I. VALÓS SZÁMOK

„A számlálás és az ezzel létrejött számok az eszmélő ember legősibb teljesítményei közé sorolhatók. ...ha jó ismerőseink is az egész számok, mégis sok titkot rejtenek. Faggatóra fogni őket ezek felől érdekes és sokszor nem könnyű feladatnak ígérkezik.”

(Erdős Pál, Surányi László: Válogatott fejezetek a számelméletből)

A számok az ember számlálási igényének és absztraktizálási készségének kölcsönhatásaként jöttek létre. A számfogalom matematikai letisztulásának története az ókortól napjainkig húzódik. Annak ellenére, hogy a számfogalom és általában a matematika axiomatizálásának igénye már Euklidész korában megjelent, a természetes számhalmaz axiomatikus tárgyalása csak 1891-ben Giuseppe Peano munkássága nyomán vált lehetővé. Az egész számok halmazának axiomatikus felépítését 1900-ban David Hilbert jelentette meg.

Történeti érdekességnek számít, hogy a valós számhalmaz axiomatikája (és az irracionális számok bevezetése) korábban, már 1872-ben megjelent Richard Dedekind munkájában. Mindezek a törekvések szorosan összefüggnek Georg Cantor matematikus munkájával, aki a halmazelmélet megalapozásában játszott fontos szerepet. Az axiomatikus tárgyalásmód hiánya a matematika bizonyos ágaiban (számelmélet) egyáltalán nem jelentett hátrányt. Tankönyvünknek nem célja a különböző számhalmazok felépítésének axiomatikus tárgyalása. Ezért nagyrészt csak a számokkal végzett műveletek tulajdonságaival illetve a számok közti relációkkal foglalkozunk, a számhalmazokat eleve értelmezettnek tekintjük.

I.1. Természetes, egész és racionális számok

A $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$ halmazt $\mathbb{N}$-nel jelöljük, és a természetes számok halmazának nevezzük. Gyakran használjuk még az $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ halmazt is. A $\{...-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\} = \{n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$ halmazt $\mathbb{Z}$-vel jelöljük, és az egész számok halmazának nevezzük. Az $\left\{ \frac{m}{n} \middle| m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ halmazt $\mathbb{Q}$-val jelöljük, és a racionális számok halmazának nevezzük.

Az $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ és $\mathbb{Q}$ halmazokban ismerjük már az összeadást és a szorzást. Ezeknek a műveleteknek a főbb tulajdonságai a következők:

I. **1.** $a+b=b+a$, $\forall\, a, b \in X$, $X \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}$ (az összeadás kommutatív vagy felcserélhető);

2. $a+(b+c)=(a+b)+c$, $\forall\, a, b, c \in X$ (az összeadás asszociatív vagy csoportosítható);

3. $0+a=a+0=a$, $\forall\, a \in X$ (az összeadásra nézve a 0 semleges eleme *X*-nek);

4. $\forall\, a \in \mathbb{Z}\ (\mathbb{Q})\ \exists (-a) \in \mathbb{Z}\ (\mathbb{Q})$ úgy, hogy $a+(-a)=0$ (minden egész (racionális) számnak van ellentettje);

II. **1.** $a \cdot b = b \cdot a$, $\forall\, a, b \in X$ (a szorzás kommutatív);

2. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, $\forall\, a, b, c \in X$ (a szorzás asszociatív);

3. $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$, $\forall\, a \in X$ (az 1 semleges elem a szorzásra nézve);

4. $\forall a \in \mathbb{Q}^*$ esetén $\exists a \in \mathbb{Q}^*$ úgy, hogy $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$ (minden nullától különböző racionális számnak van reciproka);

5. $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$, $\forall\, a, b, c \in X$ (a szorzás disztributív az összeadásra nézve).

Az $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ és $\mathbb{Q}$ halmazok elemeinek hatványozását is ismerjük már az alsóbb osztályokból. Ha $a \in X$ és $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, akkor $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-szer}}$, $a^1 = a$ és ha $a \neq 0$, akkor $a^0 = 1$. (*a*-t a hatvány alapjának és *n*-et hatványkitevőnek nevezzük). A negatív kitevőjű hatványokat is ismerjük: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a \in X^*$. A hatványozás az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $\forall a \in X^*$, $\forall m,n \in \mathbb{Z}$;

2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $\forall a \in X^*$, $\forall m,n \in \mathbb{Z}$;

3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$, $\forall a \in X^*$, $\forall m,n \in \mathbb{Z}$;

4. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$, $\forall a, b \in X^*$, $\forall n \in \mathbb{Z}$;

5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $\forall a, b \in X^*$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Az $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ és $\mathbb{Q}$ halmazok elemei között a következő relációkat használjuk: $=$ (egyenlőség), $\leq$, $\geq$ (rendezési relációk). Az egyenlőségi reláció a következő tulajdonsággal rendelkezik:

1. $a = a$, $\forall a \in X$ (reflexivitás);

2. Ha $a = b$ és $b = c$, akkor $a = c$ (tranzitivitás);

3. Ha $a = b$, akkor $b = a$ (szimmetria).

1.1. Megjegyzés. Azokat a relációkat, amelyek az előbbi három tulajdonsággal rendelkeznek, *ekvivalencia relációknak* nevezzük.

A rendezési relációk tulajdonságai a következők:

1. $a \leq a$, $\forall a \in X$ (reflexivitás);

2. Ha $a \leq b$ és $b \leq c$, akkor $a \leq c$ (tranzitivitás);

3. Ha $a \leq b$, és $b \leq a$, akkor $a = b$ (antiszimmetria).

1.2. Megjegyzés. Azokat a relációkat, amelyek az előbbi három tulajdonsággal rendelkeznek, *rendezési relációknak* nevezzük.

Ezeken a tulajdonságokon kívül nagyon gyakran használjuk a következő, relációk és műveletek viszonyára vonatkozó, tulajdonságokat:

1. $a = b \Rightarrow a + c = b + c$, $\forall a, b, c \in X$;

2. $a = b \Rightarrow a \cdot c = b \cdot c$, $\forall a, b, c \in X$;

3. $a < b \Rightarrow a + c < b + c$, $\forall a, b, c \in X$;

4. $\left.\begin{matrix} a < b \\ 0 < c \end{matrix}\right\} \Rightarrow ac < bc$, $\forall a, b, c \in X$;

5. $a^{2n} \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ és $\forall a \in X$;

6. Ha $0 \leq a \leq b$ és $n \in \mathbb{N}$, akkor $a^n \leq b^n$.

Az előbbi tulajdonságok mellett $\mathbb{N}$-ben (és $\mathbb{Z}$-ben) különösen fontos az oszthatóság és a maradékos osztás tétele.

1.3. Értelmezés. Az *a* természetes (egész) szám osztható a *b* természetes (egész) számmal, ha létezik olyan *c* természetes (egész) szám, amelyre $a = b \cdot c$.

Ezt az $a \vdots b$ (*a* osztható *b*-vel), vagy $b \mid a$ (*b* osztja az *a*-t) szimbólummal jelöljük.

1.4. Tétel. *(Maradékos osztás tétele)* Ha $a \in \mathbb{N}$ és $b \in \mathbb{N}^*$, akkor léteznek és egyértelműek a q és r természetes szám úgy, hogy $a - b \cdot q = r$ és $0 \le r < b$.

Bizonyítás. Képezzük a $H = \{a - b \cdot n \mid n \in \mathbb{N}\}$ halmazt. Mivel $a \in \mathbb{N}$, a $H \cap \mathbb{N}$ nem üres halmaz ($n = 0$ -ra $a - bn = a$). Így létezik H -ban legkisebb pozitív (vagy 0) szám. Jelöljük ezt r -rel. Mivel $r \in H$ következik, hogy létezik $q \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $a - b \cdot q = r$. Ha $r \ge b$, akkor $r - b = a - q(b+1) \in H$ és $r - b < r$. Mivel ez ellentmond r megválasztásának, így $0 \le r < b$. Ha a tételbeli összefüggések teljesülnének a (q_1, r_1) és (q_2, r_2) számpárokra, akkor az $a = b \cdot q_1 + r_1$ és $a = b \cdot q_2 + r_2$ egyenlőségek alapján $b \cdot (q_1 - q_2) = r_1 - r_2$. Ha $r_1 \ne r_2$, akkor $|r_2 - r_1| < b$ és $|b \cdot (q_1 - q_2)| > b$, tehát az egyenlőség nem teljesülhet. Ebből következik, hogy $r_1 = r_2$ és $q_1 = q_2$.

A tételben szereplő q szám az osztás *hányadosa* és az r szám az osztás *maradéka.*

1.5. Megjegyzések:

1. Az $a \in \mathbb{N}$ szám pontosan akkor osztható a $b \in \mathbb{N}^*$ számmal, ha az a -nak b -vel való osztási maradéka 0.

2. Ha $x \in \mathbb{Q}$, akkor a legnagyobb olyan egész számot, amely nem nagyobb, mint x, az x egészrészének nevezzük és $[x]$-szel jelöljük. Ez az értelmezés a későbbiekben kiterjeszthető valós x számokra is. Példák: $\left[\frac{3}{2}\right] = 1$, $\left[\frac{10}{3}\right] = 3$, $\left[-\frac{20}{6}\right] = -4$. Általában az *a*-nak *b*-vel való osztásakor a hányados $\left[\frac{a}{b}\right]$ és maradéka $r = a - b \cdot \left[\frac{a}{b}\right]$. Az $x - [x]$ számot $\{x\}$ -szel jelöljük és x tört részének nevezzük.

A következő tulajdonságokat gyakran használhatjuk:

1.6. Tétel. Ha $a,\ b,\ c \in \mathbb{N}^*$, akkor érvényesek az alábbiak:

1. $a \mid b$ és $b \mid c \;\Rightarrow\; a \mid c$ (az oszthatóság tranzitív reláció)

2. $a \mid b$ és $a \mid c \;\Rightarrow\; a \mid (m \cdot b + n \cdot c)$, $\forall\, m, n \in \mathbb{N}$.

3. $a \mid b \;\Rightarrow\; ca \mid cb$.

Bizonyítás

1. Az értelmezés alapján $a \mid b \;\Leftrightarrow\; \exists\; x_1 \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $b = x_1 \cdot a$.

$b \mid c \;\Leftrightarrow\; \exists\; y_1 \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $c = y_1 \cdot b$. Így $c = y_1 \cdot b = y_1 \cdot (x_1 \cdot a) = (y_1 \cdot x_1)a$, tehát $a \mid c$, mert $x_1 \cdot y_1 \in \mathbb{N}$.

2. $\left.\begin{array}{l} a \mid b \Rightarrow b = ax_1 \\ a \mid c \Rightarrow c = ay_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} mb + nc = a(mx_1 + ny_1) \\ mx_1 + ny_1 \in \mathbb{N} \end{array}\right\} \Rightarrow a \mid (mb + nc)$.

3. $a \mid b \Rightarrow b = ax_1 \Rightarrow bc = acx_1 \Rightarrow ca \mid cb$.

1.7. Értelmezés. Azokat az 1-nél nagyobb természetes számokat, amelyek 1-en és önmagukon kívül nem oszthatók egyetlen természetes számmal sem, *prímszámoknak* nevezzük.

Az V. osztályban az erasztosztenészi szita segítségével meghatároztuk a 100-nál kisebb prímszámokat. Ezek a következők:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 47, 53, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Bizonyítás nélkül megemlítjük a *számelmélet alaptételét*.

1.8. Tétel. Bármely $n \in \mathbb{N}^*$ természetes szám egyértelműen felbontható prímhatványok szorzatára (a tényezők sorrendjétől eltekintve).

1.9. Példák. $130 = 2 \cdot 5 \cdot 13$; $40 = 2^3 \cdot 5$; $1224 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 17$.

1.10. Értelmezés. Az a és b szám legnagyobb közös osztóján azt a legnagyobb természetes számot értjük, amely osztója a-nak is és b-nek is. Az a és b legnagyobb közös osztóját (a, b)-vel jelöljük és l.n.k.o.-nak rövidítjük. Ha két szám l.n.k.o.-ja 1, akkor a két számot relatív prímnek nevezzük. Az a és b legkisebb közös többszörösén azt a legkisebb természetes számot értjük, amely a-nak is b-nek is többszöröse. Az a és b legkisebb közös többszörösét $[a, b]$-vel jelöljük és l.k.k.t.-vel rövidítjük.

I.1.1. Feladatok

1. Fogalmazz meg és bizonyíts be egy-egy oszthatósági kritériumot a 2-vel, 3-mal, 5-tel, 7-tel, 9-cel, 11-gyel való oszthatóságra.

2. Bizonyítsd be, hogy ha n páratlan természetes szám, akkor $n^4 + 14n^2 + 49$ osztható 64-gyel.

3. Bizonyítsd be, hogy ha $b \mid a$, $c \mid a$ és $(b, c) = 1$, akkor $bc \mid a$.

4. Bizonyítsd be, hogy öt egymásutáni természetes szám szorzata osztható 120-szal. Általánosítás!

5. Hány nullára végződik az $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2001$ szorzat?

6. Határozd meg a 3 kitevőjét az $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2001$ szorzatban.

7. Bizonyítsd be, hogy a $2^9 + 2^{99}$ szám osztható 10-zel.

8. Bizonyítsd be, hogy ha a, b és c egész számok és $(a + b + c) \vdots 6$, akkor $a^5 + b^3 + c$ is osztható 6-tal.

9. Bizonyítsd be, hogy $(3^n + 2n + 3) \vdots 4$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

10. Milyen számrendszerben érvényes a következő szorzás $25 \cdot 314 = 10274$?

11. Bizonyítsd be, hogy az alábbi egyenleteknek nincs megoldása a természetes számok halmazában:

a) $xy(x + y) = 2001$; **b)** $x^2 + y^2 - x - y = 2001$; **c)** $3x - 21y = 14$;

d) $x^2 - 2y^2 = 17$; **e)** $5^x + 11^y = 12^z$ ($x \neq 0$); **f)** $x^2 + y^2 = 2x + 2y - 3$.

12. Határozd meg a hiányzó számjegyeket úgy, hogy

a) $36 \mid \overline{52x2y}$; **b)** $45 \mid \overline{24x68y}$; **c)** $99 \mid \overline{62xy427}$.

13. Lehet-e egyszerre egész az $\dfrac{n+1}{15}$ és az $\dfrac{n+8}{21}$, ha $n \in \mathbb{N}$?

14. Bizonyítsd be, hogy ha a természetes számokat írjuk a tizedes vessző után növekvő sorrendben, a kapott szám nem lesz racionális.

15. Határozd meg azokat az a, b, c és d számjegyeket, amelyekre $\overline{abcd} + \overline{bcd} + \overline{cd} + \overline{d} = 9844$.

16. Vizsgáld meg, mi lehet az osztási maradéka egy teljes négyzetnek 4-gyel, 3-mal, 5-tel, 7-tel.

17. Határozd meg azokat az x egész számokat, amelyekre

a) $(4x - 3) \vdots 7$; **b)** $(3x - 2) \vdots 11$; **c)** $(7x + 4) \vdots 13$.

18. Bizonyítsd be, hogy ha $a = b \cdot c + d$, akkor $(a, b) = (b, d)$.

19. Adjál algoritmust két szám l.n.k.o-jának és l.k.k.t.-ének meghatározására.

20. Bizonyítsd be, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén az $n^3 - n$ szám osztható 6-tal.

21. Igazold, hogy három egymásutáni egész szám köbének összege osztható 3-mal.

22. Adottak az $a = 3^{100} : \left[3^{40} \cdot 3^{58} + \left(3^{110} \cdot 3^{15}\right) : 3^{27} + \left(4^{57} : 4^{56} - 1^4\right) \cdot 3^{97}\right] \cdot 2$ és a $b = 10^3 : \left\{123 + 34 : \left[\left(2 \cdot 3^2\right)^2 : 18 - 17^0 \cdot 1^{125}\right]\right\}$ számok. Határozd meg az a és b számok l.n.k.o-ját és l.k.k.t-jét.

23. Az a és b számok l.n.k.o-ja 15, l.k.k.t-e 180. Melyek ezek a számok?

24. Két természetes szám összege 2001. Határozzuk meg a számokat, ha legnagyobb közös osztójuk 87.

25. Határozd meg az $n = \overline{49a4b}$ számot, ha $n \,\vdots\, 28$ és $(\overline{ab} + 1) \,\vdots\, 9$.

26. Bizonyítsd be, hogy ha az n természetes szám nem osztható 7-tel, akkor az $N = \frac{n^6}{7} + \frac{6}{7}$ szám természetes szám.

27. Bizonyítsd be, hogy az $N = 3^0 + 3^1 + 3^2 + \ldots + 3^{2000}$ szám osztható 13-mal és az $M = N - 3^{2000}$ szám osztható 40-nel.

28. a) Bizonyítsd be, hogy nem létezik olyan természetes szám, amely négyzetének hárommal való osztási maradéka 2.

b) Oldd meg az egész számok halmazán a $b^2 = 9a - 2b + 10$ egyenletet.

29. Határozd meg azokat az $n \in \mathbb{N}$ természetes számokat, amelyekre az $n+1$, $n+7$, $n+13$, $n+19$, $n+25$ számok mindegyike prímszám.

30. Bizonyítsd be, hogy az $\frac{5n+3}{13n+8}$ tört irreducibilis, bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén.

31. a) Igazold, hogy $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

b) Bizonyítsd be, hogy $\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{100} < \frac{19}{20}$.

32. Bizonyítsd be, hogy a $2^{17} + 2^5 - 1$, $2^{12} - 2^5 - 1$ és $2^{13} - 2^4 + 1$ számok összetett számok.

33. Bizonyítsd be, hogy a $2^{105} + 3^{105}$ szám osztható 5-tel, 35-tel, 275-tel és 2315-tel.

I.2. Tizedes számok

A tizedes számrendszer nemcsak az egész számok ábrázolására használható. Ha a 10 negatív kitevőjű hatványait is használjuk, akkor törteket is ábrázolhatunk. Így az $\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$ egyenlőséghez hasonlóan írhatjuk, hogy

$$0{,}1 = 10^{-1},$$
$$0{,}01 = 10^{-2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$0,\underbrace{0\ldots0}_{k-1}1 = 10^{-k},$$

tehát $0, b_1 b_2 b_3 \ldots b_k = b_1 \cdot 10^{-1} + b_2 \cdot 10^{-2} + b_3 \cdot 10^{-3} + \ldots + b_k \cdot 10^{-k}$.

2.1. Példák

$$0{,}2 = 2 \cdot \frac{1}{10} = \frac{2}{10};$$
$$0{,}32 = 3 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{1}{100} = \frac{30+2}{100} = \frac{8}{25};$$
$$0{,}125 = 1 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{1}{100} + 5 \cdot \frac{1}{1000} = \frac{100+20+5}{1000} = \frac{1}{8}.$$

Látható, hogy véges tizedes tört alakban csak $\frac{n}{10^k}$ alakú (vagy ezekkel ekvivalens) racionális törteket lehet ábrázolni. Így szükséges a végtelen sok számjegyet tartalmazó tizedes törtek bevezetése is. Próbáljuk meg ábrázolni az $\frac{1}{7}$ racionális törtet tizedes tört alakban. Ha $\frac{1}{7} = 0, b_1 b_2 b_3 \ldots b_k \ldots$, akkor $\frac{10}{7} = b_1, b_2 b_3 \ldots b_k \ldots$, tehát $b_1 = \left[\frac{10}{7}\right] = 1$ és így $\left(\frac{10 - 1 \cdot 7}{7}\right) = \frac{3}{7} = 0, b_2 b_3 \ldots b_k \ldots$, $\frac{30}{7} = b_2, b_3 b_4 \ldots b_k \ldots$, tehát $b_2 = \left[\frac{30}{7}\right] = 4$. Folytatva az eljárást rendre a $b_3 = 2$, $b_4 = 8$, $b_5 = 5$, $b_6 = 7$ és $\frac{1}{7} = 0, b_7 b_8 b_9 \ldots b_k \ldots$ egyenlőséghez jutunk. Eszerint a következő hat számjegy ismét 1, 4, 2, 8, 5, 7 és ezek ismétlődnek. Így írhatjuk, hogy $\frac{1}{7} = 0,\underbrace{14287}\underbrace{142857}\underbrace{142857}\ldots$.

Ezt egyszerűbben az $\frac{1}{7} = 0,(142857)$ egyenlőséggel írjuk. A számjegyek meghatározása a következő osztási algoritmussal írható le egyszerűbb alakban:

$$\begin{array}{l}
1:7=0,(142857)\\
\underline{0}\\
\boxed{10}\\
\underline{\ 7}\\
\ 30\\
\underline{\ 28}\\
\quad 20\\
\quad \underline{14}\\
\qquad 60\\
\qquad \underline{56}\\
\qquad\ 40\\
\qquad\ \underline{35}\\
\qquad\quad 50\\
\qquad\quad \underline{49}\\
\qquad\quad \boxed{10}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
b_1=\left[\dfrac{10}{7}\right]=1,\ \ 10-b_1\cdot 7=3\\
b_2=\left[\dfrac{30}{7}\right]=4,\ \ 30-b_2\cdot 7=2\\
b_3=\left[\dfrac{20}{7}\right]=2,\ \ 20-b_3\cdot 7=6\\
b_4=\left[\dfrac{60}{7}\right]=8,\ \ 60-b_4\cdot 7=4\\
b_5=\left[\dfrac{40}{7}\right]=5,\ \ 40-b_5\cdot 7=5\\
b_6=\left[\dfrac{50}{7}\right]=7,\ \ 50-b_6\cdot 7=1
\end{array}$$

Az ilyen tizedes törteket (amelyekben a tizedesvessző és az ismétlődő számjegyek között nincs más számjegy) *tiszta szakaszos tizedes törteknek* nevezzük.

2.2. Példák

$\frac{1}{3}=0,(3)$; $\frac{2}{3}=0,(6)$; $\frac{5}{13}=0,(384615)$;

$\frac{4}{7}=0,(571428)$; $\frac{3}{11}=0,(27)$; $\frac{3}{17}=0,(1764705882352941)$.

Az előbbiekből látható, hogy a periódus hossza nem feltétlenül a nevező nagyságától függ, tehát két fontos kérdésre kellene választ keresnünk:

1. Az $\frac{m}{n}$ irreducibilis racionális tört tizedes ábrázolása mikor tiszta szakaszos tizedes tört?

2. Mitől függ a periódus hossza?*

Tegyük fel, hogy $\frac{m}{n}=0,(b_1b_2\dots b_k)$.

Így $10^k\cdot\frac{m}{n}=\overline{b_1b_2\dots b_k},(b_1b_2\dots b_k)=\overline{b_1b_2\dots b_k}+0,(b_1b_2\dots b_k)=\overline{b_1b_2\dots b_k}+\frac{m}{n}$, tehát $\frac{m}{n}=\frac{\overline{b_1b_2\dots b_k}}{10^k-1}=\frac{\overline{b_1b_2\dots b_k}}{\underbrace{99\dots9}_{k}}$. Ebből az egyenlőségből következik, hogy csak azoknak az irreducibilis $\frac{m}{n}$ törteknek az ábrázolása lehet tiszta szakaszos tört, amelyek nevezője nem osztható sem 2-vel, sem 5-tel. Másrészt igazoljuk, hogy minden ilyen racionális tört tiszta szakaszos tizedes törtként ábrázolható. Ehhez az szükséges, hogy ha $(n,\,10)=1$, akkor létezzen n-nek 10^k-1 alakú többszöröse. Tekintsük a 10^1-1, 10^2-1, 10^3-1, 10^4-1, … , 10^p-1, … természetes számokat. Ezeket n-nel osztva legfeljebb n különböző maradékhoz juthatunk, tehát létezik ezek közt két olyan szám (10^i-1 és 10^j-1), amelyek n-nel való osztáskor ugyanazt a maradékot adják. Így $(10^j-1)-(10^i-1)$ osztható n-nel, tehát $10^i(10^{j-i}-1)\ \vdots\ n$. Mivel $(n,\,10)=1$, ez csak akkor lehetséges, ha $(10^{j-i}-1)\ \vdots\ n$.

* Az első kérdésre a választ először J. Wallis (1616-1702) angol matematikus adta. A periódus hosszára vonatkozó tulajdonságok K. F. Gauss (1777-1855) német matematikustól származnak.

Az előbbiek alapján az $\frac{m}{n}$ tizedes tört ábrázolása pontosan akkor tiszta szakaszos tizedes tört, ha $(n, 10) = 1$.

Az $m \cdot (10^k - 1) = n \cdot \overline{b_1 b_2 ... b_k}$ egyenlőség alapján a periódus hossza a legkisebb olyan k természetes szám, amelyre $(10^k - 1) \vdots n$.

Vizsgáljuk meg, hogy mi történik, ha az $\frac{m}{n}$ irreducibilis tört nevezője nem relatív prím 10-zel és osztható valamilyen 5-től különböző páratlan prímszámmal.

Ábrázoljuk az $\frac{1}{6}$ és $\frac{5}{26}$ törteket tizedes tört alakjában. Az $\frac{1}{6} = 0, b_1 b_2 b_3 ...$ egyenlőség alapján $b_1 = \left[\frac{10}{6}\right] = 1$ és $\frac{4}{6} = 0, b_2 b_3 ...$, tehát $\frac{2}{3} = 0, b_2 b_3 ...$. Így $b_1 = 1$ és $b_k = 6$, $k \geq 2$ esetén. Ezt az $\frac{1}{6} = 0{,}1(6)$ egyenlőséggel jelöljük. Az ilyen tizedes törteket (ahol az ismétlődő számjegyek és a tizedesvessző között van néhány számjegy) *vegyes szakaszos tizedes törteknek* nevezzük. Hasonlóan kapjuk, hogy $\frac{5}{26} = 0{,}1(923076)$.

Az $\frac{m}{n} = 0, c_1 c_2 ... c_l (b_1 b_2 ... b_k)$ egyenlőség alapján $10^l \cdot \frac{m}{n} = \overline{c_1 c_2 ... c_l} + 0,(b_1 b_2 ... b_k)$, tehát $\left[10^l \cdot \frac{m}{n} - \overline{c_1 c_2 ... c_l}\right] \cdot 10^k = \overline{b_1 b_2 ... b_k} + 0,(b_1 b_2 ... b_k)$.

Innen következik, hogy $\left[10^l \cdot \frac{m}{n} - \overline{c_1 c_2 ... c_l}\right] \cdot (10^k - 1) = \overline{b_1 b_2 ... b_k}$, tehát

$$\frac{m}{n} = \left(\frac{\overline{b_1 b_2 ... b_k}}{10^k - 1} + \overline{c_1 c_2 ... c_l}\right) \cdot \frac{1}{10^l} = \frac{\overline{c_1 c_2 ... c_l b_1 b_2 ... b_k} - \overline{c_1 c_2 ... c_l}}{\underbrace{99...9}_{k}\underbrace{00...0}_{l}}.$$

2.3. Példák. $0{,}317 = \frac{317}{1000}$; $0,(27) = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$; $0,(327) = \frac{327}{999} = \frac{109}{333}$;

$1,(11) = 1\frac{11}{99} = 1\frac{1}{9} = \frac{10}{9}$; $0{,}23(3) = \frac{233 - 23}{900} = \frac{210}{900} = \frac{7}{30} = 0{,}2(3)$;

$1{,}17(4) = 1\frac{174 - 17}{900} = 1\frac{157}{900}$.

Az előbbiek alapján kijelenthetjük a következő tételt:

2.4. Tétel

Legyen $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $(m, n) = 1$

a) Az $\frac{m}{n}$ racionális szám tizedes tört ábrázolása pontosan akkor véges tizedes tört, ha n prímtényezős felbontásában nem szerepel 2-től és 5-től különböző prímszám.

b) Az $\frac{m}{n}$ racionális szám tizedes tört ábrázolása pontosan akkor tiszta szakaszos tizedes tört, ha $(n, 10) = 1$.

c) Az $\frac{m}{n}$ racionális szám tizedes tört ábrázolása pontosan akkor vegyes szakaszos tizedes tört, ha $(n, 10) > 1$ és n-nek van 2-től és 5-től különböző prímosztója.

d) Racionális törtet úgy alakítunk át tizedes törtté, hogy elvégezzük az osztást.

e) Tiszta szakaszos tizedes törtet úgy alakítunk át racionális törtté, hogy az egész részét leírjuk, a szakaszbeli számot írjuk a számlálóba és a nevezőbe annyi 9-est írunk, ahány számjegy van a szakaszban.

f) Vegyes szakaszos tizedes törtet úgy alakítunk át racionális törtté, hogy az egészrészt leírjuk, a tizedesvessző utáni számjegyekből alkotott szám és a tizedesvessző utáni, de az ismétlődő számjegyek előtti számjegyek által alkotott szám különbségét a számlálóba írjuk és a nevezőbe annyi 9-est írunk, ahány számjegy van a szakaszban és annyi 0-t, ahány számjegy van a vessző és a szakasz közt.

g) Szakaszos tizedes törtek esetében a szakasz hossza az a legkisebb k természetes szám, amelyre $10^k - 1$ osztható $\frac{n}{d}$-vel, ahol n a nevező és d olyan természetes szám, hogy $\frac{n}{d} \in \mathbb{N}$ és $\left(\frac{n}{d}, 10\right) = 1$.

Az előbbiek alapján minden periodikus tizedes tört egy racionális számot ábrázol. Világos, hogy léteznek végtelen tizedes törtek, amelyek nem periodikusak. Ezeket a számokat nevezzük *irracionálisnak*.

Például a 0,101001000100001... szám, amit úgy szerkesztünk, hogy előbb 1, aztán 2, majd 3, 4 és így tovább nullát elválasztunk egy-egy 1-essel, nem lehet periodikus. Ha k lenne a periódus hossza, akkor egy idő után ez a periódus benne lenne egy csupa 0-ból álló részben, tehát a periódus csak 0 lehet. Ez viszont ellentmondás, mert a tizedesvessző után végtelen sok 1-es van, így nem fordulhat elő, hogy egy idő után csak 0-k ismétlődjenek. Az irracionalitás bizonyítására gyakran más módszer is kínálkozik. Például igazoljuk, hogy $\sqrt{2}$ irracionális.

Mivel nem ismerjük $\sqrt{2}$ tizedes ábrázolását, az előbbi gondolatmenet nem segít. Ezért a racionális törteket használjuk. Ha $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, akkor létezik $m, n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$ úgy, hogy $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ és $(m, n) = 1$. Ebből következik, hogy $m = \sqrt{2}n$, tehát $m^2 = 2n^2$. De ha egy teljes négyzet (m^2) páros, akkor páros számnak a négyzete, tehát $m = 2m_1$ és így $m^2 = 4m_1^2$, tehát $n^2 = 2m_1^2$. Így n is páros. Ez ellentmond az $(m, n) = 1$ feltételnek, tehát a feltevésünk hibás, azaz $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. (Bár $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, mégis könnyen előfordulhat a gyakorlatban, például egységnyi oldalú négyzet átlójaként.)

A racionális és irracionális számok halmazának egyesítését a *valós számok halm*azának nevezzük, és $\mathbb{R}$-rel jelöljük. Így tulajdonképpen minden valós szám elképzelhető, mint egy végtelen tizedes tört. A véges tizedes törteket úgy tekinthetjük, mintha a 0 számjegy ismétlődne végtelenszer.

A periodikus törtek közül kizárjuk a 9 periódusú törteket, mert ezek véges tizedes tört formájában is felírhatók.

2.5. Példák. $0,(9) = \frac{9}{9} = 1$; $1{,}2(9) = 1\frac{29-2}{90} = 1\frac{27}{90} = 1\frac{3}{10} = 1{,}3$.

Ezenkívül az $m : n$ osztás elvégzésekor nem juthatunk 9 periódusú tizedes törthöz. Ha ugyanis ez előállna, akkor létezne olyan $r \in \mathbb{N}$, amelyre az $\overline{r0}$ szám n-nel osztva 9-et ad hányadosul és r-ret maradékul. A maradékos osztás tétele szerint $\overline{r0} = 9n + r$, vagyis $10 \cdot r = 9 \cdot n + r$ és így $n = r$. Ez nem lehetséges, mert az n-nel való osztási maradék szigorúan kisebb mint n.

Így minden valós szám egyértelműen felírható tizedes tört alakjában. Tehát az $x = a_1, a_2 a_3 ...$ és $y = b_1, b_2 b_3 ...$ számok pontosan akkor egyenlők, ha $a_i = b_i$ bármely $i \in \mathbb{N}^*$ esetén.

Ha $x,\ y \in \mathbb{R}_+$ $x = a_1, a_2 a_3 ...$ és $y = b_1, b_2 b_3 ...$, akkor $x < y$, ha létezik olyan $i \in \mathbb{N}^*$, amelyre $a_i < b_i$ és $a_j = b_j$ $\forall\ j = \overline{1, i-1}$. Ez ekvivalens a következővel: $x < y \Leftrightarrow \exists \alpha > 0$ úgy, hogy $y = x + \alpha$.

Ha az $x = a_1, a_2 a_3 ...$ egy valós szám, akkor az $x_n = a_1, a_2 a_3 ... a_{n+1}$ véges tizedes törtet az x *n tizedesjegyű hiánnyal való közelítésének* nevezzük, míg az $y_n = a_1, a_2 a_3 ... a_n a_{n+1} + \frac{1}{10^n}$ véges tizedes törtet az x *n tizedesjegyű többlettel való közelítésének* nevezzük.

Világos, hogy $x - x_n < \frac{1}{10^n}$ és $y_n - x < \frac{1}{10^n}$, tehát $y_n - \frac{1}{10^n} < x < x_n + \frac{1}{10^n}$.

Így bármely valós szám tetszőleges pontossággal megközelíthető racionális számokkal.

2.6. Értelmezés *(Pozitív tizedes törtek összehasonlítása)* Legyen $x = a_1, a_2 a_3 ...$ és $y = b_1, b_2 b_3 ...$, ahol $a_1,\ b_1 \in \mathbb{N}$ és a_k, b_k számjegyek $k \geq 1$ esetén. *x* pontosan akkor nagyobb mint *y*, ha $a_1 > b_1$ vagy ha létezik olyan *k* természetes szám, amelyre $a_m = b_m$ $m = \overline{1, k-1}$ és $a_k > b_k$.

Igazolható, hogy a valós számokkal végzett műveletek ugyanazokkal a tulajdonságokkal rendelkeznek, mint a racionális számokkal végzett műveletek, tehát

1. $x + y = y + x$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$;

2. $x + 0 = 0 + x = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

3. $x + (-x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

4. $x + (y + z) = (x + y) + z$, $\forall x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$;

5. $x \cdot y = y \cdot x$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$;

6. $x \cdot 1 = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

7. $x \cdot \frac{1}{x} = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$;

8. $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$, $\forall x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$;

9. $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$, $(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$, $\forall x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$;

10. $\left.\begin{array}{l} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 + x_2 = y_1 + y_2$;

11. $\left.\begin{array}{l} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = y_1 \cdot y_2$;

12. $x < y \Rightarrow x + \alpha < y + \alpha$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$;

13. $\left.\begin{array}{l} x < y \\ \alpha > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \cdot x < \alpha \cdot y$;

14. $\left.\begin{array}{l} x < y \\ \alpha < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \cdot x > \alpha \cdot y$;

15. $\left.\begin{matrix} x_1 < x_2 \\ y_1 < y_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_1 + y_1 < x_2 + y_2$;

16. $x < y \Rightarrow [x] \le [y]$.

I.2.1. Gyakorlatok és feladatok

1. Milyen racionális számok tizedes reprezentációi a következő számok?

a) $0,(135)$; **b)** $1,23$; **c)** $-24,5$; **d)** $0,(3)$;
e) $2,(12)$; **f)** $-5,(234)$; **g)** $0,1(23)$; **h)** $-5,15(12)$;
i) $-0,4(31)$; **j)** $2,43(1)$.

2. Írd végtelen tizedes szám alakjában a következő törteket:

a) -10 ; **b)** $\frac{7}{3}$; **c)** $\frac{3}{2}$; **d)** $-\frac{8}{5}$;
e) $-\frac{1}{6}$; **f)** $\frac{12}{13}$; **g)** $-\frac{13}{30}$; **h)** $\frac{11}{35}$.

3. Határozd meg a következő számok századik tizedes jegyét:

a) $3,12(21)$; **b)** $-2,75$; **c)** $2,(243)$; **d)** $\frac{4}{5}$;
e) $\frac{10}{3}$; **f)** $-\frac{23}{15}$; **g)** $-\frac{1}{47}$.

4. Hasonlítsd össze a következő számokat. Melyik szám a nagyobb?

a) $\frac{2}{3}$ és $\frac{6}{9}$; **b)** $-\frac{4}{5}$ és $\frac{5}{6}$; **c)** $-\frac{13}{5}$ és $-\frac{16}{7}$;
d) $\frac{15}{2}$ és $7,49$; **e)** $\frac{14}{3}$ és $4,667$; **f)** $-1,(17)$ és $-1,1(7)$;
g) $-4,123(4)$ és $-4,12(35)$; **h)** $\sqrt{2}$ és $1,(41)$; **i)** π és $3,1(4)$.

5. Határozd meg a következő számok egészrészét, illetve a törtrészét:

a) $\frac{17}{2}$; **b)** $\frac{65}{6}$; **c)** $\frac{15}{28}$; **d)** $4,9(2)$;
e) $-3,125$; **f)** $-11,8(41)$; **g)** $-\frac{16}{5}$; **h)** $-\frac{512}{63}$.

6. Határozd meg a következő irracionális számok 1, 2 illetve 4 tizedessel hiánnyal, majd többlettel való közelítéseit:

a) $\sqrt{2}$; **b)** $\sqrt{5}$; **c)** $\sqrt{13}$; **d)** $-\sqrt{17}$;
e) $-\sqrt{85}$; **f)** $-\sqrt{2001}$.

7. Határozd meg az $x+y$, illetve az $x \cdot y$ számok három tizedessel hiánnyal, majd többlettel való közelítéseit, ha

a) $x=\sqrt{2}$ és $y=\sqrt{7}$; **b)** $x=2,41321...$ és $y=5,12347$;
c) $x=3,(12)$ és $y=\sqrt{10}$; **d)** $x=-4,71654...$ és $y=-8,1(4)$.

8. Bizonyítsd be, hogy a következő számok irracionálisak:

a) $\sqrt{3}$; **b)** $\sqrt{5}$; **c)** $\sqrt{n}$, ha n nem teljes négyzet;
d) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; **e)** $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$.

Fejezet tartalma Tartalomjegyzék

9. Bizonyítsd be, hogy ha $(m,\ n)=1$, akkor az $\frac{1}{n}$ és $\frac{m}{n}$ számok tizedes ábrázolásában a szakasz hossza ugyanaz.

10. Ha $m,n\in\mathbb{N}^*$ $(m,\ n)=1$ és $(n,\ 9)=1$, akkor $\frac{m}{n}$ felírható olyan tizedes tört formájában, amelynek a szakasza egy 9-cel osztható szám.

11. Bizonyítsd be, hogy $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}$ vegyes szakaszos tizedes tört, bármely $n\in\mathbb{N}^*$ esetén.

12. Bizonyítsd be, hogy $\frac{n^2+1}{n(n^2-1)}$ vegyes szakaszos tizedes tört, bármely $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$ esetén.

13. Bizonyítsd be, hogy két tiszta szakaszos tizedes tört szorzata is tiszta szakaszos tizedes tört.

14. Ha az x és y valós számoknak ismerjük az n jegyű hiánnyal illetve többlettel való közelítését, akkor milyen közelítést adhatunk a következő kifejezésekre:

a) $x+y$; **b)** $x-y$; **c)** $x\cdot y$; **d)** x^2+y^2?

I.3. Valós szám *n*-ed rendű gyöke

Ha $\alpha\in\mathbb{R}$, akkor az előjelszabály alapján $\alpha^2\ge 0$, tehát az $\alpha^2=x$ egyenlőség csak akkor lehetséges, ha $x\ge 0$. Igazolható, hogy bármely $x\ge 0$ esetén létezik olyan $\alpha\ge 0$ valós szám, amelyre $\alpha^2=x$. Ezt az α számot az x négyzetgyökének nevezzük és $\sqrt{x}$ -szel jelöljük.

3.1. Értelmezés. Ha $x\ge 0$ akkor $\left[\sqrt{x}=\alpha \Leftrightarrow \alpha\ge 0 \text{ és } \alpha^2=x\right]$.

Hasonló módon az $\alpha^{2n}=x$ egyenlőség ($n\in\mathbb{N}^*$ esetén) csak akkor lehetséges, ha $x\ge 0$ és tetszőleges $x\ge 0$ esetén létezik olyan $\alpha\ge 0$ valós szám, amelyre $\alpha^{2n}=x$. Ezt az α számot az x $2n$ -ed rendű gyökének nevezzük és $\sqrt[2n]{x}$ -szel jelöljük.

3.2. Értelmezés. Ha $x\ge 0$, akkor $\left[\sqrt[2n]{x}=\alpha \Leftrightarrow \alpha\ge 0 \text{ és } \alpha^{2n}=x\right]$.

α^{2n+1} bármilyen előjelű lehet és igazolható, hogy az $\alpha^{2n+1}=x$ egyenletnek minden $x\in\mathbb{R}$ esetén egyetlen valós gyöke van. Ezt az α megoldást $\sqrt[2n+1]{x}$ -szel jelöljük és x $(2n+1)$ -ed rendű gyökének nevezzük.

3.3. Értelmezés. $\alpha=\sqrt[2n+1]{x} \Leftrightarrow \alpha^{2n+1}=x$.

3.4. Tulajdonságok

1. $\sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[n]{y}=\sqrt[n]{x\cdot y}$, ha $x,\ y\ge 0$ és $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$ vagy ha $x,\ y\in\mathbb{R}$ és n páratlan.

2. $\left(\sqrt[n]{x}\right)^m=\sqrt[n]{x^m}$, ha $x\ge 0$ és $m,\ n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$.

3. $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}=\sqrt[n]{\frac{x}{y}}$, ha $x,\ y\ge 0$, $y\ne 0$ és $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$.

4. $\sqrt[n]{x}=\sqrt[n\cdot m]{x^m}$, ha $x\ge 0$ és $m,\ n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$.

5. $0\le a<x<b \Rightarrow \sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{x}<\sqrt[n]{b}$;

6. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}}=\sqrt[m\cdot n]{x}$, ha $x\ge 0$.

Bizonyítás

1. $\sqrt[n]{x}=\alpha \Leftrightarrow \alpha^n=x$ és $\alpha>0$,

$\sqrt[n]{y}=\beta \Leftrightarrow \beta^n=y$ és $\beta>0$.

Így $\sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[n]{y}=\alpha\cdot\beta>0$ és $xy=\alpha^n\cdot\beta^n=(\alpha\cdot\beta)^n$, tehát $\sqrt[n]{xy}=\alpha\beta$. Az előbbi egyenlőségek alapján $\sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[n]{y}=\sqrt[n]{x\cdot y}$.

2. $\sqrt[n]{x}=\alpha \Leftrightarrow \alpha^n=x$ és $\alpha\geq 0 \Rightarrow \left(\sqrt[n]{x}\right)^m=\alpha^m$ (1). De $\left(\alpha^n\right)^m=x^m$, tehát $\left(\alpha^m\right)^n=x^m$ és így $\alpha^m=\sqrt[n]{x^m}$ (2). Az (1) és (2) alapján $\left(\sqrt[n]{x}\right)^m=\sqrt[n]{x^m}$.

3. Az 1. alapján $\sqrt[n]{\frac{x}{y}}\cdot\sqrt[n]{y}=\sqrt[n]{x}$, tehát $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}=\sqrt[n]{\frac{x}{y}}$.

4. Ha $\sqrt[n]{a}=\alpha>0$, $\sqrt[n]{b}=\beta>0$ és $\sqrt[n]{x}=\delta>0$, akkor $a=\alpha^n$, $b=\beta^n$ és $x=\delta^n$. Ha $\alpha\geq\delta$, akkor $\alpha^n\geq\delta^n$, azaz $a\geq x$. Ez ellentmond a feltételnek, tehát $\alpha<\delta$. Hasonlóan igazolhatjuk, hogy $\delta<\beta$, tehát $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{x}<\sqrt[n]{b}$.

3.5. Feladat. Számítsuk ki a következő számok egész részét:

a) $\sqrt{200}$; **b)** $\sqrt[3]{200}$; **c)** $\sqrt[4]{200}$.

a) Első megoldás. $196<200<225 \Rightarrow 14<\sqrt{200}<15$, tehát $\left[\sqrt{200}\right]=14$.

Második megoldás. $10^2<200<100^2$, tehát $\sqrt{200}$ egész része két számjegyű. Jelöljük a számjegyeit a-val és b-vel. $\sqrt{200}=\overline{ab,...} \Rightarrow \overline{a0}^2\leq 200<\overline{(a+1)0}^2$, tehát $a^2\leq 2<(a+1)^2$. Eszerint $a=1$. Az $\overline{1b}^2\leq 200<\overline{1(b+1)}^2$ egyenlőtlenségek alapján b a legnagyobb olyan számjegy, amelyre $(10+x)^2\leq 200$. $20x+x^2\leq 100 \Leftrightarrow (20+x)\cdot x\leq 100 \Leftrightarrow \overline{2x}\cdot x\leq 100$. Így x-re adható egy felső becslés, ugyanis $x\leq\frac{100}{20}=5$. De $25\cdot 5=125>100$, tehát x nem lehet 5. Másrészt $24\cdot 4=96<100$, tehát $b=4$.

Az előbbi számolások vezetnek a következő algoritmushoz:

1. Hátulról kezdve osszuk kettes csoportokra az $n\in\mathbb{N}$ szám számjegyeit. Balról a k-adik csoport legyen $\overline{c_k b_k}$.

2. Legyen a_1 a legnagyobb számjegy, amelynek négyzete nem haladja meg balról az első csoportot. Ez $\sqrt{n}$ első számjegye. A maradék $n-a_1^2$.

3. A k-adik lépésben ($k>2$) az előző lépés utáni maradék számjegyeihez hozzátoldjuk a $\overline{c_k b_k}$ csoportot. Jelöljük F_k-val az így kapott számot. Az addig meghatározott számjegyek kétszereséhez azt a legnagyobb x számjegyet toldjuk, amellyel szorozva az így kapott számot, a szorzat nem haladja meg F_k-t. Az így meghatározott x lesz az eredmény k-adik számjegye ($E_k=\overline{E_{k-1}x}$) és a maradék $F_k-x\cdot\overline{(2\cdot E_k)x}$.

b) Próbálkozások alapján $5^3=125<200<216=6^3$, tehát $\sqrt[3]{200}$ egész része 5.

Az előbbi algoritmushoz hasonlóan itt is adható algoritmus, mi csak az első két számjegyet határozzuk meg, az algoritmus általános megfogalmazását az olvasóra hagyjuk.

$$\sqrt[3]{200} = a,b \ \ldots \ \Rightarrow \ a^3 < 200 < (a+1)^3$$

Tehát az első számjegy meghatározásához az előbbi találgatás szükséges.

Ha $\sqrt[3]{200} = a,b\ldots$, akkor $\sqrt[3]{200000} = \overline{ab},\ldots$, tehát $\sqrt[3]{200000} = \overline{5b},\ldots$.

Így

$$\overline{5b}^3 \le 200000 < \overline{5(b+1)}^3,$$

$$(50+b)^3 \le 200000 < (50+b+1)^3.$$

Az előbbi egyenlőtlenségek alapján b a legnagyobb olyan szám, amelyre $(50+b)^3 \le 200000$.

De $(50+x)^3 = 125000 + 3\cdot 50^2 x + 3\cdot 50x^2 + x^3$, tehát a $(7500 + 150\cdot x + x^2)\cdot x \le 75000$ egyenlőtlenség legnagyobb egész megoldását keressük. Az $x = 9$ túl nagy, de $x = 8$ megfelelő, tehát $b = 8$.

3.6. Megjegyzés. Látható, hogy a gyökvonás (illetve köbgyökvonás) algoritmusa az $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (illetve $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$) azonosságon alapszik.

I.4. Racionális kitevőjű hatványok

Eddig értelmeztük az egész kitevőjű hatványokat és szeretnénk ezt kiterjeszteni racionális kitevőjű hatványokra is úgy, hogy a hatványok tulajdonságai megőrződjenek.* Tehát értelmeznünk kellene az $a^{\frac{m}{n}}$ ($a \in \mathbb{R}_+^*$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$) kifejezést. Alkalmazzuk a hatványozás 3. tulajdonságát az $\frac{m}{n}$ és n kitevőjű, a alapú hatványok szorzatára. Így $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{m}{n}\cdot n} = a^m$.

Innen azonnal látható, hogy $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Könnyen igazolható, hogy ha ezt tekintjük értelmezésnek, akkor a hatványok többi tulajdonságai is teljesülnek.

4.1. Értelmezés. Ha $a > 0$, akkor $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

4.2. Megjegyzés. Az $a > 0$ feltétel szükséges, mert például a $(-8)^{\frac{1}{3}}$-ra alkalmazva a fenti értelmezést $(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2$, másrészt $(-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$, tehát ellentmondáshoz jutottunk.

I.5. Megoldott gyakorlatok és feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy ha A, B és $A^2 - B$ nem negatív valós számok, akkor

$$\sqrt{A+\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} + \sqrt{\frac{A-C}{2}},$$ ahol $C = \sqrt{A^2 - B}$ (*összetett gyökök képlete*).

Megoldás. Mivel egyik oldal sem negatív, a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás.

$$\sqrt{A+\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} + \sqrt{\frac{A-C}{2}} \Leftrightarrow A + \sqrt{B} = \frac{A+C}{2} + \frac{A-C}{2} + 2\sqrt{\frac{A^2 - C^2}{4}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{B} = \sqrt{A^2 - (A^2 - B)} \Leftrightarrow \sqrt{B} = \sqrt{B}.$$

---

* Ez az elgondolás *permanencia elvként* ismeretes.

2. Bizonyítsuk be, hogy $x \in [1,\ 2]$ esetén
$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2.$$

Megoldás

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}=\sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1}=\sqrt{\left(\left(\sqrt{x-1}\right)+1\right)^2}=\left|\sqrt{x-1}+1\right|=\sqrt{x-1}+1, \qquad (1)$$
$$\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}+1}=\sqrt{\left(\left(\sqrt{x-1}\right)-1\right)^2}=\left|\sqrt{x-1}-1\right|=1-\sqrt{x-1},$$
mert $x \in [1,\ 2]$ esetén $\sqrt{x-1} \in [0,1]$ és így $\sqrt{x-1}-1 \le 0$. (2)

(1) és (2) alapján
$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\sqrt{x-1}+1+1-\sqrt{x-1}=2.$$

3. Írjuk egyszerűbb alakba az alábbi számokat:

a) $\sqrt{173^2-52^2}$; **b)** $\sqrt[6]{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}$; **c)** $\sqrt{\dfrac{1024}{625}}$;

d) $\sqrt{5\sqrt[3]{625}}$; **e)** $\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}$; **f)** $\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}}$.

Megoldás

a) $\sqrt{173^2-52^2}=\sqrt{(173-52)(173+52)}=\sqrt{121\cdot 225}=\sqrt{121}\cdot\sqrt{225}=11\cdot 25=165$;

b) $\sqrt[6]{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt[3]{\left|1-\sqrt{2}\right|}=\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$; **c)** $\sqrt{\dfrac{1024}{625}}=\dfrac{\sqrt{1024}}{\sqrt{625}}=\dfrac{32}{25}$;

d) $\sqrt{5\sqrt[3]{625}}=\sqrt{5\sqrt[3]{5^4}}=\sqrt{5\cdot 5\sqrt[3]{5}}=\sqrt{25}\cdot\sqrt[6]{5}=5\sqrt[6]{5}$;

e) $\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\cdot\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}=1$;

f) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}}=\sqrt{\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)^2\cdot\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}}=\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}}=\sqrt[4]{\dfrac{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}}=$

$$=\sqrt[4]{\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}{1}}=\sqrt{\sqrt{2}+1}.$$

4. Számítsuk ki: $\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{250}+\sqrt[3]{686}+\sqrt[3]{16}$.

Megoldás. $\sqrt[3]{250}=\sqrt[3]{2\cdot 5^3}=5\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{686}=\sqrt[3]{2\cdot 7^3}=7\sqrt[3]{2}$ és $\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{2\cdot 2^3}=2\sqrt[3]{2}$,
tehát $\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{250}+\sqrt[3]{686}+\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{2}-5\sqrt[3]{2}+7\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{2}=5\sqrt[3]{2}$.

5. Hozzuk egyszerűbb alakra az alábbi számokat:

a) $\sqrt[12]{3^4}$; **b)** $\sqrt[4]{a^2}$; **c)** $\sqrt[4]{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}$; **d)** $\sqrt[16]{\left(\sqrt{3}-5\right)^8}$.

Megoldás

a) $\sqrt[12]{3^4}=\sqrt[3]{\sqrt[4]{3^4}}=\sqrt[3]{3}$; **b)** $\sqrt[4]{a^2}=\sqrt{\sqrt{a^2}}=\sqrt{|a|}$;

c) $\sqrt[4]{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}=\sqrt{\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}}=\sqrt{\left|2-\sqrt{5}\right|}=\sqrt{\sqrt{5}-2}$;

d) $\sqrt[16]{\left(\sqrt{3}-5\right)^8} = \sqrt{\left|\sqrt{3}-5\right|} = \sqrt{5-\sqrt{3}}$.

6. Írjuk fel racionális kitevőjű hatványként az alábbi számokat:

a) $\sqrt{8}$; **b)** $\sqrt[3]{9}$; **c)** $\sqrt[11]{2^7}$; **d)** $\sqrt[7]{5^6}$; **e)** $\sqrt[3]{11^4}$.

Megoldás

a) $\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = 2^{\frac{3}{2}}\left(=8^{\frac{1}{2}}\right)$; **b)** $\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3^2} = 3^{\frac{2}{3}}\left(=9^{\frac{1}{3}}\right)$;

c) $\sqrt[11]{2^7} = 2^{\frac{7}{11}}$; **d)** $\sqrt[7]{5^6} = 5^{\frac{6}{7}}$; **e)** $\sqrt[3]{11^4} = 11^{\frac{4}{3}}$.

7. Írjuk fel gyökök segítségével a következő racionális kitevőjű hatványokat:

a) $2^{\frac{1}{3}}$.; **b)** $2^{\frac{3}{7}}$; **c)** $5^{\frac{2}{11}}$; **d)** $3^{\frac{4}{7}}$; **e)** $11^{\frac{2}{5}}$.

Megoldás

a) $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$; **b)** $2^{\frac{3}{7}} = \sqrt[7]{2^3} = \sqrt[7]{8}$; **c)** $5^{\frac{2}{11}} = \sqrt[11]{5^2} = \sqrt[11]{25}$;

d) $3^{\frac{4}{7}} = \sqrt[7]{3^4} = \sqrt[7]{81}$.; **e)** $11^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{11^2} = \sqrt[5]{121}$.

8. Írjuk egyszerűbb alakba: $\sqrt{\sqrt{2}}\cdot\left(\sqrt[3]{\sqrt{2}} : \sqrt{\sqrt[4]{2}}\right)^2$.

Megoldás

$$\sqrt{\sqrt{2}}\cdot\left(\sqrt[3]{\sqrt{2}} : \sqrt{\sqrt[4]{2}}\right)^2 = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left[\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} : \left(2^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 = 2^{\frac{1}{4}}\cdot\left[2^{\frac{1}{6}-\frac{1}{8}}\right]^2 = 2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{8}$$

9. Hozzuk egyszerűbb alakra (emeljük ki a gyök alól):

a) $\sqrt{18}$; **b)** $\sqrt[3]{24}$; **c)** $\sqrt[4]{324}$; **d)** $\sqrt[5]{100842}$;

Megoldás a) $\sqrt{18} = \sqrt{2\cdot 9} = 3\sqrt{2}$; **b)** $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{3\cdot 8} = 2\sqrt[3]{3}$;

c) $\sqrt[4]{324} = \sqrt[4]{81\cdot 4} = \sqrt[4]{3^4}\cdot\sqrt[4]{2^2} = 3\sqrt{2}$; **d)** $\sqrt[5]{100842} = \sqrt[5]{2\cdot 3\cdot 7^5} = 7\sqrt[5]{6}$.

10. Hasonlítsuk össze a $2\sqrt[3]{3}$ és $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{17}$ számokat.

Megoldás. Feltételezzük, hogy

$$2\sqrt[3]{3} < \sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{17}\ .$$

Ezt az egyenlőtlenséget ekvivalens átalakítások segítségével addig alakítjuk, amíg eldönthetjük, hogy igaz vagy sem.

$$2\sqrt[3]{3} < \sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{17} \big/ (\ )^{12}$$

(Azért emelünk 12. hatványra, mert a 3, 2 és 4 l.n.k.o.-ja 12 és ezzel eltűnnek a gyökök)

$$2^{12}\cdot 3^4 < 2^{\frac{12}{2}}\cdot 17^{\frac{12}{4}}$$

$$2^{12}\cdot 3^4 < 2^6\cdot 17^3 \big/ : 2^6$$

$$2^6\cdot 3^4 < 17^3$$

De $2^6 = 64$, $3^4 = 81$ és $17^3 = 4913$, $64\cdot 81 = 5184$, tehát az egyenlőtlenség nem igaz. $(5184 > 4913)$. Így $2\sqrt[3]{3} > \sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{17}$.

I.6. Gyakorlatok és feladatok

1. Számítsd ki:

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^2$; **b)** $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$; **c)** $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$; **d)** $\left(-\sqrt{3}\right)^2$; **e)** $\left(\sqrt[3]{3}\right)^{27}$;

f) $\left(\sqrt[3]{-3}\right)^9$; **g)** $\left(-\sqrt{5}\right)^3$; **h)** $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$; **i)** $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-2}$; **j)** $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^{-3}$;

k) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)^{-2}$.

2. Írd egyszerűbb alakba a következő számokat:

a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[6]{2}$; **b)** $\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[6]{a}$, ahol $a>0$; **c)** $\sqrt{\sqrt[3]{3}}\left(\sqrt[4]{3}\right)^2$;

d) $\sqrt{175}$; **f)** $\sqrt[5]{-96}$; **g)** $\sqrt[3]{\frac{x^6 y}{z^9}}$.

3. Hozd egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:

a) $\sqrt{300}-\sqrt{45}+3\sqrt{27}+2\sqrt{20}-\sqrt{64}$; **b)** $\sqrt[3]{64a^4}+3\sqrt[3]{27a}-\frac{4}{a}\sqrt[3]{8a^7}$;

c) $3\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[3]{3}$; **d)** $\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{25}$; **e)** $\frac{3}{2}\sqrt[3]{192}:3\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$; **f)** $\sqrt[3]{\frac{1}{25}x^5y^7}:\sqrt{5x^5y^3}$.

4. Számítsd ki:

a) $\sqrt[5]{0{,}00001}$; **b)** $\sqrt[3]{0{,}001}\cdot\sqrt[4]{625}\cdot\sqrt[11]{2048}$; **c)** $\frac{\sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[5]{32}\cdot\sqrt[6]{64}}{\sqrt{81}\cdot\sqrt[3]{125}}$;

d) $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[4]{\frac{1}{32}}\right)^2:\frac{1}{4\sqrt[4]{2}}$.

5. Írd egyszerűbb alakba:

a) $\sqrt{3+\sqrt{2}}$; **b)** $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$; **c)** $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$; **d)** $\sqrt[4]{17-12\sqrt{2}}$; **e)** $\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}$.

6. Írd egyszerűbb alakba:

a) $\left(\sqrt[5]{7}\right)^{10}:49$; **b)** $\left(\sqrt[4]{3}\right)^{10}:\sqrt{3}$; **c)** $\left(\sqrt[7]{\sqrt{50}+\sqrt{18}}\right)^3$; **d)** $\left(\sqrt[3]{\sqrt{48}-\sqrt{3}}\right)^{-2}$.

7. Hozd egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:

a) $\left(x\sqrt[3]{y^2x}\right)^3$; **b)** $\left(\frac{1}{x}\sqrt[3]{x^2y}\right)^2$; **c)** $\left(-x\sqrt[3]{xy^2}\right)^2$;

d) $\left(3xy^2\sqrt[3]{\frac{8}{x^2y^4}}\right)^{12}$; **e)** $\left(\frac{x+y}{y}:\sqrt[4]{\frac{(x+y)^3}{y^{-1}}}\right)^4$.

8. Számítsd ki:

a) $\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2$; **b)** $\left(\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{b}}\right)^3$.

9. Bizonyítsd be a következő egyenlőségeket.

a) $\sqrt{3\left(2-\sqrt{5}\right)^2}=\sqrt{15}-2\sqrt{3}$; **b)** $\sqrt{3+\sqrt{5}}=\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$;

Fejezet tartalma | Tartalomjegyzék

c) $\sqrt{10+\sqrt{40}-\sqrt{24}-\sqrt{60}}=\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}$; **d)** $\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}+\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}=4$.

10. Rendezd növekvő sorrendbe a következő számokat:

a) $\sqrt{12}-\sqrt{6}$; $\sqrt{20}-\sqrt{12}$; $3-\sqrt{2}$; **b)** $0{,}1$; $\frac{\sqrt{3}}{4}$; $\frac{1}{2}$; $\sqrt{3}-\sqrt{2}$;

c) $0{,}45$; $\frac{\sqrt{2}}{3}$; $\frac{19}{40}$; $\frac{\sqrt[3]{9}}{5}$; **d)** $0{,}75$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{15}{21}$; $\frac{\sqrt[3]{28}}{4}$; $\frac{\sqrt[4]{63}}{4}$.

11. Bizonyítsd be, hogy a következő számok irracionálisak:

a) $\sqrt{10}$; **b)** $\sqrt[3]{3}$; **c)** $\sqrt[4]{2}$; **d)** $\sqrt[5]{7}$.

12. Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy a $\sqrt[k]{n}$ szám racionális legyen, ha $k,\ n\in\mathbb{N}$, $k\geq 2$.

13. Bizonyítsd be, hogy ha $a+b\cdot\sqrt[3]{2}+c\cdot\sqrt[3]{4}=0$ és $a,\ b,\ c\in\mathbb{Q}$, akkor $a=b=c=0$.

14. Bizonyítsd be, hogy az

$$S=\sqrt{26+6\sqrt{13-4\sqrt{8+2\sqrt{6-2\sqrt{5}}}}}+\sqrt{26-6\sqrt{13+4\sqrt{8-2\sqrt{6+2\sqrt{5}}}}}$$

szám racionális.

15. Bizonyítsd be, hogy

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}-b\sqrt{2}}+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}-a\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a+b},$$

ha a törtek mind értelmezettek.

16. Számítsd ki az $E(x)=\frac{\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[4]{x-1}}{\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x-1}}$, kifejezés értékét, ha $x=\frac{a^2+b^2}{4ab}+\frac{ab}{a^2+b^2}$.

17. Bizonyítsd be, hogy ha $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$, akkor $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$.

18. Számítsd ki az $x=\sqrt[3]{0,\underbrace{99...9}_{2001}}$ szám első 2001 tizedesjegyét.

19. Van-e olyan a és b irracionális szám, amelyre $a+b$ és $a\cdot b$ racionális?

20. Határozd meg az $A=\{999\cdot n\mid n\in\mathbb{N}^*\}$ halmaz legkisebb elemét, amely nem tartalmazza a 9-es számjegyet.

I.7. Azonosságok, feltételes azonosságok

7.1. Értelmezés. *Azonosságon* olyan egyenlőséget értünk, amely a változók összes lehetséges értéke esetén igaz. Azonosságokkal már gyakran találkoztatok korábbi tanul–mányaitok során. Például $3x+2x=5x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ vagy $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $\forall\, a,\ b\in R$.

A legfontosabb és a leggyakrabban használt azonosságokat felsoroljuk:

7.2. Tétel. Ha $a,\ b,\ c\in\mathbb{R}$, akkor

1. $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$;

2. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$;

3. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$;

4. $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$;

5. $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$;
6. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;
7. $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$;
8. $a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$;
9. $a^5+b^5=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$;
10. $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+...+a^2b^{n-3}+ab^{n-2}+b^{n-1})$;
11. $a^{2n+1}+b^{2n+1}=(a+b)(a^{2n}-a^{2n-1}b+a^{2n-2}b^2-...+a^2b^{2n-2}-ab^{2n-1}+b^{2n})$;
12. $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$;
13. $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=\frac{1}{2}\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right)$;
14. $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3a^2b+3ab^2+3a^2c+3ac^2+3b^2c+3bc^2+6abc$;
15. $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$;
16. $(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)=-a^3-b^3-c^3+ab^2+a^2b+bc^2+b^2c+$
$+ca^2+c^2a-2abc$;
17. $(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)=2a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2-a^4-b^4-c^4$.

Ezeknek az egyenlőségeknek a bizonyítása egyszerűen a műveletek elvégzésével történik, ezért nem részletezzük.

I.7.1. Megoldott feladatok

1. a) Bizonyítsuk be, hogy ha $a, b, x, y\in\mathbb{R}$, akkor

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(ay-bx)^2.$$

b) Tekintsük a $H=\{n\in\mathbb{N}\mid \exists x, y\in\mathbb{N}: n=x^2+y^2\}$ halmazt. Bizonyítsuk be, hogy ha $m, n\in H$, akkor $m\cdot n\in H$.

Megoldás

a) Elvégezzük a műveleteket mindkét oldalon.

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2,$$

$$(ax+by)^2=a^2x^2+b^2y^2+2abxy \text{ és}$$

$$(ay-bx)^2=a^2y^2+b^2x^2-2abxy, \text{ tehát}$$

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(ay-bx)^2.$$

b) Ha $n=a^2+b^2$ és $m=x^2+y^2$, akkor az a) pont alapján

$$m\cdot n=(ax+by)^2+(ay-bx)^2=(|ax+by|)^2+(|ay-bx|)^2.$$

$$a, b, x, y\in\mathbb{N}\Rightarrow |ax+by|\in\mathbb{N} \text{ és } |ay-bx|\in\mathbb{N}, \text{ tehát } m\cdot n\in H.$$

2. a) Hozzuk egyszerűbb alakra az $(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2$ különbséget.

b) Írjuk fel négyzetek összegeként az $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2$ különbséget.

Megoldás

a) Az előbbi feladat a) pontja alapján

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2=(ay-bx)^2.$$

b) $(ax+by+cz)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + 2abxy + 2acxz + 2bcyz$,

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) = a^2x^2 + a^2y^2 + a^2z^2 + b^2x^2 + b^2y^2 + b^2z^2 + $$
$$+ c^2x^2 + c^2y^2 + c^2z \,.$$

Tehát

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) - (ax+by+cz)^2 = a^2y^2 + a^2z^2 + b^2x^2 + b^2z^2 + c^2x^2 + c^2y^2 -$$
$$-2abxy - 2acxz - 2bcyz =$$
$$= (a^2y^2 + b^2x^2 - 2abxy) + (a^2z^2 + c^2x^2 - 2acxz) + (b^2z^2 + c^2y^2 - 2bcyz) =$$
$$= (ay-bx)^2 + (bz-cy)^2 + (cx-az)^2 \,.$$

(ezt az egyenlőséget Lagrange-féle egyenlőségnek nevezzük).

7.3. Értelmezés. *Feltételes azonosságnak* nevezünk egy olyan azonosságot, ami akkor teljesül, ha a változók között fennállnak bizonyos összefüggések (valamilyen feltételt elégítenek ki)

7.4. Példa. Ha $a+b+c=0$, akkor $(a^2+b^2+c^2)^2 = 2(a^4+b^4+c^4)$.

Egy ilyen állítás bizonyítása többféleképpen történhet. Ha a feltételből kifejezhető valamelyik ismeretlen, akkor visszavezethető egy egyszerű azonosságra. Ebben az esetben $c=-a-b$, tehát

$$(a^2+b^2+c^2)^2 = (a^2+b^2+a^2+b^2+2ab)^2 = 4(a^2+b^2+ab)^2 \text{ és}$$
$$2(a^4+b^4+c^4) = 2(a^4+b^4+a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4) =$$
$$= 4(a^4+b^4+2a^3b+2ab^3+3a^2b^2),$$

mert $(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$.

Az előbbiek alapján igazolni kellene az

$$(a^2+b^2+ab)^2 = a^4+b^4+2a^3b+2ab^3+3a^2b^2$$

azonosságot. Ez viszont az előbbi tétel 12. pontjának sajátos esete.

A másik módszer mindvégig megőrzi mindhárom változót:

$$a+b+c=0 \Rightarrow 0=(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc).$$

Így $a^2+b^2+c^2 = -2(ab+ac+bc)$. Ez alapján

$$(a^2+b^2+c^2)^2 = 4(ab+ac+bc)^2 = 4(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+2abc(a+b+c)) =$$
$$= 4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2). \qquad (1)$$

Másrészt

$$(a^2+b^2+c^2)^2 = a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2), \text{ tehát}$$
$$a^4+b^4+c^4 = 4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) - 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) =$$
$$= 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2). \qquad (2)$$

(1) és (2) alapján következik a kívánt egyenlőség.

I.7.2. Gyakorlatok és feladatok

1. a) Bizonyítsd be, hogy

$$(x-1)(x+1)(x^2+1)=x^4-1 \text{ és } (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)=x^8-1.$$

b) Számítsd ki az $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)\ldots\left(x^{2^n}+1\right)$ szorzatot.

2. Bizonyítsd be, hogy

$$x^4+x^2+1=(x^2-x+1)(x^2+x+1) \text{ és } x^8+x^4+1=(x^2-x+1)(x^2+x+1)(x^4+x^2+1).$$

3. Bizonyítsd be, hogy $(x^2-y^2)^2+(2xy)^2=(x^2+y^2)^2$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

4. Bizonyítsd be, hogy ha a, b és c páronként különböző valós számok, akkor:

$$\frac{a^k}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^k}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^k}{(c-a)(c-b)}=\begin{cases}0, & k=1\\ 1, & k=2\\ a+b+c, & k=3\\ \dfrac{1}{abc}, & k=-1\end{cases}.$$

5. Bizonyítsd be, hogy ha a, b és c páronként különböző valós számok, akkor:

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}=\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}+\frac{2}{c-a}.$$

6. Bizonyítsd be, hogy ha $a+b+c=0$, akkor $a^3+b^3+c^3=3abc$.

7. Bizonyítsd be, hogy ha $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3$, akkor

$$(a+b+c)^{2001}=a^{2001}+b^{2001}+c^{2001}.$$

8. Bizonyítsd be, hogy ha $a^3+b^3+c^3=3abc$ és $a+b+c\neq 0$, akkor $a=b=c$.

9. Bizonyítsd be, hogy ha az a, b és c nullától különböző valós számok páronként különböznek és $a+b+c=0$, akkor

$$\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}\right)\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)=9.$$

I.8. Racionalizálások

8.1. Értelmezés. Egy tört nevezőjének a *racionalizálásán* azt értjük, hogy a törtet úgy bővítjük (vagy egyszerűsítjük), hogy a nevezője racionális legyen. Általában valamilyen azonosságra hivatkozva végezhetjük el a bővítést.

I.8.1. Megoldott gyakorlatok

Racionalizáljuk a következő törtek nevezőjét:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; **b)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$; **c)** $\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}$; **d)** $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; **b)** $\dfrac{1}{\sqrt[5]{5}-1}$;

f) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}-1}$; **g)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}$; **h)** $\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}-1}$; **i)** $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$.

Megoldások

a) Ha $a>0$, akkor $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$. $a=2$ esetén a törtet $\sqrt{2}$ -vel bővítjük $\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

b) A $\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$ azonosság alapján, ha $\sqrt[3]{2^2}$ -tel bővítjük a törtet, a nevezőben racionális szám marad $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^3} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$.

c) Az $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ azonosság alapján $\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right) = 3-1 = 2$, tehát $\frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

d) Az $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ azonosság alapján $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right) = 2-3 = -1$, tehát $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-1} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1}$.

e) Az $(a-1)\left(a^2+a+1\right) = a^3 - 1$ azonosság alapján $\left(\sqrt[3]{5}-1\right)\left(\sqrt[3]{5^2}+\sqrt[3]{5}+1\right) = 5-1 = 4$, tehát $\frac{1}{\sqrt[3]{5}-1} = \frac{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{5}+1}{4}$.

f) Az $(a-1)(a+1) = a^2 - 1$ azonosságot egymásután kétszer használjuk (vagy az $(a-1)\left(a^3+a^2+a+1\right) = a^4 - 1$ azonosságba helyettesítünk $a = \sqrt[4]{3}$ -at).

$$\frac{1}{\sqrt[4]{3}-1} = \frac{\sqrt[4]{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\left(\sqrt[4]{3}+1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}.$$

g) Az $a^3 - 1 = (a-1)\left(a^2+a+1\right)$ azonosság alapján $2-1 = \left(\sqrt[3]{2}-1\right)\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1\right)$, tehát

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1} = \frac{\sqrt[3]{2}-1}{2-1} = \sqrt[3]{2}-1.$$

h) Az $x^n - 1 = (x-1)\left(x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\ldots+x+1\right)$ azonosság alapján a törtet $\left(\left(\sqrt[n]{2}\right)^{n-1}+\left(\sqrt[n]{2}\right)^{n-2}+\left(\sqrt[n]{2}\right)^{n-3}+\ldots+\left(\sqrt[n]{2}\right)+1\right)$ -gyel bővítjük:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{2}-1} = \frac{\left(\sqrt[n]{2}\right)^{n-1}+\left(\sqrt[n]{2}\right)^{n-2}+\left(\sqrt[n]{2}\right)^{n-3}+\ldots+\left(\sqrt[n]{2}\right)+1}{2-1}.$$

i) Az első lépésben arra törekszünk, hogy egyszerűbb nevezőt kapjunk.

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}}{5+2\sqrt{6}-6} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}}{2\sqrt{6}-1} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)\left(2\sqrt{6}+1\right)}{24-1} = \frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)\left(2\sqrt{6}+1\right)}{23}.$$

8.1.1. Megjegyzés. A fentiek alapján racionalizáláskor az

$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+a^2b^{n-3}+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)$ és

$a^{2n+1}+b^{2n+1} = (a+b)\left(a^{2n}-a^{2n-1}b+a^{2n-2}b^2-\ldots+a^2b^{2n-2}-ab^{2n-1}+b^{2n}\right)$ azonosságokat használjuk a legfőképpen.

Így $\sqrt[n]{a}$ -t $\sqrt[n]{a^{n-1}}$ -nel, $\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}$ -t $\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\sqrt[n]{a^{n-3}b^2}+\ldots+\sqrt[n]{b^{n-1}}$ -nel, $\sqrt[2n+1]{a}+\sqrt[2n+1]{b}$ -t $\sqrt[2n+1]{a^{2n}}+\sqrt[2n+1]{a^{2n-1}b}+\sqrt[2n+1]{a^{2n-2}b^2}+\ldots+\sqrt[2n+1]{b^{2n}}$ -nel bővítjük illetve fordítva.

I.8.2. Gyakorlatok

Racionalizáld a következő törtek nevezőjét:

1. a) $\frac{1}{\sqrt[5]{4}}$; **b)** $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$; **c)** $\frac{1}{\sqrt{3}}$; **d)** $\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$; **e)** $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$;

f) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$; **g)** $\frac{1}{\sqrt{7}-1}$; **h)** $\frac{1}{\sqrt{3}+2}$; **i)** $\frac{1}{\sqrt[3]{3}-1}$; **j)** $\frac{1}{\sqrt[3]{7}+2}$;

k) $\frac{1}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1}$; **l)** $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{7}}$; **m)** $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$.

2. a) $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$, ahol $a, b, c \in \mathbb{Q}_+$; **b)** $\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}$, ahol $a, b, c \in \mathbb{Q}_+$;

c) $\frac{1}{\sqrt[n]{4}-3\sqrt[n]{2}+2}$; **d)** $\frac{1}{\sqrt[4]{27}+\sqrt[4]{9}+\sqrt[4]{3}+1}$; **e)** $\frac{1}{\sqrt[n]{9}-5\sqrt[n]{3}+6}$.

I.9. Egyenlőtlenségek

Nagyon sok egyenlőtlenség visszavezethető valamilyen azonosság segítségével az $[E(x)]^2 \geq 0$ vagy $[E_1(x)]^2 + [E_2(x)]^2 + ... + [E_n(x)]^2 \geq 0$ triviális egyenlőtlenségre.

Például $x^2 + y^2 \geq 2xy$, bármely $x, y \in \mathbb{R}$ esetén, mert $x^2 + y^2 - 2xy = (x-y)^2$, és egy valós szám négyzete nem negatív.

Gyakran előfordul, hogy feltételes azonosságot kell használni vagy, hogy a teljes négyzetek kialakításának érdekében a meglévő tagokat fel kell bontani további tagok összegére.

Mindezekre az alábbiakban néhány példát és alkalmazást mutatunk be:

I.9.1. Középarányosok közti egyenlőtlenségek

9.1.1. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy

a) $x^2 + y^2 \geq 2xy$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$;

b) $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}_+$. (*Harmonikus, mértani, számtani és négyzetes közepek közti egyenlőtlenségek*) (Nyilvánvaló, hogy a harmonikus közép esetében $a, b \neq 0$)

Bizonyítás

a) $x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$.

b) $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{1}{\sqrt{b}} \leq \frac{1}{a}+\frac{1}{b} \Leftrightarrow 0 \leq \left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2$,

$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow 0 \leq a - 2\sqrt{ab} + b \Leftrightarrow 0 \leq \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2$,

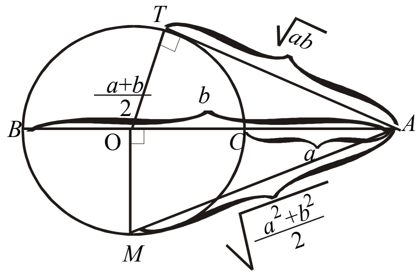
$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2} \Leftrightarrow \frac{a^2+b^2+2ab}{4} \leq \frac{a^2+b^2}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2ab \leq a^2 + b^2 \Leftrightarrow 0 \leq (a-b)^2$.

Geometriai bizonyítás

Feltételezzük, hogy $a<b$. Vegyük fel az A, B és C kollineáris pontokat úgy, hogy $C\in(AB)$, $AB=b$ és $AC=a$. Megszerkesztjük az O középpontú BC átmérőjű kört. Legyen T az A pontból a körhöz húzott érintő érintési pontja, valamint M az O pontban az AB-re állított merőleges egyik metszéspontja a körrel. Ekkor
$$AO=\frac{a+b}{2},\quad AT=\sqrt{ab}\quad \text{és}\quad AM=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

I.1. ábra



Mivel egy derékszögű háromszögben az átfogó nagyobb bármely befogónál, azonnali, hogy $AT<AO<AM$, azaz $\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}<\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. Ugyanehhez az eredményhez jutunk, ha $b<a$. Ha pedig $a=b$, akkor a kör egy ponttá zsugorodik és a T, O és M pontok egybeesnek, tehát a fenti kifejezések egyenlők ebben az esetben. (I.1. ábra)

9.1.2. Alkalmazások

1. Ha $a, b, c\geq 0$, akkor $(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc$.

2. $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$, $\forall\, x, y>0$.

3. $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 9$, $\forall\, x, y, z>0$.

4. Ha $a+b=1$, akkor $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\geq\frac{25}{2}$.

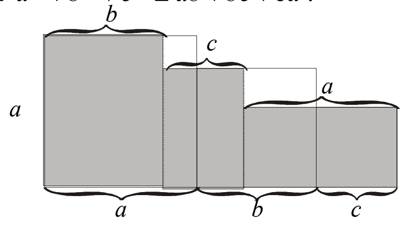
5. Ha $a+b=4$, akkor $a^2+b^2+\frac{32}{ab}\geq\frac{32}{\sqrt{ab}}$.

9.1.3. Bizonyítsd be, hogy $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$, ha $a, b, c\in\mathbb{R}$.

Megoldás. Az egyenlőtlenség mindkét oldalát 2-vel szorozzuk és a jobb oldalt 0-ra redukáljuk:
$$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca \Leftrightarrow 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca\geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a^2+b^2-2ab)+(b^2+c^2-2bc)+(c^2+a^2-2ac)\geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq 0.$$

(ugyanehhez jutunk, ha az azonosságok közül a 13.-at használjuk). Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $a=b=c$.

Geometriai értelmezés. Mivel az egyenlőtlenség szimmetrikus feltételezhetjük, hogy $a\geq b\geq c$. Az I.2. ábrán a satírozott területek összege $ab+bc+ca$, míg az egész idom területe $a^2+b^2+c^2$, tehát $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$.



I.2. ábra

Fejezet tartalma | Tartalomjegyzék

9.1.4. Alkalmazások

Bizonyítsd be, hogy:

1. $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\geq\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$;

2. $\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\geq a+b+c$;

3. $a^4+b^4+c^4\geq a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$;

4. $a^4+b^4+c^4\geq abc(a+b+c)$;

5. $a^2+b^2+c^2+d^2\geq ab+bc+cd+da$.

9.1.5. **a)** Bizonyítsuk be, hogy $a, b, c\in\mathbb{R}_+$ esetén $a^3+b^3+c^3\geq 3abc$.

b) Bizonyítsuk be, hogy ha $x, y, z\in\mathbb{R}_+$, akkor

$$\frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}\leq\sqrt[3]{xyz}\leq\frac{x+y+z}{3}\leq\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}.$$

(*Harmonikus, mértani, számtani és négyzetes közepek közti egyenlőtlenségek* három szám esetében, itt is a harmonikus közepek esetében $x, y, z\neq 0$)

Megoldás

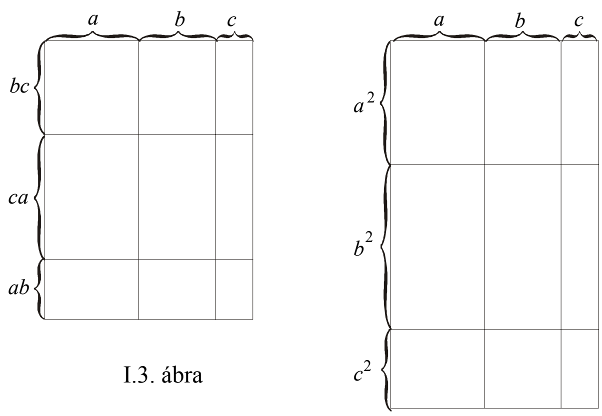
a) A 15. azonosság és az előbbi feladat alapján

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=$$
$$=\frac{1}{2}(a+b+c)\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right)\geq 0,$$

mert $a+b+c\geq 0$ és $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq 0$.

9.1.6. Megjegyzés. A megoldásból az is látszik, hogy ha $a, b, c\in\mathbb{R}$, akkor az $a+b+c$ és $a^3+b^3+c^3-3abc$ azonos előjelűek. Ezt lehet használni köbgyököt tartalmazó háromtagú egyenlőtlenségek tanulmányozására.

Geometriai értelmezés. Az $ab+bc+ca\leq a^2+b^2+c^2$ egyenlőtlenség alapján a jobboldali téglalap területe nem kisebb a baloldali téglalap területénél (I.3. ábra). A két téglalapból a közös részeket levágva a $3abc\leq a^3+b^3+c^3$ egyenlőtlenséghez jutunk.



I.3. ábra

a) Ha $x, y, z \in R_+$ és $a = \sqrt[3]{x}$, $b = \sqrt[3]{y}$, $c = \sqrt[3]{z}$, akkor az a) alapján $3abc \le a^3 + b^3 + c^3$, tehát $3\sqrt[3]{xyz} \le x + y + z$.

Ha $a = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $b = \frac{1}{\sqrt[3]{y}}$ és $c = \frac{1}{\sqrt[3]{z}}$, akkor az a) alapján $\frac{3}{\sqrt[3]{xyz}} \le \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$, tehát

$$\frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} \le \sqrt[3]{xyz}.$$

$$\frac{x+y+z}{3} \le \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} \Leftrightarrow \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2 \le \frac{x^2+y^2+z^2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) \le 3\left(x^2 + y^2 + z^2\right) \Leftrightarrow xy + yz + zx \le x^2 + y^2 + z^2.$$

Az utolsó egyenlőtlenség az előbbi feladat alapján igaz, tehát az egyenlőtlenséget igazoltuk.

9.1.7. Megjegyzés. Az a, b és c pozitív számok *harmonikus közepe* $\frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$, *számtani közepe* $\frac{a+b+c}{3}$, *mértani közepe* $\sqrt[3]{abc}$ és *négyzetes közepe* $\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$.

9.1.8. Alkalmazások

1. $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \ge 3$, ha $x, y, z > 0$;

2. $(a + 2b + c)(a + b + 2c)(2a + b + c) \ge 54abc$, ha $a, b, c \ge 0$;

3. $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \ge \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$, ha $x, y, z \ge 0$;

4. Bizonyítsd be, hogy ha $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ és $x, y, z > 0$, akkor $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \ge 3\sqrt{3}$.

5. Bizonyítsd be, hogy ha $a, b, c > 0$, akkor $\sqrt{\frac{a+b}{c}} + \sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} \ge 3\sqrt{2}$.

I.9.2. A Cauchy-Buniakovski egyenlőtlenség

9.2.1. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy

a) $(ax + by)^2 \le \left(a^2 + b^2\right)\left(x^2 + y^2\right)$;

b) $(ax + by + cz)^2 \le \left(a^2 + b^2 + c^2\right)\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$.

1. bizonyítás. Az azonosságoknál megoldott második feladat alapján

$$\left(a^2 + b^2\right)\left(x^2 + y^2\right) - (ax + by)^2 = (ay - bx)^2 \ge 0 \text{ és}$$

$$\left(a^2 + b^2 + c^2\right)\left(x^2 + y^2 + z^2\right) - (ax + by + cz)^2 = (ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2 \ge 0.$$

Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$.

2. bizonyítás

a) Az egyenlőtlenség $\left(\frac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 \le 1$ alakba írható. De

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{x^2}{x^2+y^2}\right) \text{ és}$$

$$\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{a^2+b^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)\text{, tehát}$$

$$\frac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}+\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}\right) = 1.$$

Hasonló módon igazolható, hogy $\frac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}} \ge -1$, tehát

$$\left(\frac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 \le 1.$$

b)
$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}\right),$$

$$\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2+z^2}\right) \text{ és}$$

$$\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\cdot\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}\right)\text{, tehát}$$

$$\frac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \le 1.$$

Hasonlóan igazolható, hogy $\frac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \ge -1$, tehát

$$(ax+by+cz)^2 \le (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2).$$

9.2.2. Alkalmazások

1. Bizonyítsd be az $ab+bc+ca \le a^2+b^2+c^2$ egyenlőtlenséget a Cauchy-Buniakovski egyenlőtlenség segítségével.

2. $\sqrt{a(b+c)}+\sqrt{b(c+a)}+\sqrt{c(a+b)} \le \sqrt{2}(a+b+c)$, a, b és c pozitívak.

3. $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \ge 9$, ha $x,\ y,\ z > 0$.

4. Határozd meg az $a-2b+3c$ kifejezés minimumát és maximumát, ha $a^2+b^2+2c^2=1$.

5. Bizonyítsd be, hogy az ABC és $A'B'C'$ háromszögek pontosan akkor hasonlók, ha $\sqrt{aa'}+\sqrt{bb'}+\sqrt{cc'}=2\sqrt{pp'}$, ahol $p=\frac{a+b+c}{2}$ és $p'=\frac{a'+b'+c'}{2}$.

9.2.3. Megjegyzés. Általában

$$\left(a_1^2+a_2^2+\ldots.+a_n^2\right)\left(x_1^2+x_2^2+\ldots.+x_n^2\right)-\left(a_1x_1+a_2x_2+\ldots a_nx_n\right)^2=\sum_{1\le i<j\le n}\left(a_ix_j-a_jx_i\right)^2\ge 0,$$

tehát

$$\left(a_1^2+a_2^2+\ldots.+a_n^2\right)\left(x_1^2+x_2^2+\ldots.+x_n^2\right)\ge\left(a_1x_1+a_2x_2+\ldots a_nx_n\right)^2.$$

I.9.3. A rendezési tétel

9.3.1. Feladat

a) Nagymama félretett pénzéből szándékszik adni születésnapunkra. Két pénztárcája van, az egyikben 500000-es, a másikban 100000-es bankjegyek vannak. Nagyi feltételei szerint az egyik tárcából 5, a másikból 3 bankjegyet vehetünk ki (azt mi dönthetjük el, hogy melyik tárcából veszünk 5-öt és melyikből 3-at). Melyik tárcából mennyit kell elvennünk, ha a lehető legtöbb pénzt szeretnénk elvenni? És ha a lehető legkevesebbet?

b) Mi a helyzet, ha egy harmadik tárcában 50000-es bankjegyek vannak és a tárcából kivehető bankjegyek száma 7, 4 illetve 2?

c) Írjuk fel általánosan is a stratégiánkat.

Megoldás

a) A kivehető összegek $5\cdot 500000+3\cdot 100000$ és $3\cdot 500000+5\cdot 100000$. Az első a nagyobb, tehát a legtöbb pénzt akkor tudjuk kivenni, ha a nagyobb értékű bankjegyből veszünk többet.

b) A stratégia ugyanaz marad, a legtöbbet az 500000-es bankjegyből kell vennünk, majd a 100000-es és végül az 50000-es bankjegyet tartalmazó tárcából veszünk.

c) Ha a bankjegyek $a_1\ge a_2$ és a kivehető bankjegyek száma b_1 illetve b_2, akkor $b_1\ge b_2$ esetén $a_1b_1+a_2b_2\ge a_1b_2+a_2b_1$. Ez az egyenlőtlenség átrendezés után $\left(a_1-a_2\right)\left(b_1-b_2\right)\ge 0$ alakba írható, tehát az egyenlőtlenség igaz (bár ezt valószínűleg senkinek nem kell igazolni, mindenki rájön magától is, hogy melyik tárcából érdemes többet venni).

A b) esetben az $a_1\ge a_2\ge a_3$ és $b_1\ge b_2\ge b_3$ feltételek mellett az $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ a legnagyobb és $a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1$ a legkisebb megengedett összeg.*

Ez a tulajdonság általában is érvényes.

9.3.2. Tétel. (*A rendezési tétel*) Ha $a_1\ge a_2\ge a_3\ge\ldots\ge a_n$ és $b_1\ge b_2\ge b_3\ge\ldots\ge b_n$ (azt mondjuk, hogy a két számsorozat *azonos rendezésű*), akkor az összes $a_1b_{i_1}+a_2b_{i_2}+\ \ldots.\ +a_nb_{i_n}$ alakú összeg közül, ahol $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}=\{1, 2, \ldots, n\}$ a legnagyobb az $S_{\max}=a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n$ összeg és a legkisebb az $S_{\min}=a_1b_n+a_2b_{n-1}+\ldots+a_nb_1$ összeg.

Bizonyítás. Tekintsünk egy tetszőleges $S=a_1b_{i_1}+a_2b_{i_2}+\ \ldots.\ +a_nb_{i_n}$ összeget. Legyen j a legkisebb olyan természetes szám, amelyre $i_j\ne j$ és k az a szám, amelyre $i_k=j$. Az $a_jb_{i_j}+a_kb_{i_k}\le a_jb_{i_k}+a_kb_{i_j}$ (lásd az előbbi feladat c) pontját) egyenlőtlenség alapján az S összegben b_{i_j}-t és b_{i_k}-t megcserélve az összeg növekszik. Ilyen cserék ismétlésével tetszőleges S összegből eljuthatunk az $S_{\max}$ összeghez, tehát $S\le S_{\max}$. Hasonlóképpen igazolható, hogy $S_{\min}\le S$.

* Megengedett összeg alatt azt értjük, hogy az $a_1b_i+a_2b_j+a_3b_k$ összegben $\{i, j, k\}=\{1, 2, 3\}$.

Ezt az eljárást a következő példával mutatjuk be.

Ha $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge a_4$ és $b_1 \ge b_2 \ge b_3 \ge b_4$ és $S = a_1b_3 + a_2b_1 + a_3b_4 + a_4b_2$ akkor $a_1b_1 + a_2b_3 \ge a_1b_3 + a_2b_1$, tehát $S \le a_1b_1 + a_2b_3 + a_3b_4 + a_4b_2$. (1)

De $a_2b_3 + a_4b_2 \le a_2b_2 + a_4b_3$ (2) ($a_2 \ge a_4$ és $b_2 \ge b_3$), tehát

$$a_1b_1 + a_2b_3 + a_3b_4 + a_4b_2 \le a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_4 + a_4b_3. \; (3)$$

$a_3 \ge a_4$ és $b_3 \ge b_4$ alapján $a_3b_4 + a_4b_3 \le a_3b_3 + a_4b_4$, tehát

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_4 + a_4b_3 \le a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4. \; (4)$$

(1), (2), (3) és (4) alapján $S \le a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4$.

9.3.3. Megoldott feladat. A rendezési tétel segítségével igazoljuk a következő egyenlőtlenségeket:

a) $a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ca$;

b) $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} \ge \dfrac{3}{2}$, ha $a, b, c > 0$;

c) $\dfrac{a^2}{b+c} + \dfrac{b^2}{c+a} + \dfrac{c^2}{a+b} \ge \dfrac{a+b+c}{2}$, ha $a, b, c > 0$;

Bizonyítás

a) Az egyenlőtlenség szimmetrikus, tehát feltételezhetjük, hogy $a \ge b \ge c$. Így az $a \ge b \ge c$ és $a \ge b \ge c$ számhármasokra használva a rendezési tételt az $a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ca$ egyenlőtlenséghez jutunk.

b) Az a, b, c és $\dfrac{1}{b+c}$, $\dfrac{1}{c+a}$, $\dfrac{1}{a+b}$ számhármasok azonos rendezésűek (ha $S = a + b + c$, akkor $a \ge b \Leftrightarrow \dfrac{1}{S-a} \ge \dfrac{1}{S-b}$), tehát

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \ge \frac{a}{c+a} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} \text{ és}$$

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \ge \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}.$$

Az előbbi két egyenlőtlenség összegéből következik a kívánt egyenlőtlenség.

c) Az a^2, b^2, c^2 és $\dfrac{1}{b+c}$, $\dfrac{1}{c+a}$, $\dfrac{1}{a+b}$ azonos rendezésű számhármasokra

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \ge \frac{a^2}{c+a} + \frac{b^2}{a+b} + \frac{c^2}{b+c} \text{ és}$$

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \ge \frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a}, \text{ tehát}$$

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \ge \frac{1}{2}\left(\frac{c^2+a^2}{c+a} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{a^2+b^2}{a+b}\right). \; (1)$$

De $\dfrac{a^2+c^2}{a+c} \ge \dfrac{a+c}{2}$, $\dfrac{b^2+c^2}{b+c} \ge \dfrac{b+c}{2}$ és $\dfrac{a^2+b^2}{a+b} \ge \dfrac{a+b}{2}$,

tehát $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a^2+c^2}{a+c} + \dfrac{b^2+c^2}{b+c} + \dfrac{a^2+b^2}{a+b}\right) \ge \dfrac{a+b+c}{2}$. (2)

Az (1) és (2) alapján következik a kívánt egyenlőtlenség.

9.3.4. Alkalmazások

1. $\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\geq a+b+c$;

2. $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\geq ab+bc+cd+de+ea$;

3. $3\left(a^3+b^3+c^3\right)\geq (a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq 9abc$;

4. $a^3+b^3+c^3\geq a^2\sqrt{bc}+b^2\sqrt{ca}+c^2\sqrt{ab}$, $a, b, c>0$;

5. $\frac{a}{a+2b+2c}+\frac{b}{2a+b+2c}+\frac{c}{2a+2b+c}\geq\frac{3}{5}$, ha $a, b, c>0$.

I.9.4. Gyakorlatok és feladatok

Bizonyítsd be, hogy:

1. $(a+b)\sqrt{c}+(b+c)\sqrt{a}+(c+a)\sqrt{b}\geq 6\sqrt{abc}$;

2. $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}\geq 4$;

3. Bizonyítsd be, hogy ha $a+b+c=1$, akkor

a) $a^2+b^2+c^2\geq\frac{1}{3}$; **b)** $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 9$.

4. Bizonyítsd be, hogy:

a) $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$;

b) $\frac{2}{a+b}+\frac{2}{a+1}+\frac{2}{b+1}\leq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+1$;

c) $\frac{a+b}{a^2+b^2}+\frac{b+c}{b^2+c^2}+\frac{c+a}{c^2+a^2}\leq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$, ha $a, b, c\in\mathbb{R}_+^*$;

d) $\frac{a+b}{2}\cdot\frac{a^2+b^2}{2}\leq\frac{a^3+b^3}{2}$;

e) $abc\geq(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$;

f) $\frac{a}{\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+b^2\right)}}+\frac{b}{\sqrt{\left(b^2+a^2\right)\left(b^2+c^2\right)}}+\frac{c}{\sqrt{\left(c^2+a^2\right)\left(c^2+b^2\right)}}\leq\frac{1}{2}\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}$, ha $a, b, c\in\mathbb{R}_+^*$;

g) $3\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)\geq 4\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)^2$, ha $a, b, c\in\mathbb{R}_+^*$.