Seminar categorii

Paragrafele cf. Capitol 1, "Preliminarii" Mitchell

16 December 2011

1 Definitia

1. *Exemplu de categorie cât*

Este categoria **Top**, cât in raport cu omotopia.

Fie $\alpha, \beta : A \longrightarrow B$ doua morfisme in categoria **Top**. si $I = [0,1]$ intervalul inchis. Definim pe fiecare $\mathrm{Hom}(A,B)$ o relatie de echivalenta R_{AB} astfel: $\alpha R_{AB} \beta$ ddaca exista o functie continua $f : A \times I \longrightarrow B$ astfel ca $f(a,0) = \alpha(a)$ si $f(a,1) = \beta(a)$ pt orice $a \in A$.

R_{AB} *este echivalenta*:

reflexivitate = definim $f(a,i) = \alpha(a)$ pt orice $i \in I$

simetrie = definim $g(a,i) = f(a, 1-i)$

tranzitivitate = pt f si g date definim $h(a,i) = \begin{cases} f(a,2i) & \text{daca} \quad 0 \leq i \leq \frac{1}{2} \\ g(a,2i-1) & \text{daca} \quad \frac{1}{2} \leq i \leq 1 \end{cases}$.

Echivalenta (omotopia) *este chiar o congruenta*, adica este compatibila cu compunerea din **Top**:

Fie $u : A \longrightarrow B$ si $\alpha, \beta : B \longrightarrow C$ cu $\alpha R_{AB} \beta$. Vom arata ca si $(\alpha u) R_{AB} (\beta u)$.

Cum $\alpha R_{AB} \beta$ exista omotopia $f : B \times I \longrightarrow C$ (functie continua) astfel ca $f(b,0) = \alpha(b)$ si $f(b,1) = \beta(b)$ pt orice $b \in B$. Definim deasemenea $f' : A \times I \longrightarrow B \times I$ prin $f'(a,i) = (u(a), i)$ pt orice $a \in A$. Atunci si $f \circ f'$ este continua si $ff'(a,0) = f(u(a),0) = \alpha(b)$, $ff'(a,1) = f(u(a),1) = \beta(b)$, adica $(\alpha u) R_{AB} (\beta u)$, qed.

Categoria cat **Top**$/R$ se mai noteaza si **hTop** (categoria omotopica a spatiilor topologice)

2 Exemple

Ens, **Grp**, **Top**, R-**Mod** (**Mod**-R), **Vec**$_K$, **Ab**, **Rng**, dar si

Rel = obiecte multimi, morfisme relatii (binare);

aici asemanator ar fi si
Grp$_{\mathrm{dir}}$ = Obiecte = grupuri, morfisme = subgrupuri ale produsului direct

Pos = multimi partial ordonate cu functii crescatoare (=morfisme de ordine)
Lat = latici si morfisme laticiale
SGr = semigrupuri si morfisme de semigrupuri

Mon = monoizi si morfisme de semigrupuri + $f(e) = e'$
Rng$_1$ = inele cu unitate si morfisme de inele unitale
Field = corpuri comutative si morfisme de inele diferite de zero
R-**Alg** = R-algebre (R comutativ) si
Top$_2$ = spatii topologice T$_2$ (Hausdorff)
CompT$_2$ = Hausdorff compacte
TopGr = grupuri topologice si morfisme de grupuri continue
MLinSp = spatii liniare (vectoriale) normate si transformari liniare marginite (=continue)
BanSp$_1$ = spatii Banach complexe si transformari liniare marginite
BanSp$_2$ = spatii Banach complexe si transformari liniare descrescatoare in norma.

Deasemenea mai mentionam

Ens$_i$ = multimi si functii injective [analog pt surjective respectiv bijective]
Top$_d$ = spatii topologice si aplicatii deschise
pEns = multimi punctate, adica obiecte perechi (A, a) cu $a \in A$ si functiile pastreaza punctarea: $\mathrm{Hom}((A,a),(B,b)) = \{f : A \longrightarrow B | f(a) = b\}$.
pTop analog
TopBun = spatii topologice fibrate: triplete (X, p, B) cu X, B spatii topologice si $p : X \longrightarrow B$ functie continua

si inca

(a) pentru un inel comutativ R, **categoria** R-matricilor:
obiecte = $\mathbf{N}^*$ (numere naturale ¿0)
morfisme $\mathrm{Hom}(m, n)$ = multimea $n \times m$ matricilor cu coeficienti in R; compunerea = inmultirea matricilor
(b) orice multime preordonata $(A, \leq)$:
obiecte = elementele lui A
morfisme $\mathrm{Hom}(a, b) = \begin{cases} \{*\} & \text{daca} \quad a \leq b \\ \varnothing & \text{in caz} \quad \text{contrar} \end{cases}$
Caz particular: **n** pt $A = \{0, 1, 2, ..., n-1\}$ ordonata obisnuit
(c) Orice **monoid** G poate fi privit ca o categorie cu un singur obiect G si morfismele sunt elementele sale
[Intrebari: ce inseamna o subcategorie (subgrup?) sau o subcategorie plina aici (sau chiar pt un **grup**)?]

Subcategorii:

Ab subcategorie plina in **Grp**
Rng$_1$ subcategorie in **Rng** dar nu plina
[vezi si Ex. **14**, din paragraful urmator]

3 Morfisme speciale

1. *Un morfism in* **Ens** *este mono ddaca este functie injectiva.*

Demo $\Longleftarrow$ Consideram functii $f, g : A \longrightarrow B$ si $\alpha : B \longrightarrow C$ si $f \neq g$. Atunci exista $a \in A$ cu $f(a) \neq g(a)$ si cum α injectiva chiar si $\alpha f(a) \neq \alpha g(a)$. Asadar α este mono.

$\Longrightarrow$ Contrara reciprocei: pp ca α nu este injectie. Exista atunci $b_1 \neq b_2$ in B cu $\alpha(b_1) = \alpha(b_2)$. Aratam ca exista f, g cu $\alpha f = \alpha g$ dar $f \neq g$.

Fie $f : A \longrightarrow B$ o functie pentru care $b_1 \in \mathrm{Im(f)}$.

Definim aplicatia $g : A \longrightarrow B$ astfel $g(a) = \begin{cases} f(a) & \text{daca} \quad f(a) \neq b_1 \\ b_2 & \text{daca} \quad f(a) = b_1 \end{cases}$. Se constata ca $\alpha f = \alpha g$ deci, cum α este mono, $f = g$, o contradictie (se vede ca $f \neq g$).

2. *Un morfism in Ens este epi ddaca este functie surjectiva.*

Demo = $\Longleftarrow$ Fie $\alpha : A \longrightarrow B$ si $f, g : B \longrightarrow C$ functii astfel ca $f\alpha = g\alpha$. Fie $b \in B$ oarecare. Cum α surjectiva, exista $a \in A$ cu $\alpha(a) = b$. Din $f\alpha = g\beta$ deducem $f(\alpha(a)) = g(\beta(a))$ adica chiar $f(b) = g(b)$.

$\Longrightarrow$ Contrara reciprocei: pp ca α nu este surjectie. Exista $b_0 \in B$ cu $b_0 \notin \alpha(A)$. Putem defini atunci functii $f, g : B \longrightarrow C$ prin $f(b) = g(b)$ pentru toti $b \in B \setminus \{b_0\}$ si $f(b_0), g(b_0)$ arbitrar dar diferite ($|C| \geq 2$). Atunci $f\alpha = g\alpha$ dar $f \neq g$.

3. *Demonstratia KUROS* pentru: *in* **Grp** *orice epimorfism este o surjectie* (cea f. lunga in 3.5.35 Purdea I):

pp. contrariul si fie $\alpha : A \longrightarrow B$ cu $\alpha(A) = B' \subset B$. Fie C_1 si C_2 doua grupuri izomorfe cu B si anume $C_1 = f(B)$ si $C_2 = g(B)$. Fie $C' = C_1 \cap C_2$ si $\forall x \in B', f(x) = g(x)$.

Formam produsul liber al lui C_1 si C_2 avind ca subgrup amalgamat pe C' izomorf cu B'. Atunci $f\alpha = g\alpha$ caci daca $x \in A$ avem $\alpha(x) \in B'$ si $f(B') = g(B') = C'$. Totusi $f \neq g$ caci $f(y) = g(y)$ doar pentru $y \in B'$. Astfel contrazicem α epimorfism si deci $\alpha(A) = B$.

Demonstratia este aplicabila si la alte categorii, dar nu si la categoria grupurilor finite, caci produsul liber este infinit.

In acest caz au dat *demonstratie Eilenberg, Moore* (Memoirs AMS, vol. 55, p.21).

Alta demonstratie Linderholm, Folclor:

(a) Aratati ca daca K este un subgrup al unui grup (finit) G atunci exista un grup (finit) H si morfisme de grupuri $f_1, f_2 : G \longrightarrow H$ astfel incat $K = \{x \in G | f_1(x) = f_2(x)\}$ [adica *orice subgrup este un egalizator*].

Solutie. Consideram multimea X a coseturilor stangi $G/\rho_K = \{xK | x \in G\}$ la care adaugam inca un element (diferit) $\widetilde{K}$. Fie acum $H = S_X$ grupul permutarilor lui X si $\rho : X \longrightarrow X$ permutarea care interschimba K cu $\widetilde{K}$ si lasa toate coseturile ($\neq K$) fixe.

Definim $f_1, f_2 : G \longrightarrow H$ prin $f_1(x)(S) = \begin{cases} xx'K & \text{daca} \quad S = x'K \\ \widetilde{K} & \text{daca} \quad S = \widetilde{K} \end{cases}$ si $f_2(x) = \rho \circ f_1(x) \circ \rho^{-1}$.

Trebuie doar verificat ca $f_{1,2}$ sunt bine-definite si morfisme de grupuri [daca $x''K = x'K$ atunci $xx''K = xx'K$ si reciproc - adica restrictia lui $f_1(x)$ la G/ρ_K este bijectiva;

apoi $f_1(xy) = f_1(x) \circ f_1(y)$ si in sfarsit $f_2(xy) = \rho \circ f_1(xy) \circ \rho^{-1} = \rho \circ f_1(x) \circ f_1(y) \circ \rho^{-1} = \rho \circ f_1(x) \circ \rho^{-1} \circ \rho \circ f_1(y) \circ \rho^{-1} = f_2(x) \circ f_2(y)$.

Se observa ca daca G este finit si H este finit.

(b) Utilizati (a) pentru a arata ca epimorfismele in **Grp** sunt surjective (analog in categoria grupurilor finite).

Solutie. Fie $f : U \longrightarrow G$ un epimorfism de grupuri. Aratam ca $f(U) = G$. Desigur (in general) $f(U)$ este un subgrup al lui G deci conform (a) exista un grup H si morfisme de grupuri $f_1, f_2 : G \longrightarrow H$ astfel incat $K = \{x \in G | f_1(x) = f_2(x)\}$.

Daca $x \in f(U)$ atunci $f_1(x)$ lasa fixe si pe $f(U)$ si pe $\widetilde{K}$ iar ρ lasa fixe toate celelalte coseturi ale lui X. Atunci permutarile comuta si $f_2(x) = \rho \circ f_1(x) \circ \rho^{-1} = f_1(x)$. Asadar $f_1|_{f(U)} = f_2|_{f(U)}$ adica $f_1 \circ f = f_2 \circ f$ si cum f era epimorfism, chiar $f_1 = f_2$. Atunci, pentru un element oarecare $x \in G$, $f_1(x)$ comuta cu ρ. Cum $f_1(x)$ lasa fix pe $\widetilde{K}$ iar ρ interschimba $f(U)$ si $\widetilde{K}$ rezulta ca $f_1(x)$ lasa fix pe $f(U)$. Pe de alta parte $f_1(x)$ aplica $f(U)$ in $xf(U)$, de unde deducem ca $x \in f(U)$. Am verificat astfel $G \subseteq f(U)$, de unde chiar egalitate si f este surjectiva.

Cazul finit se corespunde.

4. *In* **Rng** *incluziunea* $\mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Q}$ *este epimorfism, dar nu este surjectie.*

Demo = Fie R un inel oarecare $i : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Q}$ incluziunea (care evident nu este surjectiva) si $f, g : \mathbf{Q} \longrightarrow R$ doua morfisme de inele oarecari. Pp. ca $fi = gi$ si aratam ca $f = g$, adica i este (totusi) epimorfism.

Fie $\frac{r}{s} \in \mathbf{Q}$ oarecare. Pentru a verifica $f(\frac{r}{s}) = g(\frac{r}{s})$, cum f, g sunt morfisme de inele (ajunge de grupuri abeliene), este suficient sa verificam $f(\frac{1}{s}) = g(\frac{1}{s})$.

Calculam in doua moduri

$f(\frac{1}{s})f(s)g(\frac{1}{s}) = f(1)g(\frac{1}{s}) = fi(1)g(\frac{1}{s}) = gi(1)g(\frac{1}{s}) = g(1)g(\frac{1}{s}) = g(\frac{1}{s})$

$f(\frac{1}{s})f(s)g(\frac{1}{s}) = f(\frac{1}{s})fi(s)g(\frac{1}{s}) = f(\frac{1}{s})gi(s)g(\frac{1}{s}) = f(\frac{1}{s})g(s)g(\frac{1}{s}) = f(\frac{1}{s})g(1) = f(\frac{1}{s})gi(1) = f(\frac{1}{s})fi(1) = f(\frac{1}{s})f(1) = f(\frac{1}{s})$ qed

5. *In* **AbDiv** *exemplu de monomorfism care nu este injectiv.*

Demo = Desigur proiectia canonica $p_{\mathbf{Z}} : \mathbf{Q} \longrightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ nu este injectiva ($p_{\mathbf{Z}}(1) = 1 + \mathbf{Z} = 2 + \mathbf{Z} = p_{\mathbf{Z}}(2)$). Aratam ca este totusi mono.

Definitie. Grupul abelian G se numeste divizibil daca pt orice $g \in G$ si orice intreg pozitiv n exista $g' \in G : g = ng'$.

Exemplu: $\mathbf{Q}$ este divizibil

Propozitie: *Orice grup factor al unui grup divizibil este deasemenea divizibil.*

Fie $f, g : A \longrightarrow \mathbf{Q}$ doua morfisme in **AbDiv** cu $f \neq g$. Exista atunci $a \in A$ pt care $f(a) - g(a) = \frac{r}{s} \neq 0$ si $s \notin \{\pm 1\}$ (daca nu, amplificam cu un astfel de s). Cum $a \in$**AbDiv**, fie $b \in A$ astfel ca $rb = a$. Atunci $r(f(b) - g(b)) = f(a) - g(a) = r \cdot \frac{1}{s}$ sunt numere rationale, deci $f(b) - g(b) = \frac{1}{s}$.

Asadar $p_{\mathbf{Z}}(f(b) \neq p_{\mathbf{Z}}(g(b))$ si deci $p_{\mathbf{Z}} \circ f \neq p_{\mathbf{Z}} \circ g$, adica $p_{\mathbf{Z}}$ este mono.

6. **Rel** *este o categorie echilibrata* (= mono + epi = izomorfism = sectiune + retracta = are inversa la stanga + dreapta) [R mono $\equiv$ pt orice alte relatii $R \circ R_1 = R \circ R_2 \Longrightarrow R_1 = R_2$, respectiv R epi $\equiv S_1 \circ R = S_2 \circ R \Longrightarrow S_1 = S_2$]

[Observatie preliminara: Fie $(A,B;R)$ o relatie. *Daca exista* $(B,A;S)$ *cu* $R\circ S=\triangle_B$ *si* $S\circ R=\triangle_A$ *atunci* $S=\overset{-1}{R}$ (asta implica si ca izomorfismele in **Rel** sunt **aplicatiile** bijective si justifica metoda de demonstratie de mai jos).

Demo. Mai intai, $R\circ S=\triangle_B$ implica $\forall b\in B: R(S\langle b\rangle)=\{b\}\neq\varnothing$ de unde $S\langle b\rangle\neq\varnothing$. Apoi $(b,a)\in\overset{-1}{R}$ implica $b\in R\langle a\rangle$ si $S\langle b\rangle\subseteq S(R\langle a\rangle)=\{a\}$. Asadar $S\langle b\rangle=\{a\}$ si $(b,a)\in S$ de unde $\overset{-1}{R}\subseteq S$. Simetric $\overset{-1}{S}\subseteq R$ sau $S\subseteq\overset{-1}{R}$ de unde egalitatea.]

(A) Aratam intai ca orice *mono + epi pentru o relatie* $(A,B;R)$ *implica* R *este functie.*

Reamintim ca: *R aplicatie ddaca $pr_1R=A$* [sau $\forall a\in A$, $|R\langle a\rangle|\geq$] (1) *si* $|R\langle a\rangle|\leq 1$ *pt orice* $a\in A$ (2).

(1) Avem $pr_1R=\overset{-1}{R}\langle B\rangle\subseteq A$. Daca prin absurd exista $a\in A\setminus\overset{-1}{R}\langle B\rangle$, adica $(a,b)\in R$ pt orice $b\in B$ contrazicem R mono astfel: luam $A'=\{a\}$ si $(A',A;R_{1,2})$ cu $R_1=\varnothing$ si $R_2=\{(a,a)\}$. Atunci $R_1\neq R_2$ si totusi $R\circ R_1=\varnothing=R\circ R_2$.

(2) Daca cumva exista $a\in A$ cu $|R\langle a\rangle|\geq 2$ distingem 2 cazuri:

(i) exista $b_0\in R\langle a\rangle$ pt care $\overset{-1}{R}\langle b_0\rangle=\{a\}$. Atunci luam $S_1=R\langle a\rangle\times\{*\}\neq(R\langle a\rangle\setminus\{b_0\})\times\{*\}=S_2$ si totusi $S_1\circ R=\overset{-1}{R}(R\langle a\rangle)\times\{*\}=S_2\circ R$, deci contrazicem R epi.

(ii) pt orice $b\in B$, $\overset{-1}{R}\langle b\rangle$ contine in afara de a cel putin inca un element. Atunci luam $R_1=\{*\}\times\overset{-1}{R}(R\langle a\rangle)\neq\{*\}\times(\overset{-1}{R}(R\langle a\rangle)\setminus\{a\})=R_2$ si avem $R\circ R_1=\{*\}\times R(\overset{-1}{R}(R\langle a\rangle)=R\circ R_2$, deci contrazicem R mono.

Asadar pt orice $a\in A$ are loc $|R\langle a\rangle|\leq 1$.

(B) In sfarsit, atunci mono (epi) in **Rel** $\Longrightarrow$ mono (epi) in **Ens**, si cum **Ens** este (cunoscuta ca) echilibrata**,** R chiar bijectie, $\overset{-1}{R}$ aplicatie si deci $R\circ\overset{-1}{R}=\triangle_B$, $\overset{-1}{R}\circ R=\triangle_A$.

Observatii. (1) *R epi* $\Longleftrightarrow$ *$\overset{-1}{R}$ mono.*

Intradevar daca $\overset{-1}{R}\circ R_1=\overset{-1}{R}\circ R_2$ luind inversele acestor relatii obtinem $\overset{-1}{R_1}\circ R=\overset{-1}{R_2}\circ R$ de unde (cf. R epi), $R_1=R_2$.

Analog, *R mono* $\Longleftrightarrow$ *$\overset{-1}{R}$ epi.*

(2) Se poate deduce R mono $\Longrightarrow pr_1R=A$ si utilizand Exercitiile 1.30, 1.27 din ultima Culegere (Purdea,Pelea):

R mono $\overset{\mathbf{1.30}}{\Longleftrightarrow}(R(X_1)=R(X_2)\Rightarrow X_1=X_2)\Longrightarrow(R(X)=\varnothing\Rightarrow X=\varnothing)\overset{\mathbf{1.27}}{\Longleftrightarrow}\triangle_A\subseteq\overset{-1}{R}\circ R\Longleftrightarrow pr_1R=A$.

7. *In* $\mathbf{Top}_2$, *$f:X\longrightarrow Y$ epimorfism ddaca $f(X)$ densa in Y (si nu neaparat surjectiva).*

Exemplu: incluziunea $i:\mathbf{Q}\longrightarrow\mathbf{R}$. Fie X un spatiu topologic si $f,g:\mathbf{R}\longrightarrow X$ functii continue pt care $f\circ i=g\circ i$ adica $f|_{\mathbf{Q}}=g|_{\mathbf{Q}}$. Aratam ca chiar $f=g$, deci i este epi. Desigur $i(\mathbf{Q})=\mathbf{Q}$ si aderenta $\overline{\mathbf{Q}}=\mathbf{R}$ (orice numar real este limita de sir de numere rationale). Pentru orice $x\in\mathbf{R}$ rational desigur $f(x)=g(x)$. Daca $x\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$ si $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$

este un sir de numere rationale de limita x, are loc

$$f(x) = f(\lim_n x_n) = \lim_n f(x_n) = \lim_n g(x_n) = g(\lim_n x_n) = g(x)$$

deoarece ambele functii sunt continue.

In cazul general, mult mai elaborat!

In primul rand, trebuie observat ca insasi definitia limitei unei functii $f : X \longrightarrow Y$ intr-un punct din X necesita (pentru a fi asigurata unicitatea limitei) ca Y sa fie un spatiu topologic Hausdorff. Deasemenea notiunea de convergenta [(x_n) convergent catre x daca orice vecinatate a lui x contine toate elementele sirului cu exceptia (cel mult) unui numar finit de termeni] necesita ipoteza spatiu topologic Hausdorff [intr-un spatiu Hausdorff, un sir convergent are limita unica].

Demo.

" $\Longleftarrow$ " Daca $f(X)$ densa in Y atunci $\overline{f(X)} = Y$ si *exista un sir* $(f(x_n))$ *convergent catre* y *pentru orice* $y \in Y$. Acum totul merge ca mai sus: fie $g, h : Y \longrightarrow Z$ functii continue pentru care $g \circ f = h \circ f$. Atunci

$$g(y) = g(\lim_n f(x_n)) = \lim_n g \circ f(x_n) = \lim_n h \circ f(x_n) = h(\lim_n f(x_n)) = h(y)$$

Rectificare. In spatii topologice generale punctele din aderenta unei submultimi, **nu** pot fi caracterizate **doar** cu limitele de siruri! Aceasta se intimpla doar in spatii topologice care satisfac *prima axioma de numarabilitate*: orice punct admite o baza de vecinatati numarabile (de exemplu spatiile metrice).

Este necesara o notiune mai generala, cea de *sir generalizat* (*net* in limba engleza- vezi GENERAL TOPOLOGY, John L. Kelley [prima editie 1955, ultima editie Springer, 1991]).

Anume:

fie $(D, \leq)$ a multime preordonata dirijata superior ($\leq$ o relatie reflexiva si tranzitiva si orice doua elemente au o majoranta), si (X, τ) un spatiu topologic. O functie $D \longrightarrow X$ se numeste *sir generalizat* in X. Notam (valorile acestei functii) cu (x_α), $\alpha \in D$ un astfel de sir generalizat (indexat asadar dupa elementele lui D). Daca $Y \subseteq X$ spunem ca:

(x_α) este *in* Y daca $x_\alpha \in Y$ pentru orice $\alpha \in D$,

(x_α) *finalmente in* Y daca exista un $\beta \in D$ astfel ca $x_\alpha \in Y$ pentru toti $\alpha \geq \beta$.

Atunci, spunem ca un sir generalizat (x_α) *converge la* $s \in X$ daca pentru orice vecinatate V a lui x, (x_α) este finalmente in V.

De aici tot ce este necesar pentru adaptarea demonstratiei (eronate, in general) de mai sus are loc. Adica

Teorema. *Fie* X *un spatiu topologic si* $A \subseteq X$. *Atunci* $s \in \overline{A}$ *ddaca exista in* A *un sir generalizat care converge la* s.

Teorema. *Un spatiu topologic este Hausdorff ddaca orice sir generalizat converge la cel mult un element.*

Teorema *O functie* $f : X \longrightarrow Y$ *intre doua spatii topologice este continua ddaca pentru orice sir generalizat* (x_α) *care converge la* s, *sirul generalizat* $f(x_\alpha)$ *converge la* $f(s)$.

" $\Longrightarrow$ " Mai complicat! Intai Wikipedia:

An *adjunction space* is a common construction in topology where one topological space is attached or "glued" onto another. Specifically, let X and Y be a topological spaces with U a subspace of Y. Let $f : U \to X$ be a continuous map (called the attaching map). One forms the adjunction space $X \cup_f Y$ by taking the disjoint union of X and Y and identifying x with $f(x)$ for all $x \in U$. Schematically, $X \cup_f Y = (X \coprod Y)/\{f(U) \backsim U\}$

Sometimes, the adjunction is written as $X +_f Y$. Intuitively, we think of Y as being glued onto X via the map f.

As a set, $X \cup_f Y$ consists of the disjoint union of X and $(Y - U)$. The topology, however, is specified by the quotient construction. In the case where A is a closed subspace of Y one can show that the map $X \to X \cup_f Y$ is a closed embedding and $(Y - U) \to X \cup_f Y$ is an open embedding.

Mai departe, *un caz particular*: consideram $X = Y$ si $f = i : U \hookrightarrow X$ incluziunea.

Atunci este vorba despre $X \cup_i X$ care este reuniunea disjuncta $X \coprod X$ in care elementele celor doua exemplare de U s-au identificat [adica cele 2 exemplare de X s-au "lipit" de-a lungul lui U].

In sfarsit sa demonstram implicatia ramasa.

Presupunem ca $f : X \longrightarrow Y$ este epimorfism in $\mathbf{Top}_2$. In constructia de mai sus luam $X = B$ si $U = \overline{f(A)}$.

Consideram $h, k : B \longrightarrow B \cup_i B$ unde $i : \overline{f(A)} \longrightarrow B$ este incluziunea.

Pare mai simplu sa consideram $B \cup_i B$ ca si reuniunea $\overline{f(A)} \cup ((B - \overline{f(A)}) \times 1) \cup (B - \overline{f(A)}) \times 2)$. Atunci $h(b) = k(b) = b$ pentru orice $b \in \overline{f(A)}$ si $h(b) = (b, 1)$, $k(b) = (b, 2)$ pentru $b \in B - \overline{f(A)}$. Se verifica imediat ca $h \circ f = k \circ f$ deci intrucit f epimorfism, $h = g$. Dar atunci, intrucit evident $(b, 1) \neq (b, 2)$ rezulta ca $B - \overline{f(A)} = \varnothing$ sau chiar $f(A)$ densa in B.

8. *In* **Top** *scufundarea intervalelor* (de pe axa reala cu topologia naturala) $i : (a, b) \longrightarrow [a, b]$ *este mono dar nu este sectiune.*

Demo = este continua in topologia relativa a axei reala [deschis in $[a, b]$ inseamna $\mathcal{D} \cap [a, b]$ cu $\mathcal{D}$ deschis pe $\mathbf{R}$]

Cum $i^{-1}(\mathcal{D} \cap [a, b]) = \mathcal{D} \cap (a, b)$, continuitatea clara. Cum este injectiva este si mono (chiar si in **Ens**).

Nu este sectiune: ar trebui un $p : [a, b] \longrightarrow (a, b)$ cu $p \circ i = 1_{(a,b)}$ adica $p(x) = x$ pt orice $x \in (a, b)$ si oricum in rest. E clar ca va fi discontinua in a si b (daca x tinde la a -din interior- nu avem si $p(x)$ tinde la $p(a)$).

9. *In categoria grupurilor abeliene fara torsiune* $A \xrightarrow{f} B$ *este epi ddaca* $B/\mathrm{im} f$ *este grup de torsiune (deci nu neparat surjectiva).*

Demo = Intrucat lucram cu morfisme de grupuri abeliene sa notam ca: f epi $\Leftrightarrow$ $(p \circ f = 0 \Rightarrow p = 0) \Leftrightarrow (p|_{f(A)} = 0 \Rightarrow p = 0)$.

Pp ca $B/\mathrm{im} f$ nu este grup de torsiune. Atunci exista $b_0 + f(A) \in B/f(A)$ de ordin infinit [i.e., pt orice $n \in \mathbf{Z}^*$: $n(b_0 + f(A)) \neq f(A)$, sau inca $nb_0 \in f(A)$ sau chiar subgrupul ciclic $\langle b_0 \rangle \cap f(A) = 0$].

Aratam ca atunci f nu este epi. Luam $B' = B/f(A)$ si $p_{1,2} : B \longrightarrow B/f(A)$ cu p_1 proiectia si $p_2 = np_1$ pt un $n \in \mathbf{Z}^*$.

Atunci $p_1 \neq p_2$ caci $p_1(b_0) = b_0 + f(A) \neq n(b_0 + f(A)) = p_2(b_0)$ dar totusi $(p_1 \circ f)(a) = f(a) + f(A) = f(A) = nf(a) + f(A) = (p_2 \circ f)(a)$ pt orice $a \in A$ deci $p_1 \circ f = p_2 \circ f$.

Reciproc: pp ca f nu este epi. Atunci exista un grup fara torsiune B' si un morfism de grupuri $p : B \longrightarrow B'$ astfel incat $p(f(A)) = 0$ dar $p(B) \neq 0$. Asadar $p(f(a)) = 0$ pt orice $a \in A$dar exista $b_0 \in B \setminus f(A)$ cu $p(b_0) \neq 0$.

Verificam ca atunci $b_0 + f(A)$ este de ordin infinit in $B/f(A)$, adica $nb_0 \notin f(A)$ pt orice $n \in \mathbf{N}^*$.

Intradevar, daca vre-un $nb_0 \in f(A)$ am avea $0 = p(nb_0) = np(b_0)$ si chiar $p(b_0) = 0$ caci $p(b_0) \in B'$ este grup fara torsiune, o contradictie.

10. *Exemplul lui Howie-Isbell in categoria semigrupurilor finite* [epimorfisme care nu sunt surjective]

Consideram $A = \{0, a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}\}$ si incluziunea $i : B \longrightarrow A$ unde $B = A - \{a_{12}\}$. Evident i nu este surjectiva. Relativ la tabelul de multiplicare

	0	a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}
0	0	0	0	0	0
a_{11}	0	a_{11}	a_{12}	0	0
a_{12}	0	0	0	a_{11}	a_{12}
a_{21}	0	a_{21}	a_{22}	0	0
a_{22}	0	0	0	a_{21}	a_{22}

sau operatie binara data prin

$$a_{pq}.a_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad q \neq m \\ a_{pn} & \text{if} \quad q = m \end{cases},$$

sau, $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $a_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $a_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $a_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $a_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, in semigrupul multiplicativ $\mathcal{M}_2(\{0,1\})$, ambele B si A sunt [chiar '*inverse semigroup*' : pentru fiecare $a \in S$ exista unic un a^{-1} cu proprietatile $aa^{-1}a = a$ si $a^{-1}aa^{-1} = a^{-1}$ -acestea sunt si regulare si idempotentii comuta) semigrupuri (si chiar B subsemigrup in A - omitem linia si coloana lui a_{12}). Aratam ca totusi i este epimorfism (in categoria semigrupurilor finite).

Fie $(S, \cdot)$ un semigrup finit si $f, g : A \longrightarrow S$ morfisme de semigrupuri pt care $f \circ i = g \circ i$. Sa aratam ca $f = g$.

De fapt trebuie aratat ca daca $f|_B = g|_B$ (adica $f(0) = g(0)$, $f(a_{11}) = g(a_{11})$, $f(a_{21}) = g(a_{21})$ si $f(a_{22}) = g(a_{22})$) atunci $f(a_{12}) = g(a_{12})$.

Exemplul se incadreaza in urmatoarea teorie (Isbell, 1965): *un subsemigrup* U al unui semigrup S *domina un element* $d \in S$ daca pentru orice semigrup T si orice doua morfisme de semigrupuri $f, g : S \longrightarrow T$, $f|_U = g|_U$ implica $f(d) = g(d)$. Se noteaza cu $\mathrm{Dom}_S(U)$ subsemigrupul elementelor dominate de U.

Cu notatiile anterioare, un sistem de egalitati $d = u_0y_1$, $u_0 = x_1u_1$,

$$u_{2i-1}y_i = u_{2i}y_{i+1} \text{ si } x_iu_{2i} = x_{i+1}u_{2i+1} \text{ pt orice } i \in \{1,..,m-1\},$$

$u_{2m-1}y_m = u_{2m}$, $x_mu_{2m} = d$, cu toate $u_j \in U$, se numeste un *zigzag de lungime* m in S peste U de valoare d. S-a demonstrat urmatoarea

Teorema [Zigzag, Isbell] *$d \in \mathrm{Dom}_S(U)$ ddaca $d \in U$ sau exista un zigzag de lungime m in S peste U de valoare d.* $\square$

Asadar, cu aceasta terminologie, trebuie aratat ca B domina a_{12}. Intradevar, $a_{12} = a_{11}a_{12}$, $a_{11} = a_{12}a_{21}$ si $a_{21}a_{12} = a_{22}$, $a_{12}a_{22} = a_{12}$, este un zigzag de lungime 1.

[Demonstratie elementara?...]

11. Proiectia $\mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}_2$ in $\mathbf{Ab}$ este surjectiva dar nu retractie.

[exista numai zero morfism $\mathbf{Z}_2 \longrightarrow \mathbf{Z}$].

12. Consideram monoidul $(\mathbf{N}, +)$ categorie cu un singur obiect. Toate morfismele sunt bimorfisme iar 0 este singurul izomorfism.

Mai general: un monoid este cu simplificare ddaca privit ca si categorie cu un singur obiect, fiecare morfism al sau este bimorfism.

13. *In categoria corpurilor orice morfism este monomorfism.*

Deoarece singurele ideale intr-un corp K sunt zero ideal si K insusi [se considera nucleul unui morfism de corpuri].

14. Fie $\mathrm{Des}_0(\mathbf{R})$ categoria a carei obiecte sunt intervalele deschise de pe axa reala, impreuna cu morfisme = functii continue, si, $\mathrm{Des}_1(\mathbf{R})$ (sub)categoria cu aceleasi obiecte dar morfisme = functii derivabile, cu prima derivata continua. Dati un exemplu de morfism care este izomorfism in $\mathrm{Des}_0(\mathbf{R})$ dar nu si in $\mathrm{Des}_1(\mathbf{R})$. [Deci subcategoriile nu sunt intotdeauna inchise la luarea inverselor]

4 Egalizatori

1. **Ens** *are egalizatori si coegalizatori.*

Demo =

Egalizatori: fie $f, g : A \longrightarrow B$ doua functii oarecare. Consideram $E = \{a \in A | f(a) = g(a)\}$ impreuna cu incluziunea $u : E \longrightarrow A$. Atunci evident $fu = gu$ si, pt o multime E' fie $u' : E' \longrightarrow A$ cu proprietatea $fu' = gu'$. Rezulta ca $u'(E') \subseteq E$. Prin urmare (?...) putem defini o functie $h : E' \longrightarrow E$ prin $h(e') = u'(e')$ si atunci $u' = u \circ h$. Unicitatea rezulta deoarece u este mono.

Coegalizatori: pt $f, g : A \longrightarrow B$ doua functii oarecare consideram relatia binara (B, B, ρ) definita prin $(b, b') \in \rho$ ddaca exista $a \in A$ cu $b = f(a)$, $b' = g(a)$. Deasemenea fie $\overline{\rho}$ cea mai mica echivalenta pe B pt care $\rho \subseteq \overline{\rho}$ si multimea factor $C = B/\overline{\rho}$ cu aplicatia naturala $\tau : B \longrightarrow C$, care este epimorfism. Verificam $\mathrm{Coequ}(f, g) = (C, \tau)$.

Desigur $(\tau \circ f)(a) = (\tau \circ g)(a)$ pt orice $a \in A$, deci prima conditie.

Fie atunci $\delta : B \longrightarrow Y$ o functie pt care $\delta \circ f = \delta \circ g$. Atunci $\overline{\rho} \subseteq \ker \delta$ [aici ker dat ca echivalenta in **Ens**; **Ens** nu are morfisme zero deci nu are nuclee categoriale!]. Atunci din teorema de factorizare prin surjectii exista o functie $\gamma : C \longrightarrow Y$ astfel ca $\delta = \gamma \circ \tau$, deci a doua conditie.

2. **Grp** *are egalizatori si coegalizatori*

Demo = Egalizatori: Fie $f, h : G \longrightarrow H$ doua morfisme de grupuri si $K = \{g \in G | f(g) = h(g)\}$.

$K \neq \varnothing$ deoarece $e_G \in K$ $(f(e_G) = e_H = g(e_G))$. Mai mult, K este chiar subgrup al lui G: $g_1, g_2 \in K$ implica $f(g_1^{-1}g_2) = f(g_1)^{-1}f(g_2) = h(g_1)^{-1}h(g_2) = h(g_1^{-1}g_2)$, adica $g_1^{-1}g_2 \in K$.

Daca $u : K \longrightarrow G$ este morfismul de incluziune atunci desigur $fu = hu$ si daca $fu' = gu'$ pentru un morfism de grupuri $u' : K' \longrightarrow G$ atunci evident $fu'(k') = gu'(k')$ adica $u'(K')$ este un subgrup al lui K. Luind $i : u'(K') \longrightarrow K$ morfismul de incluziune, si restrictia lui u' la codomeniu, $\widetilde{u'} : K' \longrightarrow u'(K')$ are loc $u' = ui\widetilde{u'}$ deci u' factorizeaza prin u.

Coegalizatori : Fie $f, h : G \longrightarrow H$ doua morfisme de grupuri si N subgrupul normal (in H) generat de $\{f(x)g(x)^{-1} | x \in G\}$ impreuna cu proiectia $\tau : H \longrightarrow H/N$. Verificam ca $\mathrm{Coequ}(f, g) = (H/N, \tau)$.

Desigur $(\tau \circ f)(x) = (\tau \circ g)(x)$ pt orice $x \in G$, deci prima conditie.

Fie acum $\delta : H \longrightarrow Y$ un morfism de grupuri pt care $\delta \circ f = \delta \circ g$. Atunci $N \subseteq \ker \delta$ si din teorema de factorizare prin morfisme surjective, exista $\gamma : H/N \longrightarrow Y$ astfel ca $\delta = \gamma \circ \tau$, deci a 2-a conditie.

3. **Ab** *are coegalizatori*

Analog cu 5.6.20 (Purdea II): pentru morfisme de grupuri $f, g : A \to B$ consideram $p : B \longrightarrow B/\mathrm{im}(f - g)$.

Aici si $f - g$ este morfism de grupuri $[(-g)(x) = -g(x)]$ si $N = \mathrm{im}(f - g)$ este subgrup (normal). Desigur proiectia $p : B \longrightarrow B/N$ este data prin $p(b) = b + N$. Verificam intai $pf = pg$: $pf(a) = p(f(a)) = f(a) + N = g(a) + f(a) - g(a) + N = g(a) + N = pg(a)$, pt orice $a \in A$.

Fie acum $p' : B \longrightarrow C$ astfel incat $p'f = p'g$. Atunci $p'f(a) - p'g(a) = p'(f - g)(a) = 0$ pt orice $a \in A$ de unde $N = \mathrm{im}(f - g) \leq \ker p'$. Atunci dintr-o teorema de factorizare

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{p'} & C \\ p_N \downarrow & \nearrow \pi & \\ B/N & & \end{array}$$

exista $\pi : B/N \longrightarrow B/\ker p'$ si obtinem chiar $p' = \pi p$.

4. *Egalizatori, coegalizatori in* **Top**.

Egalizatorul unei perechi de functii continue se obtine inzestrind egalizatorul set-teoretic cu topologia indusa pe subspatiu.

Dual, coegalizatorul se obtine inzestrind coegalizatorul set-teoretic cu topologia cit.

5 Produse (sume) fibrate

1. **Ens** *are produse si sume fibrate.*

Demo = Produse fibrate: pentru multimi A, B, C consideram $f : A \longrightarrow C$ si $g : B \longrightarrow C$ functii. Daca $P = \{(a, b) \in A \times B | f(a) = g(b)\}$ atunci pentru $p : A \times B \longrightarrow A$, $p(a, b) = a$ respectiv $p' : A \times B \longrightarrow B$, $p(a, b) = b$ este (clar) comutativa diagrama

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{p} & A \\ p' \downarrow & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{g} & C \end{array} .$$

Mai departe, fie comutativa urmatoarea diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & A \\ u' \downarrow & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{g} & C \end{array}$$

de multimi si functii. Definim $\alpha : X \longrightarrow P$ prin $\alpha(x) = (u(x), u'(x))$ Atunci $p\alpha(x) = p(u(x), u'(x)) = u(x)$ si analog $p'\alpha(x) = p'(u(x), u'(x)) = u'(x)$. Deci $p\alpha = u$ si $p'\alpha = u'$.

Ramine de verificat unicitatea lui α: fie $\beta : X \longrightarrow P$ o alta functie cu proprietatea $p\beta = u$ si $p'\beta = u'$ Atunci $p\beta(x) = u(x)$ si $p'\beta(x) = u'(x)$ adica $b(x) = (u(x), u'(x)) = \alpha(x)$.

Sume fibrate: pt doua morfisme $f : A \longrightarrow B$ si $g : A \longrightarrow C$. Consideram reuniunea disjuncta $B \overset{\circ}{\cup} C$ ca reuniunea a 2 multimi disjuncte izomorfe in **Ens** cu B si C. De exemplu $B \overset{\circ}{\cup} C = (\{1\} \times B) \cup (\{2\} \times C)$, si definim pe reuniunea disjuncta relatia binara ρ astfel: $(1, b)\rho(2, c)$ ddaca exista $a \in$ cu $f(a) = b$ si $g(a) = c$. Apoi luam $\overline{\rho}$ cea mai mica echivalenta pe $B \overset{\circ}{\cup} C$ pt care avem $\rho \subseteq \overline{\rho}$ si $Q = (B \overset{\circ}{\cup} C)/\overline{\rho}$. Daca $h : B \longrightarrow Q$ si $k : C \longrightarrow Q$ sunt proiectiile (adica $h(b) = \overline{(1, b)}$ respectiv $k(c) = \overline{(2, c)}$) (Q, h, k) este suma fibrata.

Este comutativa diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ g \downarrow & & \downarrow h \\ C & \xrightarrow{k} & Q \end{array}$$

si se verifica si restul (Purdea, vol. 2, p. 30-31).

2. a) *Produsul fibrat al unei retractii este o retractie.*

Demo = Daca este produs fibrat diagrama

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{r} & A \\ s \downarrow & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{g} & C \end{array}$$

si exista $f_1 : C \longrightarrow A$ cu $f \circ f_1 = 1_C$ atunci este comutativa si diagrama

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f_1 \circ g} & A \\ 1_B \downarrow & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{g} & C \end{array}$$

Din definitia produsului fibrat exista $s_1 : B \longrightarrow P$ pt care $s \circ s_1 = 1_B$ qed.

b) *Produsul fibrat al unei sectiuni* **nu** *este in general o sectiune.*

Observatie. Intrucit produs fibrat de mono este mono, contraexemplul trebuie dat intr-o categorie in care nu orice mono este sectiune.

Contraexemplu: in **Top** consideram diagrama

$$\begin{array}{ccc} \{*\} \times (0,1) & \xrightarrow{r} & \{*\} \\ s \downarrow & & \downarrow f \\ [0,1] & \xrightarrow{g} & \{a,b\} \end{array}$$

unde r este proiectia, $f(*) = a$, $s(*, x) = x$ pt orice $x \in (0,1)$, si
$g(x) = \begin{cases} a & \text{daca} \quad x \in (0,1) \\ b & \text{daca} \quad x = 0 \text{ sau } 1 \end{cases}$, impreuna cu topologia naturala de pe axa reala respectiv topologiile produs, iar $\{a,b\}$ se ia cu topologia indiscreta.

Atunci diagrama este comutativa si toate functiile sunt continue. Apoi $\{*\} \times (0,1) = \{(*, x) \in \{*\} \times [0,1] | f(x) = g(x)\}$ cu topologia relativa, este produs fibrat. Functia f este sectiune, fiind morfism de la obiectul final din **Top**.

Totusi $s : \{*\} \times (0,1) \longrightarrow [0,1]$ **nu** este sectiune: $s_1 : [0,1] \longrightarrow \{*\} \times (0,1)$ ar fi o retracta ddaca $s_1(x) = (*, x)$ pt orice $x \in (0,1)$. Dar atunci s_1 este necesar discontinua in $0, 1$.

3. Sa se arate ca *urmatoarele sunt produse fibrate in* **Ens**:

(i) pentru A, B submultimi ale lui C

$$\begin{array}{ccc} A \cap B & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & C \end{array}$$

(ii) pentru $f : B \longrightarrow C$ si $A \subseteq C$

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(A) & \longrightarrow & B \\ f|_{f^{-1}(A)} \downarrow & & \downarrow f \\ A & \xrightarrow{g} & C \end{array} .$$

4. *Teorema. Daca T este obiect final, sunt echivalente*

(1) Este produs fibrat diagrama

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{p_A} & A \\ p_B \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & T \end{array}$$

(2) (P, p_A, p_B) este produsul lui A si B.

Consecinta. Daca o categorie $\mathcal{C}$ are obiect final si produse fibrate atunci $\mathcal{C}$ are si produse finite.

In aceasta consecinta ipoteza existentei obiectului final **nu** poate fi omisa.

Contraexemple. (i) *Orice grup netrivial privit ca si categorie.*

Demo = (A) are produse fibrate: grupul G fiind singurul obiect, consideram 2 "endomorfisme" $g_1, g_2 \in G$. Atunci elementele h_1, h_2 formeaza produsul fibrat al g_1, g_2 (prin definitie) ddaca

1) $g_1 h_1 = g_2 h_2$, si 2) pt elemente $r_1, r_2 \in G$, daca $g_1 r_1 = g_2 r_2$ atunci exista $s \in G$ astfel incat $r_1 = h_1 s$ si $r_2 = h_2 s$.

Se constata ca de fapt produsul fibrat al lui (g_1, g_2) este chiar (g_1^{-1}, g_2^{-1}) [pt 2): daca $g_1 r_1 = g_2 r_2 = s$ atunci $r_1 = g_1^{-1} s$ si $r_2 = g_2^{-1} s$.

(A') Intrucit categoria are un singur obiect, daca ar avea obiect final, tot G ar trebui sa fie; un singur morfism $G \longrightarrow G$ inseamna grup trivial

(B) **nu** are produse finite: de exemplu produsul $G \times G$ ar trebui sa fie tot G (singurul obiect) impreuna cu 2 elemente g_1, g_2 astfel ca pt orice elemente $h_1, h_2 \in G$ sa existe (unic) un $g \in G$ astfel ca $h_1 = g g_1$ si $h_2 = g g_2$.

Asadar *problema care se pune* este: sa se determine intr-un grup netrivial G, 2 elemente g_1, g_2 astfel ca pt orice elemente $h_1, h_2 \in G$ sa existe (unic) un $g \in G$ astfel ca $h_1 = g g_1$ si $h_2 = g g_2$.

Astfel de elemente nu exista! Pp. prin absurd ca exista. Atunci luam $h_1 = g_1$ si $h_2 \neq g_2$ (exista cel putin 2 elemente distincte in G): prima egalitate implica $g = 1$ care nu verifica a doua.

(ii) *Categoria corpurilor: are produse fibrate ca in* **Rng**. Dar *nu are* [vezi mai jos Cap. 15, Ex. 5] *produse finite* (caci *nu are obiect final* - vezi Cap. 10, Ex. 4).

Fie $K_{1,2}$ si K corpuri si $\alpha_i : K_i \longrightarrow K$ morfisme de corpuri. Produsul $K_1 \times K_2$ este inel dar nu si corp (are divizori ai lui zero). Consideram $P = \{(k, k') \in K_1 \times K_2 | \alpha_1(k) = \alpha_2(k')\}$ care, ca in **Rng**, este subinel. Verificam ca este chiar subcorp: daca $0 \neq (k, k') \in P$ atunci si $(k^{-1}, (k')^{-1}) \in P$. Intradevar $\alpha_1(k^{-1}) = (\alpha_1(k))^{-1} = (\alpha_2(k'))^{-1} = \alpha_2((k')^{-1})$ folosind proprietatile morfismelor (unitale) de corpuri.

5. (a) In orice categorie, $A \xrightarrow{f} B$ este mono ddaca

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{1_A} & A \\ 1_A \downarrow & & \downarrow f \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

este produs fibrat.

(b) Pentru $A \xrightarrow{f} B$ morfism si C obiect intr-o categorie, diagrama

$$\begin{array}{ccc} A \times C & \xrightarrow{\pi_A} & A \\ f \times 1_C \downarrow & & \downarrow f \\ B \times C & \xrightarrow{\pi_B} & B \end{array}$$

este produs fibrat.

6. Asemanator cu categorii normale sau conormale:

Definitie. Un mono $E \xrightarrow{e} A$ intr-o categorie $\mathcal{C}$ se numeste *mono regular* (sau subobiect regular) daca exista o pereche de morfisme f, g pt care $(E, e) \cong \mathrm{Equ}(f, g)$ egalizator. Dual, definim *epi regular*.

Propozitie. Daca

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{p_1} & A \\ p_2 \downarrow & & \downarrow f \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

este un produs fibrat, atunci f este epi regular ddaca $(f, B) \cong \mathrm{Coequ}(p_1, p_2)$.

Demo $\Longrightarrow$ Daca f este epi regular, fie $(f, B) = \mathrm{Coequ}(q_1, q_2)$ cu $Q \underset{q_2}{\overset{q_1}{\rightrightarrows}} A$. Diagrama fiind produs fibratm exista unic $h : Q \longrightarrow P$ cu $q_1 = p_1 \circ h, q_2 = p_2 \circ h$. Desigur avem si $f \circ p_1 = f \circ p_2$; daca $g \circ p_1 = g \circ p_2$ atunci $g \circ p_1 \circ h = g \circ p_2 \circ h$ si deci $g \circ q_1 = g \circ q_2$. Din definitia coegalizatorului exista unic $k : g = k \circ f$ si deci $(f, B) \cong \mathrm{Coequ}(p_1, p_2)$.

$\Longleftarrow$ ...

Exercitiu. Daca $\mathcal{C}$ are produse fibrate, sunt echivalente:
(i) orice epimorfism in $\mathcal{C}$ este regular,
(ii) daca e este epi in $\mathcal{C}$ si diagrama

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \longrightarrow & \cdot \\ \downarrow & & \downarrow e \\ \cdot & \xrightarrow{e} & \cdot \end{array}$$

este produs fibrat, atunci aceasta este si suma fibrata.

6'. In **Ens** si **Top** produs fibrat de epi este epi.
In **Grp**, R-**Mod**, **Lat**, **Rng** si **Mon,** produs fibrat de epi regular este epi regular.
Observatie. In **Ens**, **Grp**, R-**Mod**, epi regular $\equiv$ epi (orice epi este regular)

7. *Exemple de sume fibrate in* **Top**.

Un *spatiu de adjunctie* este o constructie frecventa in topologie in care un spatiu topologic este atasat sau "lipit" peste altul. Mai precis, fie X si Y spatii topologice cu A un subspatiu al lui Y. Fie $f : A \to X$ o functie continua (numita eventual functia de *atasare*). Spatiul de adjunctie $X \cup_f Y$ este format pe reuniunea disjuncta a lui X si Y identificind x cu $f(x)$ pentru fiecare $x \in A$. Schematic,

$$X \cup_f Y = X \coprod Y / \{f(A) \backsim A\}.$$

O alta notatie este $X +_f Y$. Intuitiv, privim pe Y ca fiind lipit peste X via functia f.

Ca si multime, $X \cup_f Y$ consta din reuniunea disjuncta a lui X si $(Y - A)$. Topologia insa, este daca de constructia cât (factor). Daca A este un subspatiu inchis al lui Y, se poate arata ca functia $X \to X \cup_f Y$ este o scufundare inchisa iar $(Y - A) \to X \cup_f Y$ este o scufundare deschisa.

Exemple. Daca A este un spatiu cu un singur element atunci adjunctia este *suma wedge* a lui X si Y.

Daca X este un spatiu cu un singur element atunci adjunctia este spatiul cât Y/A.

Aceasta constructie este un exemplu de suma fibrata in categoria spatiilor topologice. Adica, spatiul de adjunctie este universal relativ la urmatoarea diagrama comutativa:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & Y \\ f\downarrow & & \downarrow \phi_Y \\ X & \underset{\phi_X}{\longrightarrow} & X \cup_f Y \end{array}$$

Aici i este functia de incluziune iar ϕ_X, ϕ_Y sunct functiile obtinute prin compunerea functiei cât cu injectiile canonice in reuniunea disjuncta a lui X si Y.

Se poate forma o suma fibrata chiar mai general, inlocuind i cu o functie continua oarecare g. Reciproc, daca f este deasemenea o incluziune, constructia lipeste simplu X si Y impreuna de-a lungul subspatiului comun.

6 Intersectii

1. **Grp** *are cointersectii*

Fie G, G_i $(i \in I)$ grupuri si $f_i : G \longrightarrow G_i$ o familie de epimorfisme in **Grp**. Conform primei teoreme de izomorfism, daca $N_i = \ker f_i$, $G_i \cong G/N_i$. Fie atunci $N = \langle \cup N_i \rangle_n$ (inchiderea normala) care este si el subgrup normal al lui G. Mai mult, $G \longrightarrow G/N$ este compunerea a 2 epimorfisme: $G \longrightarrow G/N_i$ si $G/N_i \longrightarrow G/N$ (aici desigur $N_i \leq N$).

Sa consideram acum un epimorfism $G \longrightarrow G/M$ care factorizeaza prin toate proiectiile $G \longrightarrow G/N_i$. Atunci (?) $N_i \leq M$ pt toti $i \in I$ deci chiar si $N \leq M$ (caci desigur M este normal in G) si avem $G \longrightarrow G/M = G \longrightarrow G/N_i \longrightarrow G/N \longrightarrow G/M$ (si $G/N \longrightarrow G/M$ este epimorfism).

7 Reuniuni

1. **Ens** *are reuniuni*

Demo = Fie A_i $(i \in I)$ o familie de submultimi ale unei multimi A cu incluziunile $\iota_i : A_i \longrightarrow A$. Daca $A' = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$, $\iota' : A' \longrightarrow A$ este incluziunea reuniunii si $\iota'_i : A_i \longrightarrow A'$ sunt incluziunile in reuniune desigur $\iota_i = \iota' \circ \iota'_i$ deci $\iota_i \leq \iota'$ si este verificata prima conditie.

A doua conditie: relativ la diagrama cu monomorfisme verticale

$$\begin{array}{ccc} A' & & B' \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

spunem ca A' *este transportat de* f *in* B' daca exista un morfism $A' \longrightarrow B'$ care inchide comutativ aceasta diagrama.

Atunci ceea ce se (mai) cere este: daca toate subobiectele A_i sunt transportate de f intr-un subobiect B' al B, atunci si A' este transportat de f in B'.

Fie acum comutativa diagrama urmatoare

$$\begin{array}{ccc} A_i & \xrightarrow{g_i} & B' \\ \iota_i \downarrow & & \downarrow \beta \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

(adica pp toate subobiectele transportate de f in B') unde β este un monomorfism.

Pentru a verifica ca f transporta si pe $A' = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$ in B', definim $\gamma : \bigcup\limits_{i \in I} A_i \longrightarrow \bigcup\limits_{i \in I} g_i(A_i)$ prin $\gamma(a) = g_i(a)$ daca $a \in A_i$.

Aceasta functie γ este bine definita: daca $a \in A_i \cap A_j$, cum ι_i si ι_j sunt incluziunile avem $f\iota_i(a) = f\iota_j(a)$. Din comutativitatea diagramei anterioare $f\iota_i = \beta g_i$ si $f\iota_j = \beta g_j$ de unde $\beta g_i(a) = \beta g_j(a)$. Deducem in sfarsit $g_i(a) = g_j(a)$ deoarece β mono.

In final, $\beta\gamma(a) = \beta g_i(a) = f\iota_i(a)$ si cum $\iota_i(a) = \iota'(a)$ pt orice $a \in A'$ (ambele sunt incluziuni) rezulta chiar $\beta\gamma(a) = f\iota(a)$ pt orice $a \in A' = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$, deci f transporta A' in B'.

8 Imagini (directe)

1. **Ens** are imagini epimorfe.

Daca $f : A \longrightarrow B$ este o functie oarecare, fie $\widetilde{f} : A \longrightarrow f(A)$ functia definita ca si f (adica $\widetilde{f}(a) = f(a)$, $\forall a \in A$), dar obtinuta (eventual) prin restrictia codomeniului si $i : f(A) \longrightarrow B$ aplicatia de incluziune. Atunci, $f = i \circ \widetilde{f}$ este descompunere mono-epi [se va reveni la categorii exacte], si $f(A)$ este chiar imaginea in sens categorial. [verificari...]

2. **Grp** *are imagini*

Fie $f : G \longrightarrow G'$ un morfism de grupuri si $f = i \circ \widetilde{f}$ descompunerea, ca la **1** (**Ens**). La fel $\mathrm{im} f = f(G)$ este imaginea in sens categorial. [verificari ...]

9 Imagini inverse

Daca $f : B \longrightarrow C$ este o functie (in **Ens**) si $A \subset C$ atunci patratul

$$\begin{array}{ccc} \overset{-1}{f}(A) & \hookrightarrow & B \\ f|_{\overset{-1}{f}(A)} \downarrow & & \downarrow f \\ A & \hookrightarrow & C \end{array}$$

este un produs fibrat in **Ens**. Aceast exemplu motiveaza conceptul de imagine inversa.

10 Zero obiecte

1. *$\varnothing$ este obiect initial, iar multimile cu un singur obiect sunt obiecte finale in* **Ens**.
[deci obiecte initiale nu sunt si finale, nici invers].

Exercitii. Demonstrati urmatoarele:

(i) Daca A este $\mathcal{C}$-initial (sau $\mathcal{C}$-terminal, sau $\mathcal{C}$-zero) atunci $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A) = \{1_A\}$;

Fie $A \xrightarrow{f} B$.

(ii) Daca A este terminal atunci f este sectiune.

(iii) Daca $\mathcal{C}$ este conexa [aici $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A) \neq \varnothing$ pt orice $A, C \in Ob(\mathcal{C})$] si A este initial atunci f este sectiune (mono)

(iv) Daca indepartam ipoteza "$\mathcal{C}$ este conexa", (iii) nu mai are loc.

Contraexemplu: in $\mathbf{Rng}_1$ consideram $\mathbf{Z}$ initial si proiectia $\mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}_2$ (care nu este mono); categoria nu este conexa: $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Rng}_1}(\mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}) = \varnothing$.

2. *Grupul cu un singur element, O este zero (initial si final) obiect in* **Grp**

Demo = De la O la orice grup exista un singur morfism (caci morfismele de grupuri pastreaza elementul neutru). De la orice grup la O exista o singura functie (care este si morfism de grupuri - trivial).

3. *Versiune diferita de prezentare a zero morfisme.*

Definitie. Intr-o categorie $\mathcal{C}$ un morfism $A \xrightarrow{f} B$ se numeste

(i) *constant* daca pt orice $C \in Ob(\mathcal{C})$ si pt orice $g, h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A) : f \circ g = f \circ h$

(ii) dual, *coconstant*

(iii) *zero* (morfism) daca este constant si coconstant.

Exemple. 1) In **Ens** si **Top**, $A \xrightarrow{f} B$ este constant ddaca $A = \varnothing$ sau $|f(A)| = 1$; este coconstant ddaca $A = \varnothing$. Deci acestea sunt zero morfisme (desi aceste categorii nu au obiecte zero).

2) In **Grp**, R-**Mod**, **Mon**, **LinTop**, $\mathbf{BanSp}_{1,2}$, f este constant (coconstant, zero) daca $f(A) = \{e_B\}$ elementul neutru - sau zero pt adunare).

3) Fie X, Y multimi infinite diferite; consideram categoria $\mathcal{C}$ cu urmatoarele: $Ob(\mathcal{C}) = \{X, Y\}$, $\mathrm{Hom}(X, X) = \{1_X\}$, $\mathrm{Hom}(Y, Y) = \{1_Y\}$, $\mathrm{Hom}(Y, X) = \varnothing$ si $\mathrm{Hom}(X, Y) = Y^X$. Atunci: orice $\mathcal{C}$-morfism de la X la Y este si izomorfism si zero morfism

Propozitie. Daca $\mathcal{C}$ are zero obiect atunci sunt echivalente: zero morfism $\Leftrightarrow$ constant $\Leftrightarrow$ coconstant $\Leftrightarrow$ factorizabil prin zero.

Definitie. O categorie $\mathcal{C}$ se numeste *conexa* daca pentru orice 2 obiecte X si Y exista un sir finit de obiecte $X = X_0, X_1, ..., X_n = Y$ impreuna cu morfisme $f_i : X_i \longrightarrow X_{i+1}$ sau $f_i : X_{i+1} \longrightarrow X_i$ pt orice $0 \leq i < n$ (ambele directii sunt permise in acelas sir).

[Se intilneste si definitia mai simpla: pt orice $A, B : \mathrm{Hom}(A, B) \neq \varnothing$].

Propozitie. Intr-o categorie conexa sunt echivalente

(a) exista un mono constant de domeniu A

(b) orice morfism de domeniu A este un mono constant

(c) A este obiect terminal.

4. *Categoria* $\mathbf{Rng}_1$ *are obiect initial, dar nu si zero.*

Intradevar, se cunoaste Teorema: pentru orice inel cu unitate R exista un singur morfism unital $f : \mathbf{Z} \longrightarrow R$ [daca $\mathrm{char}(R) = 0$ atunci f injectiva, daca $\mathrm{char}(R) = n$ atunci $\ker f = n\mathbf{Z}$]. Evident, $\mathbf{Z}$ nu este si final, deci nici zero obiect.

Are obiect final: inelul zero (acolo $0 = 1$).

Categoria corpurilor nu are obiect final. De altfel, *nici initial.* Totusi, in subcategoria corpurilor de caracteristica p, $\mathbf{Z}_p$ este obiect initial [merge si cu caracteristica $p = 0$; atunci $\mathbf{Q}$ este initial].

Un corp are cel putin 2 elemente: $0 \neq 1$.

Categoria corpurilor nu este conexa: *nu exista morfisme intre corpuri de caracteristica diferita.*

Intradevar, cum s-a vazut deja in Cap. 3, in categoria corpurilor orice morfism este monomorfism [deoarece singurele ideale intr-un corp K sunt zero ideal si K insusi - se considera nucleul unui morfism de corpuri]. Asadar un morfism de corpuri pastreaza ordinul lui 1 in grupul abelian $(K, +)$.

5. Cum s-a observat mai sus: $\varnothing$ considerat ca spatiu topologic este obiect initial in **Top**; orice spatiu topologica singleton [un singur element] este obiect terminal. Nu exista zero obiecte in **Top**.

6. Un spatiu vectorial zero-dimensional este si initial si final in categoria $\mathbf{Vec}_K$, a spatiilor vectoriale peste un corp K.

Teoretice:

(i) Orice doua obiecte initiale (resp. finale) intr-o categorie, sunt unic izomorfe (exista intre ele un unic izomorfism).

(ii) Daca T este obiect terminal intr-o categorie $\mathcal{C}$ si $f : T \longrightarrow A$ este un morfism in $\mathcal{C}$, atunci f este mono. Se poate demonstra chiar mai mult? Ce anume?

11 Nuclee, conuclee

1. *Exemplu de mono care nu este nucleu.*

Incluziunea $i : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{Z}$ in categoria monoizilor: fie M un monoid si $u, v : M \longrightarrow \mathbf{N}$, morfisme de monoizi astfel ca $iu = iv$. Atunci, pentru orice $x \in M$ avem $iu(x) = iv(x)$ adica chiar $u(x) = v(x)$.

Presupunem (prin absurd) ca i ar fi un nucleu, anume pentru $\alpha : \mathbf{Z} \longrightarrow M$. Atunci $\alpha i = 0$ adica $\alpha i(n) = 0$ sau chiar $\alpha(n) = 0$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$. In particular $0 = \alpha(0) = \alpha(-n+n) = \alpha(-n) + \alpha(n)$ de unde $\alpha(-n) = -\alpha(n) = 0$. Asadar, $\alpha(n) = 0$ chiar pentru orice $n \in \mathbf{Z}$ adica $\ker \alpha = \mathbf{Z}$ si nu $\mathbf{N}$, contradictie.

Acelas exemplu si pt: *epi care nu este conucleu.*

$i : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{Z}$ este epi: pentru $u, v : \mathbf{Z} \longrightarrow M$ morfisme de monoizi, pp. $ui = vi$. Atunci $u(n) = v(n)$, pt orice $n \in \mathbf{N}$ si deci $0_M = u(-n+n) = u(-n) + u(n)$ si la fel pt v. Atunci si $u(-n) = v(-n)$ deci $u = v$.

i nu este un conucleu: pp ca $(\mathbf{Z}, i) = \mathrm{co}\ker \alpha$. Atunci $i\alpha = 0$ implica $\alpha = 0$, pt care desigur conucleul este $\mathbf{N}$, o contradictie.

2. **Grp** *are conuclee*

Fie $f : G \longrightarrow G'$ un morfism de grupuri si $N = \langle \mathrm{im} f \rangle_n$ inchiderea normala a lui $\mathrm{im} f$ in G'. Atunci proiectia $p_N : G' \longrightarrow G'/N$ este conucleul lui f.

Desigur $p_N \circ f = 0$ (notatie pt morfismul trivial: $0(g) = e_{G'}$ pt orice $g \in G$) si daca pt un $p' : G' \longrightarrow H$ avem $p' \circ f = 0$ deducem ca $\mathrm{im} f \leq \ker p' = M$ (nucleu luat in sensul teoriei grupurilor) care este subgrup normal (care include $\mathrm{im} f$) . Deci $N \leq M$ si ramine sa se utilizeze *teorema de factorizare prin surjectii*:

Fie G, G' si G'' grupuri si $f : G \longrightarrow G'$, $g : G \longrightarrow G''$ morfisme de grupuri. Daca g surjectiva si $\ker g \subseteq \ker f$ exista unic un morfism de grupuri h care face comutativ triunghiul

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & G' \\ G'' \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

in cazul particular $f = p'$ si $g = p_N : G' \longrightarrow G'/N$.

12 Normalitate

1. Demonstrati ca (mai general decit Prop. **14.3**, B.Mitchell)**:**

Intr-o categorie normala cu egalizatori, un morfism este epi ddaca are coker $= 0$.

Demo $= \Longrightarrow$ clar.

$\Longleftarrow$ Fie $\alpha : A \longrightarrow B$ pentru care $f, g : B \rightrightarrows D$ cu $f\alpha = g\alpha$. Daca $(E, u) = \mathrm{Equ}(f, g)$ atunci avem diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, "\gamma"'] & & B \arrow[r, "h"] & G \\ & E \arrow[ur, "u"'] & & \end{tikzcd}$$

cu h conucleul lui α. Categoria fiind normala $u = \ker(h)$ (...) si atunci $hu = 0$ implica $hu\gamma = h\alpha = 0$. Cum $\mathrm{co}\ker \alpha = 0$ rezulta $h = 0_{BG}$ si cum $u = \ker(h)$ deducem $u = 1_B$ si $E = B$. Dar $u = \mathrm{Equ}(f, g)$deci $f = g$.

2. Aratati ca *orice categorie normala este echilibrata*.

[S-a demonstrat la curs].

13 Categorii exacte

1. Au loc urmatoarele:

Categoria	normala	conormala
$R-\mathrm{Mod}$	$+$	$+$
Grp	$-$	$+$
pEns	$+$	$-$
Mon	$-$	$-$
pTop	$+$	$-$

unde **pEns** (**pTop**) este categoria multimilor (spatiilor topologice) punctate.

...

2. Subcategoria plina a lui **Ab** care contine toate grupurile abeliene de ordin cel mult 27 este exacta.

...

3. [Herrlich, Strecker 39B, p.302] Fie $\mathcal{T}$ subcategoria plina a lui **pTop** care are ca obiecte:

(i) un spatiu punctat cu un singur element

(ii) un spatiu punctat cu 3 elemente, in care deschisii sunt: $\varnothing$, intreaga multime, multimea punctului (distins) si multimea celorlalte 2 elemente (diferite de 'punct').

Aratati ca $\mathcal{T}$ are nuclee si conuclee, orice mono este normal, orice epi este conormal, dar $\mathcal{T}$ nu este exacta.

Hint. Desigur $\{*\}$ este zero obiectul acestei subcategorii. Morfismele acestei subcategorii sunt cele doua zero morfisme, $\{*\} \longrightarrow (T,a)$ si $(T,a) \longrightarrow \{*\}$, si endomorfismele lui (T,a). Printre cele $3^3 = 27$ functii $T \longrightarrow T$ doar $3^2 = 9$ are morphisms ("punctate") in **pTop** (i.e., definite ca $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & . & . \end{pmatrix}$), si numai 5 sunt continue. 1_T si transpozitia (bc) sunt chiar automorfisme, iar $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & a & a \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & c \end{pmatrix}$ sunt idempotente.

Deci subcategoria are 2 obiecte si 5 morfisme.

...

14 Produse si coproduse

0. Ens are produse si coproduse.

(i) Aratam ca produsul cartezian este produsul in categoria **Ens**, adica (pentru simplificarea scrierii aratam pentru doua multimi)

Fie A_1, A_2 doua multimi. Pentru orice multime B si doua functii $u_i : B \longrightarrow A_i$, $i \in \{1,2\}$ exista o unica functie $u : B \longrightarrow A_1 \times A_2$ care face comutative triunghiurile

$$\begin{array}{ccccc} & & B & & \\ & \swarrow u_1 & \downarrow u & \searrow u_2 & \\ A_1 & \underset{p_1}{\longleftarrow} & A_1 \times A_2 & \underset{p_2}{\longrightarrow} & A_2 \end{array}$$

unde $p_i : A_1 \times A_2 \longrightarrow A_i$, $i \in \{1,2\}$ sunt proiectiile de la produsul cartezian.

Intradevar, daca definim $u(b) = (u_1(b), u_2(b))$ se verifica imediat ca $p_i \circ u = u_i$, $i \in \{1,2\}$. Apoi, daca $u' : B \longrightarrow A_1 \times A_2$ face deasemenea comutative triunghiurile de mai sus, atunci daca pentru un $b \in B$ oarecare $u'(b) = (a_1, a_2)$, urmeaza $a_1 = p(a_1, a_2) = (p_1 \circ u')(b) = u_1(b)$ si analog $a_2 = u_2(b)$ deci unicitatea lui u.

(ii) Aratam ca reuniunea disjuncta este coprodusul in **Ens**, adica

Fie $\{A_i\}_{i \in I}$ o familie de multimi si $C = \cup_{i \in I}(\{i\} \times A_i)$ reuniunea sa disjuncta, impreuna cu injectiile $\sigma_i : A_i \longrightarrow C$, $\sigma_i(a_i) = (i, a_i)$, $i \in I$. Pentru orice multime C' si functii $\alpha_i : A_i \longrightarrow C'$ exista unica o functie $\gamma : C \longrightarrow C'$ care face comutative triunghiurile

$$\begin{array}{ccc} A_i & \xrightarrow{\sigma_i} & C \\ & \alpha_i \searrow & \downarrow \gamma \\ & & C' \end{array} .$$

Intradevar, daca definim $\gamma(i, a_i) = \alpha_i(a_i)$ se verifica imediat $\gamma \circ \sigma_i = \alpha_i$. Apoi, daca $\gamma' : C \longrightarrow C'$ este alta functie care face comutative triunghiurile de mai sus, atunci $\gamma(i, a_i) = \gamma(\sigma_i(a_i)) = (\gamma \circ \sigma_i)(a_i) = \alpha_i(a_i) = (\gamma \circ' \sigma_i)(a_i) = \gamma'(i, a_i)$, deci unicitatea.

1. In categoria grupurilor abeliene de torsiune, produsul categorial este subgrupul de torsiune al produsului direct (grupal) iar coprodusul este suma directa.

2. In categoria spatiilor local conexe, produsul **nu** este produsul topologic: este produsul cartezian al multimilor impreuna cu cea mai fina topologie local conexa; aceasta este mai putin fina (coarser) decit topologia produs.

3. $\mathbf{CompT}_2$ (spatii Hausdorff compacte): produsul categorial = produsul topologic

Teorema. Pentru orice spatiu Hausdorff complet regular ($T_?$) X, exista un spatiu Hausdorff compact $\hat{X}$ (compactificarea Stone-Čech) si o functie continua $f : X \longrightarrow \hat{X}$ universala (i.e., pt orice spatiu Hausdorff compact Y si orice functie continua $g : X \longrightarrow Y$, exista unica o functie continua $\hat{g} : \hat{X} \longrightarrow Y$ astfel ca $g = \hat{g} \circ f$.

Aceasta arata ca coprodusul este compactificarea Stone-Čech a reuniunii (disjuncte) topologice; deci nu este suma (?...) topologica.

4. *Propozitie. Daca $\mathcal{C}$ este conexa, orice proiectie din produs este o retractie (si dual, orice injectie intr-un coprodus este sectiune).*

Demo = Fie $p_j : \coprod A_i \longrightarrow A_j$ o proiectie. Categoria fiind conexa, pt orice $i \in I, i \neq j$ alegem un morfism $f_i : A_j \longrightarrow A_i$ si $f_j = 1_{A_j}$. Din definitia produsului (?...), exista $\langle f_i \rangle : A_j \longrightarrow \coprod A_i$ cu $p_j \circ \langle f_i \rangle = 1_{A_j}$.

Observatie. Daca categoria nu este conexa, proprietatea **nu** se mentine.

Contraexemple. 1) **Ens**: proiectia $\mathbf{N} \times \varnothing \longrightarrow \mathbf{N}$ este aplicatia vida, care nu este (nici) surjectiva (caci nu exista functie $\mathbf{N} \longrightarrow \varnothing$).

2) $\mathbf{ComRng}_1$: coprodusul $\mathbf{Q} \coprod \mathbf{Z}_2 = \mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_2 = 0$ (mai jos), deci injectia (in coprodus) $\mathbf{Q} \longrightarrow \mathbf{Q} \coprod \mathbf{Z}_2$ nu este injectiva (caci nu exista morfism de inele unital $\mathbf{Z}_2 \longrightarrow \mathbf{Q}$: $f(\overline{0}) = \overline{0}$, $f(\overline{1}) = \overline{1}$ si totusi $f(\overline{1} + \overline{1}) \neq f(\overline{1}) + f(\overline{1})$).

Aratam (separat) ca intradevar $\mathbf{Q} \coprod \mathbf{Z}_2 = 0$ astfel: *daca exista* morfisme de inele unitale $f : \mathbf{Q} \longrightarrow R$ *si* $g : \mathbf{Z}_2 \longrightarrow R$ *atunci R este zero-inel.*

Trebuie sa avem $g(\overline{0}) = 0_R$, $g(\overline{1}) = 1_R$ si $f(0) = 0_R$, $f(1) = 1_R$. Atunci $g(\overline{1} + \overline{1}) = g(\overline{1}) + g(\overline{1})$ de unde $0_R = 1_R + 1_R$ adica $\mathrm{char}(R) = 2$. Apoi $f(2) = 0_R$ si atunci $f(1) = f(\frac{1}{2}).f(2) = 0_R$, de unde $0_R = 1_R$, deci R este inel zero.

5. *Exercitiu.* Fie $\mathcal{C}$ o categorie in care: (α) orice morfism este mono, (β) exista 2 morfisme distincte cu acelas domeniu respectiv acelas codomeniu. Atunci aratati ca:

(a) $\mathcal{C}$ **nu** are produse finite;

(b) $\mathcal{C}$ **nu** are coproduse finite;

(c) Conchideti ca **Field** nu are nici produse nici coproduse finite.

Demo = (a) Conform (β) exista $A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$ cu $f \neq g$. Pp (prin absurd) ca exista produsul $(A \times B; p_A, p_B)$ si consideram morfismele $1_A : A \longrightarrow A$, $f : A \longrightarrow B$. Exista atunci o factorizare (unica) $h : A \longrightarrow A \times B$ pentru care $1_A = p_A h$ si $f = p_B h$. Considerind (analog) morfismele 1_A si g, exista unic un $k : A \longrightarrow A \times B$ pentru care $1_A = p_A k$ si $g = p_B k$. Conform (α) toate morfismele sunt mono si deci $1_A = p_A h = p_A k$ implica $h = k$ de unde $f = p_B h = p_B k = g$, o contradictie.

(b) Similar, daca ar exista $A\coprod B$ gasim morfisme h,k cu $1_A = h\iota_A$ si $f = h\iota_B$ si $1_A = k\iota_A$ si $g = k\iota_B$. Din acestea h este retractie care fiind si mono este chiar izomorfism. Atunci si ι_A este izomorfism deci epi si la fel $h = k$ de unde $f = g$ (tot contradictie).

(c) Intradevar, categoria corpurilor satisface (α): fie $f : K \longrightarrow K'$ un morfism de corpuri (comutative). Cum $\ker f$ este ideal, trebuie sa fie trivial (0 sau K). Deoarece $f(1_K) = 1_{K'} \neq 0_{K'}$ (intr-un corp), trebuie $\ker f = (0)$ deci f este injectiva (si mono).

Chiar si (β): De (la $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ nu avem decit $1_{\mathbf{R}}$ iar de) la $\mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ avem doar identitatea si conjugarea, deci 2 morfisme distincte cu acelas domeniu - codomeniu.

Demo 2 pentru (c): **Field** [corpuri comutative impreuna cu morfisme (injective: vezi si Corolar 4.2.30, Purdea, Pic) de corpuri] nu are produse.

Observatie. Intr-o categorie (cu produse) oarecare fie P produsul a doua exemplare ale aceluiasi obiect A. Considerind doua exemplare de morfisme $\{1_A, 1_A : A \longrightarrow A\}$, din definitia produsului exista un unic morfism (numit si *diagonal*) $\triangle : A \longrightarrow P$ care face comutative triunghiurile

$$\begin{array}{ccccc} & & A & & \\ & \swarrow 1_A & \downarrow \triangle & \searrow 1_A & \\ A & \underset{p_1}{\longleftarrow} & P & \underset{p_2}{\longrightarrow} & A \end{array}$$

adica $p_1\triangle = p_2\triangle = 1_A$.

Daca, in plus, toate morfismele sunt monomorfisme, cum p_1 si p_2 sunt retractii, sunt chiar izomorfisme. Atunci si $\triangle$ este izomorfism si deci $p_1 = p_2$.

Daca in categoria considerata exista doua morfisme diferite cu acelas domeniu D respectiv acelas codomeniu A, anume $f, g : D \longrightarrow A$, exista unic un morfism $\delta : D \longrightarrow P$ care face comutative triunghiurile

$$\begin{array}{ccccc} & & D & & \\ & \swarrow f & \downarrow \delta & \searrow g & \\ A & \underset{p_1}{\longleftarrow} & P & \underset{p_2}{\longrightarrow} & A \end{array}$$

adica $p_1\triangle = f$ si $p_2\triangle = g$. Cum $p_1 = p_2$ deducem si $f = g$, o contradictie (adica categoria nu are produse).

In cazul categoriei **Field**, toate morfismele sunt mono si exista (de exemplu) doua morfisme de corpuri **diferite**: $f = 1_{\mathbf{C}} : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ si conjugarea $g(z) = \overline{z}$.

Demo 3. S-a mai vazut ca morfismele sunt injective [se iau numai diferite de zero, deci unitale].

Daca ar exista produsul $P = \mathbf{Z}_2 \prod \mathbf{Q}$ (π_1, π_2), atunci $\pi_1 : P \longrightarrow \mathbf{Z}_2$ ar fi un izomorfism [morfisme diferite de zero, deci si surjective] si $\pi_2 : P \longrightarrow \mathbf{Q}$ are fi morfism injectiv. Asadar $\mathbf{Q}$ ar contine un subcorp izomorf cu $\mathbf{Z}_2$, imposibil caci $\mathbf{Q}$ este corp prim, deci nu are subcorpuri diferite de $\mathbf{Q}$.

6. Pentru o *multime partial ordonata* (poset $(A, \leq)$) *considerata ca si categorie* (obiectele sunt elementele lui A, iar morfismele sunt exact unul intre a si a' ddaca $a \leq a'$) : produsul a 2 obiecte este chiar infimul, iar coprodusul chiar supremul.

Intradevar, daca se da o familie de "obiecte " $\{a_i\}_{i\in I}$, produsul p are proprietatea $p \leq a_i$ (deci minoranta) si pentru orice p' cu $p' \leq a_i$ pentru toti $i \in I$, $p \leq' p$, adica cea mai mare minoranta. Deci o familie de elemente are produs ddaca are inf.

Asadar, un poset are produs ddaca are coproduse ddaca este o latice completa (vezi si Teorema 1.4.47, Purdea, Pic).

De fapt se poate demonstra chiar (Freyd, p. 123):

Teorema. Pentru o categorie mica $\mathcal{C}$ sunt echivalente: (1) $\mathcal{C}$ are produse; (2) $\mathcal{C}$ are coproduse; (3) $\mathcal{C}$ este echivalenta cu o latice completa.

7. Coproduse in Top.

Definitie. Fie $\{X_i : i \in I\}$ o familie de spatii topologice indexata de I. Fie $X = \coprod_i X_i$ reuniunea disjuncta a multimilor subiacente. Pentru fiecare $i \in I$, fie $\phi_i : X_i \longrightarrow \coprod X_i$ injectiile canonice (definite prin $\phi_i(x_i) = (x_i, i)$). *Topologia reuniune disjuncta* pe X este definita ca cea mai fina topologie pe X pentru care injectiile canonice sunt continue (i.e. toplogia finala pentru familia de functii $\{\phi_i\}$).

Explicit, topologia reuniune disjuncta poate fi descrisa astfel: o submultime U a lui X este deschisa in X ddaca preimaginea sa este dechisa in X_i pentru fiecare $i \in I$.

O alta formulare: o submultime V a lui X este deschisa relativ la X ddaca intersectia sa cu X_i este deschisa relativ la X_i pentru fiecare i.

Proprietati

Spatiul reuniunea disjuncta X, impreuna cu injectiile canonice, poate fi caracterizat de urmatoarea proprietate de *universalitate*:

Daca Y este un spatiu topologic, si $f_i : X_i \to Y$ sunt functii continue pentru fiecare $i \in I$, atunci exista unica o functie continua $f : X \to Y$ care face comutative triunghiurile:

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \phi_i \downarrow & \searrow f & \\ X_i & \xrightarrow[f_i]{} & Y \end{array}$$

Asadar reuniunea disjuncta este *coprodusul* in categoria spatiilor topologice. Din proprietatea de universalitate deducem ca functia $f : X \to Y$ este continua ddaca $f_i = f \circ \phi_i$ sunt continue pentru toti $i \in I$.

In afara de a fi continue, injectiile canonice $\phi_i : X_i \to X$ sunt si functii deschise si inchise. Astfel injectiile sunt scufundari topologice si fiecare X_i poate fi vazut canonic ca un subspatiu al lui X.

Exemple

Daca fiec are X_i este homeomorfic cu un spatiu fixat A, atunci reuniunea disjuncta X va fi homeomorfic cu $A \times I$ unde pe I consideram toplogia discreta.

Pastrarea proprietatilor topologice

orice reuniune disjuncta de spatii discrete este discreta

Separare: orice reuniune disjuncta de spatii T_0 este T_0; orice reuniune disjuncta de spatii T_1 este T_1; orice reuniune disjuncta de spatii T_2 (Hausdorff) este T_2 (Hausdorff)

Conexitate: reuniunea disjuncta a doua sau mai multe spatii topologice nevide este un spatiu disconex.

8. Aratati ca suma directa (externa) este si produs si coprodus pentru familii finite de spatii vectoriale in $\mathbf{Vec}_K$.

15 Categorii aditive

1. *Orice inel cu unitate este o categorie aditiva cu un singur obiect.*

Raspoundeti la urmatoarele intrebari:
(i) care sunt mono si epi ?
(ii) are nuclee sau conuclee? In ce conditii ?
(iii) este normala sau conormala? Conditii.
(iv) are produse sau coproduse? Conditii.
(v) are produse si sume fibrate? Conditii.
(vi) este abeliana ? In ce conditii ?

Raspunsurile:

(i) $r \in R$ este mono ddaca $ra = 0$ implica $a = 0$ ddaca $\mathrm{Ann}_d(r) = (0)$; analog, $r \in R$ epi ddaca $\mathrm{Ann}_s(r) = (0)$.

(ii) $a = \ker(r)$ ddaca $ra = 0$ si $ra' = 0$ implica exista unic $b \in r : a' = ab$, sau, $a \in \mathrm{Ann}_d(r)$ si $a' \in \mathrm{Ann}_d(r)$ implica exista unic $b \in r : a' = ab$. Apoi r are nucleu ddaca idealul drept $\mathrm{Ann}_d(r)$ este principal si admite un generator a pt care $\mathrm{Ann}_d(a) = (0)$.

Exemplu: orice domeniu de integritate; toti anulatorii sunt (0) dar idealul (0) **nu** are generator de $\mathrm{Ann} = (0)$.

Asadar, un domeniu de integritate nu are nici nuclee nici conuclee si, R are nuclee si conuclee ddaca anulatorii (stangi, drepti) sunt ideale principale care au macar un generator de anulator $= (0)$ [deci conditie necesara: sa nu aiba nici un anulator $= (0)$].

Observatie. Aceasta categorie are zero morfisme, dar nu are zero obiect [are si zero obiect numai daca este inelul zero].

(iii) ...
(iv) ...
(v) ...
(vi) ...

2. Daca $f, g : A \longrightarrow B$ sunt morfisme intr-o categorie aditiva, atunci $\ker(f - g) \cong equ(f, g)$; adica, daca oricare exista, atunci ambele exista si sunt izomorfe.

16 Categorii aditive exacte

...

17 Categorii abeliene

...

18 Functori

1.Verificati ca sunt functori urmatoarele:

(i) $P : \mathbf{Ens} \longrightarrow \mathbf{Ens}$ cu $P(A) = \mathcal{P}(A)$ si $P(A \xrightarrow{f} B) : \mathcal{P}(A) \longrightarrow \mathcal{P}(B)$ cu $P(f)(X) = f(X)$ respectiv $Q : \mathbf{Ens}^{op} \longrightarrow \mathbf{Ens}$ cu $Q(A) = \mathcal{P}(A)$ si $Q(A \xrightarrow{f} B) : \mathcal{P}(B) \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ cu $Q(f)(Y) = \overset{-1}{f}(Y)$.

(ii) $(-)^2 : \mathbf{Ens} \longrightarrow \mathbf{Ens}$ cu $(-)^2(A) = A \times A$ si $(-)^2(A \xrightarrow{f} B) = f^2$ cu $f^2(a, a') = (f(a), f(a'))$.

(iii) $F : \mathbf{Preord} \longrightarrow \mathbf{Ord}$, cu $F(X, R) = X/(R \cap \overset{-1}{R})$ unde R este o relatie de preordine pe X si $F(X \xrightarrow{f} Y) =$ restrictia. (Scrieti detaliile).

2. Aratati ca daca $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ este un functor atunci imaginea lui $\mathcal{C}$ prin F nu este intotdeauna o subcategorie a lui $\mathcal{D}$.

[Hint. Considerati un functor de la $\begin{matrix} \cdot & \rightarrow & \cdot \\ \cdot & \rightarrow & \cdot \end{matrix}$ la $\begin{matrix} \cdot & \rightarrow & \cdot \\ & \searrow & \cdot \end{matrix}$].

3. (a) Aratati ca orice functor covariant pastreaza retractii respectiv sectiuni.

(b) Dati un exemplu de functor care nu pastreaza monomorfismele.

...

4. Aratati ca daca $\mathcal{C}$ este semiaditiva [hom-urile sunt numai monoid comutativ - nu chiar grup abelian], atunci Add[$\mathcal{C}$, $\mathbf{Ab}$] subcategoria functorilor aditivi, este abeliana.

5. Pentru orice inel R cu unitate, considerat ca si categorie aditiva cu un singur obiect, Add[R, $\mathbf{Ab}$] $\approx R - \mathbf{Mod}$, sunt categorii echivalente [echivalenta = fidel + reprezentativ]. Sunt chiar izomorfe [echivalenta + bijectiva pe obiecte]?

6. Demonstrati ca daca $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ este un functor intre categorii cu zero, atunci sunt echivalente:

(a) F pastreaza morfisme constante;

(b) F pastreaza morfisme coconstante;

(c) F pastreaza morfisme zero;

(d) F pastreaza obiecte zero.

7. Dati un exemplu de functor *plin* [fiecare *hom*-restrictie $F|_{\hom(C,C')}^{\hom(FC,FC')}$ alui F este surjectiva] care nu este surjectie si un functor *reprezentativ* [pentru orice obiect D din $\mathcal{D}$ exista un obiect C in $\mathcal{C}$ astfel incat $F(C)$ izomorf cu D] care nu este surjectiv pe obiecte.

8. Fie $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un functor care are una dintre proprietatile:

(i) F este plin;

(ii) F este injectiv pe obiecte. Aratati ca "imaginea" lui $\mathcal{C}$ prin F este o subcategorie a lui $\mathcal{D}$.

9. Fiecarui functor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ i se pot asocia 2 bifunctori $Hom(F-, -) : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathbf{Ens}$ si $Hom(-, F-) : \mathcal{D}^{op} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Ens}$. Descrieti cum actioneaza acesti functori pe morfisme.

19 Functori adjuncti

1. *Adjuncti la functori de uitare din* **Top**.

Like many categories, the category **Top** is a *concrete* category (also known as a *construct*), meaning its objects are sets with additional structure (i.e. topologies) and its morphisms are functions preserving this structure. There is a natural forgetful functor

$U : \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$

to the category of sets which assigns to each topological space the underlying set and to each continuous map the underlying function.

The forgetful functor U has both a *left adjoint* $D : \mathbf{Set} \to \mathbf{Top}$ which equips a given set with the discrete topology and a *right adjoint* $I : \mathbf{Set} \to \mathbf{Top}$ which equips a given set with the indiscrete topology. Both of these functors are, in fact, right inverses to U (meaning that UD and UI are equal to the identity functor on **Set**). Moreover, since any function between discrete or indiscrete spaces is continuous, both of these functors give full embeddings of **Set** into **Top**.

2. Verificati ca functorul de abelianizare $F : \mathbf{Ab} \longrightarrow \mathbf{Grp}$, $F(G) = G/G'$ (aici G' subgrupul comutator) este adjunct la stanga pentru functorul de incluziune $G : \mathbf{Grp} \longrightarrow \mathbf{Ab}$.

3. Verificati ca functorul de incluziune $\mathbf{AbTor} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ este adjunct la stanga pentru functorul $T : \mathbf{Ab} \longrightarrow \mathbf{AbTor}$, partea de torsiune, iar functorul fara-torsiune $F : \mathbf{Ab} \longrightarrow \mathbf{AbFtor}$, definit pe obiecte $F(G) = G/T(G)$ este adjunct la stanga pentru functorul de incluziune $\mathbf{AbFtor} \longrightarrow \mathbf{Ab}$.

20 Transformari naturale

1. Dati un exemplu de izomorfism de functori care **nu** este natural.

...

2. Fie $\mathbf{2} = \{0, 1\}$ o multime cu doua elemente. Verificati ca exista un izomorfism natural intre Hom-functorul covariant $Hom(\mathbf{2}, -) : \mathbf{Ens} \longrightarrow \mathbf{Ens}$ si functorul $(-)^2 : \mathbf{Ens} \longrightarrow \mathbf{Ens}$ (exercitiu **1**, la "Functori".

3. Demonstrati ca un endomorfism de grup este un automorfism interior ddaca, considerat ca un functor pe o categorie cu un singur obiect, este natural izomorf cu functorul identic.

Exemplu (la curs) *de transformare naturala: "determinantul".*

Notam $\mathbf{CRng}_1$ categoria inelelor comutative cu unitate impreuna cu morfismele de inele unitale. Consideram 2 functori covarianti $GL_n, U : \mathbf{CRng}_1 \longrightarrow \mathbf{Grp}$ definiti pentru un obiect $R \in Ob(\mathbf{CRng}_1)$ prin $GL_n(R) = \{A \in \mathcal{M}_n(R) | \det(A) \text{ inversabil}\}$ (adica grupul liniar de grad n peste R) si $U(R)$, grupul elementelor inversabile din R. Mai departe, daca $f : R \longrightarrow R'$ este un morfism de inele unital $GL_n(f) : GL_n(R) \longrightarrow GL_n(R')$ este definit prin $A \longmapsto f(A)$ unde daca $a = [a_{ij}]$ atunci $f(A) = [f(a_{ij})]$, iar $U(f) : U(R) \longrightarrow U(R')$ este restrictia la elemente inversabile a lui f.

Intrucat $\det(f(A)) = \sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma) f(a_{1\sigma(1)}...a_{n\sigma(n)})$

$= f(\sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma) a_{1\sigma(1)}...a_{n\sigma(n)}) = f(\det(A))$ si *morfismele de inele unitale pastreaza elementele inversabile*, deducem ca $GL_n(f)$ este bine definit, dar si ca este comutativa diagrama

$$\begin{array}{ccc} GL_n(R) & \overset{\det_R}{\longrightarrow} & U(R) \\ \downarrow GL_n(f) & & U(f)\downarrow \\ GL_n(R') & \underset{\det_{R'}}{\longrightarrow} & U(R') \end{array}$$

unde $\det_R : GL_n(R) \longrightarrow U(R)$ asociaza chiar determinantul (si analog pentru R').

Asadar $\det : GL_n \longrightarrow U : \mathbf{CRng}_1 \longrightarrow \mathbf{Grp}$ este o transformare naturala.

21 Echivalente de categorii

1. Aratati ca daca $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ este natural izomorf cu $1_{\mathcal{C}}$ atunci F este o echivalenta, dar reciproca nu are loc. [*Hint*: un izomorfism $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ nu este neaparat natural izomorf cu $1_{\mathcal{A}}$ (vezi ex. **3**, sectiunea precedenta).

22 Intrebari admitere PhD (1972, Bucuresti)

1) Fie $F : \mathbf{Ens}^0 \longrightarrow \mathbf{Ens}$ functor definit prin $F(M) = \mathcal{P}(M)$, $F(f) = f^{-1}$ (ca functor de submultimi) si $G : \mathbf{Ens} \longrightarrow \mathbf{Ens}$ functor definit prin $G(M) = \mathcal{P}(M)$, $G(f) = f$ (indus). Care dintre ei este reprezentabil si care nu (de ce)?

Raspuns: Trebuie un obiect Ω si izomorfisme naturale $\alpha : F \longrightarrow H_\Omega$ adica bijectii $\alpha_M : \mathcal{P}(M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M, \Omega)$.

Merge cu $\Omega = \{0, 1\}$ si atunci unui $M' \subseteq M$ ii corespunde functia caracteristica $\chi_{M'}$: $\begin{cases} 1 & \text{daca} \quad x \in M' \\ 0 & \text{daca} \quad x \in M \setminus M' \end{cases}$. Pentru reprezentabilitatea lui G trebuie bijectii $\mathcal{P}(M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X, M)$ adica existenta unei multimi X pt care $2^{|M|} = |M|^{|X|}$. Nu exista: daca $|M| = 1$ avem $2 = 1$.

2) Fie $\mathcal{C}$ o subcategorie plina a lui **Ens** si $I : \mathcal{C} \longrightarrow$**Ens** incluziunea (deci functor deplin fidel). Daca I are un adjunct (la stanga) $F : \mathbf{Ens} \longrightarrow \mathcal{C}$ atunci avem (i) sau (ii) unde:

(i) I este echivalenta;

(ii) $\mathcal{C}$ are doar 2 obiecte si un morfism $\varnothing \longrightarrow \{*\}$.

Hint. $\mathcal{C}$ reflectiva.

3) Un functor $F : \mathbf{Ens} \longrightarrow \mathbf{Ens}$ care are adjunct la stanga si la dreapta coincide cu identitatea.

...

4) Orice functor $F : \mathbf{Ens} \longrightarrow \mathcal{C}$ pastreaza mono si epi.

Hint: In **Ens** mono (si epi) sunt sectiuni (retractii). Orice functor pastreaza retractii si sectiuni.