Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Szatmárnémeti, 2010.

XIX.

A XIX. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny kiemelt támogatói

ROMÁNIA OKTATÁSI MINISZTÉRIUMA
SZATMÁR MEGYEI TANÁCS
SZATMÁRNÉMETI POLGÁRMESTERI HIVATALA

A verseny további támogatói

Láncos Református Egyházközség
Kölcsey Ferenc Alapítvány
Véndiák Szövetség
Czine Alapítvány
BIO-INVENT civil szervezet
Romániai Magyar Pedagógusok Szövetsége

Ali Baba kft.	Auto AS kft.
Autonet kft.	Emil Gill Style kft.
FASTUS pékség	Garden Design kft.
Lubexpert kft.	No Pardon Pub
Panatek kft.	Pink Trans kft.
Radical kft.	Samfero kft.
SC VINDEX srl	Tarr Beton kft.

Virgocom kft.

ANDRÁS SZILÁRD MÉSZÁROS ALPÁR

NAGY ÖRS

XIX. NEMZETKÖZI MAGYAR MATEMATIKAVERSENY

Feladatok és megoldások

STÁTUS KIADÓ
CSÍKSZEREDA, 2010

Borítóterv: Muhi Sándor

Műszaki szerkesztés: András Szilárd

A kéziratot ellenőrizte és helyenként kiegészítette:
Sipos Kinga, Farkas Csaba, Széles Ádám
Nagy Tímea, Bajnóczi Tamás

Kiadja a Státus Könyvkiadó
Felelős kiadó Birtók József igazgató

ISBN: 978-606-8052-07-6

Készült a Státus Nyomdában
http://www.status.com.ro
Email: office@status.com.ro

Olimpiada de Matematică pentru Liceele Maghiare din Europa,
ediţia XIX (lb. magh)

Editura Status, Miercurea-Ciuc
Tiparul executat sub comanda nr. 19/2010
la Status Printers - Siculeni

Tartalomjegyzék

Előszó

A Nemzetközi Magyar Matematikaverseny ötletét 1991-ben Bencze Mihály brassói matematikatanár fogalmazta meg a szegedi Rátz László Vándorgyűlésen. Az első verseny megrendezését Oláh György komáromi matematikatanár vállalta. A verseny célja kettős: egyrészt szakmai megmérettetés a matematikát magyarul tanuló középiskolás diákok számára, másrészt a több ország határain átívelő magyar kultúra alaposabb megismerése, ápolása. E kettős cél érdekében a versenyt minden második évben Magyarországon, a közbeeső években a szomszédos országokban rendezik.

A különböző országok matematikatanterve nagyon sok lényeges vonatkozásban különbözik. Nemcsak a tartalmak különböznek, hanem országonként radikálisan más a tantervek felépítése mögötti koncepció, a végső elbírálási követelményrendszer, a tanítás teljes célrendszere. Emiatt a versenybizottságnak igen nehéz feladata van minden évben, mert a beérkező javaslatok alapján olyan feladatsorokat kell kidolgoznia, amelyek egyrészt esélyegyenlőséget biztosítanak a különböző régiók diákjai számára, másrészt mégis tükrözik azt a sokszínűséget, pluralizmust, amely a versenyen résztvevő régiók matematikaoktatását jellemzi. Az egyensúlyt eltalálni, sőt egyáltalán a tűréshatárokon belül megközelíteni, nehéz. Természetesen ennek az egyensúlynak minden évben másfajta megközelítését, vetületét tapasztalhattuk. Talán egy nemzetközi zsűri, amelyben minden régió képviselve van, jobb megközelítést találna.

A XIX. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny alkalmából igyekeztünk olyan feladatokat válogatni, amelyek több különböző ötlettel, módszerrel is megoldhatók. Így a feladatok szerzői által javasolt megoldások mellé, sok esetben, alternatív megoldásokat, megjegyzéseket mellékeltünk annak érdekében, hogy rávilágítsunk a tantervek különbözőségéből fakadó szemléletmódbeli különbségekre. Ugyanakkor azonkívül, hogy a feladatsorokon belül igyekeztünk nemcsak nagyon nehéz, hanem közepes nehézségű és könnyű feladatokat kiválasztani, azt is szempontnak tekintettük, hogy a különböző évfolyamok feladatsorai közt is legyen valamilyen nehézségi, mélységi rangsor, ami a felhasznált matematikai eszközöket, ötleteket illeti.

A versenyre nagyon sok javasolt feladat érkezett, ezért előbb egy előválogatást tartottunk, amely során kiválogattuk azokat a feladatokat, amelyekről azt gondoltuk, hogy az általunk választott szempontok szerint bekerülhetnek a versenyre. A tényleges feladatsorokat egy második fordulóban állítottuk össze, ahol figyelemmel követtük a feladatok nehézségét, szépségét, a régiók reprezentálását, valamint az alternatív megoldások létezését. Azokból a feladatokból, amelyek végül nem kerültek be a versenyre, egy rövid ízelítőt tartalmaz jelen kiadványunk utolsó paragrafusa. Ide azokat a feladatokat válogattuk be, amelyeket nagy előszeretettel betettünk volna a versenyre, de valamilyen szempont miatt (ami sok esetben az adott feladattól teljesen független volt) kénytelenek voltunk mégis kivenni.

Bár tudatában vagyunk annak, hogy az egyensúlyt mi sem értük el, reméljük, hogy a XIX. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny szakmai szempontból teljes mértékben szolgálja az 1991-ben megfogalmazott és időközben kiegészített célokat. A Komáromban rendezett I. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny többszörös díjazottjaként bízom abban, hogy az idei verseny résztvevői közül minden régióban kikerülnek olyan szakemberek, akik 20 év múlva a XXXIX. Nemzetközi Magyar Matematikaversenyre sokkal jobb feladatsorokat állítanak össze.

András Szilárd, Kolozsvár

9. osztály

1. Feladat. Mennyi a következő tört értéke?

$$\frac{2010201020102011 \cdot 4020402040204021 - 2010201020102010}{2010201020102010 \cdot 4020402040204021 + 2010201020102011}$$

dr. Katz Sándor, Bonyhád

2. Feladat. Meseországban fityinggel és fabatkával lehet vásárolni, ahol 1 fitying 2010 fabatkát ér. Fajankó és Vasgyúró összehasonlítják megtakarított pénzüket. Mindketten megszámolják fityingjeiket és fabatkáikat, majd megállapítják, hogy egyiküknek sincs 2010-nél több fityingje, és hogy Vasgyúró vagyona 1003 fabatkával több, mint Fajankó vagyonának kétszerese. Fajankónak annyi fityingje van, ahány fabatkája van Vasgyúrónak, és annyi fabatkája, ahány fityingje van Vasgyúrónak. Mennyi megtakarított pénze van Fajankónak?

dr. Péics Hajnalka, Szabadka

3. Feladat. Oldjuk meg az $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} - 1$ egyenletet, ha x, y, z egész számok!

Bíró Bálint, Eger

4. Feladat. A dubai Burj Khalifa felhőkarcoló 160 emeletes. Induljon el egy lift a földszintről, és tételezzük fel, hogy útja során minden emeleten pontosan egyszer áll meg. Mennyi az a leghosszabb út, amit eközben megtehet, ha két szomszédos emelet közti távolság 4 méter?

Fejér Szabolcs, Miskolc

5. Feladat. Az ABC háromszög AC és BC oldalán felvesszük a C-hez, illetve B-hez közelebb eső N és M harmadolópontot, valamint az AB oldal P felezőpontját, majd az eredeti háromszöget kitöröljük. Szerkesszük vissza az M, N és P pont alapján az eredeti háromszöget!

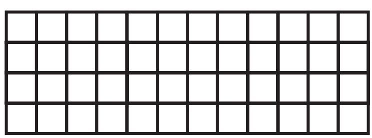
Kovács Lajos, Székelyudvarhely

6. Feladat. Színezzük ki egy szabályos 2010-szög csúcsait 3 színnel, mindhárom színt ugyanannyiszor használva. Igaz-e, hogy bármely színezés esetén lesz olyan szabályos háromszög, amelynek vagy minden csúcsa azonos színű, vagy a három csúcsa három különböző színű?

Fejér Szabolcs, Miskolc

10. osztály

1. Feladat. Legalább hány szeget kell beütni az alábbi farács rácspontjaiba ahhoz, hogy biztosan legyen köztük 4 szeg, amely egy téglalapot feszít ki?



Nagy Örs, Kolozsvár

2. Feladat. Határozzuk meg azokat az $x, y \in \mathbb{N}$ számokat, amelyekre

$$xy(x - y) = 13x + 15y.$$

Kacsó Ferenc, Marosvásárhely

3. Feladat. Adott a síkon négy pont úgy, hogy közülük semelyik három sincs egy egyenesen. Kiszíneztük a négy pontot négy színnel: pirossal, kékkel, zölddel, és sárgával. Ezután kiszíneztük a pontok által meghatározott szakaszokat is úgy, hogy azok színe megegyezett valamelyik végpontjuk színével, és közben mind a négy színt újra felhasználtuk. Igaz-e, hogy mindig van olyan pont, hogy
(1) vagy a belőle kiinduló szakaszok közül,
(2) vagy a másik három pont közti szakaszok közül
az egyik piros, a másik kék, a harmadik zöld?

dr. Kántor Sándorné, Debrecen

4. Feladat. Mennyi azoknak a pozitív egészeknek az összege, amelyek 2010-nél nem nagyobbak, és számjegyeik összege páratlan?

Fejér Szabolcs, Miskolc

5. Feladat. Legyen hat, nem feltétlenül egyforma sugarú, kör egy síkban. Igazoljuk, hogy ha a hat körnek van közös belső pontja, akkor az egyik kör középpontja egy másik belsejében van.

Mátyás Mátyás, Brassó

6. Feladat. Adott az ABC háromszög, amelyben $AB = AC$ és $m(\widehat{BAC}) = 20°$. Az AC oldalon felvesszük a D és E pontokat úgy, hogy $AD = BC$ és BE az $\widehat{ABC}$ szögfelezője. Legyen F és K a BD, illetve DE szakasz felezőpontja. Bizonyítsuk be, hogy az $EFK_\triangle$ egyenlő oldalú.

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

11. osztály

1. Feladat. Határozzuk meg az 1, 2, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 16, 17, 19, 21, 23, 25, ... sorozat 2010. tagját, ha a sorozat tagjait úgy képeztük, hogy az 1-es után leírtuk az őt követő 2 páros számot, majd a kapott számot követő 3 páratlan számot, az ezután kapott számot követő 4 páros számot és így tovább.

dr. Pintér Ferenc, Nagykanizsa

2. Feladat. Az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nemnegatív valós számok teljesítik az

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + \ldots + n \cdot x_n = 2010$$

egyenlőséget. Határozzuk meg az $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ legkisebb lehetséges értékét!

Borbély József, Tata

3. Feladat. Határozzuk meg a

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = 3 - 4x^2$$

egyenlet valós megoldásait!

Szilágyi Judit és Nagy Örs, Kolozsvár

4. Feladat. Az $ABCD$ konvex négyszögben jelölje α a d_1 és d_2 hosszúságú AC, illetve BD átló által közrezárt szög mértékét. Mutassuk ki, hogy $ABCD$ akkor és csakis akkor négyzet, ha

$$(d_1 \sin A \sin C + d_2 \sin B \sin D) \cdot \sin\alpha = \sqrt{2(d_1^2 + d_2^2)}.$$

Longáver Lajos, Nagybánya

5. Feladat. Adjuk meg az összes olyan háromszöget, amelyben mindhárom oldal hossza (méterben kifejezve) prímszám és a terület mérőszáma (négyzetméterben) egész szám!

Mészáros Alpár Richárd, Kolozsvár

6. Feladat. Jelölje a_k a k pozitív egész szám legnagyobb páratlan osztóját.

a) Igazoljuk, hogy
$$\left\{a_{2^k}, a_{2^k+1}, \ldots, a_{2^{k+1}-1}\right\} = \left\{1, 3, 5, \ldots, 2^{k+1}-1\right\}.$$

b) Igazoljuk, hogy $\displaystyle\sum_{k=1}^{2^n-1} a_k = \frac{4^n-1}{3}$.

Dávid Géza, Székelyudvarhely

12. osztály

1. Feladat. Határozzuk meg az $E(x) = (1+\cos x)\sin x$ kifejezés legnagyobb értékét, ha x tetszőleges valós szám! Milyen x esetén veszi ezt fel?

Kovács Béla, Szatmárnémeti

2. Feladat. Határozzuk meg azt a három különböző $\dfrac{n}{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ alakú törtet, amelyek összege egész szám!

Nemecskó István, Budapest

3. Feladat. Keressük meg azt a leghosszabb, szigorúan növekvő, egészekből álló mértani sorozatot, amelynek tagjai a $[100, 1000]$ intervallumban vannak!

Szabó Magda, Szabadka

4. Feladat. Az $(x_n)_{n\geq 1}$ valós számsorozat teljesíti az
$$(1+x_n)x_{n+1} = n, n \geq 1$$
rekurziót és $x_1 = 1$.

Igazoljuk, hogy $n \geq 2$ esetén

$$\left(\sqrt{\frac{n+1}{2}}-1\right)^2 < 1+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 < \frac{n^2+n+2}{2n}.$$

Bencze Mihály, Brassó

5. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy négy különböző, nemnegatív valós szám közül kiválasztható kettő (x és y), amelyekre

$$\frac{1+xy}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+y^2}} > \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

dr. Minda Mihály, Vác

6. Feladat. Egy laktanya udvarán 2010 katona magasság szerint áll sorban. Egy perc alatt bármelyik két katona egymással helyet cserélhet (tudnak elég gyorsan futni). Egyszerre több helycsere is történhet, de egy katona egy perc alatt csak egy helycserében vehet részt. Legfeljebb hány perc szükséges ahhoz, hogy névsor szerint álljanak sorba? (A katonák különböző magasságúak, és a nevük is különbözik.)

dr. Kántor Sándor, Debrecen

Megoldások

9. osztály

1. Feladat. Mennyi a következő tört értéke?

$$\frac{2010201020102011 \cdot 4020402040204021 - 2010201020102010}{2010201020102010 \cdot 4020402040204021 + 2010201020102011}$$

dr. Katz Sándor, Bonyhád

Megoldás. Látható, hogy a törtkifejezésben szereplő számok a 2010201020102010, az ennél eggyel nagyobb és a kétszeresénél eggyel nagyobb szám. Jelöljük ezért a 2010201020102010 számot n-nel. Ekkor a tört:

$$\frac{(n+1)(2n+1)-n}{n(2n+1)+n+1} = \frac{2n^2+2n+n+1-n}{2n^2+n+n+1} =$$

$$= \frac{2n^2+2n+1}{2n^2+2n+1} = 1.$$

$\circledast$

1. Megjegyzés. Ha a 2010201020102011 számot jelöljük m-mel, akkor a

$$\frac{m(2m-1)-(m-1)}{(m-1)(2m-1)+m} = 1$$

törtet kapjuk és ha a 4020402040204021 számot jelöljük p-vel, akkor a

$$\frac{\frac{p+1}{2}p - \frac{p-1}{2}}{\frac{p-1}{2}p + \frac{p+1}{2}} = 1$$

törthöz jutunk. Minden esetben a törtben megjelenő számok közti összefüggések észrevétele a lényeges.

2. Feladat. Meseországban fityinggel és fabatkával lehet vásárolni, ahol 1 fitying 2010 fabatkát ér. Fajankó és Vasgyúró összehasonlítják megtakarított pénzüket. Mindketten megszámolják fityingjeiket és fabatkáikat, majd megállapítják, hogy egyiküknek sincs 2010-nél több fityingje, és hogy Vasgyúró vagyona 1003 fabatkával több, mint Fajankó vagyonának kétszerese. Fajankónak annyi fityingje van, ahány fabatkája van Vasgyúrónak, és annyi fabatkája, ahány fityingje van Vasgyúrónak. Mennyi megtakarított pénze van Fajankónak?

dr. Péics Hajnalka, Szabadka

Megoldás. Legyen Fajankónak x fityingje és y fabatkája. Ekkor Vasgyúrónak y fityingje és x fabatkája van. A megadott feltétel szerint ekkor

$$2010y + x - 1003 = 2(2010x + y),$$

ahonnan rendezés után $2008(y - 2x) = 3x + 1003$ adódik. Két esetet különböztetünk meg:
1. eset. Ha $y - 2x = 1$, akkor $3x + 1003 = 2008$, ahonnan $x = 335$ és $y = 671$.
2. eset. Ha $y - 2x \geq 2$, akkor $3x + 1003 \geq 2 \cdot 2008 = 4016$, azaz $x \geq \frac{3013}{3}$. Ekkor $y \geq 2 + 2x \geq 2 + 2 \cdot \frac{3013}{3} \geq 2010$, ami ellentmondást jelent a feltételekkel.
Tehát Fajankónak 335 fityingje és 671 fabatkája van. ⊛

3. Feladat. Oldjuk meg az $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} - 1$ egyenletet, ha x, y, z egész számok!

Bíró Bálint, Eger

Első megoldás. Nyilvánvaló, hogy az x, y, z egész számok egyike sem lehet 0. Szorozzuk be az egyenletet az $xyz \neq 0$ kifejezéssel!

Ekkor először az $yz - xz + xy = z + x - xyz$, majd 0-ra rendezve az

$$yz - z + xyz - xz + xy - x = 0$$

egyenletet kapjuk. A bal oldalon $(y-1)$ kiemelhető és így az

$$(y-1)(z + xz + x) = 0$$

egyenlethez jutunk.
1. eset. Ha $y - 1 = 0$, akkor $y = 1$ és a $z + xz + x$ kifejezés értéke tetszőleges egész szám lehet, tehát x és z értékének is tetszőleges, 0-tól különböző egész számot választhatunk.
2. eset. Ha $z + xz + x = 0$, akkor

$$z + xz + x + 1 = (x+1)(z+1) = 1.$$

Mivel x és y egész számok, ezért $x + 1 = 1$ és $z + 1 = 1$ vagy $x + 1 = -1$ és $z + 1 = -1$. Az első esetben $x = z = 0$ adódik és ez nem lehetséges. A második esetben $x = z = -2$ és visszahelyettesítve az eredeti egyenletbe látható, hogy tetszőleges $y \neq 0$ esetén teljesül az egyenlőség, tehát a feladat megoldásainak halmaza

$$M = \{(x, 1, z) | x, z \in \mathbb{Z}^*\} \cup \{(-2, y, -2) | y \in \mathbb{Z}^*\}.$$

⊛

Második megoldás. A tagok csoportosításával az

$$\frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{y}\right) + \frac{1}{z}\left(1 - \frac{1}{y}\right) + \left(1 - \frac{1}{y}\right) = 0$$

egyenlethez jutunk, tehát az

$$\left(1 - \frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z} + 1\right) = 0$$

egyenletet kell megoldanunk. Ha $y = 1$, akkor x és z tetszőleges lehet, különben az $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = 1$ egyenlőségnek kell teljesülnie. $|x| > 2$ és $|z| > 2$ esetén $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} < 1$. Ugyanakkor ha $|x| = 1$ vagy $|z| = 1$, akkor ellentmondáshoz jutunk, tehát csak a $|x| = 2$ esetet kell megvizsgálni. Ebben az esetben az $x = z = -2$ megoldáshoz jutunk, tehát

$$M = \{(x, 1, z)|x, z \in \mathbb{Z}^*\} \cup \{(-2, y, -2)|y \in \mathbb{Z}^*\} .$$

$\circledast$

4. Feladat. A dubai Burj Khalifa felhőkarcoló 160 emeletes. Induljon el egy lift a földszintről, és tételezzük fel, hogy útja során minden emeleten pontosan egyszer áll meg. Mennyi az a leghosszabb út, amit eközben megtehet, ha két szomszédos emelet közti távolság 4 méter?

Fejér Szabolcs, Miskolc

Első megoldás. Vizsgáljuk meg például, hogy legfeljebb hányszor teheti meg a $[20, 21]$ emeleti intervallumot! Ha a lift felfelé mozog, akkor a „START” állomás lehet a $0, 1, \ldots, 20$ sorszámú emelet, a „CÉL” pedig a $21, 22, \ldots, 160$. Mivel minden emeleten pontosan egyszer állhat meg, ezért legfeljebb 21-szer mehet át ezen a szakaszon úgy, hogy felfele halad. Ha lefelé mozog, akkor a „START” állomás a $21, 22, \ldots, 160$ emeletek, a „CÉL” pedig az $1, 2, \ldots, 20$ emelet, így lefelé legfeljebb 20-szor haladhat át. Ez összesen maximum 41 eset. A $[79, 80]$ intervallumon felfelé a „START” lehet $0, 1, \ldots, 79$ (ez 80 eset), a „CÉL” pedig $80, 81, \ldots, 160$ (81 eset), ezért legfeljebb 80-szor haladhat át ezen a szakaszon. Lefelé a „START” ugyancsak 81, a „CÉL” pedig 79, így összesen legfeljebb 80+79-szer mehet át. Ha egy emelettel feljebb megyünk, a $[80, 81]$ szakaszra, akkor felfelé „START” 81 féle, „CÉL” 80 féle, tehát maximum 80-szor mehet át felfelé menetben. Lefelé „START” 80

féle, „CÉL” 80 féle, tehát összesen legfeljebb $80 + 80$ féleképpen mehet át ezen a szakaszon. Minden e fölötti szintre igaz, hogy az intervallum fölött kevesebb megálló van, így ez határozza meg a lehetséges maximális esetek számát.
Összefoglalva tehát az $[i-1, i]$ szintek között a lift legfeljebb $2i-1$-szer mehet át, ha $1 \leq i \leq 80$, és $2(161-i)$-szer, ha $81 \leq i \leq 161$. Így a lehető leghosszabb út nem haladhatja meg a

$$4(1 + 3 + \ldots + 159 + 160 + 158 + \ldots + 2)$$

métert, vagyis a $\frac{4 \cdot 160 \cdot 161}{2} = 51520$ métert.
Másrészt ez létre is jöhet, ha a megállók sorban $0, 160, 1, 159, 2, 158, \ldots, 79, 81, 80$. $\circledast$

Második megoldás. Jelölje x_i az i-edik megállónak megfelelő emelet számát. Két egymásutáni megálló közti távolság $4|x_i - x_{i+1}|$. Másrészt

$$|x_i - x_{i+1}| + |x_{i+1} - x_{i+2}| = |x_i - x_{i+2}|$$

ha az $(i+1)$-edik megállónál a lift nem változtat irányt. Ez azt mutatja, hogy $x_i < x_{i+1} < x_{i+2}$ vagy $x_i > x_{i+1} > x_{i+2}$ esetén növelhető az útvonal hossza, ha az $(i+1)$-edik megállót máshová tennénk a megállók sorozatában. Így a leghosszabb útvonal esetén (ami létezik, mivel véges sok különböző útvonal van) az

$$S = 4\left(|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + \ldots + |x_{160} - x_{161}|\right)$$

kifejezésben a moduluszok felbontása után az x_i, $2 \leq i \leq 160$ számok kétszerese jelenik meg pozitív vagy negatív előjellel és kifejtésben szereplő együtthatók összege 0 (pozitív előjelű 80 darab van, mindegyik $+2$ együtthatóval, míg negatív 81 darab van, ebből 79 együtthatója -2 és 2 együtthatója -1). Ez akkor a legnagyobb, ha a nagy számok jelennek meg pozitív előjellel és a kicsik negatív előjellel. Pontosabban akkor a lehető legnagyobb, ha a $81, 82, \ldots, 160$ számok vannak pozitív előjellel és a $0, 1, 2, \ldots, 80$ számok negatív előjellel. Ez el is érhető ha a megállókat úgy rakjuk sorba, hogy bármely két egymásutáni megálló közt haladjon át a 80-as szinten. Ebben az esetben ugyanis a moduluszok felbontása után a 80-nál nagyobbak mind pozitív előjelűek lesznek és a 80-nál nem nagyobbak mind negatív előjelűek. $\circledast$

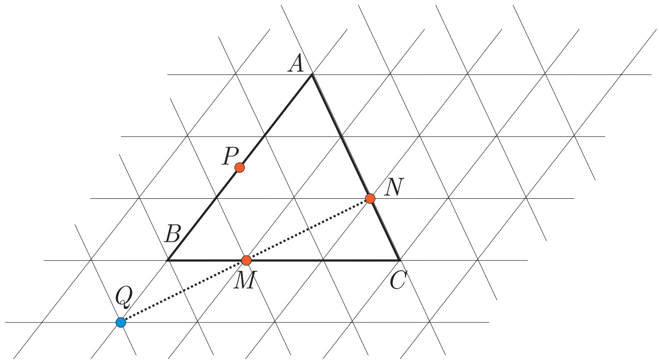
2. Megjegyzés. A második megoldás mutatja, hogy nemcsak az első megoldásban megadott sorrend esetén jön ki a leghosszabb útvonal, hanem sok más esetben is.

5. Feladat. Az ABC háromszög AC és BC oldalán felvesszük a C-hez, illetve B-hez közelebb eső N és M harmadolópontot, valamint az AB oldal P felezőpontját, majd az eredeti háromszöget kitöröljük. Szerkesszük vissza az M, N és P pont alapján az eredeti háromszöget!

Kovács Lajos, Székelyudvarhely

Első megoldás. Képzeljük el, hogy a háromszög a mellékelt ábrán látható végtelen rács része. Így, ha Q az N szimmetrikusa az M-re nézve, akkor a PQ egyenes egybeesik az AB egyenessel, és B a PQ-t öt egyenlő részre osztó pontok közül a második (a Q-tól kezdve). Ez viszont megszerkeszthető és a szerkesztés a következő lépésekre bontható:

- megszerkesztjük az N-nek az M-re vonatkozó Q szimmetrikusát;
- megszerkesztjük a PQ szakasznak azt a B pontját, amelyre $QB = \frac{2}{5}PQ$;
- a QP meghosszabbításán felmérjük a $PA = PB$ szakaszt;
- a BM és AN egyenesek metszéspontja a C pont.



⊗

Második megoldás. Ha a megfelelő kisbetűkkel jelöljük a csúcsok helyzetvektorait, akkor $3m = 2b + c$, $3n = 2c + a$ és $2p = a + b$. Így $b = \frac{1}{5}(2p - 3n + 6m)$, vagyis ha M-et választjuk a helyzetvektorok kezdőpontjának, akkor $b = \frac{1}{5}(2p - 3n)$ és ez éppen az első bizonyításbeli tulajdonság (vagyis B a PQ-t $3:2$ arányban osztó pont). Ha nem választjuk M-et kezdőpontnak, akkor az N-nek az O kezdőpontra vonatkozó Q szimmetrikusa esetén megszerkesztendő a PQ-nak az R pontja, amely a PQ szakaszt $3:2$ arányban osztja, majd az r-hez hozzá kell adni a $\frac{6}{5}m$ vektort. ⊗

3. Megjegyzés. A második megoldáshoz hasonló gondolatmenetet használhatunk akkor is, ha analitikus geometriai eszközöket (koordinátákat) használunk (vagy akár komplex számokat). A megoldás lényege abban áll, hogy az eredeti szerkesztés alapján kifejezzük az A, B és C koordinátáinak függvényében az M, N és P koordinátáit, majd a kapott összefüggésekből kifejezzük az eredeti csúcsok koordinátáit az M, N, P koordinátái függvényében (ez egy egyenletrendszer megoldása), és végül a kapott összefüggések alapján megszerkesztjük a pontokat.

6. Feladat. Színezzük ki egy szabályos 2010-szög csúcsait 3 színnel, mindhárom színt ugyanannyiszor használva. Igaz-e, hogy bármely színezés esetén lesz olyan szabályos háromszög, amelynek vagy minden csúcsa azonos színű, vagy a három csúcsa három különböző színű?

Fejér Szabolcs, Miskolc

Első megoldás. Az állítás nem igaz, ugyanis van olyan színezés, mely esetén minden szabályos háromszög csúcsai kétféle színűek. Egy ilyen színezést megkaphatunk, ha számozzuk a csúcsokat 1-től 2010-ig (az óramutató járásával ellentétes sorrendben), majd az $1, 2, \ldots, 670$ sorszámú csúcsokat az egyik színnel (pl. pirossal) színezzük, a következő 335 csúcsot a második színnel (pl. kékkel), a következő 335 csúcsot a harmadik színnel (pl. sárgával), a következő 335 csúcsot ismét a második színnel (kékkel) és végül az utolsó 335 csúcsot a harmadik színnel (sárgával). A szabályos háromszögek csúcsainak sorszáma mindig $i, i+670, i+1340$ alakú, ahol $i \leq 670$, tehát az egyik csúcs mindig piros és a másik kettő mindig azonos színű, mivel $i + 1340 = i + 670 + 2 \cdot 335$. $\circledast$

Második megoldás. Jelöljük a színeket p, k és s-sel. Összesen 670 egyenlő oldalú háromszög van, amelynek a csúcsai a sokszög csúcsai közül kerülnek ki. Ha ezek között nincs olyan, amelynek azonos színűek a csúcsai, vagy mind különbözőek, akkor a csúcsok színezése szerint a 670 háromszög a következő hat osztályba sorolható:

$\{p, k, k\}$, $\{p, s, s\}$, $\{s, p, p\}$, $\{k, p, p\}$, $\{k, s, s\}$ és $\{s, k, k\}$

(a $\{p, k, k\}$ azt jelenti, hogy két csúcs k színű és egy csúcs p színű stb.). Ha ezeknek az osztályoknak a számosságát rendre a, b, c, d, e és f jelöli, akkor a színek összeszámlálása és a feltétel alapján írhatjuk, hogy

$$\begin{cases} a+b+2c+2d=670 \\ d+e+2f+2a=670 \\ c+f+2b+2e=670 \end{cases} \tag{1}$$

Ha ebből az egyenletrendszerből kifejezzük az a-t, a b-t és a d-t a többi változó függvényében, akkor az

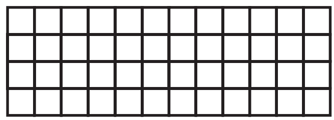
$$\begin{cases} a=335-e-\frac{3}{2}f+\frac{c}{2} \\ b=335-e-\frac{c}{2}-\frac{f}{2} \\ d=-c+e+f \end{cases} \tag{2}$$

egyenlőségekhez jutunk. Ez mutatja, hogy több olyan színezés is van, amelyben nincs sem egyszínű szabályos háromszög, sem olyan, amelynek a csúcsai mind különböző színűek. Például $c = f = 0$ és $e < 335$ esetén $a = 335 - e$, $b = 335 - e$ és $d = e$ egy ilyen színezést ír le. Világos, hogy a csúcsok színezését elvégezhetjük úgy, hogy kiválasztjuk a 670 egyenlő oldalú háromszögből (tetszőlegesen) azt az a darabot, amelyet az első osztálynak megfelelően színezünk, aztán a maradékból azt a b darabot, amelyet a második osztálynak megfelelően színezünk és a többit a negyedik osztálynak megfelelően színezzük. $\circledast$

4. Megjegyzés. A második megoldás rávilágít arra, hogy nagyon sok olyan színezés létezik, amelyben nincs sem egyszínű szabályos háromszög, sem olyan, amelynek a csúcsai mind különböző színűek, és ugyanakkor megmutatja az összes ilyen színezés szerkezetét is.

10. osztály

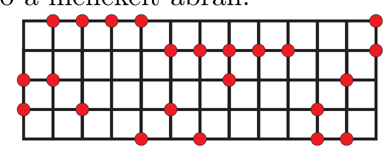
1. Feladat. Legalább hány szeget kell beütni az alábbi farács rácspontjaiba ahhoz, hogy biztosan legyen köztük 4 szeg, amely egy téglalapot feszít ki?



Nagy Örs, Kolozsvár

Megoldás. Tételezzük fel, hogy a lehető legtöbb szeget beütöttük a rácspontokba anélkül, hogy azok valamilyen téglalapot feszítenének ki. Jelöljük m-mel az egy függőleges (lásd a mellékelt ábrát) rácsegyenesre illeszkedő szegek maximális számát.
Ha $m = 5$, akkor 12 függőleges rácsegyenes csak egy-egy szeget tartalmazhat, különben keletkezne olyan téglalap, amelynek oldalai párhuzamosak a rácsegyenesekkel és a csúcsaiban van egy-egy szeg. Így $m = 5$ esetén 18 szeg már biztosítaná a téglalap keletkezését.
Ha $m = 4$, akkor további 4 függőleges rácsegyenes tartalmazhat $2-2$ szeget és a többi legfeljebb 1-et (különben ismét keletkezne olyan téglalap, amelynek oldalai a rácsegyenesekkel párhuzamosak). Így ebben az esetben 21 szeg biztosítaná a téglalap keletkezését.
Ha $m = 3$, akkor két esetet kell megvizsgálni aszerint, hogy hány függőleges rácsegyenes tartalmaz 3 szeget. Ha két ilyen rácsegyenes is van, akkor csak további 4 függőleges rácsegyenes tartalmazhat 2 szeget és az összes többi legfeljebb 1-et (különben ismét keletkezne olyan téglalap, amelynek oldalai a rácsegyenesekkel párhuzamosak). Ebben az esetben 22 szeg esetén már megjelenne legalább egy téglalap. Ha csak egy függőleges rácsegyenes

tartalmaz 3 szeget, akkor további 7 függőleges rácsegyenes tartalmazhat $2-2$ szeget és az összes többi legfeljebb 1-et. Ebben az esetben 23 szeg esetén megjelenne olyan téglalap, amelynek oldalai párhuzamosak a rácsegyenesekkel.
Ha $m=2$, akkor mivel az 5 vízszintes egyenesből 10 féleképpen választhatunk ki kettőt, ezért 10 függőleges rácsegyenesen lehet $2-2$ pont és a többin $1-1$. Ez összesen 23 pont, tehát itt csak 24 pont esetén jelenne meg olyan téglalap, amelynek oldalai párhuzamosak a rácsegyenesekkel. Ugyanakkor természetes, hogy más téglalapok is keletkezhetnek, tehát ahhoz, hogy a megoldás teljes legyen kell egy olyan elhelyezést találni a 23 szegre, amikor semmilyen téglalapot nem feszítenek ki (tehát nemcsak olyat nem, amelynek az oldalai a rácsegyenesekkel párhuzamosak). Egy ilyen elhelyezés látható a mellékelt ábrán.



Ha $m=1$, akkor világos, hogy legfeljebb 13 szeg lenne a farácson, tehát a feladatban megfogalmazott kérdésre a válasz 24. ⊛

2. Feladat. Határozzuk meg azokat az $x, y \in \mathbb{N}$ számokat, amelyekre
$$xy(x-y) = 13x + 15y.$$

Kacsó Ferenc, Marosvásárhely

Első megoldás. A $(0,0)$ megoldása az egyenletnek és ha x, y közül az egyik nulla, akkor a másik is nulla, tehát a továbbiakban feltételezhetjük, hogy $x \neq 0 \neq y$. Két esetet tárgyalunk aszerint, hogy y osztható 13-mal vagy sem.
1. eset. Ha y osztható 13-mal, akkor létezik $a \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $y = 13a$, tehát $x = a(x^2 - 13ax - 15)$. Ez csak akkor lehetséges

ha $a|x$, vagyis létezik $b \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $x = ab$. Visszahelyettesítés után a

$$15 = b(a^2b - 13a^2 - 1)$$

egyenlőséghez jutunk és innen következik, hogy $b|15$, ezért $b \in \{1,\ 3,\ 5,\ 15\}$. A négy eset kipróbálása után csak $b = 15$ esetén kapunk a-nak is természetes értéket, tehát $x = 15$ és $y = 13$.
2. eset. Ha y nem osztható 13-mal, akkor

$$13x = y(x^2 - xy - 15)$$

alakba írható, és mivel y relatív prím a 13-mal, az x osztható kell legyen az y-nal. Így létezik $k \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $x = ky$ és ezt visszahelyettesítve a $15 = k(ky^2 - y^2 - 13)$ egyenlethez jutunk, ahonnan $k|15$, tehát $k \in \{1,\ 3,\ 5,\ 15\}$. Innen a megoldások $x = 9,\ y = 3;\ x = 10,\ y = 2;\ x = 15,\ y = 1$.
Összesítve, az egyenletnek a következő megoldásai lehetségesek:

$$M = \{(0,0), (15,13), (9,3), (10,2), (15,1)\}.$$

⊛

Második megoldás. Az egyenlet alapján $x|15y$ és $y|13x$. Ha d az x és y legnagyobb közös osztója és $d = 1$, akkor $y \in \{1, 13\}$. $y = 1$ esetén $x = 15$ és $y = 13$ esetén szintén az $x = 15$ megoldáshoz jutunk. Ha $d > 1$, akkor létezik olyan $x_1, y_1 \in \mathbb{N}$, amelyre x_1 és y_1 relatív prímek valamint $x = dx_1$ és $y = dy_1$, tehát az egyenlet

$$d^2x_1y_1(x_1 - y_1) = 13x_1 + 15y_1$$

alakban írható. Ez alapján $y_1|13$, tehát $y_1 \in \{1, 13\}$.
$y_1 = 1$ esetén az

$$x_1\left(d^2(x_1 - 1) - 13\right) = 15$$

egyenlethez jutunk, ahonnan $x_1 \in \{1, 3, 5, 15\}$. Az $x_1 = 1$ eset nem felel meg és a többi esetből rendre a $d = 3$, $d = 2$, illetve $d = 1$ értékekhez jutunk.
$y_1 = 13$ esetén az

$$x_1 \left(d^2(x_1 - 13) - 1\right) = 15$$

egyenlethez jutunk, ahonnan $x_1 \geq 14$ és $x_1|15$, tehát csak az $x_1 = 15$ esetet szükséges vizsgálni. Ebben az esetben $d = 1$, tehát nem jutunk újabb megoldáshoz. Összesítve

$$M = \{(0, 0), (15, 13), (9, 3), (10, 2), (15, 1)\}.$$

⊛

3. Feladat. Adott a síkon négy pont úgy, hogy közülük semelyik három sincs egy egyenesen. Kiszíneztük a négy pontot négy színnel: pirossal, kékkel, zölddel, és sárgával. Ezután kiszíneztük a pontok által meghatározott szakaszokat is úgy, hogy azok színe megegyezett valamelyik végpontjuk színével, és közben mind a négy színt újra felhasználtuk. Igaz-e, hogy mindig van olyan pont, hogy
(1) vagy a belőle kiinduló szakaszok közül,
(2) vagy a másik három pont közti szakaszok közül
az egyik piros, a másik kék, a harmadik zöld?

dr. Kántor Sándorné, Debrecen

Megoldás. Tekintsük a piros, kék és zöld pontokat. Ha az ezek által meghatározott három szakasz piros, kék, illetve zöld színű, akkor a feladat második állítása igaz a sárga pontra. Vizsgáljuk azokat az eseteket, amelyekre nem teljesül a (2) állítás a sárga pontra. Mivel minden szakasz színe megegyezik valamelyik végpontjának a színével, ez csak úgy lehet, ha a piros, kék és zöld pontok által meghatározott 3 szakasz közül 2 azonos színű. Mivel a színek szerepe azonos, feltehetjük, hogy a 3 szakasz közül 2 piros, 1 pedig kék színű. Tekintsük ezután a zöld pontot. Mivel minden pontból indul saját színű szakasz (hisz a színezés során mind a 4 színt felhasználjuk), ezért a zöld pontból indul ki zöld szakasz. Ezek szerint a zöld pontban egy piros, egy kék és egy zöld szakasz találkozik, tehát a zöld pontra az (1) állítás igaz. ⊛

4. Feladat. Mennyi azoknak a pozitív egészeknek az összege, amelyek 2010-nél nem nagyobbak, és számjegyeik összege páratlan?

Fejér Szabolcs, Miskolc

Megoldás. Jelölje $S(n)$ az n szám számjegyeinek összegét! Legyen $n < 1000$. Ekkor két fontos állítást fogalmazhatunk meg.
1) Ha $S(n)$ páros, akkor $S(999 - n)$ páratlan (a kivonásnál sehol sincs átvitel).
2) Ha $S(n)$ páros, akkor $S(1000 + n)$ páratlan.
Tehát az első állítás miatt a $H = \{0,\ 1, \dots, 999\}$ halmaz elemei közül pontosan 500 páros összegű, 500 páratlan. A második állítás miatt a H halmaz páros összegű számaihoz 1000-t adva kapunk páratlan összegű számot (szintén 500-at), ezek lesznek a $K = \{1000,\ 1001, \dots, 1999\}$ halmaz páratlan összegű számai. A kívánt összeget 2000-ig, úgy kapjuk, hogy a H halmaz elemeinek összegéhez hozzáadunk $500 \cdot 1000$-t. A keresett összeg tehát

$$\frac{1000 \cdot 999}{2} + 500 \cdot 1000 + 2001 + 2003 + 2005 + 2007 + 2009 + 2010,$$

vagyis 1011535. ⊛

5. Feladat. Legyen hat nem feltétlenül egyforma sugarú kör egy síkban. Igazoljuk, hogy ha a hat körnek van közös belső pontja, akkor az egyik kör középpontja egy másik belsejében van.

Mátyás Mátyás, Brassó

Megoldás. Legyen P egy pont, amelyik mind a hat kör belsejében megtalálható. Az egyik tetszőlegesen választott körtől elindulva, és az óramutató járásával ellentétes irányba haladva P körül, jelölje $\mathcal{C}_i(O_i, R_i), 1 \leq i \leq 6$ a köröket. Ekkor

$$m(\widehat{O_1PO_2}) + m(\widehat{O_2PO_3}) + \ldots + m(\widehat{O_5PO_6}) + m(\widehat{O_6PO_1}) = 2\pi.$$

Ha mind a hat fenti szög mértéke megegyezik $\frac{\pi}{3}$-mal akkor az O_iPO_{i+1}, $1 \leq i \leq 6$ $(O_7 = O_1)$ háromszögekben

$$O_iO_{i+1} \leq \max\{PO_i, PO_{i+1}\} < \max\{R_i, R_{i+1}\}.$$

Ha $R_i \leq R_{i+1}$, akkor az O_i pont a $\mathcal{C}_{i+1}(O_{i+1}, R_{i+1})$ kör belsejében található, különben az O_{i+1} pont található a $\mathcal{C}_i(O_i, R_i)$ kör belsejében.

Ha nem mind a hat szög mértéke $\frac{\pi}{3}$, akkor létezik $1 \leq i \leq 6$ úgy, hogy $m(\widehat{O_iPO_{i+1}}) < \frac{\pi}{3}$. Az $O_iO_{i+1}P$ háromszögben teljesül, hogy

$$m(\widehat{O_iPO_{i+1}}) < \max\{m(\widehat{PO_iO_{i+1}}),\ m(\widehat{PO_{i+1}O_i})\}$$

Mivel a háromszögben nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal fekszik, ezért az $O_iO_{i+1}P$ háromszögben teljesül, hogy

$$O_iO_{i+1} < \max\{PO_i,\ PO_{i+1}\}.$$

Ugyanakkor a P pont a $\mathcal{C}_i(O_i, R_i)$ és a $\mathcal{C}_{i+1}(O_{i+1}, R_{i+1})$ körök belsejében található, tehát $PO_i < R_i$ és $PO_{i+1} < R_{i+1}$. Így

$$O_iO_{i+1} < \max\{R_i, R_{i+1}\}.$$

Ha $R_i \leq R_{i+1}$, akkor az O_i pont a $\mathcal{C}_{i+1}(O_{i+1}, R_{i+1})$ kör belsejében található, különben az O_{i+1} pont található a $\mathcal{C}_i(O_i, R_i)$ kör belsejében. $\circledast$

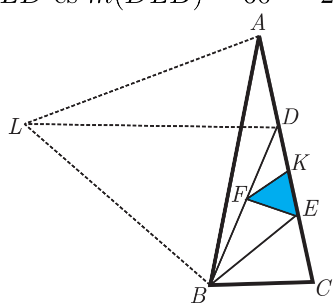
6. Feladat. Adott az ABC háromszög, amelyben $AB = AC$ és $m(\widehat{BAC}) = 20°$. Az AC oldalon felvesszük a D, E pontokat úgy, hogy $AD = BC$ és BE az $\widehat{ABC}$ szögfelezője. Legyen F és K a BD illetve DE szakasz felezőpontja. Bizonyítsuk be, hogy az $EFK_{\triangle}$ egyenlő oldalú.

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

Első megoldás. Segédszerkesztést végzünk: megszerkesztjük az ABC háromszöggel kongruens (egybevágó) LDA háromszöget (L és B az AC egyeneshez viszonyítva ugyanabban a félsíkban helyezkednek el).
Az ABC és LDA egyenlő szárú háromszögekben

$$AB = AC = LA = LD,$$

az alapokon fekvő szögek $80°$-osak. $AL = AB$ és $m(\widehat{LAB}) = 80° - 20° = 60°$, innen következik, hogy az $ALB_{\triangle}$ egyenlő oldalú, tehát $LA = LB = LD$ és $m(\widehat{DLB}) = 60° - 20° = 40°$.



Az LBD egyenlő szárú háromszögben az alapon fekvő szögek $m(\widehat{LBD}) = m(\widehat{LDB}) = 70°$, ahonnan következik, hogy

$$m(\widehat{BDC}) = 180° - (80° + 70°) = 30°$$

és $m(\widehat{ABD}) = 70° - 60° = 10°$, így $m(\widehat{DBE}) = \frac{80°}{2} - 10° = 30°$.

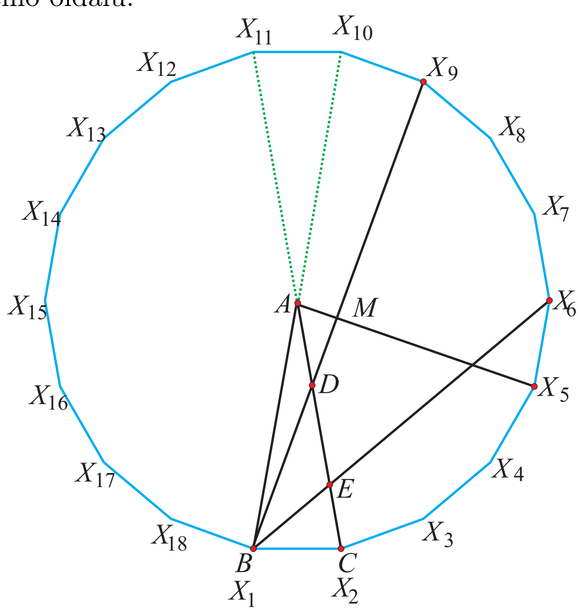
Tehát EBD egyenlő szárú háromszög és a BD alap felezőpontja F, így EF merőleges a BD-re, ahonnan következik, hogy FK az EFD derékszögű háromszögben oldalfelező (súlyvonal), tehát $FK = KE$ és $m(\widehat{FED}) = 90° - 30° = 60°$ vagyis EFK egyenlő oldalú háromszög. ⊛

Második megoldás. Gondolkodjunk visszafele: Mire lenne szükség ahhoz, hogy EFK egyenlő oldalú legyen? Mivel BE felezi az ABC szöget, ezért $m(\widehat{EBC}) = 40°$, tehát $m(\widehat{BEC}) = 60°$ és így az $\widehat{FEK}$ mértéke pontosan akkor lenne $60°$, amikor FE szögfelező is a DEB háromszögben. Mivel F a BD felezőpontja, ez pontosan akkor teljesül, ha a BED háromszög egyenlő szárú. Ehhez elégséges belátni, hogy a $\widehat{DBE}$ mértéke $30°$ vagy az $\widehat{ABD}$ mértéke $10°$. Tehát a feladat visszavezetődik a következő tulajdonságra:
Tekintjük az ABC háromszöget, amelyben $AB = AC$ és $m(\widehat{BAC}) = 20°$. Az AC oldalon felvesszük a D pontot. Igazoljuk, hogy az $AD = BC$ egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $m(\widehat{ABD}) = 10°$.
Amiatt, hogy a D pont egyértelműen szerkeszthető az $AD = BC$ egyenlőség alapján is és a $m(\widehat{ABD}) = 10°$ egyenlőség alapján is, elégséges igazolni, hogy ha $m(\widehat{ABD}) = 10°$, akkor $AD = BC$. Ez belátható a szinusztétel segítségével, hisz az ABD háromszögben $AD = AB\frac{\sin 10°}{\sin 30°}$. Másrész $\frac{BC}{2} = AB \sin 10°$, tehát $AD = BC$. ⊛

5. Megjegyzés. Az $AD = BC$ egyenlőség belátható csak kongruencia segítségével, ha megszerkesztjük az A-ból a BD-re és a BC-re húzott merőlegeseket.

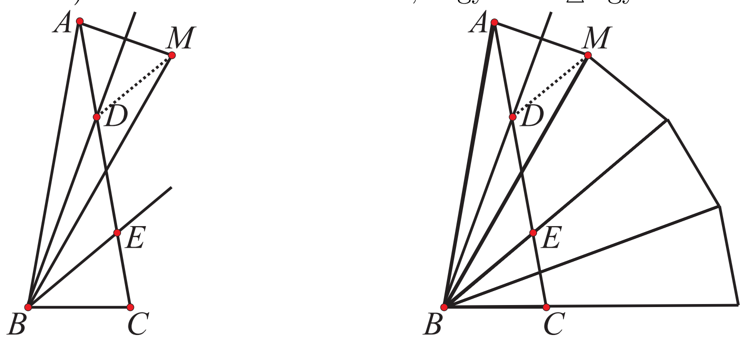
Harmadik megoldás. Az ABC háromszög tekinthető egy szabályos 18 oldalú sokszög részének, amint a mellékelt ábra mutatja (A a sokszög köré írt kör középpontja, B és C két egymás melletti csúcs). Ha ebben a sokszögben meghúzzuk az X_1X_9 átlót és az

AX_5 szakaszt, akkor $AX_5 \perp X_1X_9$ (mert $X_5X_1 = X_5X_9$). Ugyanakkor az X_1X_9 és X_2X_{11} átlók szöge $30°$-os, tehát ha $\{D\} = X_1X_9 \cap X_2X_{11}$ és $\{M\} = AX_5 \cap X_1X_9$, akkor az ADM derékszögű háromszögben $AM = \frac{AD}{2}$. Másrészt az $X_1X_9X_{10}$ háromszögben AM középvonal, tehát $AM = \frac{X_9X_{10}}{2}$. Ez alapján $AD = X_9X_{10} = X_1X_2 = BC$, tehát az X_2X_{11} és X_1X_9 átlók metszéspontja megegyezik a feladatban (az $AD = BC$ feltétel alapján) megszerkesztett D ponttal. Így világos, hogy $m(\widehat{DBE}) = m(\widehat{EDB}) = 30°$, és ez alapján következik, hogy az EFK háromszög egyenlő oldalú.



⊛

Negyedik megoldás. Szerkesszük meg az M pontot úgy, hogy $m(\widehat{MAB}) = 80°$ és $MB = AB$ (M és C az AB-hez viszonyítva ugyanabban a félsíkban van). A szerkesztés alapján a BAM háromszög egybevágó az ABC háromszöggel, tehát $MA = BC$. A szerkesztés alapján $m(\widehat{MAC}) = 60°$, tehát az MAD háromszög egyenlő oldalú. Így D és B az MA oldalfelező merőlegesén van, tehát a BAM egyenlő szárú háromszögben BD az ABM szög szögfelezője. Ez alapján $m(\widehat{ABD}) = 10°$, tehát $m(\widehat{BDE}) = m(\widehat{DBE}) = 30°$ és ebből következik, hogy $EFK_\triangle$ egyenlő oldalú.



⊛

6. Megjegyzés. A jobb oldali ábrán látható, hogy a negyedik megoldás alapötlete ugyanaz, mint a harmadik megoldás alapötlete, pontosabban a szabályos 18 oldalú sokszögbe való beágyazás. A két beágyazás a sokszögnek a háromszöghöz viszonyított helyzetében különbözik.

7. Megjegyzés. A második megoldásban, ha nem a fordított irányt vizsgáljuk, hanem az $AD = BC$ feltétel alapján szeretnénk meghatározni a $\widehat{ABD}$ szög mértékét, akkor az $\alpha = m(\widehat{ABD})$ jelöléssel a

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha + 20°)} = \frac{\sin 10°}{\sin 30°}$$

egyenlethez jutunk (az ABD_Δ és az eredeti háromszögben felírt szinusztétel alapján). Származtatással a $\mathrm{tg}\alpha = \mathrm{tg}10°$ egyenlőséget kapjuk, ahonnan $\alpha = 10°$.

11. osztály

1. Feladat. Határozzuk meg az 1, 2, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 16, 17, 19, 21, 23, 25, ... sorozat 2010. tagját, ha a sorozat tagjait úgy képeztük, hogy az 1-es után leírtuk az őt követő 2 páros számot, majd a kapott számot követő 3 páratlan számot, az ezután kapott számot követő 4 páros számot és így tovább.

dr. Pintér Ferenc, Nagykanizsa

Első megoldás. Vegyük észre, hogy a leírt részsorozatok mindig négyzetszámmal végződnek. Teljes indukcióval belátjuk, hogy ha k^2 után következő $k+1$ számot leírjuk az adott szabály szerint, akkor $(k+1)^2$-hez jutunk. Ehhez csak azt kell észrevennünk, hogy az első leírt szám k^2+1 és azt követően k darab 2-est kell hozzáadnunk, hogy a „váltás” bekövetkezzen. Viszont $k^2+1+2k = (k+1)^2$. Ha a leírtakat figyelembe vesszük és k-val jelöljük azt a legnagyobb egész számot, melynek a négyzete a 2010. tag előtt van a sorozatban, akkor teljesülnie kell a következő egyenlőtlenségnek:

$$1+2+3+\ldots+k = \frac{k(k+1)}{2} \leq 2010.$$

Innen $k = 62$, ekkor $\frac{k(k+1)}{2} = 1953$. Következésképpen a sorozat 2010. tagját megkapjuk, ha $62^2+1 = 3845$-höz hozzáadunk $(2010-1953-1)\cdot 2 = 56\cdot 2$-t, azaz $3845+56\cdot 2 = 3957$. ⊛

Második megoldás. Számítsuk ki a sorozat első néhány tagját és figyeljük az indexek és a tagok közti összefüggést:

1	2	4	5	7	9	10	12	14	16	17
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}

A „váltások” az $1, 3, 6, 10, 15, \ldots$ indexeknél következnek be, hisz a csoportok (a táblázatban függőleges vonallal elválasztott részek) rendre $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ elemet tartalmaznak. Így az első k csoport összesen $1+2+3+\ldots+k=\frac{k(k+1)}{2}$ számot tartalmaz, vagyis a k-adik csoport utolsó elemének indexe $\frac{k(k+1)}{2}$. Ha a sorozatnak csak az $u_k = x_{\frac{k(k+1)}{2}}$ részsorozatát nézzük, akkor a sorozat képzési szabálya alapján $u_{k+1} = u_k + 2k + 1$ és $u_1 = 1$, tehát

$$u_k = \underbrace{1+3+5+\ldots+(2k-1)}_{k \text{ tag}} = k^2.$$

Ugyanakkor $\frac{62\cdot 63}{2} = 1953 < 2010 < 2016 = \frac{63\cdot 64}{2}$, tehát $x_{2016} = 63^2$ és ez a 63-adik csoport utolsó tagja. A csoporton belül az egymásutáni tagok különbsége 2, tehát

$$x_{2010} = x_{2016} - 2\cdot 6 = 3969 - 12 = 3957.$$

⊛

2. Feladat. Az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nemnegatív valós számok teljesítik az

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + 1\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + 3\cdot x_3 + \ldots + n\cdot x_n = 2010$$

egyenlőséget, ahol $n \in \mathbb{N}^*$ rögzített. Határozzuk meg az

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

legkisebb lehetséges értékét!

Borbély József, Tata

Első megoldás. Mivel az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ számok nemnegatívak, írhatjuk, hogy

$$1\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + 3\cdot x_3 + \ldots + n\cdot x_n \leq n(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n) \text{ és}$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leq (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2,$$

tehát, ha $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = s$, akkor $2010 \leq ns + s^2$. De az $s^2+ns-2010 = 0$ egyenlet egyik gyöke negatív és a másik pozitív, tehát az előbbi egyenlőtlenség alapján

$$s \geq \frac{-n + \sqrt{n^2 + 4 \cdot 2010}}{2}.$$

Másrészt ezt az értéket el is érhetjük, ha

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = 0 \text{ és } x_n = \frac{-n + \sqrt{n^2 + 4 \cdot 2010}}{2},$$

tehát az $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ összeg minimuma $\frac{-n+\sqrt{n^2+4\cdot 2010}}{2}$. ⊛

Második megoldás. Tekintsünk egy $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ szám n-est, amely teljesíti a feltételeket. Ha létezik olyan $j < n$, amelyre $x_j \neq 0$, akkor az x_j értékét cseréljük ki 0-ra és az x_n értékét $u > 0$-ra úgy, hogy az $(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \ldots, u)$ számokra is teljesüljön a feltétel. Mivel egyszerre csak két számot módosítunk, az

$$u^2 + nu = x_j^2 + jx_j + x_n^2 + nx_n$$

egyenlőségnek kell teljesülnie. Ugyanakkor az $u \to u^2 + nu$ függvény növekvő (mert $u > 0$) és világos, hogy

$$(x_n + x_j)^2 + n(x_n + x_j) > x_j^2 + jx_j + x_n^2 + nx_n,$$

tehát $x_n+x_j > u$. Ezzel beláttuk, hogy a végrehajtott csere során az $x_1+x_2+\ldots+x_n$ összeg csökken. Mivel legfeljebb $(n-1)$ cserével mindig eljuthatunk a $(0, 0, \ldots, 0, x)$ számokhoz, ahol

$$x = \frac{-n + \sqrt{n^2 + 4 \cdot 2010}}{2},$$

ezért az $x_1 + \ldots + x_n$ összeg legkisebb lehetséges értéke

$$\frac{-n + \sqrt{n^2 + 4 \cdot 2010}}{2}.$$

⊛

3. Feladat. Határozzuk meg a

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = 3 - 4x^2$$

egyenlet valós megoldásait!

Szilágyi Judit és Nagy Örs, Kolozsvár

Első megoldás. Létezési feltételek: $x \neq 0$ és $1 - x^2 \geq 0$, azaz $D = [-1, 1] \setminus \{0\}$.
$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = 3 - 4x^2 \iff \sqrt{1-x^2} = 3x - 4x^3$. Mivel a bal oldal pozitív, ezért a jobb oldalnak is pozitívnak kell lennie, azaz $3x - 4x^3 = x(3 - 4x^2) \geq 0$, ahonnan a létezési feltételeket figyelembe véve $x \in \left[-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \cup \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.
Négyzetre emelés és átcsoportosítás után a

$$16x^6 - 24x^4 + 10x^2 - 1 = 0$$

egyenlethez jutunk. Bevezetve a $t = x^2$, $t \geq 0$ jelölést, kapjuk, hogy

$$16t^3 - 24t^2 + 10t - 1 = 0.$$

Észrevehető, hogy $t_1 = \frac{1}{2}$ kielégíti az egyenletet, így a

$$\left(t - \frac{1}{2}\right)(16t^2 - 16t + 2) = 0$$

alakhoz jutunk, ahonnan $t_2 = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$ és $t_3 = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$. Tehát

$$x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2},\ x_{3,4} = \pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2},\ x_{5,6} = \pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

A létezési feltételek alapján

$$M = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right\}.$$

⊛

Második megoldás. A négyzetgyök létezéséhez szükséges, hogy $x \in [-1, 1]$. Így viszont létezik olyan $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, amelyre $x = \sin t$. A tört létezéséhez $x \neq 0$, tehát $t \neq 0$. Elvégezve az $x = \sin t$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ helyettesítést a $\cos t = \sin 3t$ egyenlethez jutunk. Ez rendre a következőképpen alakítható:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - 3t\right) - \cos t = 0$$

$$-2\sin\left(\frac{\pi}{4} - t\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2t\right) = 0,$$

ahonnan a vizsgált intervallumban csak a

$$t_1 = \frac{\pi}{4}, \quad t_2 = \frac{\pi}{8}, \quad t_3 = -\frac{\pi}{8}$$

megoldások lehetségesek, tehát

$$M = \left\{\sin\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{8}, -\sin\frac{\pi}{8}\right\}$$

A $\sin t = \sqrt{\frac{1-\cos 2t}{2}}$ összefüggés alapján $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, tehát a megoldáshalmazt felírhatjuk

$$M = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right\}$$

alakban is. ⊛

4. Feladat. Az $ABCD$ konvex négyszögben jelölje α a d_1 és d_2 hosszúságú AC, illetve BD átló által közrezárt szög mértékét. Mutassuk ki, hogy $ABCD$ akkor és csakis akkor négyzet, ha

$$(d_1 \sin A \sin C + d_2 \sin B \sin D) \cdot \sin\alpha = \sqrt{2(d_1^2 + d_2^2)}.$$

Longáver Lajos, Nagybánya

Első megoldás. A szinuszok majorálását, illetve a számtani és négyzetes középarányos közötti egyenlőtlenséget alkalmazzuk:

$$(d_1 \sin A \sin C + d_2 \sin B \sin D) \cdot \sin \alpha \leq$$

$$\leq d_1 \sin A \sin C + d_2 \sin B \sin D \leq$$

$$\leq d_1 + d_2 \leq 2\sqrt{\frac{d_1^2 + d_2^2}{2}} = \sqrt{2(d_1^2 + d_2^2)}.$$

Egyenlőséget pontosan akkor kapunk, ha

$$\sin A = \sin B = \sin C = \sin D = \sin \alpha = 1$$

és $d_1 = d_2$. Az $ABCD$ szögei pontosan akkor derékszögek, ha $ABCD$ téglalap, és egy téglalap átlói pontosan akkor merőlegesek egymásra, ha az négyzet, tehát a bizonyítás teljes. ⊛

Második megoldás. A Cauchy-Buniakovski-Schwarz egyenlőtlenség alapján

$$(d_1 \sin A \sin C + d_2 \sin B \sin D)^2 \leq$$

$$\leq \left(d_1^2 + d_2^2\right)\left(\sin^2 A \sin^2 C + \sin^2 B \sin^2 D\right) \leq 2\left(d_1^2 + d_2^2\right),$$

tehát a $\sin \alpha \leq 1$ egyenlőtlenség alapján következik, hogy

$$(d_1 \sin A \sin C + d_2 \sin B \sin D) \cdot \sin \alpha \leq \sqrt{2(d_1^2 + d_2^2)}.$$

Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha

$$\sin A = \sin B = \sin C = \sin D = \sin \alpha = 1$$

és a Cauchy-Buniakovski-Schwarz egyenlőtlenségben is egyenlőség van. A szögek alapján következik, hogy a négyszög olyan téglalap, amelyben az átlók merőlegesek, vagyis négyzet. Ebben az esetben a Cauchy-Buniakovski-Schwarz egyenlőtlenségben is teljesül az egyenlőség. ⊛

8. Megjegyzés. A két megoldás gyakorlatilag nem sokban különbözik, de ha általánosítani próbáljuk a feladatot a megoldásból kiindulva, akkor különböző tulajdonságokhoz juthatunk a két megoldás alapján.

5. Feladat. Adjuk meg az összes olyan háromszöget, amelyben mindhárom oldal hossza (méterben kifejezve) prímszám és a terület mérőszáma (négyzetméterben) természetes szám!

Mészáros Alpár Richárd, Kolozsvár

Megoldás. A megoldás során a szokásos jelöléseket használjuk. A Heron-képlet alapján

$$16T^2 = (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c).$$

Ha mindhárom oldal hossza legalább 3 lenne, akkor a jobb oldal páratlan és a bal oldal páros volna. Ez viszont ellentmondás, tehát a háromszögnek legalább az egyik oldala 2. A háromszög-egyenlőtlenség alapján csak a $2, 2, 2$ vagy $2, 2, 3$ illetve $2, p, p$ oldalhosszakkal rendelkező háromszögeket kell megvizsgálni, ahol p prímszám. Az első kettő területe irracionális, míg a harmadik esetben a $T^2 = p^2 - 1$ egyenlőséghez jutunk, ahonnan $(p-T)(p+T) = 1$ és ez csak $T = 0$, $p = 1$ esetén teljesülne, ami nem felel meg. Tehát nem létezik olyan háromszög, amelynek minden oldala prímszám és a területe egész szám. ⊛

9. Megjegyzés. Igazolható az is, hogy ha egy háromszög minden oldalának hossza prímszám, akkor a terület irracionális, pontosabban, ha minden oldal hossza páratlan, akkor a terület irracionális. A Heron-képlet alapján, ha T racionális, akkor T irreducibilis alakjában a nevező csak $1, 2$ vagy 4 lehet. Feltételezhetjük, hogy mindhárom oldal hossza legalább 3, mivel azoknak a háromszögeknek, amelyeknek legalább egy oldala 2 hosszúságú (és a másik kettő prím), a területét már megvizsgáltuk. Ha a nevező 1 vagy 2, akkor a jobb oldal páratlan és a bal oldal páros, tehát egyenlőség nem teljesülhet. Ha $T = \frac{u}{4}$, $u \in \mathbb{N}$, és u páratlan, akkor az

$$u^2 = (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) = 4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2$$

egyenlethez jutunk, ahonnan

$$4b^2c^2 = u^2 + (b^2 + c^2 - a^2)^2.$$

Ez az egyenlőség nem teljesülhet, mert két páratlan négyzetszám összege $8M + 2$ alakú és ez nem osztható 4-gyel.

6. Feladat. Jelölje a_k a k pozitív egész szám legnagyobb páratlan osztóját.

a) Igazoljuk, hogy
$$\left\{a_{2^k}, a_{2^k+1}, \ldots, a_{2^{k+1}-1}\right\} = \left\{1, 3, 5, ..., 2^{k+1} - 1\right\}.$$

b) Igazoljuk, hogy $\displaystyle\sum_{k=1}^{2^n-1} a_k = \frac{4^n - 1}{3}$.

Dávid Géza, Székelyudvarhely

Első megoldás. a) Ha minden $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$A_k = \left\{a_{2^k}, a_{2^k+1}, ..., a_{2^{k+1}-1}\right\},$$

akkor $A_0 = \{1\}$ és $A_1 = \{a_2, a_3\} = \{1, 3\}$. A bizonyításban matematikai indukciót használunk, tehát feltételezzük, hogy

$$A_{k-1} = \{1, 3, 5, \ldots, 2^k - 1\}.$$

Világos, hogy ha k páratlan, akkor $a_k = k$, míg $k = 2v$ esetén $a_k = a_v$. Ez alapján írhatjuk, hogy

$$A_k = \left\{a_{2^k}, a_{2^k+1}, ..., a_{2^{k+1}-1}\right\} =$$

$$= \left\{a_{2^k}, a_{2^k+2}, ..., a_{2^{k+1}-2}\right\} \cup \left\{a_{2^k+1}, ..., a_{2^{k+1}-1}\right\} =$$

$$= \left\{a_{2^{k-1}}, a_{2^{k-1}+1}, ..., a_{2^k-1}\right\} \cup \left\{2^k + 1, ..., 2^{k+1} - 1\right\} =$$

$$= A_{k-1} \cup \left\{2^k + 1, ..., 2^{k+1} - 1\right\} =$$

$$= \left\{1, 3, 5, ..., 2^{k+1} - 1\right\}.$$

b) Az A_{n-1} elemeinek összege

$$1 + 3 + \ldots + (2^n - 1) = (2^{n-1})^2 = 4^{n-1},$$

tehát az $S_n = \sum_{k=1}^{2^n-1} a_k$ sorozat teljesíti az $S_{n+1} = S_n + 4^n$ rekurziót. Ez alapján

$$S_n = 1 + 4 + 4^2 + \ldots + 4^{n-1} = \frac{4^n - 1}{3}.$$

⊛

Második megoldás. a) Jelölje H_1 a bizonyítandó egyenlőség bal oldalán megjelenő halmazt és H_2 a jobb oldalon megjelenő halmazt. Világos, hogy $H_1 \subseteq H_2$ és H_1 pontosan akkor tartalmaz

$$(2^{k+1} - 1) - (2^k - 1) = 2^k$$

elemet, ha az $a_{2^k}, a_{2^k+1}, \ldots, a_{2^{k+1}-1}$ számok páronként különböznek. Másrészt, ha az $x > y$ számok legnagyobb páratlan osztója ugyanaz, akkor létezik olyan $v \in \mathbb{N}^*$, amelyre $x = 2^v \cdot y$. Ez viszont nem lehetséges, ha $2^k \leq x, y \leq 2^{k+1} - 1$, mivel $2^k \leq$

$y \leq 2^{k+1} - 1$ esetén $2y \geq 2^{k+1}$. Így a két halmaz egyenlő, mivel ugyanannyi elemet tartalmaznak és $H_1 \subseteq H_2$.

b) $\sum\limits_{k=1}^{2^n-1} a_k = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \left(\sum\limits_{i=2^k}^{2^{k+1}-1} a_i \right) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \left(\sum\limits_{j=1}^{2^k} (2j-1) \right) =$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(2^{k-1}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} 4^{k-1} = \frac{4^n - 1}{3}.$$

⊛

10. Megjegyzés. 2^k és $2^{k+1}-1$ közt a számokat osztályozhatjuk aszerint, hogy 2-nek milyen hatványával oszthatók. Ha a 2 kitevője szerint csökkenő sorrendbe rendezzük és az azonos kitevő esetén növekvő sorrendbe, akkor gyakorlatilag a legnagyobb páratlan osztó szerinti növekvő sorrendet kapjuk. Például 32-től 63-ig a számokat a következőképpen osztályozhatjuk:
32-vel oszthatók: $32 = 32 \cdot 1$,
16-tal oszthatók: $48 = 16 \cdot 3$,
8-cal oszthatók: $40 = 8 \cdot 5$, $56 = 8 \cdot 7$,
4-gyel oszthatók: $36 = 4 \cdot 9$, $44 = 4 \cdot 11$, $52 = 4 \cdot 13$, $60 = 4 \cdot 15$
2-vel oszthatók: $34 = 2 \cdot 17$, $38 = 2 \cdot 19$, $42 = 2 \cdot 21$, $46 = 2 \cdot 23$, $50 = 2 \cdot 25$, $54 = 2 \cdot 27$, $58 = 2 \cdot 29$, $62 = 2 \cdot 31$
és végül a 2-vel nem oszthatók:

$$33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, ..., 61, 63.$$

Látható, hogy ezáltal 32-től 63-ig a természetes számokat a legnagyobb páratlan osztóik szerinti növekvő sorrendbe rendeztük.

11. Megjegyzés. A 2^k és $2^{k+1}-1$ közötti természetes számok 2-es számrendszerbeli reprezentációja $(k+1)$ számjegyet tartalmaz, és egy számból a legnagyobb páratlan osztót úgy kapjuk meg, hogy elhagyjuk a végéről a 0-kat. Emiatt nyilvánvaló a $H_1 = H_2$ egyenlőség.

12. osztály

1. Feladat. Határozzuk meg az $E(x) = (1 + \cos x)\sin x$ kifejezés legnagyobb értékét, ha x tetszőleges valós szám. Milyen x esetén veszi ezt fel?

Kovács Béla, Szatmárnémeti

Első megoldás. A sin és cos függvény periodikussága alapján elégséges a kifejezés maximumát a $[0, 2\pi]$ intervallumon meghatározni. Ugyanakkor látható, hogy ha $x \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, akkor a kifejezés értéke növelhető azáltal, hogy x helyett $\pi - x$-et vagy $x - \pi$-t vagy $2\pi - x$-et helyettesítünk (vagyis a változót visszavezetjük az első negyedre). Így feltételezhetjük, hogy $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, azaz $t = \cos x \geq 0$. A kifejezés ebben az esetben

$$E_1(t) = (1 + t)\sqrt{1 - t^2}$$

alakban írható. A számtani és a mértani középarányos közti egyenlőtlenség alapján

$$\sqrt[4]{\left(\frac{1+t}{3}\right)^3 (1 - t)} \leq \frac{1}{2}, \text{ tehát}$$

$$(1 + t)\sqrt{1 - t^2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4},$$

és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $\frac{1+t}{3} = 1 - t$, vagyis ha $t = \frac{1}{2}$. Ez mutatja, hogy a kifejezés maximuma $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ és ezt a $\frac{\pi}{3}$-ban (illetve a $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ pontokban) veszi fel. ⊛

Második megoldás. A sin és cos periodikus függvények, főperiódusuk 2π, ezért elégséges, ha vizsgáljuk a kifejezés értékét a $[0, 2\pi]$ intervallumon. A $[\pi, 2\pi]$ intervallumon a $\sin x$ negatív, az $1 + \cos x$ pedig pozitív, ezért a kifejezés értéke is negatív, így itt nem kapjuk meg a legnagyobb értéket. A $[\frac{\pi}{2},\pi]$ intervallumon $\sin x$ értéke pozitív, $\cos x$ értéke negatív, $1+\cos x$ értéke kisebb, mint 1, így a kifejezés értéke a $[\frac{\pi}{2},\pi]$ intervallumon nem nagyobb, mint $x=\frac{\pi}{2}$-ben. Emiatt a kifejezés legnagyobb értékét csak a $[0,\frac{\pi}{2}]$ intervallumon kaphatjuk meg. Itt $\sin x$ és $\cos x$ értéke is pozitív. Legyen tehát $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ és $t:=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Ekkor

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}\quad \text{és}\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \text{ahol}\quad t\in[0,1].$$

Így az adott kifejezés:

$$\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2t}{1+t^2}=\frac{4t}{(1+t^2)^2}.$$

Alkalmazzuk 4 pozitív valós szám számtani és mértani középarányosai közötti egyenlőtlenséget:

$$1+t^2=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+t^2\geq 4\sqrt[4]{\frac{t^2}{27}}$$

$$(1+t^2)^2\geq 16\sqrt{\frac{t^2}{27}}=\frac{16t}{3\sqrt{3}}$$

$$\frac{4t}{(1+t^2)^2}\leq\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Egyenlőség $t=\frac{1}{\sqrt{3}}$ esetén áll fenn. Az alkalmazott helyettesítés kölcsönösen egyértelmű, tehát $(1+\cos x)\sin x\leq\frac{3\sqrt{3}}{4}$, így a kifejezés legnagyobb értéke $\frac{3\sqrt{3}}{4}$, amit $x=\frac{\pi}{3}$ esetén (vagyis általánosan $x=2k\pi+\frac{\pi}{3}$, $k\in\mathbb{Z}$ esetén) vesz fel. $\circledast$

Harmadik megoldás. A sin és cos periodikus függvények, főperiódusuk 2π, ezért elég, ha vizsgáljuk a kifejezés értékét a $[0,2\pi]$ intervallumon.

Legyen $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad f(x) = (1+\cos x)\sin x$. Ekkor $f'(x) = \cos 2x + \cos x = 2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}$. A Fermat-tétel alapján a függvény szélsőértékeit a $2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0$ egyenlet megoldásai között keressük. A gyökök: $x_1 = \frac{\pi}{3}$, $x_2 = \pi$ és $x_3 = \frac{5\pi}{3}$. Mivel $f(\frac{\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$, $f(\pi) = 0$ és $f(x_3) < 0$, így a kifejezés legnagyobb értéke $\frac{3\sqrt{3}}{4}$, amit $x = \frac{\pi}{3}$ esetén vesz fel. $\otimes$

2. Feladat. Határozzuk meg azt a három különböző $\dfrac{n}{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ alakú törtet, amelyek összege egész szám.

Nemecskó István, Budapest

Megoldás. Legyen a három tört $\frac{x}{x-1}$, $\frac{y}{y-1}$, $\frac{z}{z-1}$. Feltehetjük, hogy $x < y < z$.

Tudjuk, hogy $\frac{x}{x-1} + \frac{y}{y-1} + \frac{z}{z-1} - \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{z-1}\right) = 3$. Mivel a három keresett tört összege egész, ezért a zárójelben álló kifejezés is egész. Továbbá akkor a legnagyobb, ha $x = 2$, $y = 3$, $z = 4$, vagyis $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$, tehát

$$\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{z-1}\right) \leq \frac{11}{6}.$$

Mivel egész, akkor csak 1-gyel lehet egyenlő. Így megoldandó az

$$\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{z-1}\right) = 1$$

egyenlet.

1. eset. Ha $x = 2$, akkor $\frac{1}{1} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{z-1} = 1$ egyenlőségnek kell teljesülnie, de ez nem lehetséges.

2. eset. Ha $x = 3$, akkor

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{z-1} = 1 \Longleftrightarrow \frac{y-1+z-1}{(y-1)(z-1)} = \frac{1}{2}.$$

Keresztbeszorzás és rendezés után:

$$yz - 3y - 3z + 5 = 0 \Longleftrightarrow (y-3)(z-3) = 4.$$

Mivel y és z egészek és $y < z$, ezért csak az $y-3=1$ és $z-3=4$ lehetséges. Ebből $y=4$ és $z=7$, amelyek valóban megoldások.
3. eset: ha $x \geq 4$, akkor a legnagyobb összeg $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{47}{60}$ lehet. De ez kisebb, mint 1, tehát nem lehetséges.
Következésképpen a feladatnak csak a $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{7}{6}$ törtek tesznek eleget. ⊛

3. Feladat. Keressük meg azt a leghosszabb, szigorúan növekvő, egészekből álló mértani sorozatot, amelynek tagjai a $[100, 1000]$ intervallumban vannak!

Szabó Magda, Szabadka

Megoldás. Meg kell keresni azt a legnagyobb n természetes számot, amelyre teljesül:

$$100 \leq c < cq < cq^2 < \ldots < cq^{n-1} \leq 1000,$$

ahol c természetes szám, a q pedig 1-nél nagyobb racionális szám. Ha a $q = \frac{a}{b}$, ahol a és b relatív prímek és $a > b$, akkor belátható, hogy $a = b+1$ esetén lesz a sorozat a leghosszabb, így

$$100 \leq c < c\left(\tfrac{b+1}{b}\right) < c\left(\tfrac{b+1}{b}\right)^2 < \ldots < c\left(\tfrac{b+1}{b}\right)^{n-1} \leq 1000,$$

ahol $b^{n-1}|c$. Ha $b=1$, akkor

$$1000 \geq c\left(\tfrac{b+1}{b}\right)^{n-1} = c \cdot 2^{n-1} \geq 100 \cdot 2^{n-1},$$

ezért $n \leq 4$.
Ha $b=2$, akkor

$$1000 \geq c\left(\frac{b+1}{b}\right)^{n-1} = c \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \geq 100 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1},$$

ezért $n \leq 6$.

Ha $b \geq 3$, akkor $\frac{c}{b^{n-1}} \geq 1$, mert $c \geq b^{n-1}$, így

$$1000 \geq c\left(\frac{b+1}{b}\right)^{n-1} \geq (b+1)^{n-1} \geq 4^{n-1},$$

ezért $n \leq 5$.
Tehát a leghosszabb mértani sorozat 6 tagú és ez a következő: $128, 192, 288, 432, 648, 972$, mert $c = 128$ és $q = \frac{3}{2}$.

$\circledast$

4. Feladat. Az $(x_n)_{n\geq 1}$ valós számsorozat teljesíti az

$$(1+x_n)x_{n+1} = n, \ \ n \geq 1$$

rekurziót és $x_1 = 1$. Igazoljuk, hogy $n \geq 2$ esetén

$$\left(\sqrt{\frac{n+1}{2}} - 1\right)^2 < 1 + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 < \frac{n^2+n+2}{2n}.$$

Bencze Mihály, Brassó

Megoldás. A sorozat első néhány tagja: $x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{4}{3}$, $x_4 = \frac{9}{7}$, $x_5 = \frac{7}{4}$. Vizsgáljuk meg, hogy mi lenne elégséges a második egyenlőtlenség induktív bizonyításához. Az indukciós feltevés az

$$n + \sum_{k=1}^{n} x_k^2 < \frac{n^2+n+2}{2}$$

egyenlőtlenség lenne és ebből kellene belátni az

$$n+1+x_{n+1}^2 + \sum_{k=1}^{n} x_k^2 < \frac{(n+1)^2+(n+1)+2}{2}$$

egyenlőtlenséget. Így elégséges volna belátni, hogy

$$1 + x_{n+1}^2 < \frac{(n+1)^2+(n+1)+2-n^2-n-2}{2}$$

vagyis $x_{n+1}^2 < n$. Másrészt a rekurzió alapján ezt csak akkor egyszerű igazolni, ha alsó becslésünk is van, pontosabban ha teljesülne az $x_n > \sqrt{n} - 1$ egyenlőtlenség is. $n = 1$ esetén ez nem teljesül, de $n = 2$-re már igen, emiatt előbb megpróbáljuk matematikai indukció segítségével belátni, hogy

$$\sqrt{n} - 1 < x_n < \sqrt{n-1}, \quad n \geq 2. \tag{3}$$

$n \in \{2, 3\}$ esetén a kiszámított értékek alapján látható, hogy az egyenlőtlenségek teljesülnek. Ugyanakkor ha rögzített n esetén

$$\sqrt{n} - 1 < x_n < \sqrt{n-1},$$

akkor

$$\frac{n}{1+\sqrt{n-1}} < \frac{n}{1+x_n} < \frac{n}{\sqrt{n}},$$

tehát a felső korlát megvan, és az alsóhoz elégséges belátni, hogy

$$\sqrt{n+1} - 1 < \frac{n}{1+\sqrt{n-1}}.$$

Ez viszont igaz, mert

$$\sqrt{n+1} - 1 = \frac{n}{1+\sqrt{n+1}} < \frac{n}{1+\sqrt{n-1}},$$

tehát a matematikai indukció elve alapján (3) igaz.
Az (3) alapján

$$k - 2\sqrt{k} + 1 < x_k^2 < k - 1, \quad k \geq 2,$$

tehát

$$\frac{n(n+1)}{2} - 1 - 2\sum_{k=2}^{n} \sqrt{k} < \sum_{k=2}^{n} (k + 1 - 2\sqrt{k}) < \sum_{k=2}^{n} x_k^2 < \frac{(n-1)n}{2}.$$

A jobb oldali egyenlőtlenség alapján

$$1+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^2<1+\frac{n^2-n+2}{2n}=\frac{n^2+n+2}{2n},$$

ami a bizonyítandó egyenlőtlenség jobb oldala. A másik egyenlőtlenség igazolásához elégséges lenne belátni, hogy

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}<n\sqrt{\frac{n+1}{2}}$$

és ez igaz a számtani és négyzetes középarányos közti egyenlőtlenség alapján (vagy direkt módon is igazolható például matematikai indukcióval). Így

$$\frac{n(n+1)}{2}-2n\sqrt{\frac{n+1}{2}}<\frac{n(n+1)}{2}-2\sum_{k=2}^{n}\sqrt{k}<\sum_{k=1}^{n}x_k^2$$

vagyis

$$\frac{n+1}{2}-2\sqrt{\frac{n+1}{2}}+1<1+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^2$$

ami épp a bizonyítandó egyenlőtlenség. ⊛

5. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy négy különböző, nemnegatív valós szám közül kiválasztható kettő (x és y), amelyekre

$$\frac{1+xy}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+y^2}}>\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

dr. Minda Mihály, Vác

Első megoldás. Minden a valós számhoz kölcsönösen egyértelműen hozzárendelhető az $\overrightarrow{a}(1,a)$ vektor. Így az x-hez az $\overrightarrow{x}(1,x)$, az y-hoz pedig az $\overrightarrow{y}(1,y)$ vektorok rendelhetők.

Legyen a két vektor hajlásszöge α. Két vektor skaláris szorzatának segítségével felírható, hogy

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y}}{|\overrightarrow{x}|\cdot|\overrightarrow{y}|} = \frac{1+xy}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+y^2}}.$$

Tehát a feladat állítása ekvivalens a $\cos\alpha > \frac{\sqrt{3}}{2}$ egyenlőtlenséggel, ahol α a két vektor hajásszögének mértéke. Az $\overrightarrow{a}(1,a)$ „típusú" vektorok végpontjai az $x = 1$ egyenes I. síknegyedben lévő pontjai, valamint az abszcisszára eső pontja. Osszuk fel az I. síknegyedet 3 darab O középpontú, 30°-os szögtartományra. A skatulya-elv értelmében a négy vektorból legalább kettő ugyanabba a szögtartományba (vagy annak határvonalára) esik. Így a két vektor hajlásszögére igaz, hogy $\alpha \leq 30°$, azaz $\cos\alpha \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ugyanakkor az Oy tengelyre nem illeszkedhet a szerkesztett vektorok közül egyik sem, tehát nem lehetséges az, hogy a négy vektor közül bármely kettő szögének mértéke $\geq 30°$. Emiatt az egyenlőtlenség szigorú. ⊛

Második megoldás. Minden $x \geq 0$ valós szám esetén létezik $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ úgy, hogy $x = \mathrm{tg}\varphi$. Ugyanakkor, ha $x = \mathrm{tg}\varphi$ és $y = \mathrm{tg}\omega$, akkor

$$\frac{1+xy}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+y^2}} = \frac{1+\mathrm{tg}\varphi\cdot\mathrm{tg}\omega}{\frac{1}{\cos\varphi}\frac{1}{\cos\omega}} = \cos|\varphi-\omega|.$$

Így a feladat egyenértékű a következő állítással:
Ha $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ és φ_4 a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ intervallum elemei, akkor létezik $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ úgy, hogy $\cos|\varphi_i - \varphi_j| > \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Ennek igazolása érdekében feltételezhetjük, hogy $\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 < \varphi_4$, tehát a $\varphi_{i+1} - \varphi_i$ különbségek közül a legkisebb biztosan kisebb, mint $\frac{\pi}{6}$. Ez viszont azt jelenti, hogy

$$\cos\min_{1\leq i\leq 3}|\varphi_{i+1} - \varphi_i| > \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

⊛

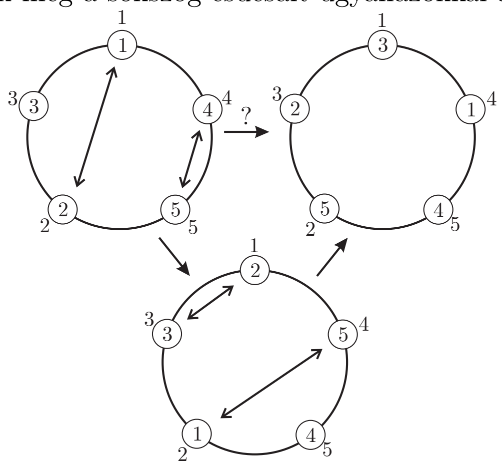
6. Feladat. Egy laktanya udvarán 2010 katona magasság szerint áll sorban. Egy perc alatt bármelyik két katona egymással helyet cserélhet (tudnak elég gyorsan futni). Egyszerre több helycsere is történhet, de egy katona egy perc alatt csak egy helycserében vehet részt. Legfeljebb hány perc szükséges ahhoz, hogy névsor szerint álljanak sorba? (A katonák különböző magasságúak, és a nevük is különbözik.)

dr. Kántor Sándor, Debrecen

Első megoldás. Megmutatjuk, hogy 2 perc elegendő ahhoz, hogy névsor szerint álljanak sorba. Jelölje a katonákat nagyság szerinti sorrendben $A_1, A_2, \ldots, A_{2010}$. Készítsük el azt az irányított gráfot, amelynek ezek a csúcsai, és A_i-ből A_j-be akkor vezet nyíl (irányított él), ha az A_i katona névsorban a j-edik. Azt mondjuk, hogy az $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$ csúcsok ciklust alkotnak, ha $A_{i_1} \to A_{i_2} \to \ldots \to A_{i_k} \to A_{i_1}$ (esetleg $k = 1$). Nyilvánvaló, hogy gráfunk diszjunkt ciklusok uniójára bomlik. Elegendő tehát egy ciklusra igazolni, hogy az előírt cserék két perc alatt párcserékkel megvalósíthatók, hiszen a diszjunkt ciklusokban egymástól függetlenül, egyszerre történhetnek a cserék.

Az $A_{i_1} \to A_{i_2} \to \ldots \to A_{i_k} \to A_{i_1}$ ciklusban az első percben az m-edik $\left(m = 1, 2, \ldots, [\frac{k-1}{2}]\right)$ helyen álló A_{i_m} katona cseréljen helyet a $(k-m)$-edik helyen állóval, a második percben pedig az m-edik $\left(m = 1, 2, \ldots, [\frac{k}{2}]\right)$ helyen álló katona cseréljen helyet a $(k-m+1)$-edik helyen állóval. A két csere végeredményeként az eredetileg az m-edik helyen álló A_{i_m} katona a $k-(k-m)+1 = (m+1)$-edik helyre kerül, az A_{i_k} pedig az első helyre, A_{i_1} helyére. Tehát megvalósult a kívánt csere. Háromtagú ciklusnál a csere egy lépésben nem valósítható meg, tehát legalább két perc szükséges a cseréhez. ⊛

Második megoldás. A katonákat számozzuk meg a nagyság szerinti sorrendnek megfelelően 1-től 2010-ig és jelöljük $\sigma(i)$-vel a névsor szerinti sorrendben elfoglalt helyének sorszámát. Így egy σ permutációt értelmeztünk, amely diszjunk ciklusok szorzatára bomlik, tehát elégséges a cseréket ciklusokon belül elvégezni. Ábrázoljuk a ciklus elemeit egy szabályos sokszög csúcsaiban (a ciklusban elfoglalt sorrendnek megfelelően, trigonometrikus irányban) és számozzuk meg a sokszög csúcsait ugyanazokkal a számokkal.



Így kezdetben minden csúcsnak a száma talál a csúcsba írt számmal. A cserék végrehajtása után az i csúcsra a $\sigma(i)$ szám kerül, tehát gyakorlatilag a cserékkel a csúcsokba írt számoknak a középpont körüli $\frac{2\pi}{k}$ szögű elforgatását kell elérni, ahol k a ciklus hossza. Ez viszont két tengelyes tükrözés összetételével is elérhető. A tükrözések leírásából az első megoldásban leírt cseréket kapjuk.

⊛

12. Megjegyzés. A mellékelt ábrán a $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ ciklus esetén szemléltettük a cseréket. Látható, hogy a permutációnak transzpoziciókra való felbontását kell létrehozni. Az ábrának megfelelő felbontás:

$$\sigma = (1,2) \cdot (4,5) \cdot (1,3) \cdot (2,4).$$

Válogatás a javasolt feladatokból

1. Feladat. Az $X(1), X(2), \ldots, X(n)$ nem feltétlenül diszjunkt halmazok uniója a pozitív egészek halmaza. Minden $1 \leq i \leq n$ esetén az $X(i)$ halmaz elemei egy $d(i)$ differenciájú végtelen számtani sorozatot alkotnak. Bizonyítsuk be, hogy van olyan $d(i)$, amely osztója a többi $d(j)$ szám legkisebb közös többszörösének.

Borbély József, Tata

2. Feladat. Az ABC háromszög A csúcsához tartozó magasságának a BC oldal egyenesén levő talppontja D, a B és C pontokból az A csúcsból induló belső szögfelezőre bocsátott merőlegesek talppontjai rendre E és F. A BC és EF szakaszok metszéspontja M. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{EM}{FM} = \frac{AB}{AC}.$$

Bíró Bálint, Eger

3. Feladat. Az ABC háromszög BAC és ABC szögének felezői K-ban és L-ben metszik a szemközti oldalt. Mekkora a BAC szög, ha KL felezi az AKC szöget?

dr. Katz Sándor, Bonyhád

4. Feladat. Keressük meg a két legkisebb szomszédos pozitív egész számot, amelyek mindegyikének tízes számrendszerbeli alakjában a számjegyek összege osztható 17-tel!

dr. Katz Sándor, Bonyhád

5. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha az a, b és c egész számok esetén $3a + b + 5c$ és $2a + 5b - c$ osztható 11-gyel, akkor $a - b + 3c$ is osztható 11-gyel!

Kacsó Ferenc, Marosvásárhely

6. Feladat. Adott konvex négyszögnek szerkesszük meg azt a belső pontját, amelyet a négyszög oldalfelező pontjaival összekötve a keletkező szakaszok a négyszöget négy egyenlő területű részre bontják!

dr. Kántor Sándor, Debrecen

7. Feladat. Jelölje l_a, l_b, l_c az ABC háromszög belső szögfelezőinek a hosszát, T a háromszög területét. Mutassuk ki, hogy

$$6 \cdot T \leq \sqrt{bc} \cdot l_a + \sqrt{ac} \cdot l_b + \sqrt{ab} \cdot l_c \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\left(a^2 + b^2 + c^2\right).$$

Mikor kapunk egyenlőséget?

Longáver Lajos, Nagybánya

8. Feladat. Egy 17 területű sokszögben elhelyeztünk 13 darab 7 területű sokszöget. Igazoljuk, hogy létezik 4 olyan sokszög, amelyek metszetének a területe legalább $\frac{23}{6435}$.

Bencze Mihály, Brassó

9. Feladat. Oldjuk meg az egész számok körében a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} 2x^3 - 7x^2 + 8x - 2 = y, \\ 2y^3 - 7y^2 + 8y - 2 = z, \\ 2z^3 - 7z^2 + 8z - 2 = x. \end{cases}$$

dr. Pintér Ferenc, Nagykanizsa

10. Feladat. Péter és Károly a következő játékot játsszák: Péter megjelöl pirossal néhány pozitív egész számot a számegyenesen.

Ezután Károly bejelöli kékkel a nullát és ettől jobbra néhány pozitív egész számot a következő szabályok szerint:
A második kék pont legfeljebb 20 egységre lehet a nullától, és a szomszédos kék pontok távolságai nem növekedhetnek jobbra haladva (azaz ha Károly az $a_1 = 0 < a_2 < a_3 < ... < a_k$ pozitív egész számokat színezi kékre, akkor teljesülnie kell a következő egyenlőtlenségeknek: $a_2 - a_1 \geq a_3 - a_2 \geq ... \geq a_k - a_{k-1}$). Károly győz, ha sikerül elkerülnie a Péter által bejelölt piros számokat, különben Péter a nyertes. Legalább hány számot kell bejelölnie Péternek ahhoz, hogy nyerni tudjon?

Kallós Béla, Nyíregyháza

11. Feladat. Az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozatra $a_1 = 3$, $a_2 = 4$ és $n \geq 3$ esetén

$$a_n = a_{n-1} \cdot a_{n+1} - 1.$$

Oldjuk meg az

$$a_{2008} + x \cdot a_{2009} = a_{2010}$$

egyenletet!

Oláh György, Komárom

12. Feladat. Legyen ABC háromszög három oldala rendre $a \leq b \leq c$. Bizonyítsuk be, hogy $f^2 \leq x^2+xy+y^2$, ahol f a háromszög C csúcsából induló szögfelező hossza, x és y pedig azoknak a szakaszoknak a hossza, amelyekre a szögfelező a c oldalt osztja.

Árokszállási Tibor, Paks

13. Feladat. Egy táblára felírtuk a $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}, \ldots, \sqrt{2010}$ számokat. Egy-egy alkalommal letörlünk két x és y számot, s helyettük felírjuk a

$$\sqrt{x^2y^2 - x^2 - y^2 + 2}$$

számot. Ezt ismételve 2008-szor, csak egy szám fog maradni. Melyik ez a szám?

Kovács Béla, Szatmárnémeti

14. Feladat. Egy sík minden pontját kiszínezzük a piros, kék illetve zöld színek egyikére. Bizonyítsuk be, hogy létezik két azonos színű pont egy egység távolságra.

Mátyás Mátyás, Brassó

15. Feladat. Az R sugarú gömb felszínére rajzolunk n darab egymást páronként metsző R sugarú kört oly módon, hogy egy körhármasnak sincs közös metszéspontja. Hány régióra osztják ezek a gömb felszínét $n \geq 1$ esetén?

Mátyás Mátyás, Brassó

A feladatok szerzői

A versenyt támogató magánszemélyek

Szatmárnémeti

Dr. Boér Noémi	Cziprok András	Domokos Csaba
Erdei D. István	Gáll Judit	Gerényi István
Günthner Tibor	Kató Enikő	Kovács Béla
Kónya László	Markos Tibor	Mátyás Beáta
Muhi Sándor	Nevelits Gyöngyvér	Olosz Ferenc
Roszpapa Csaba	Sebesi István	Sveda Tamás
	Ványi Emese	

Nagykároly

Czenter Enikő Gaskó Gabriella

Tasnád

Mezősi Edith Ruff Zsófia
Szilágyi István Varga András

Kanada

Kinga Székely Flynn Pittner Enikő

Csíkszereda

Sógor Csaba

Arad

Matekovits Mihály