Soluţii scris final

1. (a) $\left|A^{-1}\right| = 32$, (1p) $|A| = \frac{1}{32}$, (1p) iar matricea adjunctă $adj(A) = |A|\, A^{-1}$ (2p).

(b) $A\mathbf{x} = B \overset{(1p)}{\Longrightarrow} \mathbf{x} = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 9 \\ -17 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$ (1p).

(c) Cf. (a), matrice nesingulară. Deci FER este I_4 (1p).

2. (a) $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & -5 \\ 2 & 4 & 2 & 8 \\ 3 & 8 & 1 & 0 \end{bmatrix} \backsim \ldots \backsim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(2p)

Deci baza este $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. (2p) Se poate determina şi o bază în spaţiul coloanelor formată din coloanele iniţiale. Pentru asta se aduce la forma eşalon (2p) (nu este necesar şi redusă) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 4 & 8 \\ 2 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 8 & 0 \end{bmatrix} \backsim \ldots \backsim \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ deci baza este formata din (2p) coloanele 1, 2, 3.

(b) Rangul lui $A = 3$ deci dimensiunea este 5 - 3 = 2 (2p).

3. (a) Se verifică $L((x,y,z) + (x',y',z')) = L((x,y,z) + L(x',y',z')$ şi $L(c(x,y,z)) = cL(x,y,z)$. (2p)

(b) Se calculează $L(\mathbf{i}) = \mathbf{i}+\mathbf{j}$, $L(\mathbf{j}) = -2\mathbf{j}$, $L(k) = \mathbf{i}+\mathbf{k}$ (2p) de unde matricea este $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (1p) (c) $L(1,-1,1) = (2,3,1)$. (1p)

4. $|A - \lambda I_3| = -(\lambda-2)^2(\lambda-4)$.(2p) Pînă la urmă [valori proprii (1p), vectori proprii (2p)]

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ (1p) şi } D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}. \text{ (1p)}$$

5. Nu (0.5p)este subspaţiu. De exemplu (1.5p) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ şi $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ sunt singulare dar $A+B = I_2$ este nesingulară.

6. (a) Se verifică $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = I_n$. (1p)

(b) Dacă $T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & ... & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & ... & t_{2n} \\ . & . & ... & . \\ 0 & 0 & ... & t_{nn} \end{bmatrix}$ (1p) atunci ecuaţia caracteristică $|A - \lambda I_n| = \begin{vmatrix} t_{11}-\lambda & t_{12} & ... & t_{1n} \\ 0 & t_{22}-\lambda & ... & t_{2n} \\ . & . & ... & . \\ 0 & 0 & ... & t_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = (t_{11} - \lambda)(t_{22}-\lambda)...(t_{nn}-\lambda) = 0$ (1p) are soluţii elementele pe diagonala principală (1p).

7. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \backsim ... \backsim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (2.5p) deci rangul

este 3 (1.5p).

8. Se rezolvă sistemul $a(1,0,-2)+b(1,-1,0)+c(0,2,4)=(1,5,-4)$ cu soluţia $(a,b,c)=(4,-3,1)$ (2p) respectiv, $a(1,0,-2)+b(1,-1,0)=(4,-1,8)$ fără soluţie (2p).