

III. Mértani helyek

3.1. Lineáris feltételekkel adott mértani helyek

Gyakran találkozunk olyan feladattal, amelyekben egy közös tulajdonsággal rendelkező pontok halmazát kell meghatározni. Már az általános iskolából tudjátok, hogy az ilyen halmazt az illető pontok *mértani helyének* nevezzük. Általában egy mértani hely meghatározásánál a pontok közös tulajdonságából következtetünk egy olyan tulajdonságra, amelyből azonnal kiolvasható, hogy a mértani hely milyen halmaznak a része. Ilyenkor, ha nem ekvivalens átalakításokkal jutottunk ehhez a tulajdonsághoz, akkor be kell bizonyítani, hogy az általunk megsejtett ponthalmaz minden pontja eleme a mértani helynek vagy ki kell zárni azon pontokat, amelyek nem rendelkeznek az adott tulajdonsággal.

1. feladat. Határozzuk meg azon pontok mértani helyét, amelyek egyenlő távolságra vannak az A és B rögzített pontoktól.

a) az α síkban ($A, B \in \alpha$) **b)** a térben.

Megoldás. a) Vegyünk fel egy derékszögű koordináta-rendszert, amelynek origója az A pont és az Ox tengely az AB egyenes. A pontok koordinátái $A(0, 0)$ és $B(b, 0)$. Egy $M(x, y)$ pont pontosan akkor teljesíti a feladatbeli feltételt, ha $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x-b)^2 + y^2}$, vagyis ha $x = \frac{b}{2}$. Tehát a mértani hely egy egyenes. Ez az AB szakasz felezőmerőlegese.

b) A derékszögű koordináta-rendszert az előzőhöz hasonló módon vegyük fel. A pontok koordinátái $A(0, 0, 0)$ és $B(b, 0, 0)$. Az $M(x, y, z)$ pont pontosan akkor van egyenlő távolságra az A és B pontoktól, ha

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(x-b)^2 + y^2 + z^2}, \text{ vagyis ha } x = \frac{b}{2}.$$

Tehát a mértani hely egy sík. (Az ekvivalens átalakítások miatt nem szükséges egyik esetben sem külön bebizonyítani, hogy valóban minden pont hozzátartozik a mértani helyhez.) Ez az AB szakasz felezőmerőleges síkja.

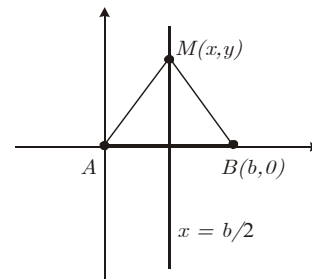
Megjegyzés. Ha a feladat nem adott koordinátákkal van megfogalmazva, célszerű a számolások egyszerűsítése végett a lehető legmegfelelőbb koordináta-rendszert választani. Lássuk mi történt volna, ha tetszőlegesen választunk koordináta-rendszert:

a) Ha az adott pontok $A(a_1, a_2)$ és $B(b_1, b_2)$, akkor az $M(x, y)$ pont pontosan akkor van egyenlő távolságra az A és B pontoktól, ha

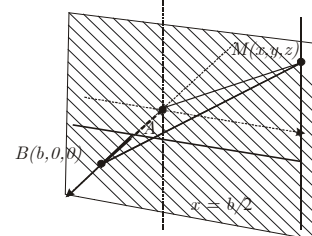
$$\sqrt{(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2} = \sqrt{(x - b_1)^2 + (y - b_2)^2},$$

$$\text{vagyis ha } 2(a_1 - b_1)x + 2(a_2 - b_2)y - a_1^2 - a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 = 0,$$

ez pedig egy egyenes egyenlete. Az első megoldás esetén látszott, hogy a mértani hely merőleges AB -re és felezi azt, az előbbi egyenlet alapján ennek bizonyítása további számolásokat igényelne.



9. ábra



10. ábra

b) Ha az adott pontok $A(a_1, a_2, a_3)$ és $B(b_1, b_2, b_3)$, akkor az $M(x, y)$ pont pontosan akkor van egyenlő távolságra az A és B pontoktól, ha

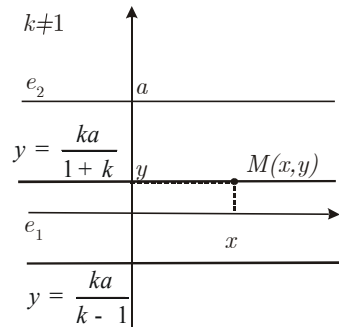
$$\sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 + (z-a_3)^2} = \sqrt{(x-b_1)^2 + (y-b_2)^2 + (z-b_3)^2},$$

innen $2(a_1 - b_1)x + 2(a_2 - b_2)y + 2(a_3 - b_3)z - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 0$, ez pedig egy sík egyenlete. Akárcsak az a) pontnál az utóbbi egyenletből nem derül ki azonnal, mint az előző koordinátarendszer választásánál, hogy ez a sík merőleges AB -re és felezi azt.

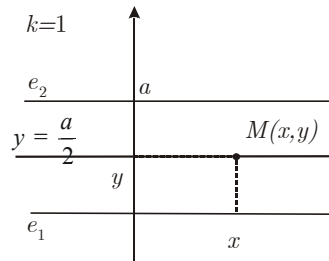
2. feladat. Határozzuk meg azon pontok mértani helyét, amelyeknek két adott e_1 és e_2 egyenestől mért távolságaik aránya adott pozitív állandó.

Megoldás. Két esetet kell tárgyalnunk: ha az egyenesek párhuzamosak, illetve ha metszik egymást.

I. eset. $e_1 \parallel e_2$. Vegyük fel a koordinátarendszert úgy, hogy az Ox tengely legyen az e_1 egyenes. Az egyenesek egyenletei: $e_1 : y = 0$ és $e_2 : y = a \in \mathbb{R}^*$.



11. ábra



12. ábra

Egy $M(x, y)$ távolságai az egyenesektől: $d_1 = |y|$ és $d_2 = |y - a|$. Tehát a

$\frac{|y|}{|y - a|} = k$ összefüggés kell teljesüljön. (A feladat feltételeiből világos, hogy M

nincs rajta egyik egyenesen sem.) Innen két esetünk van:

$$1^\circ y = k(y - a) \Leftrightarrow y = \frac{ka}{k-1}, \text{ ha } k \neq 1$$

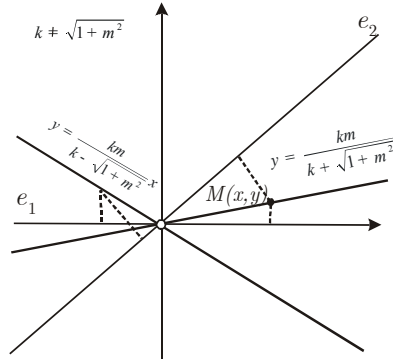
$$2^\circ y = -k(y - a) \Leftrightarrow y = \frac{ka}{1+k} \quad (k > 0, \text{ tehát ez mindig lehetséges})$$

Tehát, ha $k \neq 1$, akkor az ekvivalens átalakítások miatt a mértani hely két egyenes:

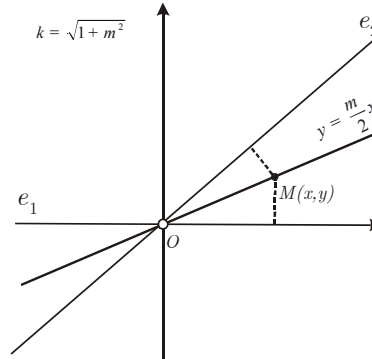
$$y = \frac{ka}{k-1} \text{ és } y = \frac{ka}{1+k}, \text{ ha pedig } k = 1, \text{ akkor csak egy egyenes: } y = \frac{a}{2}.$$

(Ez utóbbi esetben tulajdonképpen a két egyenestől mért távolság egyenlő)

II. eset. $e_1 \cap e_2 = \{O\}$. Legyen a derékszögű koordinátarendszer középpontja az O pont és az Ox tengely az e_1 egyenes. Az egyenesek egyenletei: $e_1 : y = 0$ és $e_2 : y = mx$ ($m \neq 0$) ha $e_1 \not\perp e_2$ és $e_1 : y = 0$ illetve $e_2 : x = 0$, ha $e_1 \perp e_2$.



13. ábra



14. ábra

A. Ha $e_1 \not\perp e_2$, akkor az $M(x, y)$ pont távolságai az egyenesektől: $d_1 = |y|$ és $d_2 = \frac{|y - mx|}{\sqrt{1 + m^2}}$, tehát a $\frac{|y|}{\frac{|y - mx|}{\sqrt{1 + m^2}}} = k$ feltételnek kell teljesülnie. (Látható, hogy az

$y = mx$ -et teljesítő pont nincs rajta a mértani helyen) Ismét két eset tárgyalása szükséges:

$$1^\circ y = k \cdot \frac{y - mx}{\sqrt{m^2 + 1}} \Leftrightarrow y = \frac{km}{k - \sqrt{1 + m^2}} x, \text{ ha } k \neq \sqrt{1 + m^2}$$

$$2^\circ y = k \cdot \frac{-y + mx}{\sqrt{m^2 + 1}} \Leftrightarrow y = \frac{km}{k + \sqrt{1 + m^2}} x.$$

Tehát ha $k \neq \sqrt{1 + m^2}$, akkor a mértani hely az

$$y = \frac{km}{k - \sqrt{1 + m^2}} x \text{ és } y = \frac{km}{k + \sqrt{1 + m^2}} x \text{ egyenletű}$$

egyenesekből áll a $(0, 0)$ pont kivételével, ha pedig

$$k = \sqrt{1 + m^2}, \text{ akkor az } x = 0 \text{ és } y = \frac{m}{2} x \text{ egyenletű}$$

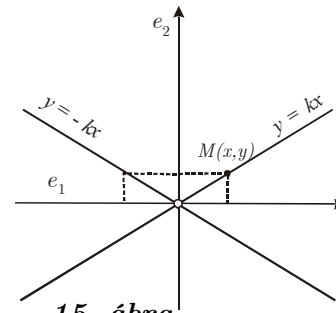
egyenesekből a $(0, 0)$ pont kivételével.

B. Ha $e_1 \perp e_2$, akkor a két egyenest tekinthetjük a

derékszögű koordinátarendszer tengelyeinek. Az $M(x, y)$ pont távolságai az egyenesektől: $d_1 = |y|$ és $d_2 = |x|$, tehát a mértani hely az $y = kx$ és $y = -kx$ egyenesekből áll a $(0, 0)$ pont kivételével. (Ha az (1) és (2) egyenletekben $m \rightarrow \infty$, akkor éppen a fenti egyenleteket kapjuk.)

Megjegyzés. A második esetben, ha $k = 1$ -et helyettesítünk, akkor a két egyenes által meghatározott szög *belső* és *külső szögfelezőjének egyenletéhez* jutunk.

3. feladat. A $P(a, b)$ ($a, b \in \mathbb{R}^*$) rögzített ponton át húzunk két változó egymásra merőleges d_1 és d_2 egyenest. A d_1 egyenes az Ox tengelyt A -ban, míg a d_2 egyenes az Oy tengelyt B -ben metszi. Határozzuk meg a P pont AB egyenesre eső



15. ábra

vetületének mértani helyét.

Megoldás

Ha $d_1 \not\perp Ox$, jelöljük $m \in \mathbb{R}^*$ -gal a d_1 egyenes irányítányezőjét ($m \neq 0$, mert ellenkező esetben nem metszi az Ox tengelyt). A d_2

irányítányezője $-\frac{1}{m}$, a d_1 és d_2 egyenesek

egyenletei: $d_1: y = b + m(x - a)$ és

$d_2: y = b - \frac{1}{m}(x - a)$. Tehát az A és B

koordinátái: $A\left(\frac{ma-b}{m}, 0\right)$ és $B\left(0, \frac{a+mb}{m}\right)$.

Az AB egyenes egyenlete:

$$AB: m(a+mb)x + m(ma-b)y - (ma-b)(a+mb) = 0,$$

A P ponton áthaladó AB -re merőleges egyenes egyenlete:

$$d: m(ma-b)x - m(a+mb)y - m(ma-b)a + m(a+mb)b = 0, \text{ tehát a két}$$

egyenes M metszéspontjának koordinátái: $M\left(\frac{a^2(ma-b)}{m(a^2+b^2)}, \frac{b^2(a+mb)}{m(a^2+b^2)}\right)$.

Az $x = \frac{a^2(ma-b)}{m(a^2+b^2)}$ egyenlőségből kifejezve az m -et és behelyettesítve az

$y = \frac{b^2(a+mb)}{m(a^2+b^2)}$ egyenlőségbe az $ay + bx = ab$ összefüggéshez jutunk.

Ez egy egyenes egyenlete, tehát a mértani hely része egy egyenesnek. Meg kellene vizsgálnunk, hogy az egyenes minden pontja hozzátartozik-e a mértani helyhez. Ehhez

szükséges megvizsgálni, hogy $m \in \mathbb{R}$ esetén az $x = \frac{a^2(ma-b)}{m(a^2+b^2)}$ és

$y = \frac{b^2(a+mb)}{m(a^2+b^2)}$ milyen értékeket vehet fel. Ez utóbbi egyenlőségek alapján

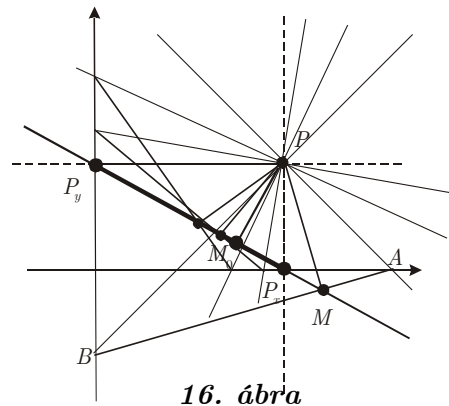
$$m = \frac{a^2b}{a^3 - (a^2+b^2)x} = \frac{ab^2}{(a^2+b^2)y - b^3}.$$

Ebből következik, hogy bármely $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{a^3}{a^2+b^2}\right\}$ értéket felvehet az M abszcisszája.

$d_1 \perp Ox$ esetén a vetület éppen az $M_0\left(\frac{a^3}{a^2+b^2}, \frac{b^3}{a^2+b^2}\right)$ pont, tehát a mértani hely

az $ay + bx = ab$ egyenletű egyenes. Ez tulajdonképpen a $P_x(a, 0)$ és $P_y(0, b)$ pontokon átmenő egyenes.

Megjegyzés. Kereshettük volna a mértani helyet abban az esetben is, ha $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ és csak azokat a d_1 és d_2 egyeneseket tekintjük, amelyek a pozitív féltengelyeket met-



szik. Ebben az esetben az $m \in \mathbb{R}$ kell teljesítse az alábbi egyenlőtlenségeket: $m < 0$ vagy $m > \frac{b}{a}$ és $0 < -\frac{1}{m} < \frac{b}{a}$ vagy $-\frac{1}{m} < 0$, innen $m \in \left(-\infty, -\frac{a}{b}\right) \cup \left(\frac{b}{a}, +\infty\right)$.

Ha $m \in \left(-\infty, -\frac{a}{b}\right)$, akkor a (2) és (3) összefüggésekből $x \in \left(\frac{a^3}{a^2 + b^2}, a\right)$ és

$y \in \left(0, \frac{b^3}{a^2 + b^2}\right)$, ez pedig az $(M_0 P_x)$ nyílt szakaszt határozza meg. $m \in \left(\frac{b}{a}, +\infty\right)$

esetén a $(P_y M_0)$ nyílt szakaszhoz jutunk. Ha pedig a tengelyekkel párhuzamos egyeneseket tekintjük, akkor ebben az esetben is a vetület az M_0 pont lesz. Tehát itt a mértani hely a $(P_x P_y)$ nyílt szakasz.

4. feladat. Határozzuk meg azon pontok mértani helyét, amelyek (x, y) koordinátáira $x + 2y < 2$.

Megoldás. Rögzített x_1 -re $x_1 + 2y < 2$ pontosan

akkor, ha $y < 1 - \frac{x_1}{2}$, de az $M\left(x_1, 1 - \frac{x_1}{2}\right)$ pont a

$d: x + 2y = 2$ egyenesen van, tehát azokra az (x_1, y)

párookra teljesül az $x_1 + 2y < 2$ egyenlőtlenség,

amelyeknek megfelelő pontok a $d_1: x = x_1$ egyenesen

az M_1 pont alatt helyezkednek el. Az x_1 -et változtatva

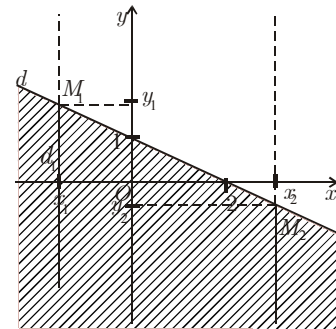
különböző félegyeneseket kapunk, amelyeknek egyesítése a d egyenes által meghatározott alsó nyílt félsík.

Így az $x + 2y < 2$ egyenlőtlenséget teljesítő pontok az $x + 2y = 2$ egyenletű egyenes által meghatározott felső nyílt félsíkot alkotják (a 17. ábrán a bevonalkázott rész).

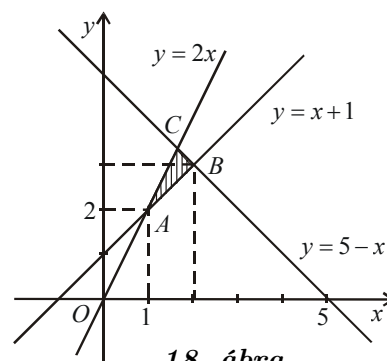
5. feladat. Határozzuk meg azon pontok mértani helyét, amelyek (x, y) koordinátáira $y \leq 2x$, $y \geq x + 1$ és $x + y \leq 5$.

Megoldás. Az előző feladathoz hasonlóan okoskodva kapjuk, hogy a mértani hely három félsík metszete, éspedig az $y = 2x$ egyenes által határolt alsó zárt félsík, az $y = x + 1$ egyenes által határolt felső zárt félsík és az $y = 5 - x$ egyenes által határolt alsó zárt félsík metszete. Ez az ABC_Δ belső D tartománya az oldalaival együtt. (18. ábra)

6. feladat. Határozzuk meg az $x^2 + y^2$ kifejezés minimumát, ha $y \leq 2x$, $y \geq x + 1$ és $x + y \leq 5$.



17. ábra



18. ábra

Megoldás. Tulajdonképpen az 5. feladatban kapott D tartomány pontjai között kell keresni olyat, amely koordinátáira $x^2 + y^2$ minimális. Tudjuk, hogy egy $M(x, y)$ pont távolsága az O ponttól $\sqrt{x^2 + y^2}$, tehát az O -hoz legközelebb eső D -beli pontot keressük. Ez éppen az A csúcs, tehát $\min_{(x,y) \in D} (x^2 + y^2) = 1^2 + 2^2 = 5$.

3.2. Lineáris programozás

Valamennyi szervezetnek döntéseket kell hoznia erőforrásainak allokálásáról és felhasználásáról. Mivel ezek az erőforrások csak korlátozottan állnak rendelkezésre, a menedzsmentnek folyamatosan döntéseket kell hoznia felhasználásukról annak érdekében, hogy a vállalkozás a céljait minél hamarabb elérhesse. Lehetséges célok például a forgalom vagy a nyereség növelése, valamint a költségek minimalizálása. Ilyen stratégiai döntések hozatala *lineáris vagy nem-lineáris programozás* segítségével érhető el. A lineáris és nem-lineáris programozás olyan matematikai technikák, amelyek felhasználhatók arra, hogy egy vállalat az erőforrásait célirányosan használja fel. Tankönyvünkben csak lineáris programozással foglalkozunk.

Ahhoz, hogy egy döntési problémát optimalizálási problémává lehessen alakítani, különböző feltételeknek kell teljesülniük:

- Különböző döntési alternatíváknak kell létezniük, amelyek a vállalat célját nagymértékben befolyásolják és ezek matematikai változók formájában kifejezhetőeknek kell lenniük.

Az erőforrásoknak korlátozottan kell rendelkezésre állniuk.

Világosan meg kell tudni fogalmazni azt a vállalati célt, amely a döntési alternatíváktól függ és ezt is ki kell tudni fejezni a döntési változók matematikai függvényeként.

A fentieknek megfelelő optimalizálási modellek három alapvető komponensből állnak:

- A *döntési változók* olyan értékek, amelyeket a döntéshozó befolyásolni tud. Ezek számára keressük az optimális értékeket.
- A *célfüggvény* a döntési változók egy függvénye, amelyet maximalizálni vagy minimalizálni kell. (Pl. a költségek minimalizálása, a nyereség maximalizálása)
- A *korlátok* olyan feltételek, amelyek a megengedett változókombinációk halmazát behatárolják.

Feladat. Egy háziállat táplálékának tartalmaznia kell négyféle tápanyagból legalább 0,2 kg, 0,4 kg, 1 kg és 4,2 kg mennyiséget. Két takarmányfőleség áll rendelkezésünkre: A és B . 1 kg A takarmányban rendre 0,1; 0; 0,1; 0,7 kg van az egyes tápanyagokból, 1 kg B takarmány ezekből 0; 0,2; 0,2; 0,6 kg-ot tartalmaz. Az A takarmány egységára 2 millió lej/kg, a B takarmányé 3 millió lej/kg. Határozzuk meg a gazdaságos takarmánykeverék összetételét!

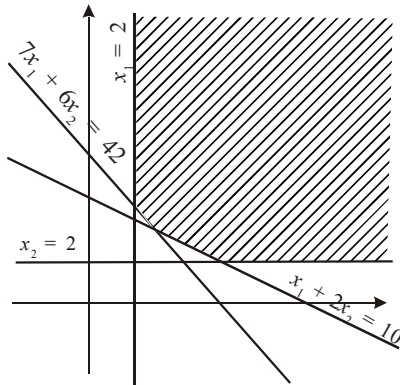
Megoldás. Mindenekelőtt a feladatot át kell írni matematikai változók segítségével: A döntési változók az A és B takarmányokból rendelt mennyiségek kg-ban. Legyen ez x_1 és x_2 . Ekkor a célfüggvény az összár: $f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$, amit minimalizálni kell a következő korlátozási feltételek mellett:

$$0,1x_1 \geq 0,2; 0,2x_2 \geq 0,4; 0,1x_1 + 0,2x_2 \geq 1; 0,7x_1 + 0,6x_2 \geq 4,2; x_1, x_2 \geq 0$$

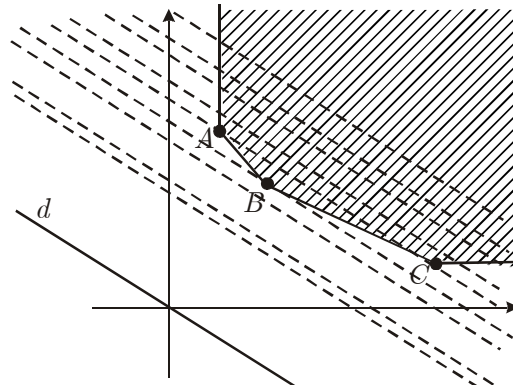
A korlátozási feltételek egyenértékűek a következőkkel:

$$\begin{cases} x_1 \geq 2 \\ x_2 \geq 2 \\ x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ 7x_1 + 6x_2 \geq 42 \end{cases}$$

Ábrázoljuk az előbbi feltételeket teljesítő pontokat az x_1Ox_2 derékszögű koordináta-rendszerben. (19. ábra)



19. ábra



20. ábra

A 19. ábrán bevonalkázott rész a korlátozási feltételeket teljesítő pontok halmaza. Ezt a *lehetséges megoldások halmazának* nevezzük. Ezek közül kell kiválasztanunk azt, amelyre a $2x_1 + 3x_3$ értéke minimális. Vezessünk be egy $a \in \mathbb{R}$ paramétert és legyen $2x_1 + 3x_3 = a$ egy d_a egyenes egyenlete. Az előbbi egyenescsalád egyenesei párhuzamosak egymással és metszéspontjuk az Oy tengellyel a $(0, a)$ pont. Ezen egyenesek közül azt kell kiválasztanunk, amely metszi a lehetséges megoldások tartományát és a minimális. Azaz a $d = d_0$ egyenest addig toljuk párhuzamosan felfele, ameddig lesz közös pontja a tartománnyal. Könnyű belátni, hogy ez a közös pont a tartomány határán van, sőt ha a tartományt határoló egyenesek egyikével sem párhuzamos a d egyenes, akkor valamely csúcsban található. Ha párhuzamos valamely határ-egyenessel és ezt az egyenest érinti először a párhuzamos eltolás során, akkor ezen egyenes minden pontjában minimális a célfüggvény értéke, így a végpontokban is. Következésképpen elégséges kiszámolni a célfüggvény értékét a végpontokban és ezek közül a legkisebb lesz a minimális.

Határozzuk meg a tartomány csúcsainak koordinátáit. Az egyenesek egyenleteiből alkotott rendszereket megoldva kapjuk, hogy az A , B és C metszéspontok

koordinátái: $A\left(2, \frac{14}{3}\right)$, $B\left(3, \frac{7}{2}\right)$ és $C(6, 2)$. A célfüggvény értékei ezekben a

pontokban: $f\left(2, \frac{14}{3}\right) = 2 \cdot 2 + 3 \cdot \frac{14}{3} = 18$, $f\left(3, \frac{7}{2}\right) = 2 \cdot 3 + 3 \cdot \frac{7}{2} = \frac{33}{2} = 16,5$ és

$f(6,2) = 2 \cdot 6 + 3 \cdot 2 = 18$. Azonnali, hogy a B pont esetében van minimum. Tehát az optimális, ha 3 kg-ot vásárolunk az A takarmányból és 3,5 kg-ot a B takarmányból, ez 16,5 millió lejbe kerül és tartalmaz 0,3 kg-ot az I. tápanyagból, 0,7 kg-ot a II. tápanyagból, 1 kg-ot a III. tápanyagból és 4,2 kg-ot a IV. tápanyagból.

Feladatok

1. Egy üzem kétféle olyan árut készít, amelyekhez az A , B és C gépsorok is kellenek. Az első áru egy egységének elkészítéséhez az A gépsoron 5 óra, a B gépsoron 2 óra, a C gépsoron 2 óra kell; a második áru egy egységének elkészítéséhez az A gépsoron 3 óra, a B gépsoron 3 óra, a C gépsoron 7 óra kell. Az A gépnek 81 óra, a B gépnek 45 óra és a C gépnek 89 óra szabad ideje van.

a) Hány egység árut készíthetnek a rendelkezésre álló idő alatt, ha az a cél, hogy a lehető legtöbbet készítsenek.

b) Ha az első árunál egységenként 5 pénzegység, míg a másodikonál 9 pénzegység a nyereség, határozd meg a maximális nyereséget biztosító gyártási stratégiát! Mennyi ekkor ez a maximális nyereség?

2. A XI. E. osztály teadélutánra készül. A lányok elhatározzák, hogy szendvicseket készítenek. A szendvicsek elkészítéséhez a következő nyersanyag gyűlt össze: 120 dkg vaj, 100 dkg sonka, 200 dkg sajt, 20 db kemény tojás. Kenyeret bármikor vásárolhatnak a szomszéd boltban. Kétféle szendvicset készítenek: sonkásat és sajtosat. Egy sonkás szendvicshöz 3 dkg vajat, 3 dkg sonkát, 2 dkg sajtot, $1/4$ tojást és egy szelet kenyeret használnak fel. A sajtos szendvicshöz 2 dkg vajra, 1 dkg sonkára, 5 dkg sajtra és $1/2$ tojásra és egy szelet kenyérre van szükség. A rendelkezésre álló nyersanyagból hány darab sonkás és hány darab sajtos szendvicset készítsenek úgy, hogy a lehető legtöbbször jóllakjanak (a szendvicsek száma a lehető legnagyobb legyen)?

3. Az A és B típusú ruhák elkészítéséhez a következő munkaműveletek szükségesek:

Munkaművelet	A	B
Szabás	3 perc	3 perc
Varrás	1 perc	4 perc
Hegesztés	1 perc	–

Egy műszakon belül a szabásra összesen 420 perc, a varráásra összesen 440 perc, a hegesztésre összesen 80 perc fordítható. Az A típusú ruha 60 Pe (pénzegység) haszonnal, a B típusú 30 Pe haszonnal jár. Az A típusú ruha termelési értéke darabonként 450 Pe, a B típusú ruha termelési értéke darabonként 500 Pe.

Hány darabot termeljen a gyár egy műszakban, ha

a) maximális haszonra,

b) maximális termelési értékre,

c) maximális haszon mellett maximális darabszám elérésére törekszik?

Létezik-e olyan termelési program, amely mindhárom követelményt egyszerre kielégíti?

3.3. Másodrendű görbék

Az eddig tanulmányozott mértani helyek egyenletei elsőfokúak voltak mindkét változóban. Azaz egyenesek, szakaszok vagy ezek által határolt tartományok voltak. A továbbiakban olyan mértani helyeket tanulmányozunk, amelyek egyenletében másodfokú tagok (x^2 , y^2 és xy) is megjelennek. Az ilyen görbéket nevezzük *másodrendű görbéknek*.

3.3.1. A kör

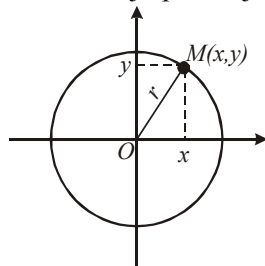
Már az általános iskolából tudjátok, hogy a kör azon pontok mértani helye a síkban, amelyek egy adott ponttól egyenlő távolságra vannak.

A kör egyenletei

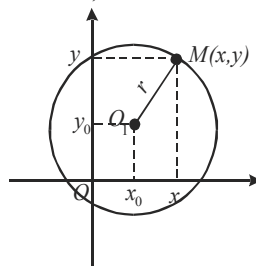
Határozzuk meg a kör egyenletét. Először az origó középpontú kör egyenletét határozzuk meg. Legyen a kör sugara r . Ekkor az $M(x, y)$ pont pontosan akkor van rajta a körön, ha origótól mért távolsága r , azaz $\sqrt{x^2 + y^2} = r$ innen az *origó középpontú r sugarú kör egyenlete*:

$$C : x^2 + y^2 = r^2 \quad (1),$$

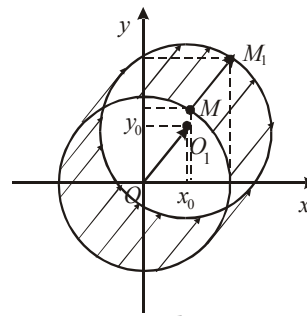
(Az ekvivalens átalakításokból következik, hogy minden (1) egyenletet teljesítő koordinátájú pont rajta van a körön)



21. ábra



22. ábra



23. ábra

Írjuk fel most egy tetszőleges $O_1(x_0, y_0)$ középpontú r sugarú kör egyenletét. Az

$M(x, y)$ pont pontosan akkor van rajta a körön, ha $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r$, ez pedig egyenértékű a

$$C : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \quad (2),$$

egyenlettel, ez utóbbi egyenlet az $O_1(x_0, y_0)$ középpontú r sugarú kör egyenlete

Megjegyzés. Tulajdonképpen a $C(O_1, r)$ kör a $C(O, r)$ kör (x_0, y_0) vektorral való párhuzamos eltolás általi képe (23. ábra), innen pedig az (1) összefüggésből azonnal következik, hogy a $C(O_1, r)$ egyenlete a (2) egyenlet.

Ha a (2) összefüggésben elvégezzük a négyzetre emeléseket és rendezzük, akkor az $x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + (x_0^2 + y_0^2 - r^2) = 0$ alakú másodfokú kétismeretlenes

egyenletet kapjuk. Ezt az egyenletet az általános másodfokú kétismeretlenes $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ egyenlettel összevetve megállapíthatjuk, hogy az általános kétismeretlenes egyenlet csak akkor lehet kör egyenlete, ha $A = C \neq 0$ és $B = 0$. Ebben az esetben A -val való végigosztás után kapjuk, hogy az egyenlet

$$\boxed{x^2 + y^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0} \quad (3)$$

alakú. Ezt az egyenletet nevezzük a *kör általános (descartesi) vagy normálegyenletének*.

Vizsgáljuk meg, hogy az $a, b, c \in \mathbb{R}$ számok befolyásolják-e a kör létezését.

Egészítsük ki teljes négyzetekre a (3) összefüggést. $(3) \Leftrightarrow (x+a)^2 + (y+b)^2 - (a^2 + b^2 - c) = 0$. Látható, hogy:

1° ha $a^2 + b^2 < c$, akkor nem léteznek $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ párok, amelyekre teljesül a (3) összefüggés, azt is szoktuk mondani, hogy ekkor *képzetes körünk* van;

2° ha $a^2 + b^2 = c$, akkor az egyenletet csak a $P(-a, -b)$ pont elégíti ki, ilyenkor *nullkörről* vagy *elfajult körről* beszélünk;

3° ha $a^2 + b^2 > c$, akkor a (3) egyenlet a $P(-a, -b)$ középpontú $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$ sugarú *valódi kör* egyenlete.

A kör paraméteres egyenletei

Ha az (1) egyenletben végigosztunk r^2 -tel, akkor az $\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1$ egyenlethez jutunk. Mivel $\exists! \varphi \in [0, 2\pi)$ úgy, hogy $\frac{x}{r} = \cos \varphi$ és $\frac{y}{r} = \sin \varphi$ (ez éppen az (x, y) pontot az origóval összekötő egyenes Ox tengellyel bezárt szöge), fennállnak a

$$\mathbf{C} : \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \quad (4)$$

összefüggések, amiket a *kör paraméteres egyenleteinek* nevezünk.

Ha kör középpontja az $O_1(x_0, y_0)$, akkor a paraméteres egyenletek:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (5)$$

Megjegyzés. Ha egy pont az $(x_0 + r, y_0)$ pontból indulva egyenletes szögsebességgel mozog a $\mathbf{C}(O_1, r)$ körön, akkor $\varphi > 0$ idő múlva az $(x_0 + r \cos \varphi, y_0 + r \sin \varphi)$ pontban lesz.

A kör belső illetve külső tartománya

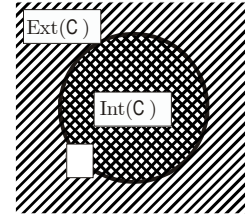
A kör a síkot két diszjunkt tartományra bontja fel. A *belső pontok halmazát* (az ellipszis belsejét vagy belső tartományát) $\text{Int}(\mathbf{C})$ -vel és a *külső pontok halmazát* (az

ellipszis külső tartományát $\text{Ext}(\mathbf{C})$ -vel jelöljük (24. ábra). Ha tekintjük az $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2$ kétváltozós függvényt, akkor:

$$\mathbf{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$$

$$\text{Int}(\mathbf{C}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) < 0\}$$

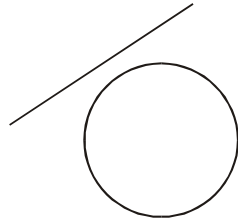
$$\text{Ext}(\mathbf{C}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) > 0\}$$



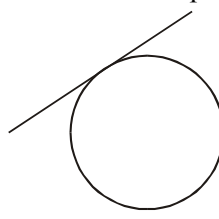
Egyenes és kör kölcsönös helyzetei

24. ábra

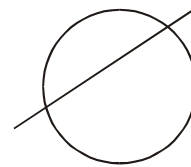
Egy egyenes és egy kör három különböző kölcsönös helyzetben lehet: nincs közös pontjuk (25. ábra), egy közös pontjuk van, azaz érinti (26. ábra) vagy két különböző közös pontjuk van, azaz metszi (27. ábra) (A metszéspontokat megkaphatjuk a kör egyenletéből és az egyenes egyenletéből álló rendszer megoldásából, ami tulajdonképpen egy másodfokú egyenlet megoldásához vezet vissza, tehát innen is következtethetünk a metszéspontok lehetséges számára.)



25. ábra



26. ábra



27. ábra

Adott pontban húzott érintő és normális egyenletei

Mielőtt a körhöz húzott érintő egyenletét felírnánk, tekintsünk egy $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ egyenletű görbét és határozzuk meg az (x_1, y_1) pontjában húzott érintő egyenletét. Az egyenletből y kifejezhető x függvényeként. Így, ha az egyenlet bal oldalát, mint x függvényét tekintjük és deriváljuk, kapjuk: $2Ax + 2Byy' + Cy + Cxy' + D + Ey' = 0$, ahonnan

$$y' = -\frac{2Ax + cy + D}{2By + Cx + E}, \text{ tehát az } (x_1, y_1) \text{ pontban húzott érintő irányítányezője}$$

$$m = -\frac{2Ax_1 + cy_1 + D}{2By_1 + Cx_1 + E}, \text{ tehát az érintő egyenlete: } \frac{y - y_1}{x - x_1} = -\frac{2Ax_1 + cy_1 + D}{2By_1 + Cx_1 + E} \Leftrightarrow$$

$$2Ax_1x + 2By_1y + C(x_1y + y_1x) + D(x - x_1) + E(y - y_1) - 2(Ax_1^2 + By_1^2 + Cx_1y_1) = 0 \quad (6)$$

Mivel (x_1, y_1) a görbe pontja, következik, hogy teljesíti az (1) összefüggést.

$$\text{Tehát } Ax_1^2 + By_1^2 + Cx_1y_1 = -Dx_1 - Ey_1 - F$$

Innen (6) $\Leftrightarrow 2Ax_1x + 2By_1y + C(x_1y + y_1x) + D(x + x_1) + E(y + y_1) + 2F = 0 \Leftrightarrow$

$$Ax_1x + By_1y + C \cdot \frac{x_1y + y_1x}{2} + D \cdot \frac{x + x_1}{2} + E \cdot \frac{y + y_1}{2} + F = 0 \quad (7)$$

Ez utóbbi összefüggést nevezzük az *érintő duplázott egyenletének*, mert a görbe egyenletéből az $x^2 \rightarrow x_1x$, $y^2 \rightarrow y_1y$, $xy \rightarrow \frac{x_1y + y_1x}{2}$, $x \rightarrow \frac{x_1 + x}{2}$ és $y \rightarrow \frac{y_1 + y}{2}$

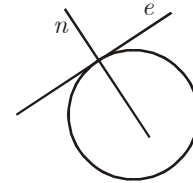
helyettesítésekkel kapjuk.

Így az (1) egyenletű körhöz az $(x_1, y_1) \in \mathbf{C}$ pontban húzott *érintő*

egyenlete: $+ y_1y = r^2$ (8)

Értelmezés. Egy görbe adott pontjában húzott érintőre merőleges egyenest a görbe ezen pontjához tartozó *normálisának* nevezzük. (28. ábra)

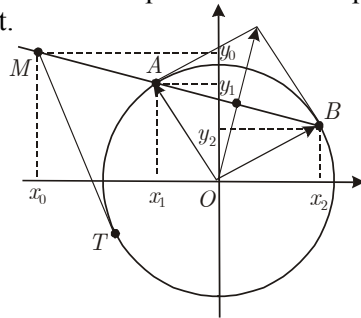
A (8) egyenletből azonnal írhatjuk, hogy az (1) egyenletű körhöz az $(x_1, y_1) \in \mathbf{C}$ pontban húzott *normális egyenlete* $y_1x - x_1y = 0$ (9)



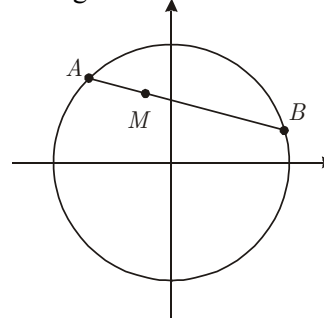
28. ábra

Pont körre vonatkozó hatványa

Feladat. Egy adott kört metszünk egy adott M ponton át húzott egyenessel. Számítsuk ki az M pont és a metszéspontok által meghatározott szakaszok hosszának szorzatát.



29. ábra



30. ábra

Megoldás. Vegyünk fel egy koordináta-rendszert úgy, hogy az origója a kör O középpontjába kerüljön. Jelöljük az M és az A valamint B metszéspontok koordinátáit a következőképpen: $M(x_0, y_0)$, $A(x_1, y_1)$ és $B(x_2, y_2)$.

Mivel az M , A és B pontok kollineárisak, írhatjuk, hogy

$$MA \cdot MB = |\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}| = \begin{cases} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}, & \text{ha } M \in \text{Ext}(\mathbf{C}) \\ -\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}, & \text{ha } M \in \text{Int}(\mathbf{C}) \\ 0, & \text{ha } M \in \mathbf{C} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) + (y_1 - y_0)(y_2 - y_0) = \\ &= x_1x_2 + y_1y_2 - x_1x_0 - x_2x_0 - y_1y_0 - y_2y_0 + x_0^2 + y_0^2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_1x_2 + y_1y_2 - x_1x_0 - x_2x_0 - y_1y_0 - y_2y_0 + x_0^2 + y_0^2 + x_1^2 + y_1^2 - x_1^2 - y_1^2 = \\
(x_1 - x_0)(x_1 + x_2) + (y_1 - y_0)(y_1 + y_2) + x_0^2 + y_0^2 - x_1^2 - y_1^2 = \\
\overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = x_0^2 + y_0^2 - r^2.
\end{aligned}$$

Ez utóbbi egyenlőségénél használtuk, hogy az $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ vektor átmegy az AB húr felezőpontján, tehát merőleges arra, M , A és B kollineárisak, így $\overrightarrow{MA} \perp (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \Rightarrow \overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = 0$ valamint mivel $A \in \mathbf{C} \Rightarrow x_1^2 + y_1^2 = r^2$. Tehát bebizonyítottuk, hogy $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = x_0^2 + y_0^2 - r^2$, ez pedig nem függ az egyenes megválasztásától, csak az M pont helyzetétől és a kör sugarától. Ha érintőt húzunk az M pontból a körhöz, akkor ez az érintő szakasz hosszának négyzete. Ezt az állandót az M pont $\mathbf{C}$ körre vonatkozó hatványának nevezzük.

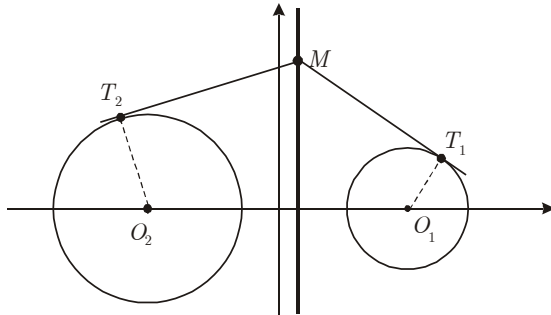
Tehát

$$\rho_M = \begin{cases} OM^2 - r^2, & \text{ha } M \in \text{Ext}(\mathbf{C}) \\ r^2 - OM^2, & \text{ha } M \in \text{Int}(\mathbf{C}) \\ 0, & \text{ha } M \in \mathbf{C} \end{cases}.$$

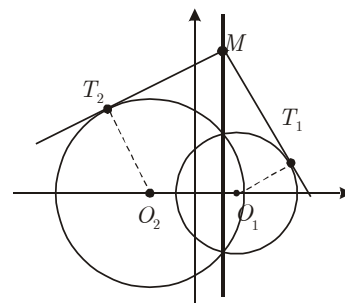
Feladat. Határozzuk meg azon pontok mértani helyét, amelyeknek két adott körre vonatkozó hatványa egyenlő. (Tekintsük csak azt az esetet, ha mindkét körre nézve külső pont, vagy mindkét körre nézve belső pontról van szó.)

Megoldás. Vegyünk fel egy koordinátarendszert úgy, hogy az Ox tengely a két kör középpontját összekötő egyenes legyen. Ekkor a körök középpontjainak koordinátái: $O_1(o_1, 0)$ és $O_2(o_2, 0)$. Azon $M(x, y)$ pontokat keressük, amelyekre $(x - o_1)^2 + y^2 - r_1^2 = (x - o_2)^2 + y^2 - r_2^2$, ahol r_1 és r_2 a körök sugarai. Az előbbi összefüggésből pedig kapjuk, hogy az M pont koordinátáira $2(o_1 - o_2)x + r_1^2 - r_2^2 - o_1^2 + o_2^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{o_1^2 - o_2^2 - r_1^2 + r_2^2}{2(o_1 - o_2)}$ (ha $o_1 \neq o_2$, azaz ha

nem koncentrikusak a körök.) Tehát a mértani hely egy Oy -nal párhuzamos egyenes, azaz egy olyan egyenes, amely merőleges az O_1O_2 egyenesre. Ezt az egyenest a két kör *hatványtengelyének* nevezzük.



31. ábra



32. ábra

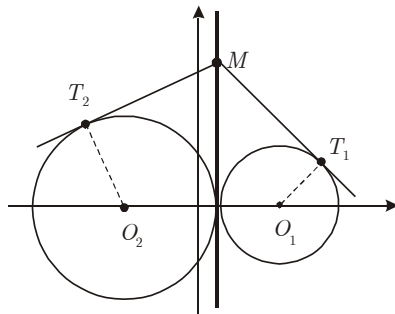
Megjegyzések. 1. Ha a körök nem metszik egymást, akkor a hatványtengely azon pontok mértani helye, amelyekből a két körhöz húzható érintő szakaszok hossza egyenlő.

2. Ha a körök két különböző pontban metszik egymást, akkor a hatványtengely a metszéspontok által meghatározott egyenes. (32. ábra)

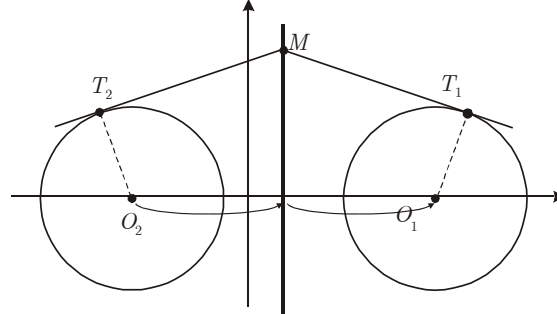
3. Ha a körök érintik egymást, akkor a hatványtengely a közös érintő. (33. ábra)

4. Ha a körök sugarai egyenlők, akkor a hatványtengely a középpontok által meghatározott szakasz felezőmerőlegese. (34. ábra)

5. Ha a körök koncentrikusak, akkor nincs hatványtengelyük.



33. ábra



34. ábra

Gyakorlatok és feladatok

1. A kör következő egyenleteiből határozd meg a kör középpontját és sugarát:

a) $x^2 + y^2 - 4x = 0$

b) $x^2 + y^2 + 6y - 7 = 0$

c) $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 1 = 0$

d) $3x^2 + 3y^2 - 4x - 6y - 15 = 0$

2. Írd fel az $M(-3, 2)$ középpontú és $d = 8$ átmérőjű kör egyenletét! Írd fel az $x_1 = 0$ abszcisszájú pontjaiban húzható érintőinek egyenletét!

3. Határozd meg az $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$ egyenletű kör középpontjának koordinátáit és sugarát! Írd fel a körhöz az $M(3, 7)$ pontból húzható érintők egyenletét!

4. Határozd meg az ABC_{Δ} köré írt kör egyenletét, ha a csúcsok koordinátái: $A(-2, -1)$, $B(0, -5)$ és $C(6, 3)$.

5. Határozd meg azon kör egyenletét, amelynek középpontja $M(6, 7)$ és érintője az $5x - 12y - 24 = 0$ egyenletű egyenes!

6. Írd fel az $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 5 = 0$ kör $x - 2y + 1 = 0$ egyenesre merőleges normálisának egyenletét.

7. Egy $M(3, -1)$ középpontú kör a $2x - 5y + 18 = 0$ egyenletű egyenesen egy 6 hosszúságú húrt határoz meg. Írd fel a kör egyenletét!

8. Egy O középpontú kör AB átmérőjének hossza $4a$ ($a > 0$). M a kör egy változó pontja.

a) Írd fel az AOM és BOM háromszögek köré írt P illetve Q középpontú körök egyenletét;

b) Bizonyítsd be, hogy a P és Q pontok AB egyenesétől mért távolságainak szorzata állandó és $AP \perp BQ$.

c) Határozd meg az AP és BQ egyenesek metszéspontjának mértani helyét!

9. Határozd meg a $d_1 : x \cos \alpha + y = 1$ és $d_2 : x - y \cos \alpha = 1$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) egyenesek metszéspontjának mértani helyét.

3.3.2. Az ellipszis

Határozzuk meg azon pontok mértani helyét, amelyeknek két adott ponttól mért távolságainak összege állandó és nagyobb, mint ez a távolság.

Mielőtt számolni kezdenénk, próbáljuk elképzelni ezt a mértani helyet. Rögzítsük le ezt az összeget és vágjunk egy ilyen hosszúságú madzagot. Ha lerögzítjük a két végét az adott pontokba és kifeszítjük a madzagot, akkor a „kifeszítési” pont távolságainak összege az adott pontoktól egyenlő a madzag hosszával, azaz ez egy pontja a mértani helynek. Így ha egy ceruzával feszítjük ki és minden ilyen ponton végighúzzuk, akkor kirajzolódik a mértani hely. (35. és 36. ábrák)

Az így kapott alakzatot nevezzük *ellipszisnek*.

Értelmezés. Azon pontok mértani helyét, amelyeknek két adott ponttól mért távolságainak összege állandó és nagyobb, mint a pontok közti távolság *ellipszisnek* nevezzük. Az adott pontokat pedig az ellipszis *fókuszainak* vagy *gyűjtőpontjainak*. A fókuszok által meghatározott egyenest *fokális tengelynek*, a fókuszok és az ellipszis egy tetszőleges pontja által meghatározott szakaszokat pedig *vezérsugaraknak* nevezzük.

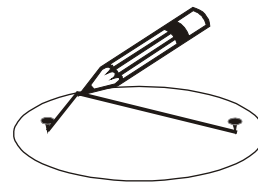
Megjegyzés. Ha a fókuszok egybeesnek, akkor tulajdonképpen egy pont körül forgatjuk a ceruzát és ekkor a mértani hely egy kör lesz, tehát a kör egy sajátos ellipszis.

Határozzuk meg az ellipszis egyenletét.

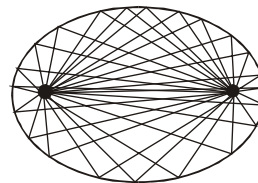
Az ellipszis egyenletei

Az ellipszis kanonikus egyenlete

Először egy olyan ellipszis egyenletét határozzuk meg, amelynek fókuszai az Ox tengelyen helyezkednek el szimmetrikusan az origóra. Tehát legyenek $F_1(c, 0)$ és $F_2(-c, 0)$ a fókuszok és $2a$ az állandó összeg (37. ábra). Ekkor egy $M(x, y)$ pont pontosan akkor van rajta az ellipszisen, ha

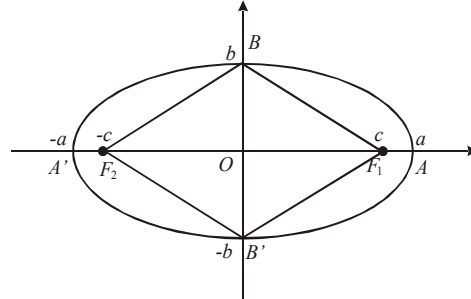


35. ábra



36. ábra

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a \Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\
 & \Leftrightarrow (x-c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x+c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad (\text{amennyiben}) \\
 & (x+c)^2 + y^2 < 4a^2 \quad (1) \Leftrightarrow \\
 & a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + xc \Leftrightarrow \\
 & a^2((x+c)^2 + y^2) = (a^2 + xc)^2 \\
 & (\text{amennyiben } a^2 + xc \geq 0 \quad (2)) \Leftrightarrow \\
 & (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \Leftrightarrow \\
 & \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1 \quad (3).
 \end{aligned}$$



37. ábra

Könnyen ellenőrizhető, hogy ha x és y teljesítik az előbbi feltételt, akkor fennállnak az (1) és (2) egyenlőtlenségek is, tehát a (3) összefüggés az ellipszis egyenlete. Azonnal látható, hogy az ellipszis Oy tengelyen levő B és B' pontjai egyenlő távolságra vannak a fókuszoktól és ez a távolság a . Így ha b a B pont ordinátája, akkor az OBF_1 -ből $b^2 = a^2 - c^2$, innen az ellipszis egyenlete a

következővé alakul: $E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (4)$

Ez az *ellipszis implicit vagy kanonikus egyenlete*.

Sőt az is belátható, hogy ha $(x, y) \in E$, akkor $(-x, y), (x, -y), (-x, -y) \in E$, tehát az ellipszis szimmetrikus a tengelyekre és az origóra nézve. Az Ox tengelyen fekvő A és A' pontjaira $2a = AF_1 + AF_2 = A'F_2 + AF_2 = AA'$, tehát az A illetve A' abszcisszája a illetve $-a$. Azt mondjuk, hogy AA' az ellipszis *nagytengelye* és BB' az ellipszis *kistengelye*. Így a a fél nagytenyely hossza, míg b a fél kistengely hossza. O az ellipszis középpontja és a fókuszok középponttól mért c távolságát nevezzük az ellipszis *lineáris excentricitásának*, a lineáris excentricitás és a fél nagytenyely hányadosát pedig *numerikus excentricitásnak* nevezzük és e -vel jelöljük, tehát

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}.$$

Az ellipszis fókuszán átmenő és a nagytenyelyre merőleges húr félhosszúságát az ellipszis *paraméterének* szokás nevezni. A p paramétert az ellipszis

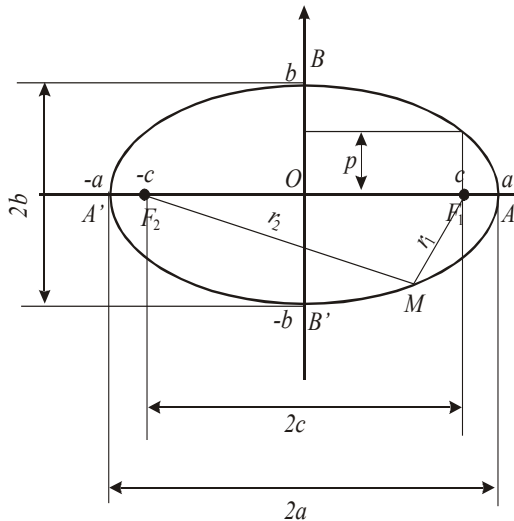
(3) egyenletéből $x = \pm c$ helyettesítéssel kapjuk: $p = \frac{b^2}{a}$.

Az ellipszis csúcsegyenlete

Ha az ellipszist párhuzamosan eltoljuk az $(a, 0)$ vektorral, akkor az egyenlete a követ-

kezővé alakul: $\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow y^2 = \frac{2b^2x}{a} - \frac{b^2x^2}{a^2} \Leftrightarrow E : y^2 = 2px - x^2 \quad (5).$

Ezt nevezzük az *ellipszis csúcsegyenletének*.



38. ábra: Az ellipszis adatai

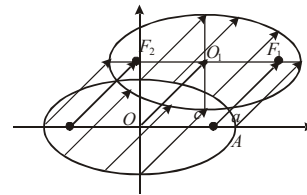
F_1, F_2 – fókuszok
 O – szimmetria-középpont
 F_1F_2 – fokális tengely
 $F_1F_2 = 2c$ – fókusz távolság
 c – lineáris excentricitás
 $AA' = 2a$ – nagytengely
 a – fél nagytengely
 $BB' = 2b$ – kistengely
 b – fél kistengely
 r_1, r_2 – vezérsugarak
 $(r_1 + r_2 = 2a)$
 p – paraméter

Az $O_1(x_0, y_0)$ középpontú koordináta-

tengelyekkel párhuzamos tengelyű ellipszis kanonikus egyenlete

Ha az ellipszist párhuzamosan eltoljuk az (x_0, y_0) vektorral (39. ábra), akkor az ellipszis egyenlete

$$E: \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \quad (6) \text{ alakú lesz}$$



39. ábra

Az origó középpontú α szöggel elforgatott ellipszis egyenlete

Nézzük csak meg, mit jelent koordináták szempontjából, ha elforgatunk valamit α szöggel. A legegyszerűbb, ha felírjuk a pontok affixumait. Ekkor a X. osztályból tudjuk, hogy az $x + iy$ affixumú pont α szöggel való pozitív trigonometrikus irányba történő origó körüli forgatás esetén az $(x + iy)(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ affixumú pontba

kerül. Tehát az (x, y) pont forgatás utáni koordinátái $(x \cos \alpha - y \sin \alpha, x \sin \alpha + y \cos \alpha)$. Tehát ha az

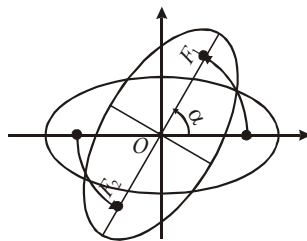
ellipszisünket „visszaforgatjuk” az eredetibe, akkor az (x, y) pontja az

$$(x \cos(-\alpha) - y \sin(-\alpha), x \sin(-\alpha) + y \cos(-\alpha)) =$$

$(x \cos \alpha + y \sin \alpha, -x \sin \alpha + y \cos \alpha)$ pontba kerül és erre felírva a kanonikus

egyenletet, kapjuk:

(7),

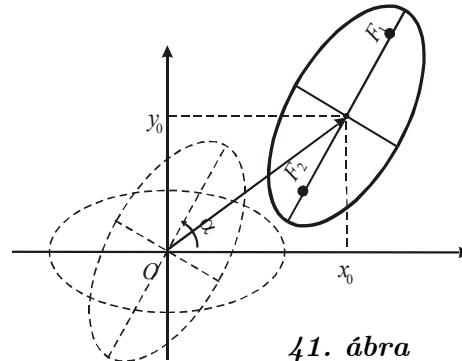


40. ábra

ez utóbbi pedig az *origó körül* α szöggel
elforgatott ellipszis egyenlete

Általános helyzetű ellipszis egyenlete

Belátható, hogy egy tetszőleges ellipszist megkaphatunk egy origó középpontú koordinátatengelyeken fekvő kis- és nagytengelyű ellipsziszből egy forgatással és egy párhuzamos eltolással (lásd a 41. ábrát). Legyen a forgatás szöge α és az eltolásvektor az (x_0, y_0) . Ekkor az ellipszis



41. ábra

egyenlete:

$$\frac{\left((x-x_0)\cos\alpha + (y-y_0)\sin\alpha\right)^2}{a^2} + \frac{\left(-(x-x_0)\sin\alpha + (y-y_0)\cos\alpha\right)^2}{b^2} = 1 \quad (8)$$

Az ellipszis paraméteres egyenletei

Ha megfigyeljük a (4) egyenletet, kijelenthetjük, hogy $\exists! \varphi \in [0, 2\pi)$ úgy, hogy

$$\frac{x}{a} = \cos\varphi \text{ és } \frac{y}{b} = \sin\varphi, \text{ innen}$$

$$\varphi \in [0, 2\pi) \quad (9)$$

az ellipszis paraméteres egyenletei

Ekkor az $O_1(x_0, y_0)$ középpontú koordinátatengelyekkel párhuzamos tengelyű ellipszis paraméteres egyenletei:

$$\begin{cases} x = x_0 + a \cos\varphi \\ y = y_0 + b \sin\varphi \end{cases}, \varphi \in [0, 2\pi) \quad (10)$$

Az origó középpontú α szöggel elforgatott ellipszis paraméteres egyenletei:

$$\begin{cases} x \cos\alpha + y \sin\alpha = a \cos\varphi \\ -x \sin\alpha + y \cos\alpha = a \sin\varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \cos\alpha \cos\varphi - b \sin\alpha \sin\varphi \\ y = a \sin\alpha \cos\varphi + b \cos\alpha \sin\varphi \end{cases} \quad (11)$$

Általános helyzetű (α szöggel elforgatott és (x_0, y_0) vektorral párhuzamosan eltolt) ellipszis paraméteres egyenletei:

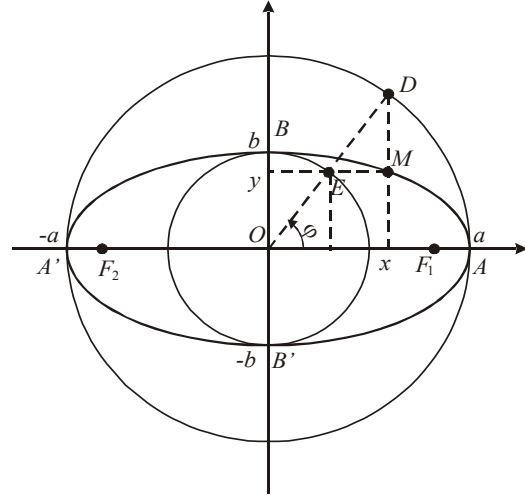
$$\begin{cases} x \\ y \end{cases} = \begin{cases} x_0 + a \cos\alpha \cos\varphi - b \sin\alpha \sin\varphi \\ y_0 + a \sin\alpha \cos\varphi + b \cos\alpha \sin\varphi \end{cases} \quad (12)$$

Felvetődik a kérdés, hogy az $M(x, y) \in E$ pont ismeretében megszerkeszthető-e a φ szög?

Tekintsük a (4) egyenletű ellipszist. Ekkor egy olyan φ szöget keresünk, amelyre $\frac{x}{a} = \cos \varphi$ és $\frac{y}{b} = \sin \varphi$.

Egyelőre az első negyedben vizsgálódunk. Ehhez kellene egy x befogójú és a átfogójú illetve egy y befogójú és b átfogójú háromszög. Szerkesszük meg az origó középpontú és kis illetve nagy féltengely sugarú köröket (ld. a 42. ábrát). Vetítsük az M pontot a tengelyekre (M_x és M_y a vetületek talppontjai). Legyenek D illetve E az Ox -re húzott merőleges és a nagy kör valamint az Oy -ra húzott merőleges és a kis kör metszéspontjai.

Belátható, hogy ekkor az M_xOD és M_yOE derékszögű háromszögekből $\cos(M_xOD) = \frac{x}{a}$ és $\cos(M_yOE) = \frac{y}{b}$. Mivel mindkét szög az első negyedben van és $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, következik, hogy $m(M_yOE) = m(M_xOD) = \varphi$. Tehát megszerkesztettük a φ szöget. Hasonlóan járunk el a többi negyedben is.



42. ábra

Az ellipszis belső illetve külső tartománya

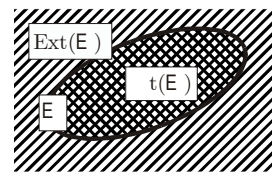
Az ellipszis a síkot két diszjunkt tartományra bontja fel. A *belső pontok halmazát* (az ellipszis belsejét vagy belső tartományát) $\text{Int}(\mathbf{E})$ -vel és a *külső pontok halmazát* (az ellipszis külső tartományát) $\text{Ext}(\mathbf{E})$ -vel jelöljük (43. ábra). Tekintsük az

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$ kétváltozós függvényt. Ekkor felírhatjuk, hogy:

$$\mathbf{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$$

$$\text{Int}(\mathbf{E}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) < 0\}$$

$$\text{Ext}(\mathbf{E}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) > 0\}$$

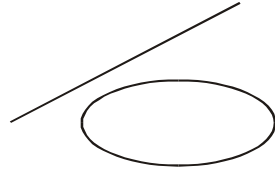


43. ábra

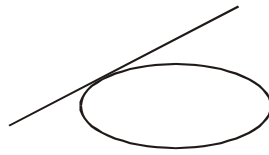
Egyenes és ellipszis kölcsönös helyzetei

Egy egyenes és egy ellipszis három különböző kölcsönös helyzetben lehet: nincs közös pontjuk (44. ábra), egy közös pontjuk van, azaz érinti (45. ábra) vagy két különböző közös pontjuk van, azaz metszi (46. ábra) (A metszéspontokat megkaphatjuk az ellipszis egyenletéből és az egyenes egyenletéből álló rendszer

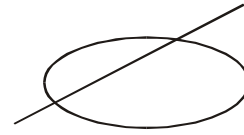
megoldásából, ami tulajdonképpen egy másodfokú egyenlet megoldásához vezet vissza, tehát innen is következtethetünk a metszéspontok lehetséges számára.)



44. ábra



45. ábra



46. ábra

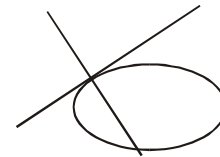
Adott pontban húzott érintő és normális egyenlete

Duplázással azonnal írhatjuk, hogy a (4) egyenletű ellipszishez

az (x_1, y_1) pontban húzott érintő egyenlete: ——— (14)

(47. ábra). A (13) egyenlet alapján a normális egyenlete:

$$\frac{x_1 y}{a^2} - \frac{y_1 x}{b^2} = x_1 y_1 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \quad (15.)$$



47. ábra

Gyakorlatok és feladatok

1. Írd fel az ellipszis egyenletét az alábbi esetekben, majd ábrázold is:

a) a fókuszok $F_1(-1, 0)$ és $F_2(1, 0)$, a nagy féltengely $a = 5$;

b) az egyik fókusz $F_1(1, 2)$, a középpont $C(1, 4)$ és a nagy féltengely $a = 10$;

c) középpontja az origó, tengelyei a koordinátatengelyek és átmegy az

$A\left(4, \frac{9}{5}\right)$ és $A\left(-3, \frac{12}{5}\right)$ pontokon;

d) nagy tengelye 26, fókuszai $F_1(14, 0)$ és $F_2(-10, 0)$.

2. Írd fel a $16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0$ ellipszis kanonikus egyenletét.

3. Határozd meg a $4x^2 + 9y^2 = 676$ egyenletű ellipszis $x_1 = 5$ abszcisszájú pontjához húzott érintő egyenletét.

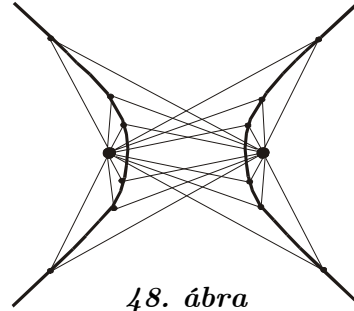
4. Bizonyítsd be, hogy ha M egy O középpontú, F_1 és F_2 fókuszú ellipszis tetszőleges pontja, akkor $MF_1 \cdot MF_2 + MO^2 = a^2 + b^2$, ahol a illetve b a nagy illetve kis féltengely hossza.

5. Bizonyítsd be, hogy az összes olyan háromszög közül, amelyeknek az egyik oldala rögzített és a területük állandó, az egyenlőszárú háromszög területe a legnagyobb.

6. Bizonyítsd be, hogy az ellipszishez adott pontban húzott érintő és normális a vezérsugarak által meghatározott szög külső illetve belső szögfelezői. (Ezt az ellipszis optikai tulajdonságának is szokták nevezni, mert ennek következtében az ellipszis egyik fókuszában elhelyezett fényforrásból kiinduló tetszőleges fénysugár az ellipsziszről (elliptikus tükörről) történő visszaverődés után a másik fókuszon fog átmenni)

3.3.3. A hiperbola

Értelmezés. Azon pontok mértani helyét, amelyeknek két adott ponttól mért távolságai különbségének modulusa állandó és kisebb mint a két pont távolsága, *hiperbolának* nevezzük. Az adott pontokat pedig a hiperbola *fókuszeit* vagy *gyűjtőpontjainak*. A fókuszok és a hiperbola egy tetszőleges pontja által meghatározott szakaszokat pedig *vezérsugaraknak* nevezzük. A fókuszok által meghatározott egyenest *fókális tengelynek* is nevezzük



48. ábra

A hiperbola egyenletei

A hiperbola kanonikus egyenlete

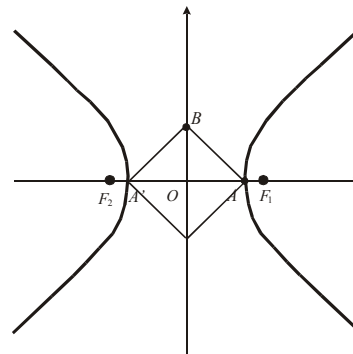
Először egy olyan hiperbola egyenletét határozzuk meg, amelynek fókuszai az Ox tengelyen helyezkednek el szimmetrikusan az origóra. Ha $F_1(c, 0)$ és $F_2(-c, 0)$ a fókuszok és $2a$ az állandó különbség (49. ábra), akkor egy $M(x, y)$ pont koordinátái pontosan akkor teljesítik a következő egyenlőségeket, ha M a hiperbolán van:

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \right| &= 2a \Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\ \Leftrightarrow (x-c)^2 + y^2 &= 4a^2 + (x+c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \Leftrightarrow \\ \pm a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= a^2 + xc \Leftrightarrow a^2((x+c)^2 + y^2) = (a^2 + xc)^2 \Leftrightarrow \\ (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 &= a^2(c^2 - a^2) \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1. \end{aligned}$$

Azonnal látható, hogy a hiperbola Ox tengellyel való metszéspontjai $A(a, 0)$ és $A'(-a, 0)$, ezeket a pontokat nevezzük a *hiperbola csúcsainak*. Az AA' egyenest a *hiperbola valós tengelyének* nevezzük, $AA' = 2a$ a *valós tengely hossza*. Ha megszerkesztjük az AA' átlójú c oldalhosszúságú rombuszt, akkor a rombusz másik átlójának tartóegyesét nevezzük a *hiperbola képzetes tengelyének*. Ennek hossza $2b$ a *képzetes tengely hossza*. Az is azonnal belátható, hogy $b^2 = c^2 - a^2$, innen a hiperbola egyenlete a következővé alakul:

$$H : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

Ez a *hiperbola implicit vagy kanonikus egyenlete*.



49. ábra

Belátható, hogy ha $(x, y) \in E$, akkor $(x, -y)$, $(-x, y)$, $(-x, -y) \in E$, tehát a hiperbola szimmetrikus a tengelyekre és az origóra nézve. O a hiperbola középpontja. A fókuszok középponttól mért c távolságát nevezzük a hiperbola *lineáris excentricitásának*, a lineáris excentricitás és a fél valós tengely hányadosát pedig *numerikus excentricitásnak* nevezzük és e -vel jelöljük, tehát $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$. A

hiperbola fókuszán átmenő és a valóstengelyre merőleges húr félhosszúságát a hiperbola *paraméterének* szokás nevezni. A p paramétert a hiperbola (1) egyenletéből $x = \pm c$ helyettesítéssel kapjuk: $p = b^2 / a$.

A hiperbola explicit egyenlete

Az (1) egyenletből y -t kifejezve kapjuk, hogy $y = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}x^2 - 1}$ (2₁) az Ox tengely fölött és $y = -\sqrt{\frac{b^2}{a^2}x^2 - 1}$ (2₂) az Ox tengely alatt. A hiperbola (2) egyenleteit az

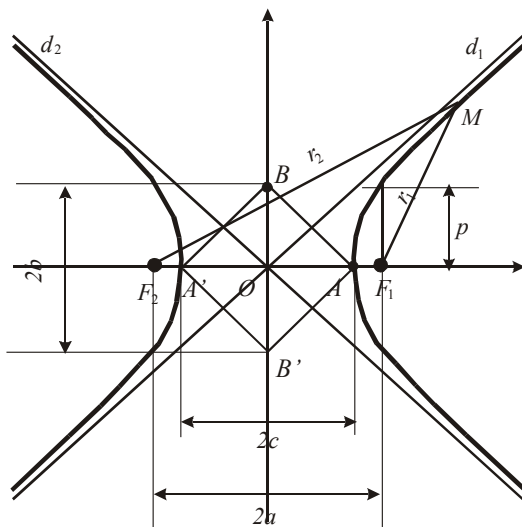
explicit egyenleteinek nevezzük. Észrevehető, hogy $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{b^2}{a^2}x^2 - 1} - \frac{b}{a}x \right) = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{\frac{b^2}{a^2}x^2 - 1} + \frac{b}{a}x \right) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{b^2}{a^2}x^2 - 1} + \frac{b}{a}x \right) = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{\frac{b^2}{a^2}x^2 - 1} - \frac{b}{a}x \right) = 0,$$

tehát az $y = \pm \frac{b}{a}x$ egyenletű egyenesek aszimptotikusan közelednek a hiperbolához,

azaz a hiperbola *aszimptotái*. Az aszimptotákat jellemezhetjük az

$$d_1, d_2 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad (3) \text{ közös egyenlettel.}$$



50. ábra: A hiperbola adatai

F_1, F_2 – fókuszok

O – szimmetria-középpont

$F_1F_2 = 2c$ – fókusz távolság

c – lineáris excentricitás

$AA' = 2a$ – valóstengely

a – fél valóstengely

$BB' = 2b$ – képzetes tengely

b – fél képzetes tengely

r_1, r_2 – vezérsugarak

$$(|r_1 - r_2| = 2a)$$

p – paraméter

d_1, d_2 – aszimptoták

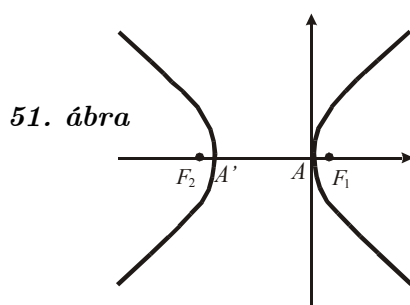
A hiperbola csúcsegyenlete

Ha a hiperbolát az 51. ábra szerint helyezzük el, azaz párhuzamosan eltoljuk a $(-a, 0)$

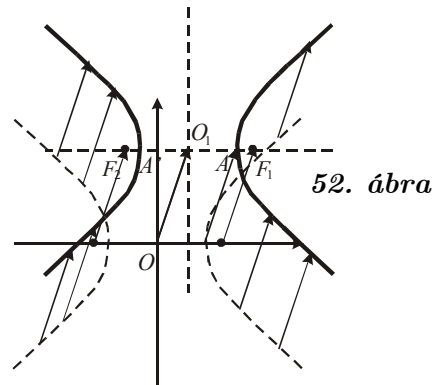
vektorral, akkor az egyenlete a következővé alakul: $\frac{(x+a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow$

$$y^2 = \frac{2b^2x}{a} + \frac{b^2x^2}{a^2} \Leftrightarrow H : y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2 \quad (4).$$

Ezt nevezzük a *hiperbola csúcsegyenletének*.



51. ábra



52. ábra

Az $O_1(x_0, y_0)$ középpontú koordinátatengelyekkel párhuzamos tengelyű hiperbola kanonikus egyenlete

Ha a hiperbolát párhuzamosan eltoljuk az (x_0, y_0) vektorral (52. ábra), akkor az így kapott hiperbola egyenlete

$$H : \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \quad (5)$$

alakú lesz

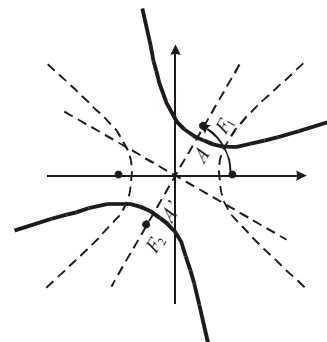
Az origó középpontú α szöggel elforgatott hiperbola egyenlete

$$\frac{((x-x_0)\cos\alpha + (y-y_0)\sin\alpha)^2}{a^2} - \frac{(-(x-x_0)\sin\alpha + (y-y_0)\cos\alpha)^2}{b^2} = 1 \quad (6),$$

Általános helyzetű hiperbola egyenlete

Akárcsak az ellipszis esetében egy tetszőleges hiperbolát megkaphatunk egy origó középpontú koordinátatengelyeken fekvő valós és képzetes tengelyű hiperbolából egy forgatással és egy párhuzamos eltolással (lásd az 53. ábrát). Legyen a forgatás szöge α és az eltolásvektor az (x_0, y_0) . Ekkor a hiperbola egyenlete:

$$\frac{((x-x_0)\cos\alpha + (y-y_0)\sin\alpha)^2}{a^2} - \frac{(-(x-x_0)\sin\alpha + (y-y_0)\cos\alpha)^2}{b^2} = 1 \quad (7)$$



53. ábra

Az hiperbola paraméteres egyenletei

Ha bevezetjük a *koszinusz hiperbolikus* ($\text{ch} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\text{ch } t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$) és *szinusz hiperbolikus* ($\text{sh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\text{sh } t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$) függvényeket, akkor $\text{ch}^2 t - \text{sh}^2 t = 1$,

innen az $x > 0$ ágon a hiperbola parametrikus egyenletei: $\begin{cases} x = a \text{ch } t \\ y = b \text{sh } t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ (8) és

az $x < 0$ ágon $\begin{cases} x = -a \text{ch } t \\ y = b \text{sh } t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ (9)

Az $O_1(x_0, y_0)$ középpontú koordinátatengelyekkel párhuzamos tengelyű hiperbola

paraméteres egyenletei: $\begin{cases} x = x_0 + a \text{ch } t \\ y = y_0 + b \text{sh } t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ (10)

Az origó középpontú α szöggel elforgatott hiperbola paraméteres egyenletei:

$$\begin{cases} x \cos \alpha + y \sin \alpha = \pm a \text{ch } t \\ -x \sin \alpha + y \cos \alpha = a \text{sh } t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm a \cos \alpha \text{ch } t - b \sin \alpha \text{sh } t \\ y = \pm a \sin \alpha \text{ch } t + b \cos \alpha \text{sh } t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad (11)$$

Általános helyzetű (α szöggel elforgatott és (x_0, y_0) vektorral párhuzamosan eltolt) hiperbola paraméteres egyenletei:

$$\begin{cases} x = x_0 \pm a \cos \alpha \text{ch } t - b \sin \alpha \text{sh } t \\ y = y_0 \pm a \sin \alpha \text{ch } t + b \cos \alpha \text{sh } t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad (12)$$

Megjegyzés. Természetesen nem kell feltétlenül az előző paraméterezéshez ragaszkodni, például az $\cos^2 \varphi = \frac{1}{1 + \text{tg}^2 \varphi} \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}$ azonosságból kiindulva írhatjuk,

hogy a hiperbola másik paraméteres egyenletei: $x = \frac{a}{\cos \varphi}$ és $y = b \text{tg } \varphi$,
 $\varphi \in [0, 2\pi) \setminus \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}$.

A hiperbola belső illetve külső tartománya

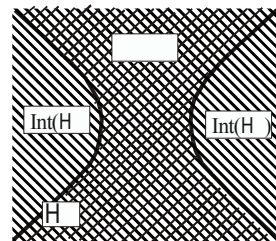
Ha tekintjük az $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1$

kétváltozós függvényt. Ekkor felírhatjuk, hogy:

$$H = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0 \right\}$$

$$\text{Int}(H) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) < 0 \right\}$$

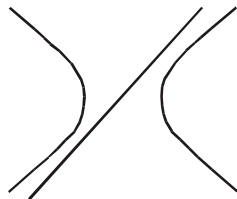
$$\text{Ext}(H) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) > 0 \right\}$$



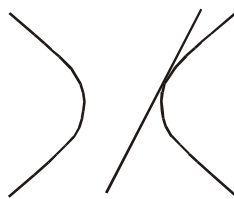
54. ábra

Egyenes és hiperbola kölcsönös helyzetei

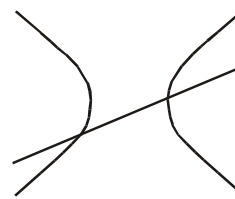
A metszéspontokat megkaphatjuk a hiperbola egyenletéből és az egyenes egyenletéből álló rendszer megoldásából, ami tulajdonképpen egy másodfokú egyenlet megoldásához vezet vissza, tehát egy egyenes és egy hiperbola három különböző kölcsönös helyzetben lehet: nincs közös pontjuk (55. ábra), egy közös pontjuk van, azaz érinti (56. ábra) vagy két különböző közös pontjuk van, azaz metszi (57. ábra)



55. ábra



56. ábra



57. ábra

Adott pontban húzott érintő és normális egyenlete

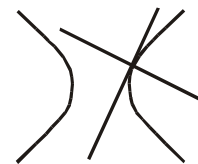
Duplázással azonnal írhatjuk, hogy az (1) egyenletű hiperbolához

az (x_1, y_1) pontban húzott érintő egyenlete: $\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$ (13)

A (13) egyenlet alapján írhatjuk, hogy a normális

egyenlete: $\frac{x_1 y}{a^2} + \frac{y_1 x}{b^2} = x_1 y_1 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)$ (14.)

58. ábra



Gyakorlatok és feladatok

1. Számítsd ki a $9x^2 - 16y^2 = 144$ egyenletű hiperbola féltengelyeit és fókuszait majd írd fel az aszimptoták egyenletét.
2. Írd fel a $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$ egyenletű hiperbola kanonikus egyenletét és határozd meg a középpont koordinátáit.
3. Határozd meg annak a hiperbolának az egyenletét, amelynek tengelyei egybeesnek a koordinátatengelyekkel, valós tengelye 6 egység és átmegy a $P(9, 4)$ ponton.
4. Határozd meg az $F_1(2, 2)$ és $F_2(-2, -2)$ fókuszú hiperbola egyenletét, ha a képzetes tengely hossza 4 egység és írd fel az aszimptotáinak és az $x_1 = 3$ abszcisszájú pontjaihoz húzott érintőinek egyenletét.
5. Határozd meg az $F_1(4, 0)$ és $F_2(-4, 0)$ fókuszú hiperbola egyenletét, ha a valós tengely hossza 6 egység és írd fel az aszimptotáinak és az $x_1 = -5$ abszcisszájú pontjaihoz húzott érintőinek egyenletét.
6. Írd fel az $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{9} = 1$ egyenletű hiperbola aszimptotáinak és az $x_1 = -4$ abszcisszájú pontjaihoz húzott érintőinek egyenletét.
7. Bizonyítsd be, hogy ha M egy O középpontú, F_1 és F_2 fókuszú ellipszis tetszőleges pontja, akkor $MO^2 - MF_1 \cdot MF_2 = a^2 - b^2$, ahol a illetve b a tengelyek hossza.

8. Számítsd ki annak a háromszögnek a területét, amelyet az $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ egyenletű hiperbola két aszimptotája a $9x + 2y - 24 = 0$ egyenletű egyenessel bezár.

9. Az xOy koordinátarendszer Ox tengelyén vegyünk fel két M és N pontot úgy, hogy abszcisszáik szorzata a^2 legyen. Az M és N pontokon át meghúzzuk a $\frac{b}{a}$ illetve $-\frac{b}{a}$ irányítányezőjű egyeneseket, amelyek P -ben metszik egymást. ($a, b \in \mathbb{R}_+^*$ adottak) Határozd meg a P pont mértani helyét.

10. Egy hiperbola síkjában lévő P ponton át párhuzamosokat húzunk a hiperbola aszimptotáihoz, amelyek a hiperbolát M és N -ben metszik.

a) Határozd meg azon P pontok mértani helyét, amelyekre MN átmegy a hiperbola középpontján.

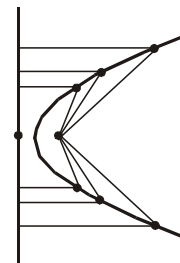
b) Határozd meg azon P pontok mértani helyét, amelyekre az MN egyenes párhuzamos a hiperbola valamelyik tengelyével.

11. Bizonyítsd be, hogy a hiperbolához adott pontban húzott érintő és normális az illető ponthoz tartozó vezérsugarak által meghatározott szög külső illetve belső szögfelezői. (A hiperbola *optikai tulajdonsága*)

3.3.4. A parabola

A parabolát már IX. osztályból ismeritek, mint a másodfokú függvény grafikus képét. A továbbiakban más szempontból közelítjük meg, mint egy adott v egyenestől és egy rajta kívül fekvő rögzített F ponttól egyenlő távolságra levő pontok mértani helyét.

Az F pontot a parabola *fókusznak* vagy *gyűjtőpontjának*, a v egyenest a *parabola vezérvonalának* (*direktrixének*) vagy *vezéregyenesének*, a fókuszról a vezéregyenesre bocsátott merőleges egyenest a *parabola tengelyének* nevezzük. A fókuszhoz a vezéregyenesről mért p távolsága a parabola *paramétere*.

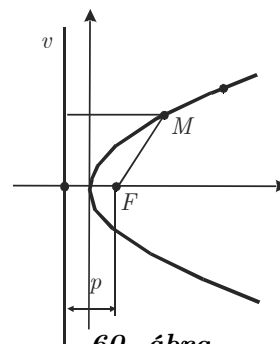


59. ábra

A parabola egyenletei

A parabola kanonikus egyenlete

Először egy olyan koordinátarendszerben határozzuk meg a parabola egyenletét, amelyben az Ox tengely a parabola tengelye, az origó pedig a fókuszról a vezéregyenesre bocsátott merőleges szakasz felezőmerőlegese. Tehát a fókusz $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ és a vezéregyenes egyenlete: $v: x = -\frac{p}{2}$ (60. ábra). Egy $M(x, y)$ pont pontosan akkor van rajta a parabolán, ha



60. ábra

$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|$ vagyis ha $x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$. Innen a parabola egyenlete: $P : y^2 = 2px$ (1).

Ez a parabola *implicit* vagy *kanonikus egyenlete*. Belátható, hogy ha $(x, y) \in P$, akkor $(x, -y) \in P$, tehát az parabola szimmetrikus az Ox tengelyre nézve, azaz a tengelyére nézve. Az origót (jelen esetben) a parabola *csúcspontjának* nevezzük. Az Oy tengelyt a parabola *csúcsérintőjének* nevezzük.

A parabola explicit egyenlete

Az (1) egyenletből y -t kifejezve, kapjuk: $y = \sqrt{2px}$ (2₁) az Ox tengely fölött és $y = -\sqrt{2px}$ (2₂) az Ox tengely alatt. A parabola (2) egyenleteit az *explicit egyenleteinek* nevezzük.

Az $O_1(x_0, y_0)$ középpontú koordinátatengelyekkel párhuzamos tengelyű parabola kanonikus egyenlete

Ha a parabolát párhuzamosan eltoljuk az (x_0, y_0) vektorral, akkor a parabola egyenlete $P : (y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$ (3) alakú lesz.

Az origó középpontú α szöggel elforgatott parabola egyenlete

$$(-x \sin \alpha + y \cos \alpha)^2 = 2p(x \cos \alpha + y \sin \alpha) \quad (4)$$

Ha 90° -kal forgatjuk el a parabolát, akkor az $x^2 = 2py$ egyenletű parabolához jutunk, ez utóbbi egyenlet egyenértékű az $y = \frac{x^2}{2p}$ egyenlettel, amiről már IX. osztályból tudjuk, hogy egy parabola egyenlete.

Általános helyzetű parabola egyenlete

Akárcsak az ellipszis és hiperbola esetében egy tetszőleges parabolát megkaphatunk egy origó csúcspontú Oy csúcsérintőjű parabolából egy forgatással és egy párhuzamos eltolással. Legyen a forgatás szöge α és az eltolás-vektor az (x_0, y_0) . Ekkor a parabola egyenlete:

$$P : \left(-(x - x_0) \sin \alpha + (y - y_0) \cos \alpha \right)^2 = 2p \left((x - x_0) \cos \alpha + (y - y_0) \sin \alpha \right) \quad (5)$$

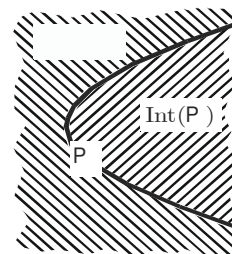
A parabola belső illetve külső tartománya

Ha tekintjük az $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = y^2 - 2px$ kétváltozós függvényt. Ekkor felírhatjuk, hogy:

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$$

$$\text{Int}(P) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) < 0\}$$

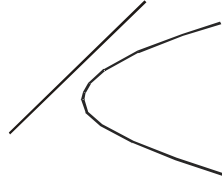
$$\text{Ext}(P) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) > 0\}$$



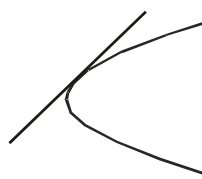
61. ábra

Egyenes és parabola kölcsönös helyzetei

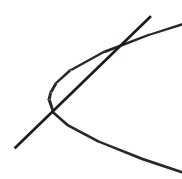
A metszéspontokat megkaphatjuk a parabola egyenletéből és az egyenes egyenletéből álló rendszer megoldásából, ami tulajdonképpen egy másodfokú egyenlet megoldásához vezet vissza, tehát egy egyenes és egy parabola három különböző kölcsönös helyzetben lehet: nincs közös pontjuk (62. ábra), egy közös pontjuk van, azaz érinti (63. ábra) vagy két különböző közös pontjuk van, azaz metszi (64. ábra)



62. ábra



63. ábra



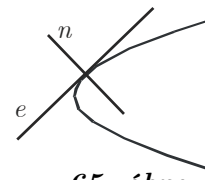
64. ábra

Adott pontban húzott érintő és normális egyenlete

Duplázással azonnal írhatjuk, hogy az (1) egyenletű hiperbolához az (x_1, y_1) pontban húzott érintő egyenlete: (6)

A (6) egyenlet alapján írhatjuk, hogy a normális egyenlete:

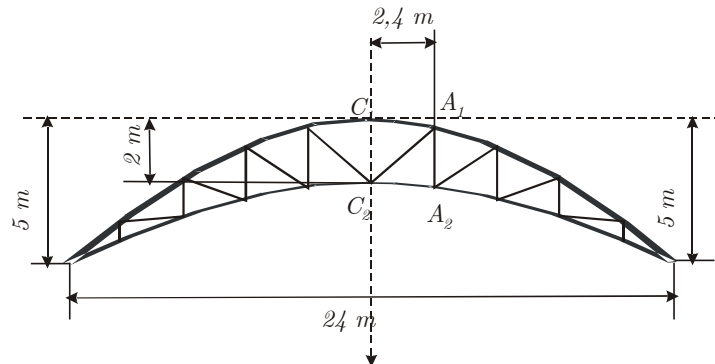
 (7).



65. ábra

Feladatok

1. Írd fel annak a parabolának az egyenletét, amelynek csúcspontja az origóban van,
 - a) szimmetrikus az Ox tengelyre nézve és átmegy az $A(-1, 3)$ ponton
 - b) szimmetrikus az Oy tengelyre nézve és átmegy az $B(4, -8)$ ponton
2. Határozd meg az $y^2 - 10x^2 - 2y - 19 = 0$ egyenletű parabola csúcspontjának koordinátáit, a paraméter nagyságát és tengelyének irányát.
3. Határozd meg az $y^2 = 12x$ egyenletű parabola $x_1 = 2$ abszcisszájú pontjain átmenő érintőinek egyenletét.
4. Határozd meg az $y^2 = 2x$ egyenletű parabola azon érintőinek egyenletét, amelyek átmennek az $A(-1, 0)$ ponton. Milyen pontban metszi egymást a két érintőhöz tartozó normális? Számítsd ki a két érintő és a két normális által meghatározott négyszög területét.
5. Egy híd íve parabola alakú. Határozd meg ezen parabola paraméterét, ha a fesztávolság 24 m és az ívmagasság 6 m.
6. Határozd meg a 66. ábrán vázolt parabolikus tartószerkezet
 - a) felső és alsó parabolaívének egyenletét;
 - b) az A_1A_2 és az A_1C_2 rudak hosszát.



66. ábra

7. M és M' egy parabola szimmetriatengelyre szimmetrikus pontjai. Határozd meg az M pontban a parabolához húzott érintő és az M' -en a parabola tengelyével párhuzamos egyenes metszéspontjának mértani helyét.

8. Bizonyítsd be, hogy minden olyan parabola egyenlete, amelynek szimmetriatengelye párhuzamos az Oy tengellyel $y = ax^2 + bx + c$ alakú. Határozd meg egy ilyen parabola csúcsát, fókuszát illetve vezéregyenesét.

9. Bizonyítsd be, hogy a parabola tetszőleges M pontjában húzott érintő és normális az MF egyenes és az M -en át a parabola tengelyével húzott párhuzamos által meghatározott szög külső illetve belső szögfelezője. (Ezt a parabola *optikai tulajdonságának* is szokták nevezni, mert ennek következtében a parabola tengelyével párhuzamos fénysugarak a parabolikus tükörről a fókuszban verődnek vissza illetve a fókuszban elhelyezett fényforrásból kiinduló tetszőleges fénysugarat a parabolikus tükör a tengellyel párhuzamosan veri vissza.

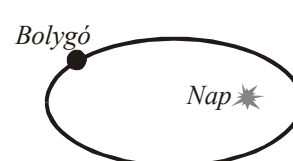
3.4. Kúpszeletek

A körrel, parabolával, hiperbolával ellipszissel gyakran találkozhatunk a természetben is.

Ha ferdén vagy vízszintesen eldobunk egy testet, akkor annak pályája parabolaív. (67. ábra) Az előzőekben, ha az ellipszis, hiperbola, parabola paragrafusok utáni feladatokat megoldottátok beláthattátok az optikai tulajdonságaikat ezen görbéknek. A csillagászati alapismeretekhez tartoznak *Kepler* (1571–1630) törvényei. Az első törvényében megfogalmazta, hogy a bolygók a Nap körül ellipszispályán keringnek, és a Nap az ellipszispálya egyik fókuszában van. (69. ábra)



67. ábra



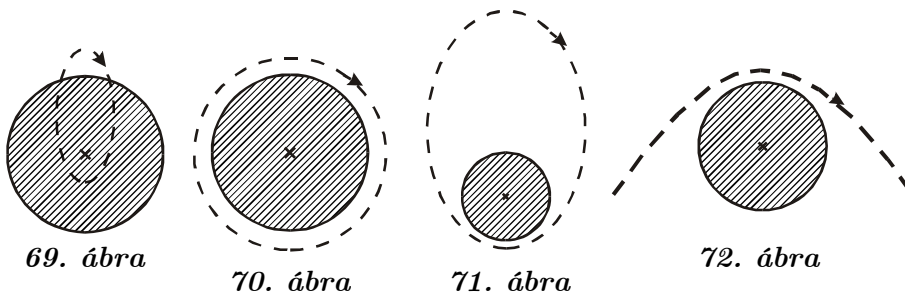
68. ábra

Ma már közismert, hogy a mesterséges holdak, a szputnyikok, az űrhajók a Föld körül körpályán vagy ellipszispályán keringenek. Nagyobb indítási sebességgel, a Földtől távoli égitestek kutatására vissza nem térő szondákat küldtek, ezek hiperbola pályán haladnak.

Ma már elemi fizikai ismeretnek számít, hogy a fellőtt rakéták, űrhajók pályája az indító sebességtől függően:

- olyan ellipszis, amelynek a fellövés helyétől távolabbi fókuszpontja a Föld középpontja (69. ábra)
- kör (70. ábra)
- olyan ellipszis, amelynek a fellövés helyéhez közelebbi fókuszpontja a Föld középpontja (71. ábra)
- hiperbola, amelynek egyik fókuszpontja a Föld középpontja (72. ábra)

Ezek azt mutatják, hogy a kör, az ellipszis, a parabola, hiperbola rokonságban vannak

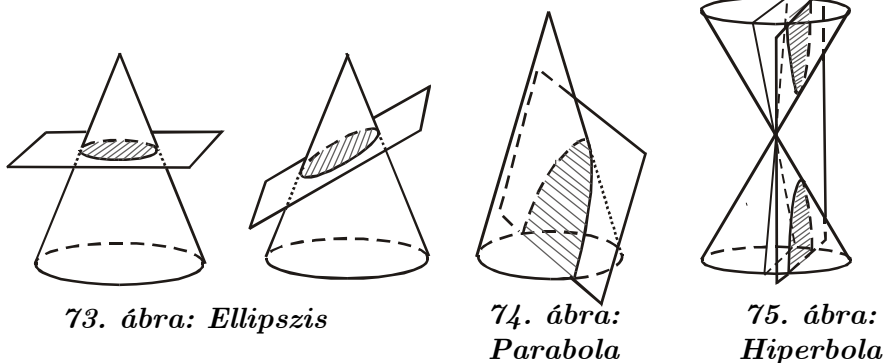


A testek mozgását matematikai módszerekkel már a XVI–XVII. században kezdték vizsgálni, de a parabola, az ellipszis, a hiperbola fogalmát jóval korábban, a görög matematikusok már az ókorban, az i.e. II. században kialakították. Több matematikai probléma vizsgálatánál rájöttek, hogy ha egyenes körkúp palástját különböző helyzetű síkokkal elmetszik, akkor nevezetes görbéket kapnak. Ezeket közös néven *kúpszeleteknek* nevezzük.

A kúpszelet *ellipszis*, ha a metszősík a kúp egyik alkotójával sem párhuzamos. Ha a metszősík merőleges a kúp tengelyére, akkor a síkmetszet egy *kör*, ez is bizonyítja, hogy a kör egy sajátos ellipszis.

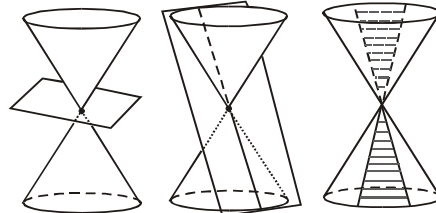
Ha a metszősík a kúp egyetlen alkotójával párhuzamos, akkor a kúpszelet *parabola*.

Ha két alkotóval párhuzamos a metszősík, akkor *hiperbola* keletkezik.



Ha a kúp csúcspontjára illeszkedő metszősíkot veszünk, akkor *elfajult kúpszeletet* kapunk, mégpedig ellipszis helyett pontot (*elfajult ellipszis*), parabola helyett egy egyenest (*elfajult parabola*) és hiperbola helyett két metsző egyenest (*elfajult hiperbola*). Egy tetszőleges kúpszelet egyenlete a következő: $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$

($A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$), sőt az előbbi egyenlettel megadott ún. *másodrendű algebrai görbék* mind kúpszeletek (ide soroltuk az elfajult kúpszeleteket és az üreshalmazt is). Ez az egyenlet egy-két transzformációval visszavezethető a következők valamelyikére:



76. ábra:

Elfajult kúpszeletek

Kör $x^2 + y^2 = r^2$	Ellipszis $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	Hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
Parabola $y^2 = 2px$	Két metsző egyenes $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	Két párhuzamos egyenes $x^2 - a^2 = 0$
Két egybeeső egyenes	Pont $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	Üreshalmaz $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$

77. ábra:

Másodrendű görbék

Az ellipszis, a hiperbola és a parabola közös értelmezése, mint mértani hely

Az előzőek alapján felmerül a kérdés, hogy mint mértani hely van-e valami közös a kúpszeletekben.

Feladat. Határozzuk meg azon pontok mértani helyét, amelyeknek egy rögzített F ponttól mért távolságának és egy adott v egyenestől mért távolságának aránya egy $e \in \mathbb{R}_+^*$ állandó.

Megoldás. Nyilvánvaló, hogy ha $e = 1$, akkor a mértani hely egy parabola.

Lássuk mi történik, ha $e \in (0, 1)$. Vegyük fel a koordináta-rendszer középpontját az F pontban és legyen az Oy tengely párhuzamos a v vezéregyenessel. Ekkor az adataink: $F(0, 0)$, $v: x = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$ és $\frac{MF}{d(M, v)} = e$. Az $M(x, y)$ pontra ez

pontosan akkor igaz, ha $\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{|x - \alpha|} = e$, ez pedig egyenértékű az

$$\frac{\left(x + \frac{e^2 \alpha}{1 - e^2}\right)^2}{e^2 \alpha^2 + \frac{(e^2 \alpha^2)^2}{1 - e^2}} + \frac{y^2}{(1 - e^2) \left(e^2 \alpha^2 + \frac{(e^2 \alpha^2)^2}{1 - e^2}\right)} = 1$$

egyenlettel, ami $e < 1$ esetében egy

ellipszis egyenlete, mert ekkor mindkét nevező pozitív és $e > 1$ esetében egy hiperbola, mert ekkor a két nevező ellentétes előjelű. e pedig az ellipszis vagy a hiperbola excentricitása.

3.5. Megoldott feladatok

1. Adott ABC_{Δ} esetén határozzuk meg azon M síkbeli pontok mértani helyét, amelyekre $\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC}$.

Megoldás

Tekintsük az xOy koordináta-rendszert úgy, hogy az Ox tengely legyen a BC egyenes és $A \in Oy$ legyen. A háromszög csúcsainak koordinátái: $A(0, a)$, $B(b, 0)$ és

$C(c, 0)$. Legyen $M(x, y)$ a keresett pont. Ekkor az $\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC}$ feltétel egyenértékű

az $\frac{\sqrt{(x - b)^2 + y^2}}{\sqrt{(x - c)^2 + y^2}} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + c^2}}$ (1) feltétellel, tehát $\frac{x^2 + y^2 - 2xb + b^2}{x^2 + y^2 - 2xc + c^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + c^2}$,

ahonnan keresztbeszorzással és rendezéssel (felhasználva, hogy $b \neq c$ (ellenkező esetben a B és C pontok egybeesnének)) kapjuk, hogy

$$(b + c)(x^2 + y^2) + 2(a^2 - bc)x - a^2(b + c) = 0 \quad (2).$$

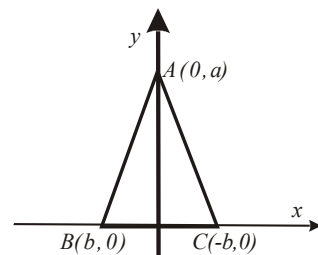
Itt két esetet szükséges tárgyalni:

I. eset. $b + c = 0$ (ez akkor történik meg, ha az ABC_{Δ} egyenlőszárú, azaz $AB = AC$)

A (2) összefüggés a következőképpen alakul: $2(a^2 + b^2)x = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Ez pedig az Oy , azaz az A -

ból húzott magasság tartóegyeneseinek egyenlete. Az is világos, hogy ezen egyenes

minden M pontjára $\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC} = 1$



78. ábra

II. eset. $b + c \neq 0$. Ebben az esetben a (2) összefüggést végigoszthatjuk $b + c$ -vel és az $x^2 + y^2 + 2 \cdot \frac{a^2 - bc}{b + c} \cdot x - a^2 = 0$ egyenlethez jutunk. Ez pedig az

$$\begin{aligned} x^2 - 2 \cdot \frac{bc - a^2}{b + c} \cdot x + \left(\frac{bc - a^2}{b + c} \right)^2 + y^2 &= a^2 + \left(\frac{bc - a^2}{b + c} \right)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(x^2 - \frac{bc - a^2}{b + c} \right)^2 + y^2 &= \left(\sqrt{a^2 + \left(\frac{bc - a^2}{b + c} \right)^2} \right)^2 \quad (3) \end{aligned}$$

alakba is írható, ami az $F\left(\frac{bc - a^2}{b + c}, 0\right)$ középpontú $R = \sqrt{a^2 + \left(\frac{bc - a^2}{b + c}\right)^2}$ sugarú

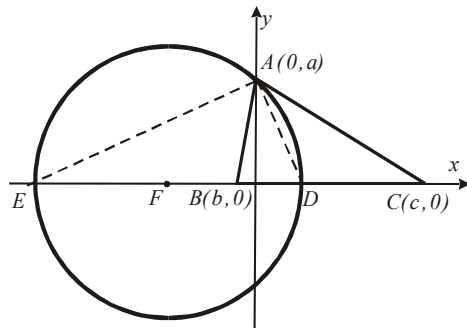
kör egyenlete. Ha $M(x, y)$ egy tetszőleges pont ezen a körön, akkor a (3) összefüggésből azonnali átalakításokkal juthatunk az (1) összefüggéshez. Tehát a kör minden pontja rajta van a mértani helyen. Tehát a mértani hely ebben az esetben az

$F\left(\frac{bc - a^2}{b + c}, 0\right)$ középpontú $R = \sqrt{a^2 + \left(\frac{bc - a^2}{b + c}\right)^2}$ sugarú kör.

A fenti koordináták első látásra nem sokat mondanak a kör helyzetére azonkívül, hogy a középpontja az Ox tengelyen helyezkedik el és az R sugár éppen az A pont távolsága az F középponttól, tehát az A pont is rajta van a mértani helyen, ami a feladatbeli összefüggésből is azonnal kikövetkeztethető. Ezért jó lenne megvizsgálni, hogy valamilyen más nevezetes pontoknak van-e köze ehhez a körhöz. Nézzük meg, hogy milyen pontokban metszi az Ox tengelyt. Ezek a pontok az

$\left(\frac{bc - a^2}{b + c} - \sqrt{a^2 + \left(\frac{bc - a^2}{b + c}\right)^2}, 0\right)$ és $\left(\frac{bc - a^2}{b + c} + \sqrt{a^2 + \left(\frac{bc - a^2}{b + c}\right)^2}, 0\right)$ koordinátájú

pontok. Ezek így önmagukban még mindig nem mondanak sokat, viszont ismerjük a szögfelező tételét, mely szerint a $\widehat{BAC}$ belső illetve külső szögfelezője a BC egyenest olyan D illetve E pontokban metszi, amelyekre $\frac{BD}{DC} = \frac{BE}{EC} = \frac{BA}{AC}$, tehát



79. ábra: Apollóniusz köre

a D és E pontok hozzátartoznak a mértani helyhez, így ezek a kör Ox tengellyel való metszéspontjai, sőt mivel a középpont az Ox tengelyen van, a kör átmérője éppen a DE .

Tehát ha a háromszög nem egyenlőszárú ($AB \neq AC$), akkor a mértani hely a $\widehat{BAC}$ belső illetve külső szögfelezőjének talppontjai által meghatározott szakaszra, mint átmérőre szerkesztett kör. Ezt a kört nevezik Apollóniusz körének.

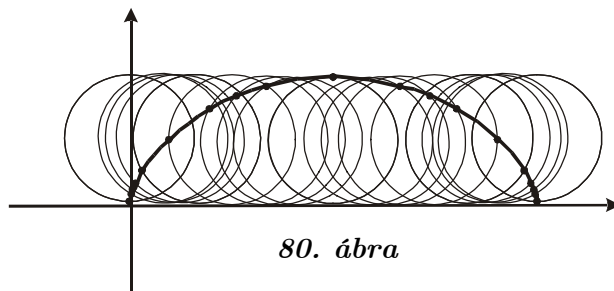
Megjegyzések. 1° Belátható, hogy egy nem egyenlőszárú háromszögnek három Apollóniusz köre van, egy egyenlőszárúnak csak kettő, míg egy egyenlő oldalúnak egy sincs.

2° A mértani hely szintetikususan is megtalálható.

2. Gurítsunk egy r sugarú kört az Ox tengelyen. Határozzuk meg az eredetileg az origóban levő pont mértani helyét.

Megoldás

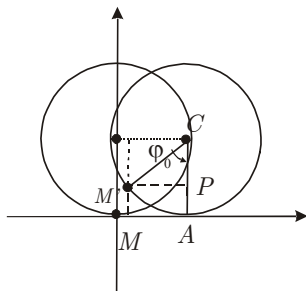
Feltételezzük, hogy a gördülés iránya az Ox tengely pozitív irányába mutat. Ha több helyzetben lerajzoljuk, akkor mértani helyként a 80. ábrán látható görbe rajzolódik ki. Írjuk fel a görbe egyenletét. Mivel gördülésről van szó egyszerűbb lesz a gördülési



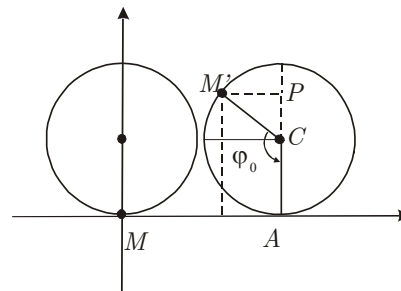
80. ábra

szög függvényében felírni az egyenletet. Nyilvánvaló, hogy ekkor paraméteres egyenleteket kapunk. Legyen φ az M pont által leírt szög mértéke (radiánban kifejezve). Ekkor ha A kör Ox tengellyel vett érintési pontja, akkor az OA távolság az a φ szög által

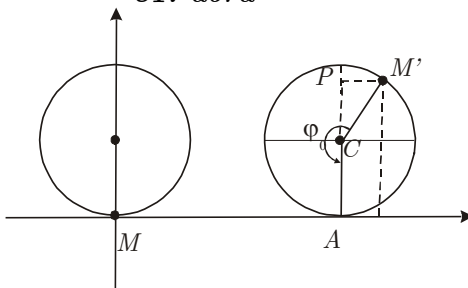
súrolt körív hossza, azaz $OA = r\varphi$, ahol r a kör sugara. Ahhoz, hogy az M' pont koordinátáit meghatározzuk, elégséges a φ_0 szög szögfüggvényei segítségével, ahol $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$ úgy, hogy $\varphi = 2k\pi + \varphi_0$ (ez a φ_0 egyértelműen meghatározott). Tulajdonképpen az M pont koordinátáit négy helyzetben kell vizsgálnunk:



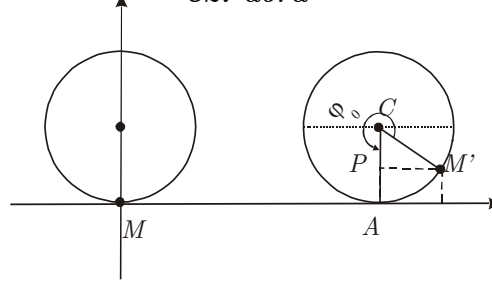
81. ábra



82. ábra



83. ábra



84. ábra

1. eset. $\varphi_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ (81. ábra) Ha C a kör középpontja és P az $M' AC$ egyenesre eső vetülete, akkor

$$x = AM - PM' = r\varphi - r \sin \varphi_0 = r\varphi - r \sin \varphi = r(\varphi - \sin \varphi) \quad \text{és}$$

$$y = AC - PC = r - r \cos \varphi_0 = r(1 - \cos \varphi). \quad (\text{Használtuk, hogy } 2k\pi \text{ a } \sin \text{ illetve } \cos \text{ függvények periódusa})$$

2. eset. $\varphi_0 \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ (82. ábra) Ebben az esetben

$$x = AM - PM' = r\varphi - r \sin \varphi_0 = r\varphi - r \sin \varphi = r(\varphi - \sin \varphi) \quad \text{és}$$

$$y = AC + PC = r + r(-\cos \varphi_0) = r(1 - \cos \varphi). \quad (\text{Itt } \cos \varphi_0 \leq 0)$$

3. eset. $\varphi_0 \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ (83. ábra) Ebben az esetben

$$x = AM + PM' = r\varphi + r(-\sin \varphi_0) = r(\varphi - \sin \varphi) \quad \text{és}$$

$$y = AC + PC = r + r(-\cos \varphi_0) = r(1 - \cos \varphi). \quad (\text{Itt } \sin \varphi_0 \leq 0 \text{ és } \cos \varphi_0 \leq 0)$$

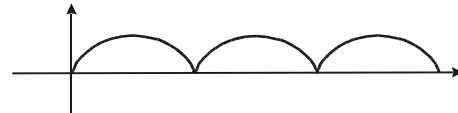
4. eset. $\varphi_0 \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ (84. ábra) Ebben az esetben

$$x = AM + PM' = r\varphi + r(-\sin \varphi_0) = r(\varphi - \sin \varphi) \quad \text{és}$$

$$y = AC - PC = r - r \cos \varphi_0 = r(1 - \cos \varphi). \quad (\text{Itt } \sin \varphi_0 \leq 0)$$

Tehát minden esetben ugyanazokat a paraméteres egyenleteket kaptuk, azaz kijelenthetjük, hogy a mértani hely az

$$\begin{cases} x = r(\varphi - \sin \varphi) \\ y = r(1 - \cos \varphi) \end{cases}, \varphi \in \mathbb{R}_+$$



85. ábra

paraméteres egyenletekkel rendelkező görbe.

Ezt a görbét nevezzük *cikloisnak*. A ciklois a 85. ábrán látható.

3. Határozzuk meg egy hiperbola középpontjának a hiperbola érintőire eső vetületeinek mértani helyét!

Megoldás. Tekintsük az $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ egyenletű hiperbolát. Ennek paraméteres

egyenletei: $x = \frac{a}{\cos \varphi}$ és $y = b \operatorname{tg} \varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi) \setminus \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$. Az

$(x_1, y_1) = \left(\frac{a}{\cos \varphi_1}, b \operatorname{tg} \varphi_1\right)$ pontban húzott érintő egyenlete: $\frac{1}{a \cos \varphi_1} x - \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{b} y - 1 = 0$.

Innen az origón átmenő, erre merőleges egyenes egyenlete: $y = -\frac{a \sin \varphi_1}{b} x$. Ez

utóbbi két egyenes metszéspontja az origó érintőre eső vetülete. Az előbbi egyenletekből $\sin \varphi_1 = -\frac{by}{ax}$ és $\cos \varphi_1 = \frac{x^2 + y^2}{ax}$ ($x \neq 0$, mert az origó középpontú hiperbolának nem lehet Ox -szel párhuzamos érintője), innen pedig a $\sin^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_1 = 1$ azonosság felhasználásával kapjuk, hogy a keresett mértani hely egyenlete $(x^2 + y^2)^2 = a^2 x^2 - b^2 y^2$. Ha $a = b$, azaz, ha a hiperbola egyenlőszárú, akkor a mértani hely az $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ egyenletű *Bernoulli féle lemniszkátának* nevezett görbe. (Javasoljuk ezen görbe ábrázolását! (fektetett 8-as alakú))

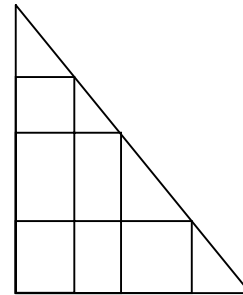
3.6. Gyakorlatok és feladatok

1. Határozd meg azon körök középpontjainak mértani helyét a koordinátarendszer síkjában, amelyek áthaladnak az $(1, 5)$ és $(-3, -1)$ pontokon.
2. Határozd meg azon pontok mértani helyét, amelyek egyenlő távolságra vannak az $y = \frac{1}{2}x + 3$ és az $y = 2x - 5$ egyenesektől.
3. Határozd meg azon körök középpontjainak mértani helyét, amelyek érintik az Ox tengelyt és a $12x - 5y = 0$ egyenletű egyenest.
4. Határozd meg azon körök középpontjainak mértani helyét, amelyek sugara 3 és érintik az $2x - 5y = 0$ egyenletű egyenest.
5. Egy háromszög két csúcsa a $(-6, 0)$ és $(6, 0)$ koordinátájú pontok, a harmadik csúcsa pedig az $y = -3x + 5$ egyenletű egyenesen mozog. Határozd meg a súlypont mértani helyét.
6. Egy egyenlőszárú háromszög egyik szárának végpontjai a $(4, 2)$ és $(1, 8)$ koordinátájú pontok. Mi a harmadik csúcs mértani helye?
7. Határozd meg azon pontok mértani helyét, amelyeknek az $(1, 0)$ ponttól mért távolságuk négyzete egyenlő az $x = 1$ egyenletű egyenestől mért távolságukkal.
8. Határozd meg azon pontok mértani helyét, amelyekből az origó középpontú és 4 sugarú valamint a $(8, 0)$ középpontú és 2 sugarú körök azonos szögben látszanak.
9. Határozd meg az origóból $(4, 0)$ koordinátájú ponton átmenő egyenesekre bocsátott merőlegesek talppontjainak mértani helyét.
10. Határozd meg azon pontok mértani helyét, amelyek a $(3, 2)$ ponttól kétszer akkora távolságra vannak, mint az Oy tengelytől.

11. Az $y^2 = x$ parabola változó M pontjában húzott érintő az Oy tengelyt egy A pontban metszi. Határozd meg az AM szakasz felezőpontjának mértani helyét.

12. Adottak az $x - y + 1 = 0$ és az $x + y + 1 = 0$ egyenletű egyenesek. A $P(1, 0)$ ponton áthaladó egyenes a két adott egyenest az M_1 és M_2 pontokban metszi. Határozd meg az M_1M_2 szakasz felezőpontjának mértani helyét.

13. Adott derékszögű háromszögbe a 86. ábrán látható módon téglalapokat írunk. Mi a téglalapok középpontjainak mértani helye?



86. ábra

14. Határozd meg az $y = \frac{1}{x}$ hiperbolában az $y = -2x$ egyenessel párhuzamos húrok felezőpontjának mértani helyét.

15. Határozd meg azon síkbeli pontok mértani helyét, amelyeknek egy adott derékszög száraitól mért távolságainak összege állandó.

16. Két egymásra merőleges egyenesen egy-egy pont mozog egyenletesen, azonos sebességgel. A 0 időpontban elfoglalt helyzetük ismeretében, határozd meg a két pontot összekötő szakasz felezőpontjának a mértani helyét.

17. Határozd meg az ABC_{Δ} síkjában azon M pontok mértani helyét, amelyekre $MB^2 + MC^2 = 2MA^2$.

18. Milyen feltételek mellett lesz összefutó az ellipszis három normálisa?

19. Egy egyenlőszárú hiperbolába beírunk egy háromszöget. Bizonyítsd be, hogy az oldalakra valamelyik aszimptotával való metszéspontban állított merőlegesek összefutnak.

20. Egy változó egyenes az $\widehat{AOB}$ OA és OB szarait a P illetve Q pontokban metszi úgy, hogy $OP + OQ = k \in \mathbb{R}_+^*$ állandó. A P és Q pontokban az OA illetve OB egyenesekre állított merőlegesek M -ben metszik egymást. Határozd meg az M pont mértani helyét.

21. Az ABC_{Δ} (BC) oldalán mozog egy M pont. N és P az M pont vetületei az AB illetve AC oldalakra. Határozd meg az NP szakasz felezőpontjának mértani helyét.

22. Az $OABC$ téglalap O pontján át húzott d egyenes az AB illetve BC egyeneseket az N illetve M pontokban metszi. A d egyenes OA -ra vonatkoztatott szimmetrikusa AB -t Q -ban és BC -t P -ben metszi. Határozd meg a PN és QM egyenesek metszéspontjának mértani helyét.

23. Határozd meg azon pontok mértani helyét, amelyek távolságai egy adott egyenlőszárú háromszög kongruens oldalaitól egyenlők egymással és a harmadik oldaltól mért távolság négyzetével!

24. Határozd meg azon körök középpontjainak mértani helyét, amelyek átmennek egy rögzített A ponton és ortogonálisak egy rögzített körre (a metszéspontokban húzott érintők merőlegesek egymásra).

25. Határozd meg azon pontok mértani helyét, amelyek két rögzített körre vonatkoztatott hatványainak aránya állandó.

26. Az MN szakasz O középpontja rögzített és MN forog O körül az α síkban, valamint A egy rögzített pont ebben a síkban.

a) Írd fel az MNA_{Δ} köré írt kör egyenletét.

b) Határozd meg az MN egyenes és az előbbi körhöz A -ban húzott érintő metszéspontjának mértani helyét!

27. Határozd meg azon pontok mértani helyét, amelyeknek egy rögzített körre vonatkozó ρ hatványának és ezen kör egy rögzített átmérőjétől mért d távolsága esetén $\rho + d^2$ állandó!

28. Az ABC_{Δ} háromszög BC oldalán mozgó M ponton keresztül meghúzzuk az AB és AC oldalakat érintő köröket. Határozd meg ezen körök második metszéspontjának mértani helyét.

29. A C_1 és C_2 körök az O pontban érintik egymást. Az O ponton keresztül húzunk két (OM ($M \in C_1$) és ON ($N \in C_2$)) egymásra merőleges hűrt. Határozd meg:

a) az O pont MN egyenesre eső vetületének mértani helyét;

b) az MN szakasz felezőpontjának mértani helyét;

c) az OMN_{Δ} súlypontjának mértani helyét.

30. Bizonyítsd be, hogy három kör páronkénti hatványtengelyei összefutnak vagy párhuzamosak (ez utóbbi akkor történik meg, ha a körök középpontjai kollineárisak).

Megjegyzés. Az összefutási pontot a három kör *hatványközéppontjának* nevezzük.

31. Egy háromszög csúcsaiba, mint középpontokba köröket szerkesztünk, melyek sugarai egyenesen arányosak három rögzített pozitív állandóval. Határozd meg a körök hatványközéppontjának mértani helyét!

32. Egy origó középpontú rögzített körhöz húzott változó érintő a tengelyeket az $M \in Ox$ és $N \in Oy$ pontokban metszi. Az adott kör és az MN átmérőjű kör hatványtengelye Ox -et M' -ben és Oy -t N' -ben metszi. Határozd meg az $M'N'$ szakasz felezőpontjának mértani helyét!

33. Egy állandó hosszúságú MN szakasz végpontjai csúszkálnak két merőleges egyenesen. Határozd meg azon $P \in MN$ pontok mértani helyét, amelyekre $\frac{PM}{PN} = \lambda$

($\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ rögzített).

34. Egy változó érintő az M és M' pontokban metszi egy rögzített ellipszis nagytengelyének A és A' végpontjaiban húzott érintőket. Határozd meg az MA' és $M'A$ egyenesek metszéspontjának mértani helyét!

- 35.** Határozd meg egy ellipszis egyik fókuszából egy változó érintőre húzott merőleges valamint az ellipszis középpontját és az érintési pontot összekötő egyenes metszéspontjának mértani helyét!
- 36.** Ha az AB szakasz felezőpontja O , határozd meg azon M pontok mértani helyét, amelyekre $OM^2 = MA \cdot MB$.
- 37.** Határozd meg azon pontok mértani helyét, amelyekből merőleges érintők húzhatók egy hiperbolához!
- 38.** Egy parabola tengelyének és vezéregyenesének metszéspontja A . Szerkesztünk egy A középpontú kört, amely érinti a parabolát. A parabola csúcsán át húzott változó egyenes a kört N -ben és a parabolát másodszor M -ben metszi. Határozd meg az N és M pontokból a körhöz illetve a parabolához húzott érintők metszéspontjának mértani helyét.
- 39.** Határozd meg azon pontok mértani helyét, amelyekből egy parabolához húzott érintők által bezárt szög állandó!