prea bună pentru cei care măsurau planeta pornind de la premisa că era o sferă perfectă, aceia fiind... toată lumea.

În 1636 a fost publicată marea lucrare despre navigație a lui *Richard Norwood*, "Experiența unui marinar" care a avut 17 ediții și mai era încă pe piață la douăzeci și cinci de ani după moartea sa. Pasiunea acestui matematician englez a fost trigonometria, deci a decis să introducă puțină rigoare matematică în navigație și, în acest scop, s-a hotărât să calculeze lungimea arcului unui grad de meridian.



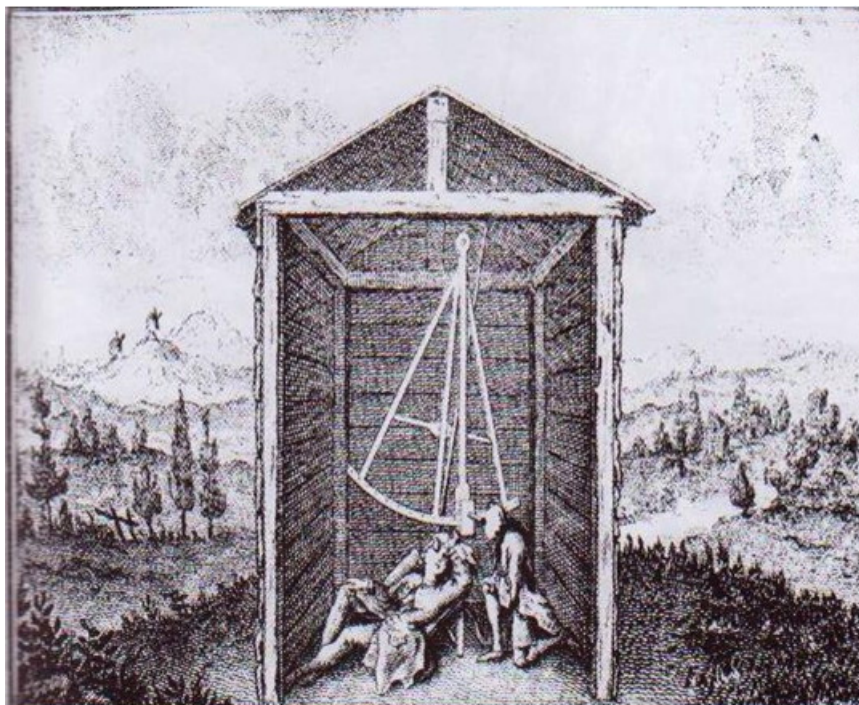
El a ales ca punct de pornire Turnul Londrei, apoi a dedicat doi ani unui marș de 335 kilometri spre nord, către York, întinzând și măsurând repetat un lanț pe măsură ce avansa, făcând concomitent cele mai meticuloase ajustări peste ridicăturile și adânciturile drumului său. Ultimul pas era măsurarea unghiului sub care cădea soarele la York în același moment al zilei și în aceeași zi a anului ca atunci când își făcuse prima măsurătoare în Londra. Prin aceasta el considera că poate determina lungimea unui grad de meridian al

Pământului și calcula astfel distanța în jurul întregului Pământ. În sistemul metric a ajuns la cifra 110,72 kilometri pe grad de arc, adică a avut o eroare doar de 550 metri.

Mai târziu, între 1763 și 1767, astronomul englez *Charles Mason* și geodezul *Jeremiah Dixon* au reușit cea mai exactă măsurătoare a unui grad de meridian. Acest lucru s-a întâmplat în timp ce stabileau granița ce desparte statele Pennsylvania și Maryland, rezultând faimoasa linie Mason-Dixon, care mai târziu a căpătat semnificația simbolică de linie ce desparte statele sclavagiste de statele libere.

### 3.3. Francezii și măsurarea Pământului

Se spune că oamenii de știință din secolul al XVIII-lea, și mai ales francezii rareori alegeau cea mai simplă cale de a face ceva dacă aveau la dispoziție o alternativă absurd de solicitantă. În acest context trebuie să amintim de expediția peruviană a Academiei Regale de Științe din 1735 condusă de hidrologul *Pierre Bouguer* și de matematicianul soldat *Charles Marie de La Condamine*, care a călătorit în Peru pentru a triangula distanțele prin Anzi în scopul măsurării unui grad de meridian dorind să calculeze astfel circumferința Pământului. Procedeu ales de ei a fost triangularea pe o linie ce se întinde de la Yaroqui, în apropiere de Quito, până imediat dincolo de Cuenca, unde este acum Ecuadorul, o distanță de circa 320 km. Misiunea a fost sortită eșecului.



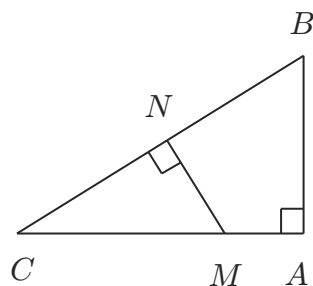


Dar înainte de această misiune au mai fost și alți francezi care au încercat să măsoare circumferința Pământului, cum ar fi *Jean Picard* care a inventat o metodă impresionantă de triangulare, care presupunea cvadrante, ceasuri cu pendule, telescoape pentru a urmări mișcarea lui Jupiter. După doi ani de deplasări greoaie și triangulări prin Franța, în 1669 el a anunțat că a ajuns la o măsurătoare mai exactă, de 110,46 km pe grad de arc. Dar, el a pornit de la premisa că Pământul e rotund, iar Newton demonstrase că nu e așa.

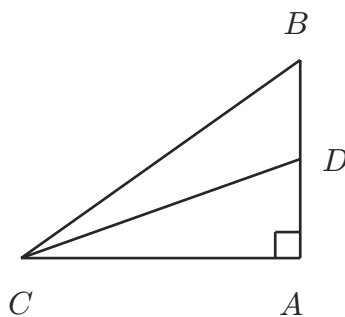
Pentru a complica și mai tare problema, după moartea lui Picard, echipa formată din *Giovanni* și *Jacques Cassini*, tată și fiu, a repetat experimentele și a ajuns la concluzia că Pământul e mai bombat la poli și nu la ecuator, cum spunea Newton. Din acest motiv, Academia Regală de Științe a fost nevoită să îi trimită pe Bouguer și La Condamine în America de Sud să facă măsurători. După zece ani au ajuns la concluzia că un grad de meridian era de fapt mai lung în apropierea polilor, așa cum afirmase Newton.

#### 4. PROBLEME PROPUSE ÎN MANUAL

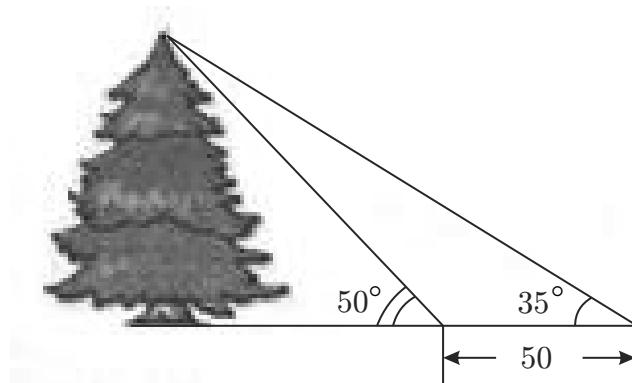
1. Calculează  $\sin \alpha$  pentru  $\alpha = 62^\circ$ ;  $\alpha = \frac{\pi}{8}$  rad;  $\alpha = 1,5$  rad.
2. Determină măsura în radiani a unghiului  $A$ , știind că:  
 $\sin A = 0,2$ ;  $\cos A = \frac{4}{5}$ ;  $\operatorname{tg} A = 26$ .
3.  $AB = 6$  cm,  $AC = 8$  cm,  $CN = 4$  cm,  $CM = ?$



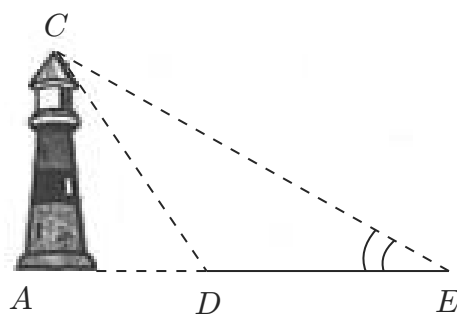
4.  $BC = 9$  cm,  $m(\sphericalangle ABC) = 47^\circ$ ,  $BD = 3$  cm,  $CD = ?$



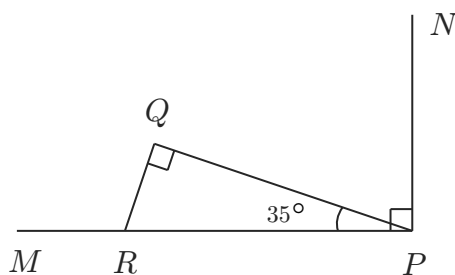
5. Calculează înălțimea copacului utilizând datele de pe figură.



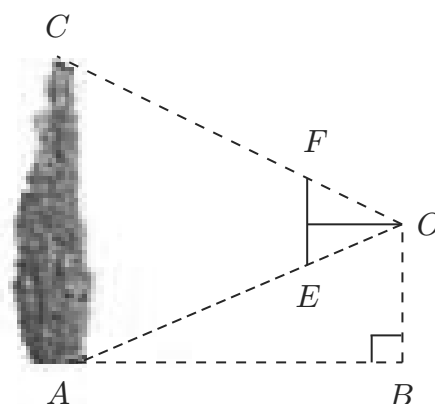
6. Calculează înălțimea statuii utilizând următoarele date:  
 $m(\sphericalangle ADC) = 62^\circ$ ,  $m(\sphericalangle AEC) = 15^\circ$  și  $DE = 50$  m.



7. Unghiurile  $\sphericalangle PQR$  și  $\sphericalangle MPN$  sunt drepte;  $m(\sphericalangle QPR) = 35^\circ$ ;  
 $RP = 10$  cm;  $MR = RQ$  și  $QP = PN$ .  
 Calculează distanța de la  $M$  la  $N$ .



8. Pentru a determina înălțimea unui arbore, muncitorii forestieri folosesc un instrument construit din două vergele *egale* și perpendiculare. Tu cum l-ai utiliza?



9. "La steaua care-a răsărit  
E-o cale-atât de lungă,  
Că mii de ani i-au trebuit  
Luminii să ne-ajungă..."  
(M. Eminescu - La steaua)



Se observă steaua Proxima Centauri o dată la 6 luni și se pune în evidență o ușoară deplasare a ei în raport cu alte stele îndepărtate, considerate stele de referință. Măsurând deplasarea, se calculează unghiul  $p$  sub care s-ar vedea orbita Pământului de pe această stea. Considerăm că orbita Pământului este un cerc. În tabele cu valori numerice aproximative ale mărimilor importante în astronomie găsim că distanța Pământ-Soare este de  $15 \cdot 10^7$  km și că  $p$  are mărimea  $0,76''$ . Calculează distanța aproximativă de la Soare la steaua Proxima Centauri.

#### BIBLIOGRAFIE

- [1] Brânzei, D. și colectivul, *Matematică, manual pentru clasa a IX-a*, Editura Sigma, București, 1999.
- [2] Bryson, B., *Despre toate, pe scurt de la Big Bang la ADN - Scurtă istorie*, Editura Curtea Veche, București, 2004.
- [3] Kindersley, D., *Terra, Enciclopedia completă a planetei noastre*, Editura Rao, București, 2006.
- [4] <http://ro.wikipedia.org>