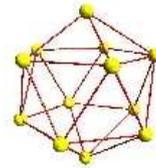
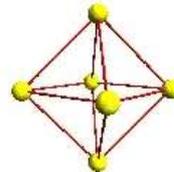
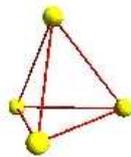
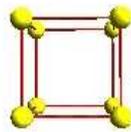
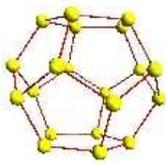


Achill Schürmann
(achill@math.uni-magdeburg.de)
Institut für Algebra und Geometrie
Otto-von-Guericke Universität Magdeburg



Konvexe Polytope

WS 2003/2004



Hinweis: Dieses Dokument dient als „Rumpfskript“ zur Vorlesung und wird im Laufe des Semesters dynamisch angepasst.

<http://fma2.math.uni-magdeburg.de/~achill/kp/>

Literatur:

- (1) D. Avis, A Revised Implementation of the Reverse Search Vertex Enumeration Algorithm, in *DMV Seminar, Band 29*
- (2) A. Barvinok, *A Course in Convexity*, AMS, 2002
- (3) A. Brøndsted, *An Introduction to Convex Polytopes*, Springer, 1983
- (4) P.R. Cromwell, *Polyhedra*, Cambridge University Press, 1997
- (5) B. Grünbaum, *Convex Polytopes*, Springer, 2003
- (6) J. Matoušek, *Lectures on Discrete Geometry*, Springer, 2002
- (7) P. McMullen, G.C. Shephard, *Convex Polytopes and the Upper Bound Conjecture*, Cambridge University Press, 1971
- (8) A. Schrijver, *Theory of Linear and Integer Programming*, 1987
- (9) G.M. Ziegler, *Lectures on Polytopes*, Springer, 1998

1. WAS SIND KONVEXE POLYTOPE?

Konvexe Polytope sind d -dimensionale Verallgemeinerungen der bekannten 2-dimensionalen konvexen Polygone und der 3-dimensionalen konvexen Polyeder. Diese haben Menschen — und insbesondere Mathematiker — seit jeher fasziniert. Besondere Beispiele sind die regelmäßigen n -Ecke und ihre 3-dimensionalen Verallgemeinerungen, die sogenannten Platonischen Körper. Aber auch andere, z.B. die Archimedischen Körper, sind seit Jahrhunderten Teil unserer Kultur und finden sich in der Philosophie, Kunst, Architektur und anderen Wissenschaften.

Seit Menschengedenken ist mit den konvexen Polytopen interessante Mathematik verbunden. So war z.B. bereits in der Antike bekannt, dass die platonischen Körper die einzigen regulären 3-dimensionalen Polytope sind, d.h. solche, deren Ecken kongruent und deren Seitenflächen kongruente, reguläre Polygone sind. Ein anderes bekanntes Beispiel ist die von Euler entdeckte Formel

$$e - k + f = 2,$$

die für die „Eckenzahl“ e , „Kantenzahl“ k und „Flächenzahl“ f aller konvexen Polytope gilt. Man beachte, dass diese kombinatorische Eigenschaft unabhängig von den metrischen Eigenschaften, wie Winkel, Längen und Volumen ist.

Die Theorie konvexer Polytope in höheren Dimensionen wurde im 19. und 20. Jahrhundert vor allem dadurch beflügelt, dass sie Lösungsmengen linearer Ungleichungssysteme

$$Ax \leq b, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times d}, b \in \mathbb{R}^m,$$

sind. Solche Systeme spielen in vielen Disziplinen der Mathematik eine wichtige Rolle. In der linearen Optimierung werden zum Beispiel unter allen Punkten dieser Polytope solche gesucht, die eine lineare Funktion $c^\top x$, $c \in \mathbb{R}^d$, maximieren, bzw. minimieren. Da diese Optima immer von einer „Ecke“ angenommen werden, besteht ein fundamentales Problem der Polytoptheorie darin, diese Ecken aus der obigen Darstellung zu gewinnen.

2. GRUNDLAGEN

Notation 2.1. \mathbb{R}^d bezeichnet den d -dimensionalen Euklidischen Raum $\mathbb{R}^d = \{(x_1, \dots, x_d)^\top : x_i \in \mathbb{R}\}$, versehen mit dem (Euklidischen) Skalarprodukt $x^\top y = \sum_{i=1}^d x_i y_i$, für $x, y \in \mathbb{R}^d$, und der (Euklidischen) Norm $|x| = \sqrt{x^\top x}$.

Definition 2.2.

- (a) $x \in \mathbb{R}^d$ heißt linear abhängig von $X \subset \mathbb{R}^d$, falls $x^1, \dots, x^n \in X$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x^i$ existieren.
- (b) $x \in \mathbb{R}^d$ heißt affin abhängig von $X \subset \mathbb{R}^d$, falls $x^1, \dots, x^n \in X$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ und $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x^i$ existieren.
- (c) $x \in \mathbb{R}^d$ heißt positiv abhängig von $X \subset \mathbb{R}^d$, falls $x^1, \dots, x^n \in X$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x^i$ existieren.
- (d) $x \in \mathbb{R}^d$ heißt konvex abhängig von $X \subset \mathbb{R}^d$, falls $x^1, \dots, x^n \in X$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ und $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x^i$ existieren.

Notation 2.3. Seien $x^1, \dots, x^n \in \mathbb{R}^d$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Dann heißt $\sum_{i=1}^n \lambda_i x^i$

- (a) Linearkombination von x^1, \dots, x^n .
- (b) Affinkombination von x^1, \dots, x^n , falls $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.
- (c) Positivkombination von x^1, \dots, x^n , falls $\lambda_i \geq 0$.
- (d) Konvexkombination von x^1, \dots, x^n , falls $\lambda_i \geq 0$ und $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

Definition 2.4. $x^1, \dots, x^n \in \mathbb{R}^d$ heißen linear [affin, positiv, konvex] abhängig, falls eines der x^i linear [affin, positiv, konvex] abhängig von $\{x^1, \dots, x^n\} \setminus \{x^i\}$ ist. Sonst heißen $\{x^1, \dots, x^n\}$ linear [affin, positiv, konvex] unabhängig.

Bemerkung 2.5. Für $x^1, \dots, x^n \in \mathbb{R}^d$ gilt:

- (a) $\{x^1, \dots, x^n\}$ affin abhängig $\iff \left\{ \begin{pmatrix} x^1 \\ 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x^n \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^{d+1}$ linear abhängig.
- (b) $\{x^1, \dots, x^n\}$ konvex abhängig $\iff \left\{ \begin{pmatrix} x^1 \\ 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x^n \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^{d+1}$ positiv abhängig.
- (c) $n \geq d + 1 \implies \{x^1, \dots, x^n\}$ linear abhängig.
- (d) $n \geq d + 2 \implies \{x^1, \dots, x^n\}$ affin abhängig.

Definition 2.6.

- (a) $X \subset \mathbb{R}^d$ heißt linearer [affiner] Unterraum (oder Teilraum) des \mathbb{R}^d , falls gilt: Ist $x \in \mathbb{R}^d$ linear [affin] abhängig von $X \implies x \in X$.
- (b) $X \subset \mathbb{R}^d$ heißt konvexer Kegel, falls gilt: Ist $x \in \mathbb{R}^d$ positiv abhängig von $X \implies x \in X$.
- (c) $X \subset \mathbb{R}^d$ heißt konvexe Menge, falls gilt: Ist $x \in \mathbb{R}^d$ konvex abhängig von $X \implies x \in X$.

Notation 2.7. $\mathcal{K}^d = \{K \subset \mathbb{R}^d : K \text{ konvex}\}$ sei die Familie der konvexen Mengen im \mathbb{R}^d . Die leere Menge \emptyset wird als konvexe, lineare und affine Menge betrachtet.

Beispiel 2.8. Die abgeschlossene d -Kugel

$$B^d(c, \rho) = \{x \in \mathbb{R}^d : |x - c| \leq \rho\}$$

mit Mittelpunkt $c \in \mathbb{R}^d$ und Radius $\rho \in \mathbb{R}_{>0}$ ist konvex. Der Rand von $B^d(c, \rho)$, die $(d - 1)$ -Sphäre

$$S^{(d-1)}(c, \rho) = \{x \in \mathbb{R}^d : |x - c| = \rho\},$$

ist nicht konvex.

Beispiel 2.9. Für $a \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ und $\beta \in \mathbb{R}$ sind die abgeschlossenen Halbräume

$$H^+(a, \beta) = \{x \in \mathbb{R}^d : a^\top x \geq \beta\}, \quad H^-(a, \beta) = \{x \in \mathbb{R}^d : a^\top x \leq \beta\}.$$

sowie die Hyperebene

$$H(a, \beta) = \{x \in \mathbb{R}^d : a^\top x = \beta\}$$

konvex.

Satz 2.10. (a) $K \subset \mathbb{R}^d$ ist genau dann konvex, falls gilt:

$$x, y \in K, \lambda \in [0, 1] \implies \lambda x + (1 - \lambda)y \in K.$$

(b) $K \subset \mathbb{R}^d$ ist genau dann konvexer Kegel, falls gilt:

$$x, y \in K, \lambda, \mu \in \mathbb{R}_{\geq 0} \implies \lambda x + \mu y \in K.$$

(c) $A \subset \mathbb{R}^d$ ist genau dann affiner Unterraum, falls gilt:

$$x, y \in A, \lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda x + (1 - \lambda)y \in A.$$

(d) $L \subset \mathbb{R}^d$ ist genau dann linearer Unterraum, falls gilt:

$$x, y \in L, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \implies \lambda x + \mu y \in L.$$

Satz 2.11. Der Durchschnitt konvexer Mengen [konvexer Kegel, affiner Unterräume, linearer Unterräume] ist konvex [konvexer Kegel, affiner Unterraum, linearer Unterraum].

Definition 2.12. Sei $X \subset \mathbb{R}^d$.

(a) Die lineare Hülle $\text{lin } X$ von X ist definiert als

$$\text{lin } X = \bigcap_{L \subset \mathbb{R}^d, L \text{ linear}, X \subset L} L.$$

(b) Die affine Hülle $\text{aff } X$ von X ist definiert als

$$\text{aff } X = \bigcap_{A \subset \mathbb{R}^d, A \text{ affin}, X \subset A} A.$$

(c) Die positive Hülle $\text{pos } X$ von X ist definiert als

$$\text{pos } X = \bigcap_{K \subset \mathbb{R}^d, K \text{ konvexer Kegel}, X \subset K} K.$$

(d) Die konvexe Hülle $\text{conv } X$ von X ist definiert als

$$\text{conv } X = \bigcap_{K \subset \mathbb{R}^d, K \text{ konvex}, X \subset K} K.$$

(e) Die Dimension $\dim(X)$ von X ist als Dimension der affinen Hülle von X definiert.

Satz 2.13. Sei $X \subset \mathbb{R}^d$. Dann gilt

$$\text{conv } X = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x^i : n \in \mathbb{N}, x^i \in X, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}.$$

Bemerkung 2.14.

- (a) $\text{lin } X = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x^i : n \in \mathbb{N}, x^i \in X \right\}$.
- (b) $\text{aff } X = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x^i : n \in \mathbb{N}, x^i \in X, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}$.
- (c) $\text{pos } X = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x^i : n \in \mathbb{N}, x^i \in X, \lambda_i \geq 0 \right\}$.
- (d) $\text{conv } X \subset \text{aff } X, \text{pos } X \subset \text{lin } (X)$.

Definition 2.15. Sei $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}^d$. Dann heißt $\text{conv } X$ (konvexes) Polytop.

Beispiel 2.16. Die d -dimensionale Verallgemeinerung von Dreieck und Tetraeder ist das d -Simplex, die konvexe Hülle von $d+1$ affin unabhängigen Punkten (Ecken). Besondere Vertreter sind die regulären d -Simplizes, deren Ecken paarweise denselben Abstand zueinander haben.

Beispiel 2.17. Eine Klasse von Polytopen, die für die kombinatorische Optimierung von außerordentlicher Bedeutung sind, sind die 0/1-Polytope $\text{conv}(X)$, mit $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subset \{0, 1\}^d$.

Notation 2.18. $\mathcal{P}^d = \{P \subset \mathbb{R}^d : P \text{ Polytop}\}$ sei die Familie der Polytope im \mathbb{R}^d .

Definition 2.19. Der Durchschnitt endlich vieler abgeschlossener Halbräume heißt (konvexes) Polyeder.

Wir werden sehen, dass Polytope und beschränkte Polyeder dasselbe sind!

Beispiel 2.20. Der d -Würfel

$$W_d = \{x \in \mathbb{R}^d : -1 \leq x_i \leq 1\} = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \vdots \\ \pm 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

ist Durchschnitt von $2d$ Halbräumen und konvexe Hülle von 2^d Ecken.

Beispiel 2.21. Verallgemeinerung des Oktaeders ist das d -Kreuzpolytop

$$K_d = \{x \in \mathbb{R}^d : \sum_{i=1}^d |x_i| \leq 1\} = \text{conv} \{\pm e^1, \dots, \pm e^d\},$$

wobei e^i der i -te Koordinateneinheitsvektor ist. Das d -Kreuzpolytop ist also Durchschnitt von 2^d Halbräumen und konvexe Hülle von $2d$ Ecken.

Definition 2.22. Sei $X \subset \mathbb{R}^d$.

- (a) $x \in X$ heißt innerer Punkt von X , falls ein $\rho > 0$ existiert mit $B^d(x, \rho) \subset X$. Die Menge aller inneren Punkte von X heißt Inneres von X und wird mit $\text{int } X$ bezeichnet.
- (b) $x \in \mathbb{R}^d$ heißt Randpunkt von X , falls für alle $\rho > 0$ gilt: $B^d(x, \rho) \cap \mathbb{R}^d \setminus X \neq \emptyset$ und $B^d(x, \rho) \cap X \neq \emptyset$. Die Menge der Randpunkte von X wird mit $\text{bd } X$ bezeichnet.
- (c) Sei $A = \text{aff } X$. $x \in X$ heißt relativ innerer Punkt von X , falls ein $\rho > 0$ existiert, so daß $B^d(x, \rho) \cap A \subset X$. Die Menge aller relativ inneren Punkte von X heißt relatives Inneres von X und wird mit $\text{relint } X$ bezeichnet.
- (d) Sei $A = \text{aff } X$. $x \in A$ heißt relativer Randpunkt von X , falls für alle $\rho > 0$ gilt: $(B^d(x, \rho) \cap A) \cap (A \setminus X) \neq \emptyset$ und $(B^d(x, \rho) \cap A) \cap X \neq \emptyset$. Die Menge aller relativen Randpunkte von X wird mit $\text{relbd } X$ bezeichnet.

Bemerkung 2.23. Für abgeschlossenes X gilt $X = \text{relint } X \cup \text{relbd } X$.

Satz 2.24. Sei $K \in \mathcal{K}^d$, $x \in \text{relint } K$ und $y \in K$. Dann gilt $(1 - \lambda)x + \lambda y \in \text{relint } K$ für $\lambda \in [0, 1)$.

Korollar 2.25. Sei $K \in \mathcal{K}^d$, K abgeschlossen, $x \in \text{relint } K$, $y \in \text{aff } K$, aber $y \notin K$. Dann schneidet $\text{conv} \{x, y\}$ in genau einem Punkt $\text{relbd } K$.

Lemma 2.26. Seien $x^1, \dots, x^{k+1} \in \mathbb{R}^d$ affin unabhängig und seien $\lambda_i > 0$, $1 \leq i \leq k+1$, mit $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1$. Dann ist

$$\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x^i \in \text{relint conv} \{x^1, \dots, x^{k+1}\}.$$

Korollar 2.27. Sei $K \in \mathcal{K}^d$, $K \neq \emptyset$. Dann gilt $\text{relint } K \neq \emptyset$.

Für Polytope läßt sich das relative Innere leicht beschreiben:

Satz 2.28. Sei $P = \text{conv} \{x^1, \dots, x^n\} \in \mathcal{P}^d$. Dann gilt $x \in \text{relint } P$ genau dann, falls x sich darstellen läßt als $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x^i$ mit $\lambda_i > 0$, $1 \leq i \leq n$, und $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

3. KONSTRUKTIONEN KONVEXER POLYTOPE UND POLYEDER

Bisher haben wir nur einige wenige Beispiele von Polytopen und Polyedern kennengelernt. Wir haben gesehen, dass der Durchschnitt von Polyedern wieder ein Polyeder ist und die konvexe Hülle von zwei konvexen Polytopen, wieder ein konvexes Polytop. In diesem Abschnitt sollen Konstruktionen vorgestellt werden, mit denen man, z.B. mit Hilfe von POLYMAKE, andere (im Prinzip alle) Polytope konstruieren kann.

Definition 3.1. Für zwei Mengen $X, Y \subset \mathbb{R}^d$, $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt

$$X + Y = \{x + y : x \in X, y \in Y\}$$

Minkowskisumme (oder Vektorsumme) von X und Y und

$$\lambda X = \{\lambda x : x \in X\}$$

Dilatation von X .

Bemerkung 3.2. Das Produkt $X \times Y \subset \mathbb{R}^d$ von zwei Mengen $X \subset \mathbb{R}^k$, $k \leq d$, und $Y \subset \mathbb{R}^{d-k}$ ist eine spezielle Minkowskisumme

$$X \times Y = \{x \times \{0\}^{d-k} : x \in X\} + \{\{0\}^k \times y : y \in Y\}.$$

Satz 3.3. Für zwei Mengen $X, Y \subset \mathbb{R}^d$, $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\text{conv}\{X + Y\} = \text{conv} X + \text{conv} Y$ und $\text{conv}\{\lambda X\} = \lambda \text{conv}\{X\}$. Insbesondere gilt für $P_1, P_2 \in \mathcal{P}^d[\mathcal{K}^d]$: $P_1 + P_2 \in \mathcal{P}^d[\mathcal{K}^d]$ und $\lambda P_1 \in \mathcal{P}^d[\mathcal{K}^d]$.

Definition 3.4. Sei $Q \in \mathcal{P}^d$, $\dim Q = d - 1$, $x \in \mathbb{R}^d$, mit $x \notin \text{aff} Q$. Dann heißt $P = \text{conv}\{Q, x\}$ d -Pyramide (über Q). Q heißt Basis von P , und x heißt Spitze von P .

Definition 3.5. Jedes $P \in \mathcal{P}^d$ heiße 0-fache Pyramide mit Basis P . Für $r = 1, \dots, d$ heißt $P \in \mathcal{P}^d$ r -fache Pyramide, falls P Pyramide über einer $(r - 1)$ -fachen Pyramide Q ist.

Satz 3.6. Sei $P \in \mathcal{P}^d$ eine $(d - 1)$ -fache Pyramide. Dann ist P ein Simplex und insbesondere eine d -fache Pyramide, falls $\dim P = d$.

Definition 3.7. Sei $Q \in \mathcal{P}^d$ mit $\dim Q = d - 1$ und I eine Strecke mit $\dim(\text{relint} Q \cap \text{relint} I) = 0$. Dann heißt $P = \text{conv}(Q \cup I)$ Doppelpyramide über Q . Die r -fache Doppelpyramide ist analog zur r -fachen Pyramide definiert.

Satz 3.8. Sei $P \in \mathcal{P}^d$, $\dim P = d - 1$, eine $(d - 1)$ -fache Doppelpyramide. Dann ist P eine d -fache Doppelpyramide.

Bemerkung 3.9. Das d -Kreuzpolytop ist eine d -fache Doppelpyramide.

Definition 3.10. Sei $Q \in \mathcal{P}^d$, $\dim Q = d - 1$, und sei I eine Strecke, die nicht parallel zu $\text{aff} Q$ ist. $P = Q + I$ heißt Prisma mit Basis Q . Das r -fache Prisma ist analog zur r -fachen Pyramide definiert.

Bemerkung 3.11. Sei $I = \text{conv}\{x, y\}$, dann ist $P = Q + I = \text{conv}\{Q + x, Q + y\}$.

Satz 3.12. Ist $P \in \mathcal{P}^d$ ein $(d - 1)$ -faches Prisma, dann ist P d -faches Prisma.

Notation 3.13. Ein d -faches Prisma heißt Parallelotop oder Parallelepipid.

Bemerkung 3.14. Das Parallelotop, bei dem jede Strecke I_i gegeben durch $I_i = \text{conv}\{-e^i, e^i\}$, ist der d -Würfel, d.h.,

$$W_d = \text{conv}\{-e^1, e^1\} + \cdots + \text{conv}\{-e^d, e^d\}.$$

Ein mächtiges Werkzeug bei der Konstruktion von Polytopen gibt

Definition 3.15. Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^k$, definiert durch

$$f(x) = Mx + t,$$

mit einer linearen Abbildung $M : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^k$ (Matrix $M \in \mathbb{R}^{k \times d}$) und einem festen Vektor $t \in \mathbb{R}^k$, heißt affine Abbildung. Die Abbildung f heißt

- (a) lineare Abbildung, falls $t = 0$.
- (b) Translation, falls $M : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$ die Identität ist.
- (c) Kongruenz(abbildung), falls $M : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$ eine orthogonale Abbildung ist.

Bemerkung 3.16. Affine Abbildungen $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^k$ bilden konvexe Mengen (Polytope) in konvexe Mengen (Polytope) ab. Für $X \subset \mathbb{R}^d$ gilt $f(\text{conv}(X)) = \text{conv}(f(X))$.

Notation 3.17. Sei L ein linearer Unterraum des \mathbb{R}^d und L^\perp der zu L komplementäre, orthogonale Unterraum des \mathbb{R}^d , d.h. es gilt $\dim L + \dim L^\perp = d$ und $x^\top y = 0$ für alle Paare $x \in L, y \in L^\perp$. Dann kann jedes $x \in \mathbb{R}^d$ eindeutig als Summe $x = x^1 + x^2$ mit $x^1 \in L$ und $x^2 \in L^\perp$ geschrieben werden. Die affine Abbildung $f : \mathbb{R}^d \mapsto L$ mit $f(x) = x^1$ heißt orthogonale Projektion auf L .

Bemerkung 3.18. Für jede orthogonale Projektion $f : \mathbb{R}^d \mapsto L$ auf einen linearen Unterraum der Dimension $\dim L = k$ gibt es eine Zerlegung

$$f = f_{d-k} \circ \cdots \circ f_1,$$

in orthogonale Projektionen $f_i : L_{i-1} \mapsto L_i, i = 1, \dots, d - k$, mit linearen Unterräumen L_i der Dimension $\dim L_i = d - i$, für die gilt: $L = L_{d-k} \subset \cdots \subset L_0 = \mathbb{R}^d$.

Satz 3.19. Sei $\{x^1, \dots, x^{d+1}\} \subset \mathbb{R}^d$ affin unabhängig und $Y = \{y^1, \dots, y^{d+1}\} \subset \mathbb{R}^d$. Dann gibt es eine affine Abbildung $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^k$, so dass $f(x^i) = y^i$ für $i = 1, \dots, d + 1$. Ist Y affin unabhängig, ist f sogar eindeutig bestimmt.

Korollar 3.20. Beliebige k -Simplizes $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^d$ sind affin äquivalent, d.h. es gibt eine affine Abbildung $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$ mit $f(S_1) = S_2$.

Korollar 3.21. Jedes $P \in \mathcal{P}^d$ ist affines Bild eines Simplex.

Abschließend geben wir noch die Konstruktion einer wichtigen Klasse von Polytopen an:

Beispiel 3.22. Die Momentenkurve $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^d$ ist definiert durch

$$f(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ \vdots \\ t^d \end{pmatrix}.$$

Dann heißt

$$Z_d(t_1, \dots, t_n) = \text{conv} \{f(t_1), \dots, f(t_n)\}$$

zyklisches Polytop.

Falls die Parameter t_i paarweise verschieden sind, spricht man auch von „dem zyklischen Polytop“ $Z_d(n)$ mit n Ecken, da die „kombinatorische Struktur“ nicht von der Wahl der Parameter t_1, \dots, t_n abhängt, wie wir später noch sehen werden.

4. DREI FUNDAMENTALE SÄTZE DER KONVEXGEOMETRIE

Satz 4.1 (Radon). *Sei $X \subset \mathbb{R}^d$. Ist $\#X \geq d + 2$, so existieren $X_1, X_2 \subset X$ mit $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, $X = X_1 \cup X_2$ und $\text{conv } X_1 \cap \text{conv } X_2 \neq \emptyset$.*

Satz 4.2 (Helly). *Seien $K_1, \dots, K_l \in \mathcal{K}^d$. Für jede $d + 1$ -elementige Teilmenge $\{i_1, \dots, i_{d+1}\} \subset \{1, \dots, l\}$ sei $\bigcap_{j=1}^{d+1} K_{i_j} \neq \emptyset$. Dann gilt $\bigcap_{j=1}^l K_j \neq \emptyset$.*

Der folgende Satz von Carathéodory ist eine Verschärfung von Satz 2.13:

Satz 4.3 (Carathéodory). *Sei $X \subset \mathbb{R}^d$. Dann gilt*

$$\text{conv } X = \left\{ \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i x^i : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i = 1, x^i \in X, i = 1, \dots, d + 1 \right\}.$$

Korollar 4.4. *Jedes Polytop ist die Vereinigung von Simplizes.*

Korollar 4.5. *Sei $X \subset \mathbb{R}^d$ kompakt. Dann ist $\text{conv } X$ kompakt.*

5. STÜTZEbenen UND LOTABBILDUNG

Definition 5.1. Sei $K \in \mathcal{K}^d$. Dann heißt die Hyperebene $H(a, \beta) \subset \mathbb{R}^d$ Stützhyperebene von K , falls gilt:

- (a) $H(a, \beta) \cap K \neq \emptyset$ und
- (b) $K \subset H^+(a, \beta)$ oder $K \subset H^-(a, \beta)$.

Für $K \subset H^-(a, \beta)$ heißt a äußerer Normalenvektor von K .

Bemerkung 5.2. Sei $K \in \mathcal{K}^d$, K kompakt und $a \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Dann existiert $\beta = \max\{a^\top x : x \in K\}$ und $H(a, \beta)$ ist Stützhyperebene von K mit äußerem Normalenvektor a .

Satz 5.3. Sei $X \subset \mathbb{R}^d$. Dann gilt für jede Stützhyperebene $H(a, \beta)$ von $\text{conv } X$: $\text{conv}(H(a, \beta) \cap X) = H(a, \beta) \cap \text{conv } X$.

Korollar 5.4. Für $P \in \mathcal{P}^d$ und eine Stützhyperebene $H(a, \beta)$ von P gilt

$$P \cap H(a, \beta) \in \mathcal{P}^d.$$

Im Folgenden wird gezeigt, dass jeder Randpunkt von K in einer Stützhyperebene enthalten ist. Dazu dient

Definition 5.5. Sei $K \in \mathcal{K}^d$, K abgeschlossen. Dann heißt die Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow K$, wobei für $x \in \mathbb{R}^d$ der Punkt $\Phi(x) \in K$ gegeben ist durch

$$|x - \Phi(x)| = \min\{|x - y| : y \in K\}$$

Lotabbildung von K .

Bemerkung 5.6. Φ ist offensichtlich wohldefiniert, da K abgeschlossen und $\Phi(x)$ zu $x \in \mathbb{R}^d$ eindeutig bestimmt ist.

Definition 5.7. Sei $K \in \mathcal{K}^d$, K abgeschlossen, und sei $x \in \mathbb{R}^d \setminus K$. Dann heißt die offene Halbgerade $R(K, x) = \{\lambda x + (1-\lambda)\Phi(x) : \lambda \geq 0\}$ durch x und Endpunkt $\Phi(x)$ Strahl von K durch x .

Lemma 5.8. Sei $K \in \mathcal{K}^d$, $x \in \mathbb{R}^d \setminus K$ und $y \in R(K, x)$. Dann gilt: $\Phi(x) = \Phi(y)$.

Satz 5.9. Sei $K \in \mathcal{K}^d$ abgeschlossen und sei $x \in \mathbb{R}^d \setminus K$. Sei $a = x - \Phi(x)$ und $\beta = (x - \Phi(x))^\top \Phi(x)$. Dann ist $H(a, \beta)$ Stützhyperebene von K mit äußerem Normalenvektor a .

Satz 5.10. Sei $K \in \mathcal{K}^d$, K abgeschlossen. Dann ist K Durchschnitt aller Halbräume $H^-(a, \beta)$ mit der Eigenschaft, daß die zugehörige Ebene $H(a, \beta)$ Stützebene von K ist mit $K \subset H^-(a, \beta)$.

Korollar 5.11. Sei $X \subset \mathbb{R}^d$ mit $\text{conv } X$ abgeschlossen. Dann ist $\text{conv } X$ Durchschnitt aller Halbräume, die X enthalten.

Satz 5.12 (Busemann–Feller Lemma). *Sei $K \in \mathcal{K}^d$, K abgeschlossen. Für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$ gilt*

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| \leq |x - y|.$$

(„Die Lotabbildung vergrößert die Entfernung nicht.“)

Korollar 5.13. *Die Lotabbildung ist stetig.*

Satz 5.14. *Sei $K \in \mathcal{K}^d$, K kompakt. Weiter sei $B^d(0, \rho) \subset \mathbb{R}^d$ eine Kugel mit $K \subset \text{int } B^d(0, \rho)$ und sei $S^{d-1}(0, \rho) = \text{bd } B^d(0, \rho)$. Dann ist die auf $S^{d-1}(0, \rho)$ eingeschränkte Lotabbildung $\Phi : S^{d-1}(0, \rho) \rightarrow \text{bd } K$ surjektiv.*

Korollar 5.15. *Sei $K \in \mathcal{K}^d$, K abgeschlossen, und $x \in \text{bd } K$. Dann existiert eine Stützebene $H(a, \beta)$ von K mit $x \in H(a, \beta)$.*

6. DIE SEITEN EINES POLYTOPS

Definition 6.1. Sei $K \in \mathcal{K}^d$ abgeschlossen und H Stützebene von K . Ist $j = \dim(K \cap H)$, dann heißt $H \cap K$ j -Seite von K . K selbst wird als $\dim K$ -Seite und \emptyset als (-1) -Seite von K bezeichnet.

Notation 6.2. Für $K \in \mathcal{K}^d$ abgeschlossen heißen die 0-Seiten Ecken, die 1-Seiten Kanten und die $(\dim K - 1)$ -Seiten Facetten. $\dim K$ -Seite und (-1) -Seite werden als uneigentliche Seiten, die übrigen als eigentliche Seiten bezeichnet.

Bemerkung 6.3.

- (a) Sei $K \in \mathcal{K}^d$ abgeschlossen. Jeder Randpunkt von K liegt in einer geeigneten j -Seite, $0 \leq j \leq \dim K - 1$.
- (b) Sei $K \in \mathcal{K}^d$, $\dim K = d$. Sei F Facette von K und H Stützhyperebene an K mit $F = K \cap H \iff H = \text{aff } F$.

Für Polytope gilt:

Satz 6.4. Jedes Polytop besitzt nur endlich viele Seiten, und jede Seite ist ein Polytop.

Notation 6.5. Die Menge aller Ecken eines Polytops P wird mit $\text{vert } P$ bezeichnet.

Bemerkung 6.6. Sei $P \in \mathcal{P}^d$.

- (a) $v \in \text{vert } P$ kann nicht als Konvexkombination von anderen Punkten aus P geschrieben werden, d.h., für jedes $v \in \text{vert } P$ gilt $v \notin \text{conv } \{P \setminus \{v\}\}$.
- (b) $P = \text{conv } W$, dann gilt $\text{vert } P \subset W$.

Satz 6.7. Sei $P \in \mathcal{P}^d$. Dann gilt $P = \text{conv } \text{vert } P$.

„Analog“ lassen sich bei Polyedern die Facetten besonders leicht bestimmen:

Satz 6.8. Seien H_1, \dots, H_n Hyperebenen im \mathbb{R}^d , $P = \bigcap_{i=1}^n H_i^-$ ein Polyeder und F eine Facette von P . Dann existiert ein $k \in \{1, \dots, n\}$ mit $F = P \cap H_k$.

Wie bereits mehrfach erwähnt, sind beschränkte Polyeder und Polytope dasselbe:

Satz 6.9 (Minkowski, 1896; Weyl, 1935). Jedes Polytop ist beschränktes Polyeder und umgekehrt.

Als Konsequenz des letzten Satzes und seines Beweises ergeben sich die folgenden Korollare:

Korollar 6.10. Der relative Rand eines Polytops ist die Vereinigung der Facetten des Polytops.

Korollar 6.11. Besitzt $P \in \mathcal{P}^d$ n Facetten, dann ist P (bzgl. des Raumes $\text{aff } P$) Durchschnitt von n abgeschlossenen Halbräumen.

Korollar 6.12. *Ist $P \in \mathcal{P}^d$ und $A \subset \mathbb{R}^d$ ein affiner Teilraum des \mathbb{R}^d , dann gilt $(P \cap A) \in \mathcal{P}^d$.*

Als nächstes werden die Seiten eines Polytops und ihre Beziehungen untereinander untersucht.

Satz 6.13. *Seien $K_1, K_2 \in \mathcal{K}^d$ abgeschlossen mit $K_2 \subset K_1$. Ist F eine Seite von K_1 , dann ist $F \cap K_2$ eine Seite von K_2 .*

Korollar 6.14. *Sei $K \in \mathcal{K}^d$ abgeschlossen und seien F_1, F_2 Seiten von K mit $F_2 \subset F_1$. Dann ist F_2 Seite von F_1 .*

Satz 6.15. *Sei $P \in \mathcal{P}^d$ und F eine eigentliche Seite von P . Dann ist F Seite einer Facette von P .*

Für Polytope gilt auch:

Satz 6.16. *Sei $P \in \mathcal{P}^d$, F_1 Seite von P und F_2 Seite von F_1 . Dann ist F_2 Seite von P .*

Korollar 6.17. *Seien $P \in \mathcal{P}^d$ und seien F^j, F^k j - und k -Seiten von P mit $F^j \subset F^k$. Dann existieren für $i \in \{j, \dots, k\}$ Seiten F^i von P mit $F^j \subset F^{j+1} \subset \dots \subset F^{k-1} \subset F^k$.*

Für den Durchschnitt von Seiten gilt ganz allgemein:

Satz 6.18. *Sei $K \in \mathcal{K}^d$ und seien F_1, \dots, F_n Seiten von K . Dann ist $\bigcap_{i=1}^n F_i$ eine Seite von K .*

Satz 6.19. *Sei $P \in \mathcal{P}^d$. Dann ist jede $(\dim P - 2)$ -Seite von P Schnitt von zwei Facetten von P .*

Für Seiten beliebiger Dimension folgt

Satz 6.20. *Sei $P \in \mathcal{P}^d$, $0 \leq j \leq k < \dim P$ und sei F eine j -Seite von P . Dann ist F der Durchschnitt aller k -Seiten, die F enthalten.*

Der folgende Satz charakterisiert diejenigen Teilmengen der Ecken eines Polytops, die eine Seite aufspannen:

Satz 6.21. *Sei $P \in \mathcal{P}^d$ und sei $W \subset \text{vert } P$. Dann ist $\text{conv } W$ genau dann eine Seite von P , wenn $\text{aff } W \cap \text{conv } \{\text{vert } P \setminus W\} = \emptyset$.*

7. DUALITÄT, POLARITÄT UND SEITENVERBÄNDE

Notation 7.1. Im folgenden bezeichnet \mathcal{C}^d die Menge der konvexen Kegel im \mathbb{R}^d .

Satz 7.2. Sei $C \in \mathcal{C}^d$ abgeschlossen, und H eine Stützebene von C . Dann gilt $0 \in H$.

Bemerkung 7.3. Jede Stützebene H an einen Kegel $C \in \mathcal{C}^d$ ist von der Gestalt $H = \{x \in \mathbb{R}^d : a^\top x = 0\}$ mit einem $a \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$.

Notation 7.4. Für $a \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ sei $H(a) \subset \mathbb{R}^d$ die Hyperebene

$$H(a) = H(a, 0) = \{x : a^\top x = 0\}.$$

Definition 7.5. Für $C \in \mathcal{C}^d$ sei C^* definiert durch

$$C^* = \{y \in \mathbb{R}^d : y^\top x \leq 0 \text{ für alle } x \in C\}.$$

C^* heißt der zu C polare Kegel.

Satz 7.6. Sei $C \in \mathcal{C}^d$ abgeschlossen. Dann gilt

- (a) $C^* \in \mathcal{C}^d$ abgeschlossen und
- (b) $C^{**} = C$.

Definition 7.7. $C \in \mathcal{C}^d$ heißt polytopaler Kegel, falls es endlich viele $x^i \in \mathbb{R}^d$, $1 \leq i \leq n$, gibt, mit $C = \text{pos} \{x^1, \dots, x^n\}$. $C \in \mathcal{C}^d$ heißt polyedrischer Kegel, falls endlich viele Halbräume H_1^-, \dots, H_m^- mit $0 \in H_i$ existieren, so daß $C = \bigcap_{i=1}^m H_i^-$.

Bemerkung 7.8.

- (a) Der Durchschnitt von 0 enthaltenen Halbräumen ist ein konvexer Kegel.
- (b) Polytopale Kegel und polyedrische Kegel sind abgeschlossen.

Satz 7.9. Ist $C \in \mathcal{C}^d$ Polytopaler Kegel [polyedrischer Kegel], so ist C^* polyedrischer Kegel [polytopaler Kegel].

Satz 7.10. Ein Kegel ist genau dann polytopaler Kegel, wenn er polyedrischer Kegel ist.

Bemerkung 7.11. Man prüft leicht nach, daß sich die Sätze des vorigen Kapitels über Seiten von Polytopen sofort auf polytopale Kegel übertragen lassen.

Satz 7.12. Sei $C \in \mathcal{C}^d$ abgeschlossen und sei F Seite von C . Dann ist

$$F^* = \{y \in C^* : y^\top x = 0 \text{ für alle } x \in F\}$$

Seite von C^* und es gilt $F^{**} = F$.

Satz 7.13. Sei $C \in \mathcal{C}^d$ abgeschlossen. Dann gilt:

- (a) $H(y)$ Stützebene von C mit $C \subset H(y)^-$ genau dann, wenn $y \in C^*$ und
- (b) $H(y)$ Stützebene an C mit $C \subset H(y)^-$ und $H(y) \cap C = \{0\}$ genau dann, wenn $y \in \text{int } C^*$.

Satz 7.14. Sei $C \in \mathcal{C}^d$ abgeschlossen und seien F, G Seiten von C mit $F \subset G$. Dann gilt $G^* \subset F^*$.

Definition 7.15. Sei M eine Menge mit zwei inneren Verknüpfungen “ \sqcup ” und “ \sqcap ”. Sind \sqcup, \sqcap assoziativ, kommutativ und genügen sie den Absorptionsgesetzen

$$a \sqcup (a \sqcap b) = a \text{ und } a \sqcap (a \sqcup b) = a \text{ für alle } a, b \in M,$$

so heißt M Verband.

Satz 7.16. Für $C \in \mathcal{C}^d$ abgeschlossen sei \mathcal{S} die Menge aller Seiten von C mit den Verknüpfungen $F \sqcap G = F \cap G$ und $F \sqcup G = (F^* \cap G^*)^*$. Dann bildet \mathcal{S} einen Verband, den sogenannten Seitenverband. Ist weiter \mathcal{S}^* der Seitenverband des polaren Kegels C^* , so wird durch $F \rightarrow F^*$ ein Antiisomorphismus von \mathcal{S} nach \mathcal{S}^* definiert, d.h., ein bijektive inklusionsumkehrende Abbildung.

Bemerkung 7.17. Ist $F \subset C$ eine k -Seite, so ist $F^* \subset C^*$ eine $(d - k)$ -Seite.

Definition 7.18. Sei $K \in \mathcal{K}^d$. Dann heißt $C(K) = \text{pos}\{(x^\top, 1)^\top : x \in K\}$ Projektionskegel von K .

Bemerkung 7.19. $C(K) \cap H(e^{d+1}) = \{0\}$.

Bemerkung 7.20. Sei $P \in \mathcal{P}^d$. Dann bilden die Seiten von P einen Verband. Die j -Seiten, $j = -1, \dots, d$ von P entsprechen eineindeutig den $(j + 1)$ -Seiten von $C(P)$.

Definition 7.21. Zwei Polytope aus \mathcal{P}^d heißen kombinatorisch äquivalent, wenn ihre Seitenverbände isomorph sind.

Bemerkung 7.22. Sei $P \in \mathcal{P}^d$, $t \in \mathbb{R}^d$ und $M \in \mathbb{R}^{d \times d}$ regulär (d.h. $\det(M) \neq 0$). Dann ist $MP + t$ kombinatorisch äquivalent zu P .

Definition 7.23. Zu $P \in \mathcal{P}^d$ heißt das Polytop Q dual, falls sein Seitenverband antiisomorph zum Seitenverband von P ist.

Bemerkung 7.22 zeigt, dass es zu einem Polytop viele duale Polytope geben kann. Im folgenden soll die Existenz von dualen Polytopen näher untersucht werden.

Satz 7.24. Ist $K \in \mathcal{K}^d$ kompakt, so ist $C(K)$ abgeschlossen.

Definition 7.25. Für $K \in \mathcal{K}^d$ ist die Stützfunktion $h(K, \cdot) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $h(K, u) = \sup\{u^\top x : x \in K\}$.

Satz 7.26. Sei $K \in \mathcal{K}^d$, $K \neq \emptyset$, kompakt. Dann ist die Stützfunktion $h(K, \cdot)$ gegeben durch $h(K, u) = -\mu$, wobei μ bestimmt ist durch die Bedingung $(u, \mu)^\top \in \text{bd}(C(K)^*)$.

Satz 7.27. Sei $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ konvex und positiv homogen linear. Dann existiert ein $K \in \mathcal{K}^d$, K kompakt, mit Stützfunktion $h(K, \cdot) = f(\cdot)$. Insbesondere ist K gegeben durch $K = \{x : x^\top u \leq f(u) \text{ für alle } u \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}\}$.

Definition 7.28. Sei $K \in \mathcal{K}^d$. Dann heißt $K^* = \text{conv} \{y \in \mathbb{R}^d : (y^\top, -1)^\top \in C(K)^*\}$ Polarkörper von K .

Satz 7.29. Sei $K \in \mathcal{K}^d$. Dann gilt $K^* = \{y \in \mathbb{R}^d : y^\top x \leq 1 \text{ für alle } x \in K\}$.

Bemerkung 7.30. Seien $K_1, K_2 \in \mathcal{K}^d$ mit $K_1 \subset K_2$. Dann gilt $K_2^* \subset K_1^*$.

Satz 7.31. Sei $K \in \mathcal{K}^d$, $0 \in \text{int } K$, und K kompakt. Dann gilt

- (a) $K^* \in \mathcal{K}^d$, $0 \in \text{int } K^*$, K^* kompakt, und
- (b) $K^{**} = K$.

Satz 7.32. Zu jedem $P \in \mathcal{P}^d$ existiert ein duales Polytop.

Bemerkung 7.33. Sei $P \in \mathcal{P}^d$ und $0 \in \text{int } P$. Dann ist P^* dual zu P .

Notation 7.34. Zu zwei Seiten F_1, F_2 des Seitenverbandes eines Polytops $P \in \mathcal{P}^d$ bezeichnet $[F_1 : F_2]$ den Unterverband aller Seiten F von P mit $F_1 \subset F \subset F_2$.

Satz 7.35. $F_1, F_2, F_1 \subset F_2$, seien j - und k -Seite eines Polytops P . Dann ist $[F_1 : F_2]$ der Seitenverband eines $(k - j - 1)$ -dimensionalen Polytops.

Definition 7.36. Für eine Ecke F eines Polytops $P \in \mathcal{P}^d$ sei H eine Hyperebene, die F streng von den übrigen Ecken in $\text{vert } P \setminus F$ trennt. Dann heißt $H \cap P$ Eckenfigur von P bei F .

Satz 7.37. Eine Eckenfigur eines Polytops $P \in \mathcal{P}^d$ bei einer Ecke F ist kombinatorisch äquivalent zu $[F : P]$.

8. BEISPIELE

Notation 8.1. Im folgenden werden für $P \in \mathcal{P}^d$ mit $f_i(P)$, $i = -1, \dots, \dim P$, die Anzahl der i -dimensionalen Seiten von P bezeichnet. Weiter wird $f_i(P) = 0$ vereinbart für $i \notin \{-1, \dots, \dim(P)\}$.

Satz 8.2. Sei $P \in \mathcal{P}^d$ eine r -fache Pyramide mit Basis Q , d.h., $P = \text{conv}\{Q, x^1, \dots, x^r\}$. Dann gilt

$$f_k(P) = \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} f_{k-i}(Q).$$

Korollar 8.3. Für ein d -Simplex T^d gilt: $f_k(T^d) = \binom{d+1}{k+1}$.

Satz 8.4. Sei P eine Doppelpyramide mit Basis Q . Dann gilt

$$f_k(P) = \begin{cases} 2f_{d-2}(Q), & k = d - 1, \\ f_k(Q) + 2f_{k-1}(Q), & 0 \leq k \leq d - 2. \end{cases}$$

Korollar 8.5. Für das d -Kreuzpolytop X^d gilt: $f_k(X^d) = 2^{k+1} \binom{d}{k+1}$, $-1 \leq k \leq d - 1$.

Satz 8.6. Seien $P \in \mathcal{P}^d$, P Prisma mit Basis Q . Dann gilt

$$f_k(P) = \begin{cases} 2f_0(Q), & k = 0, \\ 2f_k(Q) + f_{k-1}(Q), & 1 \leq k \leq d. \end{cases}$$

Korollar 8.7. Für ein d -Parallelotop und insbesondere den d -Würfel W^d gilt:

$$f_k(W^d) = 2^{d-k} \binom{d}{k}, \quad 0 \leq k \leq d.$$

Den Zusammenhang zwischen Prismen und Doppelpyramiden gibt:

Satz 8.8. Seien $Q, Q^* \in \mathcal{P}^{d-1}$ polare Polytop mit $0 \in \text{int } Q$. Weiterhin sei der \mathbb{R}^{d-1} als Hyperebene $H(0) = \{x \in \mathbb{R}^d : x_d = 0\}$ in den \mathbb{R}^d eingebettet und sei $P = Q + \text{conv}\{-e^d, e^d\}$ ein Prisma. Dann ist das polare Polytop P^* von P eine Doppelpyramide mit $P^* = \text{conv}\{Q^* \cup \text{conv}\{-e^d, e^d\}\}$.

Korollar 8.9. Sind $Q, Q^* \in \mathcal{P}^{d-1}$ dual, und ist P Prisma über Q , P^* Doppelpyramide über Q^* , so sind P, P^* dual.

Korollar 8.10. d -Würfel und d -Kreuzpolytop sind dual (sogar polar) zueinander.

Würfel und Kreuzpolytop gehören zu wichtigen Klassen von Polytopen:

Definition 8.11. Ein Polytop $P \in \mathcal{P}^d$ ist simplizial, wenn alle Facetten Simplexes sind und einfach, wenn jede Ecke in $\dim P$ Facetten enthalten ist.

Satz 8.12. Für ein Polytop $P \in \mathcal{P}^d$ mit $\dim P = d$ und ein duales Polytop $Q \in \mathcal{P}^d$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- (a) P ist simplizial.
- (b) Jede eigentliche Seite von P ist ein Simplex.
- (c) Jede Facette von P enthält genau $\dim P$ Ecken.
- (d) Jede k -Seite ($k \leq d-1$) von P enthält genau $k+1$ Ecken.
- (c') Q ist einfach.
- (d') Jede k -Seite ($k \leq d-1$) von Q ist in genau $d-k$ Facetten von Q enthalten.

Der folgende Satz zeigt, dass die zyklischen Polytope (vgl. Beispiel 3.22) nicht nur simplizial sind, sondern noch eine weitere wichtige Eigenschaft besitzen:

Definition 8.13. Ein Polytop $P \in \mathcal{P}^d$ heißt k -nachbarschaftlich, wenn jede Teilmenge von bis zu k Ecken die Eckenmenge einer Seite von P ist. Polytope P mit $\dim P = d$ die $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ -nachbarschaftlich sind heißen auch einfach nachbarschaftlich

Satz 8.14. Die zyklischen Polytope $Z_d(t_1, \dots, t_n)$ mit paarweise verschiedenen Parametern $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ sind kombinatorisch äquivalent zueinander und "das zyklischen Polytop" $Z_d(n)$ ist simplizial und nachbarschaftlich.

Bemerkung 8.15. Für das zyklische Polytop $Z_d(n)$ gilt

$$f_k(Z_d(n)) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{(d-1)/2} \frac{k+2}{n-j} \binom{n-j}{j+1} \binom{j+1}{k+1-j} & \text{für ungerade } d, \\ \sum_{j=1}^{d/2} \frac{n}{n-j} \binom{n-j}{j} \binom{j}{k+1-j} & \text{für gerade } d. \end{cases}$$

Man kann zeigen (McMullen's Upper Bound Theorem, 1971), dass die Anzahl der k -Seiten für ein d -dimensionales Polytop mit n Ecken nicht größer werden kann als die entsprechende Anzahl beim zyklischen Polytop.

9. DER SATZ VON EULER UND DIE DEHN–SOMMERVILLE GLEICHUNGEN

Notation 9.1. Für ein Polytop $P \in \mathcal{P}^d$ mit $\dim P = d$ wird das $(d + 2)$ -Tupel $(f_{-1}(P), f_0(P), \dots, f_d(P))$ als f -Vektor von P bezeichnet.

Der folgende “klassische Satz” zeigt, dass die f -Vektoren einer linearen Bedingung genügen:

Satz 9.2 (Satz von Euler). Sei $P \in \mathcal{P}^d$ und $f_i(P)$, $i = -1, \dots, d$, die Anzahl der i -Seiten von P . Dann gilt

$$\sum_{i=-1}^d (-1)^i f_i(P) = 0, \text{ bzw. } \left(\sum_{i=0}^{\dim P - 1} (-1)^i f_i(P) = 1 - (-1)^{\dim P} \right).$$

Der Satz von Euler gibt sogar die einzige lineare Identität der alle Polytope, bzw. deren f -Vektoren genügen:

Korollar 9.3. Seien $\lambda_i \in \mathbb{R}$, so dass für alle $P \in \mathcal{P}^d$ die lineare Gleichung $\sum_{i=-1}^d \lambda_i f_i(P) = 0$ erfüllt ist. Dann gibt es ein $\mu \in \mathbb{R}$, so daß $\lambda_i = \mu(-1)^i$, $i = -1, \dots, d$.

Zwar genügen die f -Vektoren aller d -dimensionalen Polytope nur einer linearen Bedingung, aber für Teilklassen, wie die aller simplizialen Polytope, gelten noch weitere:

Satz 9.4. Sei $P \in \mathcal{P}^d$ simplizial. Dann gelten für den f -Vektor von P die d Dehn–Sommerville Gleichungen:

$$\sum_{i=k}^{d-1} (-1)^i \binom{i+1}{k+1} f_i(P) = (-1)^{d-1} f_k(P), \quad k = -1, \dots, d-2.$$

Nicht alle Dehn–Sommerville Gleichungen sind unabhängig voneinander:

Satz 9.5. Für $d \geq 1$ sind genau $\lfloor \frac{1}{2}(d+1) \rfloor$ der Dehn–Sommerville Gleichungen unabhängig voneinander.

Geometrisch zeigt der vorangegangene Satz, dass die f -Vektoren aller simplizialen Polytope in einem affinen Unterraum der Dimension $\lfloor \frac{1}{2}d \rfloor$ liegen, nicht aber in einem kleinerer Dimension.

10. DER SIMPLEX ALGORITHMUS UND REVERSE SEARCH

Das verstärkte Interesse an konvexen Polytopen bzw. Polyedern hat zu einem großen Teil mit ihrer Bedeutung für die *lineare Optimierung* zu tun. Das wohl bekannteste und am häufigsten verwendete Verfahren ist der *Simplex-Algorithmus*.

Notation 10.1. Für ein Polytop $P \in \mathcal{P}^d$ und einen Kostenvektor $c \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ heißt das Optimierungsproblem

$$\max\{c^\top x : x \in P\}$$

ein lineares Program (LP). Die Punkte $x \in P$ heißen zulässige Punkte des LP, P der zulässige Bereich. Punkte, die das Maximum annehmen, heißen Lösungen des LP.

Bemerkung 10.2. Die Lösungen eines LP (wie in 10.1) bilden eine eigentliche Seite von P . Es gibt daher immer eine Ecke von P unter den Lösungen. Läßt man die Punkte eines unbeschränkten Polyeders als zulässige Punkte zu, so wird das Maximum unter Umständen nicht angenommen.

Wie in Abschnitt 6 gesehen, besitzt jedes Polytop zwei unterschiedliche Beschreibungen:

Notation 10.3. Für ein Polytop $P \in \mathcal{P}^d$ heißt

(a)

$$P = \text{conv} \{x^1, \dots, x^n\}, \quad x^1, \dots, x^n \in \mathbb{R}^d,$$

V-Beschreibung (*Vertex-Beschreibung*) von P ,

(b)

$$(10.1) \quad P = \{x \in \mathbb{R}^d : Ax \leq b\}, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times d}, b \in \mathbb{R}^m$$

H-Beschreibung (*Hyperebenen-Beschreibung*) von P .

Die Beschreibungen heißen nicht-redundant, wenn man in (a) keine Ecke entfernen kann und in (b) keine Zeile des Ungleichungssystems überflüssig ist.

Kennt man die V-Beschreibung eines Polytops, ist jedes LP mit P als zulässigem Bereich „trivial lösbar“, indem man die Kosten $c^\top x$ für alle Ecken x berechnet.

Definition 10.4. Die Ecken und Kanten eines Polytops $P \in \mathcal{P}^d$ bilden eine geometrische Realisation eines abstrakten, endlichen, ungerichteten, einfachen Graphen $G(P)$ — dem Graphen von P . Zwei Ecken von P heißen benachbart, wenn sie durch eine Kante miteinander verbunden sind.

Algorithmus 10.5. (Simplex-Algorithmus)

- (1) Wähle eine Ecke x von P .
- (2) Wenn $c^\top x \geq c^\top x'$ für alle Nachbarecken x' von x gilt, ist x eine Lösung.
- (3) Wähle eine Nachbarecke x' von x mit $c^\top x < c^\top x'$.
- (4) Setze $x := x'$ und fahre fort mit Schritt (2).

Theorem 10.6. *Der Simplex-Algorithmus 10.5 ist deterministisch und endet mit einer optimalen Ecke x .*

Will man die „Qualität“ des Simplex-Algorithmus untersuchen, ist es interessant zu wissen, wie viele bessere Nachbarecken für ein Polytop mit m Facetten konstruiert werden müssen.

Definition 10.7. *Der Durchmesser $d(G)$ eines Graphen G ist die kleinste Anzahl von Kanten, die je zwei Ecken miteinander verbindet.*

Vermutung 10.8 (Hirsch-Vermutung). *Für $m > d \geq 2$ gilt:*

$$\Delta(d, m) := \max\{d(G(P)) : P \in \mathcal{P}^d \text{ mit } m \text{ Facetten}\} \leq m - d$$

Bemerkung 10.9. (a) $\Delta(2, m) = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$

(b) Für $d = 2, 3$, $m > 2$, oder $m - d \leq 5$ stimmt die Vermutung.

(c) Wenn die Vermutung für einfache Polytope gilt, gilt sie für alle.

(d) Wenn die Vermutung für alle $m = 2d$ gilt, gilt sie für alle m und d .

(e) $\Delta(d, m) \geq m - d$ für $m > d > 13$.

Zum Auffinden einer Startecke in Schritt (1) kann man das Ausgangsproblem leicht modifizieren:

Lemma 10.10. *Zu einem Polytop $P \in \mathcal{P}^d$ und H -Beschreibung (10.1) sei*

$$P' = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x_{d+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d+1} : Ax - x_{d+1}b \leq 0, x_{d+1} \leq 1 \right\}.$$

Dann gilt

$$\text{vert}(P') = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} : x \in \text{vert}(P) \right\} \cup \{0\}.$$

Das Auffinden aller Nachbarecken einer Ecke in Schritt (2) des Simplex-Algorithmus ist im Allgemeinen nicht so leicht — es sei denn, P ist ein einfaches Polytop:

Lemma 10.11. *Für eine Ecke x eines einfachen Polytops $P \in \mathcal{P}^d$, mit $\dim P = d$ und H -Beschreibung (10.1), sei \bar{A} die Matrix der Zeilen(vektoren) A^i von A mit $A^i x = b_i$ gilt. $I = \{i_1, \dots, i_d\}$ sei die entsprechende Indexmenge. Dann sind $x^j = x - \lambda_j \cdot \bar{A}_j^{-1}$, mit der j -ten Spalte \bar{A}_j^{-1} von \bar{A}^{-1} und*

$$\lambda_j = \max_{1 \leq i \leq m, i \notin I} \left\{ \frac{A^i x - b_i}{A^i \bar{A}_j^{-1}} : A^i \bar{A}_j^{-1} < 0 \right\}$$

$j = 1, \dots, d$, die Nachbarecken von x .

Die Idee der im Folgenden vorgestellten *lexikographischen Methode* ist es, eine geeignete (virtuelle) Perturbation des Ausgangsproblems zu betrachten, in dem der zugehörige (virtuelle) zulässige Bereich ein einfaches Polyeder ist.

Bemerkung 10.12. Wir gehen im Weiteren der Einfachheit halber davon aus, dass das Polyeder $P = \{x \in \mathbb{R}^d : \bar{A}x \leq \bar{b}\}$ punktiert ist (keine Geraden enthält), dass die letzten d voneinander unabhängigen Ungleichungen von einer Startecke $x^0 \in \mathbb{R}^d$ mit Gleichheit erfüllt sind und dass die gegebene H -Beschreibung von P nicht-redundant ist.

Notation 10.13. Zu den d Entscheidungsvariablen x_1, \dots, x_d des LPs

$$(10.2) \quad \max\{\bar{c}^\top x : \bar{A}x \leq \bar{b}\}, \quad \bar{A} \in \mathbb{R}^{m \times d}, b \in \mathbb{R}^m,$$

werden m Schlupfvariablen x_{d+1}, \dots, x_{d+m} eingeführt, mittels

$$(10.3) \quad x_{d+i} = \bar{b}_i - \bar{A}_i x \geq 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Bemerkung 10.14. Die Lösungen des Systems (10.3) entsprechen den Lösungen des Systems $\bar{A}x \leq \bar{b}$. Für die Kosten (den Zielfunktionswert) x_0 einer Lösung (x_1, \dots, x_{d+m}) von (10.3) gilt

$$x_0 = \bar{c}^\top x = \bar{c}_1 x_1 + \dots + \bar{c}_d x_d.$$

Definition 10.15. Ein Dictionary des LPs (10.2) ist ein Gleichungssystem in den Variablen x_0, x_1, \dots, x_{d+m} , das

- (a) dieselben Lösungen besitzt wie das System (10.3), und
- (b) x_0 und m der Variablen x_1, \dots, x_{d+m} (Basisvariablen) in den verbleibenden d Variablen (Nichtbasisvariablen) ausdrückt.

Notation 10.16. Das geordnete $(m+1)$ -Tupel der Basisindizes B heißt die Basis. Das geordnete d -Tupel der Nichtbasisindizes $N = \{0, \dots, m+d\} \setminus B$ heißt Cobasis.

Bemerkung 10.17. Mit der Konvention, dass A_I die durch I indizierten Zeilen A_i einer Matrix A und A^J die durch J indizierten Spalten A^j bezeichnet, läßt sich ein Dictionary schreiben als

$$x_B = \hat{A}_B^{-1}(\hat{b} - \hat{A}_N x_N),$$

wobei

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & -\bar{c}^\top & 0 \dots 0 \\ 0 & & \\ \vdots & \bar{A} & E_m \\ 0 & & \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{b} \end{pmatrix}.$$

Für das Anfangsdictionary zur Anfangsecke x^0 mit Basis $B = \{0, \dots, m\}$ gilt:

$$x_B = b - A_N x_N \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} E_{m+1} & \hat{A}_B^{-1} \hat{A}_N \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} \hat{A}_B^{-1} \bar{b} \end{pmatrix}.$$

Notation 10.18. Jedem Dictionary läßt sich das Tableaux

$$(10.4) \quad A_B^{-1}(A \mid b)$$

zuordnen. Eine Basislösung x von $Ax = b$ erhält man durch setzen von $x_B = A_B^{-1}b$ und $x_N = 0$.

Bemerkung 10.19. In den ersten $m + 1$ Spalten des Tableaux steht die Matrix A_B^{-1} .

Definition 10.20. Eine Basis B , das zugehörige Dictionary und die Basislösung x heißen zulässig, wenn

- (a) $\{0, \dots, d\} \subset B$ und
- (b) $x_i \geq 0$ für $i \in B \cap \{d + 1, \dots, d + m\}$.

Lemma 10.21. Jede Ecke \bar{x} von P kann zu einer zulässigen Basislösung x erweitert werden, und jede zulässige Basislösung x kann auf eine Ecke \bar{x} von P reduziert werden.

Lemma 10.22. Zu jedem extremen Strahl y von P gibt es eine zulässige Basis B und einen Index $s \in N$, so dass für $a = A_B^{-1}A_s$ gilt:

- (a) $y_i = -t \cdot a_i$, für ein $t > 0$ und $i = 1, \dots, d$.
- (b) $a_i \leq 0$, $i = d + 1, \dots, m$.

Definition 10.23. Ein Pivotschritt von einer Basis B zu einer Basis \bar{B} mit $\bar{B} = (B \setminus \{r\}) \cup \{s\}$, $r \in B$, $s \in N$, ist die Berechnung des Dictionarys zu \bar{B} aus dem Dictionary zu B . Ein Pivotschritt heißt zulässig, wenn beide Dictionarys zulässig sind.

Bemerkung 10.24. Ist j_r die Position von r in B und $a = A_B^{-1}A_s$, so erhält man das Tableau zu \bar{B} aus (10.4) durch:

- (a) Teile Zeile j_r von (10.4) durch a_{j_r} .
- (b) Subtrahiere a_i mal die neue Zeile j_r von Zeile i in (10.4), $i \in \{0, \dots, m\} \setminus \{j_r\}$.

Bemerkung 10.25 (Umsetzung Simplex-Algorithmus). Will man den Zielfunktionswert x_0 schrittweise verbessern bieten sich zum Beispiel folgende, häufig verwendete Pivotschritte an:

- (a) Gilt $(A_B^{-1}A_s)_0 \geq 0$ für alle $s \in N$, ist x_0 bereits maximal.
- (b) Wähle $s \in N$, mit $(A_B^{-1}A_s)_0 < 0$ minimal.
- (c) Falls $(A_B^{-1}A_s)_j \leq 0$, für $j = d + 1, \dots, m$, so gibt es kein Maximum.
- (d) Wähle $r \in B \cap \{d + 1, \dots, m\}$, so dass $(A_B^{-1}A_s)_{j_r} > 0$ maximal ist.

Ist das Polyeder P nicht einfach, kann es hierbei allerdings zu Zykeln kommen, so dass das Verfahren nicht determiniert.

Definition 10.26. Ein Vektor heißt lex-positiv, wenn die erste von 0 verschiedene Koordinate positiv ist. Ein Vektor a heißt lexikographisch kleiner als ein Vektor b , wenn $b - a$ lex-positiv ist. Eine zulässige Basis B heißt lex-positiv, wenn die Zeilen $d + 1, \dots, m$ von

$$D = (A_B^{-1}b \mid A_B^{-1})$$

lex-positiv sind.

Bemerkung 10.27. Die Anfangsbasis $B = \{0, \dots, m\}$ ist *lex-positiv*.

Bemerkung 10.28. Zu einer *lex-positiven* Basis B und einem $s \in N$ sei $a = A_B^{-1}A_s$ mit $a_j > 0$ für ein $j \in \{d+1, \dots, m\}$. Dann ist der Index j mit der Eigenschaft, dass D^j/a_j der lexikographisch minimale Vektor aus

$$(10.5) \quad \left\{ \frac{D^j}{a_j} : a_j > 0, d+1 \leq j \leq m \right\}$$

ist, eindeutig bestimmt.

Notation 10.29. Ist r der Basisindex, der zur Zeile j in der vorangegangenen Bemerkung gehört, so schreiben wir

$$r = \text{lexminratio}(B, s).$$

Falls (10.5) leer ist, sei $r = 0$.

Theorem 10.30. Für eine *lex-positiv* Basis B und $s \in N$ mit $r = \text{lexminratio}(B, s) \neq 0$ gilt:

- (a) $\bar{B} = (B \setminus \{r\}) \cup \{s\}$ ist *lex-positiv* Basis und
- (b) $s = \text{lexminratio}(B, r)$.

Korollar 10.31. Ersetzt man (d) in Bemerkung 10.25 durch

- (d') Wähle $r = \text{lexminratio}(B, s)$.

so ist garantiert, dass die wiederholte Anwendung dieser lexikographischen Pivotregel nach endlich vielen Schritten zu einer optimalen Lösung führt.

Bemerkung 10.32. Die lexikographische Methode ist äquivalent zur sogenannten Permutationsmethode, bei der zur "rechten Seite" \bar{b} in der H -Beschreibung $\bar{A}x \leq \bar{b}$ von P ein "passender" Vektor $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_m)^\top$ mit

$$0 < \epsilon_m < \dots < \epsilon_1 < 1$$

addiert wird — so, dass

$$P_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^d : \bar{A}x \leq \bar{b} + \epsilon\}$$

einfach ist.

Korollar 10.33. Jede Ecke \bar{x} von P kann zu einer zulässigen Basislösung x mit *lex-positiver* Basis erweitert werden. Die Menge der *lex-positiven* Basen sind Ecken eines (abstrakten) zusammenhängenden ungerichteten Graphen, dessen Kanten zu möglichen lexikographischen Pivotschritten assoziiert sind.

Um alle Ecken, d.h. die V -Beschreibung von P zu berechnen, genügt es also den zusammenhängenden Graphen der *lex-positiven* Basen zu ermitteln. Eine rekursive und wenig Speicherplatz benötigende Möglichkeit bietet die von AVIS und FUKUDA entwickelte *Reverse Search*:

Lemma 10.34. *Wählt man $A^0 = (1, 0, \dots, 0, 1, \dots, 1)$ mit m aufeinander folgenden 0-Einträgen und $b_0 = 0$, so ist die Anfangsbasis $B = \{0, \dots, m + d\}$ unter allen lex-positiven Basen, die eindeutig optimale.*

Algorithmus 10.35. *(Reverse Search)*

EINGABE: *Tableaux (10.4) mit $A^0 = (1, 0, \dots, 0, 1, \dots, 1)$ und $b_0 = 0$ zu einer Anfangsecke x^0 mit Basis $\{0, \dots, m\}$.*

AUSGABE: *Alle Ecken und extremen Strahlen des Polyeders P*

Der Algorithmus verwendet neben der Verwaltung der aktuellen Basis B , der Cobasis N und dem Tableau die folgenden drei Funktionen:

- (1) **pivot**(B, r, s): *Führt einen Pivotschritt von B zu $B = (B \setminus \{r\}) \cup \{s\}$ durch.*
- (2) **selectpivot**(B) $\mapsto (r, i)$: *Ermittelt für eine nicht-optimale Basis B das Tupel (r, i) , so dass $s = N_i$ der kleinste Index ist mit $(A_B^{-1}A_s)_0 < 0$ und **pivot**(B, r, s) ein lexikographischer Pivotschritt wäre.*
- (3) **reverse**(B, s) $\mapsto r$: *Aus B und Index $s \in N$ wird ein $r \in B$ ermittelt, so dass $(B \setminus \{r\}) \cup \{s\}$ eine Basis ist, zu der **selectpivot** das Tupel (r, i_s) ($s = N_{i_s}$) ermitteln würde. Gibt kein solches r wird -1 zurückgegeben.*

$B = \{0, \dots, m\}$

$i = 1$

REPEAT

WHILE $i \leq d$

$s = N_i$

$a = A_B^{-1}A_s$

IF $a_i \leq 0, i = d + 1, \dots, m$

THEN

Ausgabe des extremen Strahls y mit $y_i = -a_i, i = 1, \dots, d$.

$i = i + 1$

ELSEIF $r = \text{reverse}(B, s) \geq 0$

THEN

pivot(B, r, s)

Ausgabe der zu B gehörigen Ecke

$i = 1$

ELSE $i = i + 1$

END WHILE

$(r, i) = \text{selectpivot}(B)$ (*“Backtracking”*)

pivot(B, r, N_i)

$i = i + 1$

UNTIL $j > d$ and $B = \{0, \dots, m\}$

Bemerkung 10.36. *In der beschriebenen Variante werden viele, nicht-einfache Ecken von P mehrfach ausgegeben. In der C-Implementierung `lrs` von AVIS wird das durch zusätzliche Tests vermieden.*