VIII. Függvények tanulmányozása

8.1. A monotonitás vizsgálata, egyenlőtlenségek

Tekintsük az $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ folytonos és (a,b)-n deriválható függvényt. A derivált értelmezésében szereplő $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ kifejezés előjelével vizsgáltuk a IX. osztályban az f függvény monotonitását. Ha ez a tört minden $x,y\in(a,b)$ esetén pozitív, akkor az f növekvő és ha a tört minden $x,y\in(a,b)$ esetén negatív, akkor az f függvény csökkenő. A Lagrange tétel segítségével az előbbi tört értéke mindig helyettesíthető a derivált valamilyen behelyettesítési értékével, tehát úgy tűnik, hogy a függvény monotonitása szoros összefüggésben van a deriváltjának előjelével. Az biztos, hogy ha a derivált mindig pozitív, akkor az f függvény növekvő. A kérdés az, hogy a tulajdonság fordítva is igaz-e (ugyanis nem biztos, hogy minden (a,b)-beli érték előállítható valamilyen intervallumon a Lagrange tételben szereplő c-ként). Egy növekvő f függvény esetén az $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ tört nem negatív, tehát a derivált értelmezése alapján a derivált minden pontban pozitív. Ez alapján kijelenthetjük a következő tételt:

Tétel. Tekintsük az $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ folytonos és (a,b)-n deriválható függvényt.

a) Ha $f'(x)>0$ minden $x\in(a,b)$ esetén akkor f szigorúan növekvő függvény az (a,b)-n.

b) Ha $f'(x)\geq 0$ minden $x\in(a,b)$ esetén akkor f növekvő függvény az (a,b) intervallumon.

c) Ha $f'(x)<0$ minden $x\in(a,b)$ esetén akkor f szigorúan csökkenő függvény az (a,b)-n.

d) Ha $f'(x)\leq 0$ minden $x\in(a,b)$ esetén akkor f csökkenő függvény az (a,b) intervallumon.

A b) és d) állítások fordítottja is igaz. Az a) és c) állítások fordítottja nem igaz, ezt a tétel következménye után fogjuk látni.

Bizonyítás. Igazoljuk az a) alpontot, a többi bizonyítása hasonlóan történik. Bárhogyan adunk is meg az (a,b) intervallumból két $x_1<x_2$ pontot, a Lagrange tétel alapján van olyan $x_1<c<x_2$ pont, hogy teljesüljön az

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)\cdot(x_1-x_2)$$

egyenlőség. Ha $f'(x)>0$ minden $x\in(a,b)$ esetén, akkor $f'(c)>0$ és így $x_2-x_1>0$-ből következik, hogy $f(x_1)<f(x_2)$. Mivel $x_1<x_2$ az (a,b) két tetszőleges pontja volt, ezért f szigorúan növekvő függvény az (a,b) intervallumon.

Következmény. Ha az $f:[a,\ b]\to\mathbb{R}$ folytonos és $(a,\ b)$-n deriválható függvény deriváltja az $(a,\ b)$-n 0, akkor az f függvény konstans.

Bizonyítás. Az előbbi tétel alapján f növekvő is és csökkenő is, tehát $x_1<x_2$ esetén teljesül az $f(x_1)\le f(x_2)$ egyenlőtlenség is és az $f(x_1)\ge f(x_2)$ egyenlőtlenség is. Ez csak úgy lehetséges, ha $f(x_1)=f(x_2)$, tehát a függvény konstans. Ez a tulajdonság a Lagrange tételből direkt úton is levezethető.

Megjegyzés. A tételben is és a következményben is lényeges az, hogy a függvény egy intervallumon értelmezett. Ha például az $f:(0,\ 1)\cup(2,\ 3)\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}1, \text{ ha } x\in(0,\ 1)\\ 2, \text{ ha } x\in(2,\ 3)\end{cases}$$

függvényt tekintjük, látható, hogy az értelmezési tartománynak minden pontjában deriválható, $f'(x)=0$, $\forall\, x\in(0,\ 1)\cup(2,\ 3)$ de az f függvény mégsem állandó az értelmezési tartományon. Ugyanakkor az $f:[0,1]\cup[2,3]\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}4x, \text{ ha } x\in\left(0,\ 1\right)\\ x, \text{ ha } x\in\left(2,\ 3\right)\end{cases}$$

függvény deriváltja szigorúan pozitív és a függvény mégsem növekvő, mert

$$f(1)=4>2=f(2).$$

Szélsőérték-pontok meghatározása. A Fermat tétel alapján, ha a függvény deriválható és szélsőértéke van az intervallum belsejében, akkor ezen a helyen a derivált nulla. A szélsőérték-pontok meghatározásánál tehát a derivált zérushelyeit kell meghatározni. A kifejezésmód egyszerűsítése céljából a következő értelmezést adjuk:

Értelmezés. Az $f:D\to\mathbb{R}$ deriválható függvény esetén az $S_f=\left\{x\in \operatorname{int} D \mid f'(x)=0\right\}$ halmaz elemeit f *stacionárius pontjainak* nevezzük.

A Fermat tétel alapján a szélsőérték-pontok mindig stacionárius pontok. Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3$ függvényre $f'(0)=0$, de az $x=0$ pont nem szélsőérték-pont, tehát az előbbi állítás fordítottja nem igaz. Adjunk egy szükséges feltételt arra vonatkozóan, hogy egy stacionárius pont szélsőérték-pont legyen. Ha $f:(a,\ b)\to\mathbb{R}$ deriválható függvény és $f':(a,\ b)\to\mathbb{R}$ folytonos, x_0 egy stacionárius pont és az f' függvénynek előjelváltása van az x_0-ban ($f'(x)<0$, ha $x\in(x_0-\delta,\ x_0)$ és $f'(x)>0$, ha $x\in(x_0,\ x_0+\delta)$, ahol $\delta\in\mathbb{R}_+^*$ vagy fordítva) akkor az f függvénynek az $x_0\in(a,\ b)$ pontban szélsőértéke van. Ha $f'(x)<0$, $x\in(x_0-\delta,\ x_0)$ esetén, akkor ezen az intervallumon az f függvény csökkenő. Az $f'(x)>0$, $x\in(x_0,\ x_0+\delta)$ feltétel alapján f növekvő az $(x_0,\ x_0+\delta)$ intervallumon. Az f folytonossága alapján

$f(x) \geq f(x_0)$, $\forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ és így ebben az esetben lokális minimumpont az x_0. Ha $x \in (x_0 - \delta,\, x_0)$ esetén $f'(x) > 0$ és $x \in (x_0,\, x_0 + \delta)$ esetén $f'(x) < 0$, akkor a függvény az $(x_0 - \delta,\, x_0)$ intervallumon növekszik, és az $(x_0,\, x_0 + \delta)$ intervallumon csökken, tehát x_0 lokális maximumpont. Mindkét esetet a következő táblázatban láthatjuk:

Maximumpont

x	$x_0 - \delta$		x_0		$x_0 + \delta$
$f'(x)$		$+ + + + + + +$	0	$- - - - - -$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(x_0)$	$\searrow$	

Minimumpont

x	$x_0 - \delta$		x_0		$x_0 + \delta$
$f'(x)$		$- - - - - -$	0	$+ + + + + + +$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$	

Megoldott gyakorlatok és feladatok

1. Az $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$ függvényre $f'(x) = \dfrac{1}{x} > 0$ az $I = (0, +\infty)$ intervallumon, ezért a függvény szigorúan növekvő az I-n.

2. Az $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ függvényre $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$, tehát a stacionárius pontok $x = -1$ és $x = 1$. Az alábbi táblázatban megvizsgáltuk a derivált előjelét és ez alapján meghatároztuk az f monotonitási intervallumait.

x	$-\infty$	-1	$-1+\delta$	x_0	$1-\delta$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+ + + +$	0	$- - - -$	$\vert$	$- - - -$	0	$+ + + +$
$f(x)$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$\vert$	$\nearrow$	2	$\searrow$

Az f függvény az $I_1 = (-\infty, -1]$ intervallumon növekvő, és az $I_2 = [-1, 0)$ intervallumon csökkenő, mivel előjel váltás van az $x = -1$ pontban, ezért helyi maximumpont.

Az f függvény az $I_3 = (0,1]$ intervallumon csökkenő, és az $I_4 = [1, +\infty)$ intervallumon növekvő, mivel előjel váltás van az $x = 1$ pontban, ezért helyi minimumpont

Az előbbiek alapján $f(x) \geq 2$, ha $x > 0$, és $f(x) \leq -2$, ha $x < 0$. Ezeket az egyenlőtlenségeket már IX. osztályban is igazoltuk és a függvény monotonitását is vizsgálhattuk volna IX.-es módszerrel. Bonyolultabb függvények esetén azonban lehetséges, hogy csak a deriváltak használata vezet eredményhez.

3. Bizonyítsuk be, hogy $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$, ha $x > 0$.

Megoldás. Az $f_1 : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = x - \sin x$ függvényre $f_1'(x) = 1 - \cos x \geq 0$, $\forall\, x > 0$, tehát a függvény növekvő a $(0,\infty)$ intervallumon. Ebből következik, hogy $f_1(0) \leq f_1(x)$, $\forall\, x > 0$. Tehát $0 < x - \sin x$, $\forall\, x > 0$ és így az második egyenlőtlenség igaz. Az első egyenlőtlenség igazolásához vizsgáljuk meg az $f_2 : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = x - \frac{x^3}{6} - \sin x$ függvényt. $f_2'(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \cos x$. Mivel nem tudjuk eldönteni, hogy ez a kifejezés milyen előjelű, az f_2' előjelét is a deriváltja segítségével határozzuk meg. $f_2''(x) = \sin x - x < 0$ az előbbi egyenlőtlenség alapján, tehát az f_2' függvény csökkenő (mert a deriváltja negatív). Ebből következik, hogy $f_2'(0) \geq f_2'(x)$, ha $x > 0$. De $f_2'(0) = 0$ és így $f_2'(x) \leq 0$, ha $x > 0$, vagyis f_2 csökkenő a $(0,\infty)$ intervallumon. Ez alapján $f_2(x) \leq f_2(0) = 0$, tehát a kért egyenlőtlenséget igazoltuk.

4. Bizonyítsuk be, hogy $\frac{1}{2}\ln^2(n+1) - \frac{1}{2}\ln^2 3 < \sum_{k=3}^{n} \frac{\ln k}{k} < \frac{1}{2}\ln^2 n - \frac{1}{2}\ln^2 3 + \frac{\ln 3}{3}$.

Megoldás. Az $f(x) = \frac{\ln x}{x}, x > 0$ függvény az $F = \frac{1}{2}\ln^2 x$, $x > 0$ függvény deriváltja. A F függvény teljesíti a Lagrange tétel feltételeit minden $\left[k, k+1\right]$ alakú intervallumon, ahol $k \in \left\{3, 4, 5, 6, \ldots, n\right\}$, tehát minden $k \in \left\{3, 4, 5, 6, \ldots, n\right\}$ esetén létezik $c \in \left(k, k+1\right)$ úgy, hogy $\frac{1}{2}\ln^2(k+1) - \frac{1}{2}\ln^2 k = \frac{\ln c}{c}$. Az $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ egyenlőség alapján $f'(x) < 0$ ha $x \geq e$ és így $\frac{\ln(k+1)}{k+1} < \frac{\ln c}{c} < \frac{\ln k}{k}$. Ez alapján:

$$\frac{\ln(k+1)}{k+1} < \frac{1}{2}\ln^2(k+1) - \frac{1}{2}\ln^2 k < \frac{\ln k}{k},$$

ha $k \geq 3$. Ezt az egyenlőtlenséget használjuk az összeg alsó és felső becslésére:

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{\ln k}{k} = \frac{\ln 3}{3} + \sum_{k=4}^{n} \frac{\ln k}{k} < \frac{\ln 3}{3} + \frac{1}{2}\sum_{k=4}^{n}\left[\ln^2 k - \ln^2(k-1)\right]$$

Az egyenlőtlenség jobb oldalán megjelenő összegben a tagok egyszerűsödnek, és éppen a kért egyenlőtlenség jobb oldalához jutunk.

$$\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n}\left[\ln^2(k+1) - \ln^2 k\right] < \sum_{k=3}^{n} \frac{\ln k}{k},$$

tehát a $\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n}\left[\ln^2(k+1) - \ln^2 k\right] = \frac{1}{2}\left[\ln^2(n+1) - \ln^2 3\right]$ egyenlőség alapján a bizonyítandó egyenlőtlenség első része is igaz.

5. Bizonyítsuk be, hogy az $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}-2\operatorname{arctg} x$ függvény konstans.

Bizonyítás. Kiszámítjuk az f függvény deriváltját.

$$f'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}}\cdot\frac{-2x\left(1+x^2\right)-\left(1-x^2\right)2x}{\left(1+x^2\right)^2}-\frac{2}{1+x^2}=$$

$$=\frac{1}{2x}\cdot\frac{4x}{1+x^2}-\frac{2}{1+x^2}=0,$$

tehát $f'(x)=0$, $\forall\, x>0$ esetén. Ebből következik, hogy a függvény konstans a $(0,+\infty)$ intervallumon. Mivel $f(0)=0$ és a függvény folytonos az értelmezési tartományon, következik, hogy $f(x)=0$ $\forall\, x>0$ esetén és így

$$\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}=2\operatorname{arctg} x\text{, ha } x\geq 0.$$

6. Határozzuk meg az összes olyan $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ deriválható függvényt, amelyre

$$f'(x)=a\cdot f(x),\ \forall\, x\in\mathbb{R}.$$

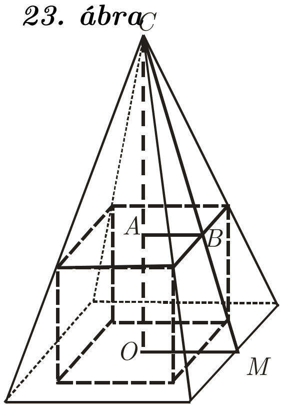
Megoldás. Nullára redukáljuk és beszorozzuk e^{-ax}-nel a kapott egyenlőséget. Így az

$$f'(x)\cdot e^{-ax}+f(x)\cdot(-a)e^{-ax}=0$$

egyenlőséghez jutunk, ahonnan következik, hogy a $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=e^{-ax}f(x)$ függvény deriváltja identikusan nulla az $\mathbb{R}$-en, tehát ez a függvény konstans. Az $e^{-ax}f(x)=c$ összefüggésből következik, hogy $f(x)=c\cdot e^{ax}$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$.

7. Írj az a oldalélű kocka köré minimális térfogatú szabályos négyoldalú gúlát úgy, hogy az alapja a kocka egyik lapjának síkjában legyen és a kocka többi négy csúcsa a gúla oldalélein helyezkedjen el.

23. ábra



Megoldás. Mivel a gúla szabályos kell legyen, csak az $AC=h$ magasságot kell meghatározzuk (lásd a 23. ábrát). Az ábra szerint $AB=\dfrac{a}{2}$, $AO=a$ és $\dfrac{OM}{\frac{a}{2}}=\dfrac{h+a}{h}$, tehát

$OM=\dfrac{a(a+h)}{2h}$, és a gúla alapja $2OM$. Következik, hogy a gúla térfogata $V(h)=\dfrac{(2OM)^2(a+h)}{3}=\dfrac{a^2(a+h)^3}{3h^2}$. A térfogat minimális lesz, ha $V'=0$. Az egyenlet:

$$V'=\frac{a^2}{3}\left(\frac{3(a+h)^2h^2-2h(a+h)^3}{h^4}\right)=0,\ 3h^2-2h(a+h)=0,\ h^2-2ah=0,$$

és mivel $h>0$, kapjuk, hogy $h=2a$.

Gyakorlatok

1. Tanulmányozzuk a következő függvények monotonitását:

a) $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$;

b) $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\cdot\ln x$;

c) $f:[0,\,2\pi]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x+\cos x$;

d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x+1}$.

2. Van-e az $f:\mathbb{R}\to\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$, $f(x)=\operatorname{arctg}x$ függvénynek szélsőértéke?

3. Határozd meg az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2-6x$ függvény szélsőérték-pontjait!

4. Határozd meg az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{-x^2}$ függvény monotonitási intervallumait. Monotonitás vizsgálat.

5. Bizonyítsd be, hogy ha az F és G függvények az $[a,\,b]$ intervallumon deriválhatók és minden $x\in[a,\,b]$ esetén $F'(x)\le G'(x)$, valamint $F(a)=G(a)$, akkor

$$F(x)\le G(x),\ \forall\, x\in[a,\,b].$$

6. Adott az $f,g:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg}x$ és $g(x)=-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$ függvény. Számítsd ki $f'(x)$-et és $g'(x)$-et! Mit állíthatsz az f és g függvények monotonitásáról az $I_1=(-\infty,0)$ és az $I_2=(0,+\infty)$ intervallumokon?

7. Bizonyítsd be, hogy ha az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvényre

$$|f(x)-g(x)|\le(x-y)^2$$

minden valós x és y esetén, akkor f konstans függvény!

8. Tegyük fel, hogy a $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény deriváltja korlátos ($|g'(x)|\le M$). Legyen $\varepsilon>0$ rögzített és $f(x)=x+\varepsilon\cdot g(x)$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$ esetén. Bizonyítsd be, hogy ha ε elég kicsi, akkor f injektív!

9. Bizonyítsd be, hogy ha a c_0, c_1, ..., c_n valós számokra $c_0+\dfrac{c_1}{2}+\dfrac{c_2}{3}...+\dfrac{c_n}{n+1}=0$, akkor a

$$c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_{n-1}x^{n-1}+c_nx^n=0$$

egyenletnek van legalább egy gyöke 0 és 1 között!

10. Bizonyítsd be, hogy ha az $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ függvény deriválható és $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$, akkor a $g:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x+1)-f(x)$, $\forall\, x>0$ függvényre $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$.

11. Bizonyítsd be, hogy ha az $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ függvényre teljesülnek a következő feltételek:

a) f folytonos $x\ge0$ esetén,

b) $f'(x)$ létezik $x>0$ esetén,

c) f' monoton növekvő,

akkor a $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ $(x > 0)$ függvény növekvő!

12. Igazoljuk a következő egyenlőtlenségeket:

a) $e^x > 1 + x$, ha $x \neq 0$;

b) $x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x$, ha $x > 0$;

13. Igazoljuk, hogy $\dfrac{2}{\pi} \cdot x < \sin x < x$, ha $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

14. Egy l magasságú szobrot egy h magasságú talapzatra helyeztek el. A szobortól milyen távolságra kell megállnunk, ha maximális szög alatt szeretnénk látni a szobrot?

15. Egy kúp alakú tetőszerkezet alá el szeretnénk rejteni egy henger alakú hordót. Mekkora lehet a hordó térfogatának maximális térfogata, ha a tető alkotói az alappal $45°$-os szöget zárnak be és az alapkörének sugara R?

16. Jelöljük $f(x)$-szel az R alapkörű és x alkotójú kúp térfogatának és a beleírható gömb térfogatának arányát. Határozd meg az $f(x)$ minimumát!

17. Egy $a \times b$ méretű kartonlap négy sarkából kivágunk egy-egy x oldalú négyzetet és a keletkezett négy téglalapot feltűrjük úgy, hogy egy hasáb alakú dobozt kapjunk. Határozd meg az x értékét úgy, hogy a keletkezett doboz térfogata maximális legyen!

18. Egy R sugarú körlapból kivágunk egy α középpontú szögnek megfelelő körcikket és a maradékból egy tölcsért készítünk (veszteségmentesen). Mekkora α esetén lesz a tölcsér térfogata maximális?

19. Egy tőlünk d távolságra és $n \cdot d$ magasságra levő céltáblára lövünk íjjal. Legalább mekkora kell legyen a nyílvesző kezdősebessége ahhoz, hogy elérje a célt, ha a légellenállást nem vesszük figyelembe?

20. Két párhuzamoson kötött R_1 és R_2 ellenállású vezetéken összesen I erősségű áram halad át. Milyen összefüggés áll az ellenállások és a rajtuk áthaladó áramerősségek közt, ha a rendszerben a Joule-Lenz effektusnak köszönhető hőveszteség minimális? (Az R ellenálláson az I áram által generált hőveszteség $R \cdot I^2$)

8.2. A deriválhatóság tanulmányozása a Lagrange tétel segítségével

A Lagrange tételből következik az alábbi tétel:

Tétel. Ha az $f : (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}$ függvény folytonos és deriválható az $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}$ halmazon és létezik a $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$ határérték, akkor az f függvény x_0-beli deriváltja létezik és egyenlő a $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$ határértékkel.

Bizonyítás. Legyen $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ egy tetszőleges pont. Az $[x, x_0]$ vagy $[x, x_0]$ intervallumon alkalmazható a Lagrange tétel (mert a végpontban nem szükséges a deriválhatóság), tehát létezik olyan $c_x \in (x, x_0)$, amelyre $f'(c_x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Ha

$x \to x_0$, akkor $c_x \in (x, x_0)$ alapján az előbbi egyenlőség bal oldalán szereplő kifejezésnek létezik határértéke és ez a határérték $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$, tehát a jobb oldalon álló kifejezésnek is van határértéke és ez is $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$. Ez azt jelenti, hogy a függvény deriválható x_0-ban és a deriváltja x_0-ban $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$.

Alkalmazások. 1. Tanulmányozzuk az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & x \le 0 \\ e^x, & x > 0 \end{cases}$ függvény deriválhatóságát.

Megoldás. A függvény folytonos és deriválható az $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ halmazon, mert elemi függvényként viselkedik ennek a halmaznak minden pontja körül. Tehát elégséges megvizsgálni a folytonosságot és deriválhatóságot az $x_0 = 0$ pontban. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = e^0 = 1$ és $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = 1 = f(0)$, tehát a függvény folytonos 0-ban.

Másrészt írhatjuk, hogy $f'(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x < 0 \\ e^x, & x > 0 \end{cases}$, tehát a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f'(x) = e^0 = 1$ és $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f'(x) = 1$ egyenlőségek alapján létezik a $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$ határérték és $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = 1$.

Az előbbi tétel értelmében f deriválható nullában és $f'(0) = 1$.

Megjegyzés. Láttuk, hogy ha egy intervallumon értelmezett függvény deriválható, akkor a deriváltja Darboux tulajdonságú. Ugyanakkor ha egy függvénynek elsőfajú szakadási pontja van, akkor nem Darboux tulajdonságú. Emiatt ha az $f : \left(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon\right) \to \mathbb{R}$ függvény folytonos és deriválható az $\left(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon\right) \setminus \left\{x_0\right\}$ halmazon és a derivált jobboldali határértéke nem egyenlő a derivált baloldali határértékével, akkor a függvény nem deriválható az x_0 pontban.

2. Határozzuk meg az a, b paraméterek értékét úgy, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^4 + ax + 2, & x < 0 \\ b + \ln\left(1 + x^4\right), & x \ge 0 \end{cases}$ függvény deriválható legyen.

Megoldás. A folytonosság feltétele: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = f(0)$. Ebből következik, hogy $b = 2$. Az előbbi tétel és megjegyzés értelmében a deriválhatóság feltétele:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f'(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f'(x),$$

tehát $a = 0$.

Gyakorlatok

Tanulmányozd a következő függvények deriválhatóságát:

1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\ln(x+1)-x, & x>0\\ x^4, & x\le 0\end{cases}$;

2. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x>0\\ x^2+1, & x\le 0\end{cases}$;

3. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<0\\ x^2+ax+b, & x\ge 0\end{cases}$;

4. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg} x, & x<0\\ \sin x, & x\ge 0\end{cases}$;

5. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\max\left\{x,x^2,x^3\right\}, & x\le 0\\ \min\left\{1+x,\dfrac{1}{x},e^x\right\}, & x>0\end{cases}$;

6. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}a\cdot\operatorname{arctg}\dfrac{x}{3}+b, & x\le 3\\ bx+1, & x>3\end{cases}$;

7. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\\ x^3, & x\in\mathbb{Q}\end{cases}$.

8.3. Konvex és konkáv függvények

Ebben a paragrafusban I intervallum. A X. osztály számára írt tankönyvben a következő értelmezést adtuk:

Értelmezés. 1. Az $f:I\to\mathbb{R}$ függvény pontosan akkor *konvex*, ha bármely $x_1,\ x_2\in I$ $(x_1<x_2)$ és bármely $\lambda\in[0,\ 1]$ esetén

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2).$$

2. Az $f:I\to\mathbb{R}$ függvény pontosan akkor *konkáv*, ha bármely $x_1,\ x_2\in I$ $(x_1<x_2)$ és bármely $\lambda\in[0,\ 1]$ esetén

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\ge\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2).$$

Megjegyzés. Szemléletesen ez azt jelenti, hogy a konvex függvények grafikus képének minden húrja a hozzá tartozó ív fölött helyezkedik el és konkáv függvények esetén az ív van a húr fölött. Ebből következik, hogy tetszőleges n oldalú sokszög esetén, ha a csúcsok egy konvex függvény grafikus képén helyezkednek el, akkor a sokszög valamilyen $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\ldots,\lambda_n$ súlyokhoz tartozó tömegközéppontja szintén a sokszöget burkoló ív fölött helyezkedik el. Konkáv sokszög esetén a tömegközéppont az ív alatt helyezkedik el. Ezeket a tulajdonságokat a Jensen egyenlőtlenség tartalmazza:

Tétel (Jensen) Az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csakis akkor konvex az I-n, ha minden $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ és bármilyen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in [0, 1]$, $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$ esetén

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k).$$

Megjegyzés. 1. Ha $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ akkor az előbbi egyenlőtlenség a következő alakban írható: $f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$

2. Az előbbi tétel indukcióval is igazolható.

Ha az f konvex függvény az $[a, b]$ intervallumon deriválható, akkor a függvény grafikus képének bármely pontjába húzott érintője a grafikus kép alatt van. Konkáv függvények esetén az érintő mindig a grafikus kép felett van. Ebből látható, hogy konvexitásnak (konkavitásnak) deriválható függvények esetén adhatunk más értelmezést (jellemzést) is. Látni fogjuk, hogy az elsőrendű derivált még nem elégséges, ezért kétszeresen deriválható függvényekkel foglalkozunk. Ebben a paragrafusban megvizsgáljuk, hogy mi az összefüggés a függvény konvexitása (konkavitása) és folytonossága közt és kétszer folytonosan deriválható függvények esetén megadjuk a konvexitás jellemzési tételét a függvény második deriváltja segítségével.

Értelmezés. Az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény $x_0 \in I$ pontbeli különbséghányados-függvényének nevezzük a $K_{x_0} : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$, $K_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ függvényt.

Tétel. Egy nem elfajuló intervallumon értelmezett valós függvény pontosan akkor konvex, ha minden különbséghányados-függvénye növekvő.

Bizonyítás. Legyen $I \subset D$ intervallum (D a függvény értelmezési tartománya) és az $a \in I$ egy tetszőlegesen rögzített pont. Tételezzük fel először, hogy f konvex függvény. Be kell látnunk, hogy minden $a \in I$ esetén K_a növekvő vagyis, hogy minden $x_1, x_2 \in I \setminus \{a\}$, $x_1 < x_2$ esetén

(1) $$K_a(x_1) \leq K_a(x_2)$$

Az a, x_1, x_2 számok elhelyezkedését illetően három eset lehetséges:

a) $a < x_1 < x_2$; **b)** $x_1 < x_2 < a$; **c)** $x_1 < a < x_2$.

Mivel $x_1 \in (a, x_2)$ $\exists \lambda \in (0,1)$ úgy, hogy $x_1 = \lambda \cdot a + (1 - \lambda) \cdot x_2$. Így az f konvexitásából egyszerű átalakítások során a következőket kapjuk:

$$K_a(x_1) = \frac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a} \leq \frac{\lambda f(a) + (1-\lambda) f(x_2) - f(a)}{x_1 - a} =$$

$$= (1-\lambda)\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_1-a} = \frac{a-x_1}{a-x_2}\cdot\frac{f(x_2)-f(a)}{x_1-a} = \frac{f(x_2)-f(a)}{x_2-a} = K_a(x_2),$$

vagyis az **a)** esetben igaz az egyenlőtlenség. Teljesen analóg módon igazolható a **b)** esetben is. A **c)** eset vizsgálata visszavezethető az előbbi két esetre. Felhasználva, hogy (1) fennáll az **a)** és **b)** esetben, valamint a különbséghányados-függvényekre triviálisan érvényes

(2) $$K_x(y) = K_y(x) \qquad \left(x,\ y\in I,\ x\neq y\right)$$

a következőket kapjuk:

$$K_a(x_1) = K_{x_1}(a) \le K_{x_1}(x_2) = K_{x_2}(x_1) \le K_{x_2}(a) = K_a(x_2)$$

vagyis az (1) egyenlőtlenség fennáll a **c)** esetben is. Tételünk első részét ezzel igazoltuk.

Tételünk második részének igazolásához induljunk ki abból, hogy f mindenik különbséghányados-függvénye növekvő és rögzítsük tetszőlegesen az $x_1,\ x_2\in I$, $x_1 < x_2$ pontokat. Legyen továbbá $x\in(x_1,\ x_2)$ tetszőlegesen rögzített és értelmezzük a $\lambda = \frac{x-x_2}{x_1-x_2}$, $\lambda\in\left(0,\ 1\right)$ számot. Így $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ és $1-\lambda = \frac{x_1-x}{x_1-x_2}$.

Felhasználva ezeket az egyenlőségeket és a különbséghányados-függvények (2)-es tulajdonságát, egyszerű átalakításokkal kapjuk, hogy

$$K_x(x_1) = K_{x_1}(x) = \frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x} = \frac{f(x_1)-f(x)}{(1-\lambda)(x_1-x_2)}.$$

Másrészt

$$K_x(x_2) = K_{x_2}(x) = \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = \frac{f(x_2)-f(x)}{(1-\lambda)(x_2-x_1)}.$$

A K_x függvény monoton növekvő, ezért az előbbi egyenlőségekből az adódik, hogy

$$\frac{f(x_1)-f(x)}{(1-\lambda)(x_1-x_2)} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{\lambda(x_2-x_1)}$$

vagyis

$$f\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right) = f(x) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

ez éppen azt jelenti, hogy az f függvény konvex.

Tétel. Ha az $f: I\to\mathbb{R}$ függvény konvex ($I=(a,b)$), akkor minden $x_0\in I$ pontban létezik az f jobb- és baloldali deriváltja és f folytonos az (a,b) intervallumon.

Bizonyítás. A K_{x_0} függvény növekvő az x_0 jobb és bal oldalán, tehát létezik a $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} K_{x_0}(x)$ és a $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} K_{x_0}(x)$ határérték. Ha $a < x_1 < x_2 < b$, az előbbi tétel alapján $K_{x_1}(x) = K_x(x_1) < K_x(x_2) = K_{x_2}(x)$ bármely $x_1 < x < x_2$ esetén. Ebből következik,

hogy $f_b'(x_1) \le f_j'(x_1) \le f_b'(x_2) \le f_j'(x_2)$. Így az intervallum belső pontjában a szélső deriváltak nem lehetnek végtelenek, tehát minden belső pontban a függvény jobbról is és balról is folytonos. Ebből következik, hogy a függvény a konvexitási tartomány belső pontjaiban folytonos.
A bizonyításból az is kitűnik, hogy ha a függvény deriválható és konvex, akkor a deriváltja növekvő. Ebből következik a kétszer deriválható konvex függvények jellemzési tétele:
Tétel. 1. Az $f : I \to \mathbb{R}$ kétszer deriválható függvény pontosan akkor konvex, ha a másodrendű deriváltja nem negatív.
2. Az $f : I \to \mathbb{R}$ kétszer folytonosan deriválható függvény pontosan akkor konkáv, ha a másodrendű deriváltja nem pozitív.
Bizonyítás. Ha a másodrendű derivált nem negatív, akkor az elsőrendű derivált növekvő függvény. Ha $x_1 < x < x_2$, akkor alkalmazzuk a Lagrange tételt az $[x_1, x]$ és $[x, x_2]$ halmazokon, tehát létezik $c_1 < x < c_2$ úgy, hogy

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(c_1) < f'(c_2) = \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

Ebből az egyenlőtlenségből következik, hogy

$$(x_2-x_1)f(x) \le (x_2-x)f(x_1) + (x-x_1)f(x_2)$$

és ez az egyenlőtlenség a konvexitás értelmezésében szereplő egyenlőtlenség az $x = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2$ jelöléssel.
Ha f kétszer folytonosan deriválható és konvex akkor az előbbi tétel bizonyítása alapján a deriváltja növekvő és így a másodrendű derivált pozitív.

Ez a tétel lehetővé teszi a konvexitás egyszerű vizsgálatát nagyon sok elemi függvény esetén. Látható, hogy kétszer folytonosan deriválható függvény a konvexitását csakis a másodrendű derivált zérushelyeiben változtathatja meg. A könnyebb leírás érdekében a következő értelmezést adjuk:
Értelmezés. Ha az $f : (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}$ függvény az $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ intervallumon konvex és az $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ intervallumon konkáv vagy fordítva, akkor az x_0 pontot az f függvény *inflexiós (vagy áthajlási) pontjának* nevezzük.
Mivel Darboux tulajdonságú függvény csak a zérushelyeiben válthat előjelt, igaz a következő tétel:
Tétel. Ha az $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ függvény kétszer deriválható és $x_0 \in (a, b)$ egy inflexiós pontja f-nek, akkor $f''(x_0) = 0$.
Megjegyzés. Ha a függvény másodrendű deriváltja nem létezik vagy nem folytonos az értelmezési tartományon, akkor a függvénynek lehet olyan áthajlási pontja is, amelyben a másodrendű derivált nem 0.

A másodrendű derivált és a szélsőértékek kapcsolata

A szélsőérték-pontok vizsgálatakor láttuk, hogy a stacionárius pontok közt lehetnek olyan pontok is, amelyek nem szélsőérték-pontok. A szemlélet azt sugallja, hogy ha egy stacionárius pont a konvexitási tartomány belsejében van, akkor az biztosan szélsőérték-pont (hasonlóan a konkáv függvények esetében is). Erre vonatkozik a következő tétel:

Tétel. 1. Ha az $f:(a,\,b)\to\mathbb{R}$ függvény kétszer deriválható, $\alpha\in(a,b)$ egy stacionárius pontja és $f''(\alpha)>0$, akkor az $x_0=\alpha$ pontban lokális (helyi) minimumpont van.

2. Ha az $f:(a,\,b)\to\mathbb{R}$ függvény kétszer deriválható, $\alpha\in(a,b)$ egy stacionárius pontja és $f''(\alpha)<0$, akkor az $x_0=\alpha$ pontban lokális (helyi) maximumpont van.

Példák

1. Mivel $(\sin x)''=-\sin x\le 0$ minden $x\in[0,\pi]$, ezért az $f(x)=\sin x$ függvény ezen az intervallumon konkáv.

2. Az $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4$, $\left(x^4\right)''=12x^2\ge 0$ a $[-1,1]$ intervallumon konvex függvény.

3. Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^3-6x$ függvény esetében $f'(x)=6x^2-6$, $f''(x)=12x$. A függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol $f'(x)=0$. Esetünkben $6x^2-6=0$, azaz $x=1$ vagy $x=-1$. A függvény az $I_1=(-\infty,\,-1)$ intervallumon növekvő, mert $f'(x)>0$. Az $I_2=(-1,\,1)$ intervallumon f csökkenő, mert $f'(x)<0$; az $I_3=(1,\,+\infty)$ intervallumon ismét monoton növekvő, mert $f'(x)>0$. Ugyanakkor $f''(x)<0$, ha $x<0$ és $f''(x)>0$, ha $x>0$. Táblázatba foglalva:

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$f'(x)$	$++++$	0	$----$	-6	$----$	0	$++++$
$f''(x)$	$----$	-12	$----$	0	$++++$	12	$++++$
$f(x)$	konkáv	4	konkáv	0	konvex	-4	Konvex
		Max		Inflexiós pont		*Min*	

Gyakorlatok és feladatok

1. Tanulmányozd a következő függvények konvexitását és konkavitását!

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x$; **b)** $f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{tg}x$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{-x^2}$; **d)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg}x$;

e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^5-x$; **f)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^6-3x^4+4x^2-32$.

2. Tanulmányozd a következő függvények konvexitási és konkavitási szakaszait és határozd meg az inflexiós pontjait (a függvények a maximális értelmezési tartományukon értelmezettek):

a) $f(x)=3x^2-x^3$; **b)** $f(x)=\dfrac{a^3}{a^2+x^2}$ $(a>0)$; **c)** $f(x)=x+x^{\frac{5}{3}}$;

d) $f(x)=\sqrt{1+x^2}$; **e)** $f(x)=x+\sin x$; **f)** $f(x)=\ln\left(1+x^2\right)$;

g) $f(x)=1+\sqrt[3]{x}$; **h)** $f(x)=x+\sin x$; **i)** $f(x)=x^n \ (n>1)$;

j) $f(x)=e^x$; **k)** $f(x)=x\ln x$; **l)** $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

3. Bizonyítsd be, hogy ha az $f:(a,\,b)\to\mathbb{R}$ folytonos függvényre

$f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\le\dfrac{f(x)+f(y)}{2}$ minden $x,\,y\in(a,\,b)$ esetén, akkor f konvex.

4. Bizonyítsd be, hogy ha f konvex az $(a,\,b)$ intervallumon és $a<x_1<x_2<x_3<b$,

akkor $$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}\le\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

8.4. Függvények ábrázolása

8.4.1. Aszimptoták

A nem korlátos síkgörbék (amelyek nem helyezhetők el egy téglalapban) esetében feltevődik az a kérdés, hogy a görbe nem korlátos ágai nem közelednek-e (bizonyos értelemben) minden határon túl egy egyeneshez? Ha ilyen egyenes létezik akkor ezt az egyenest a görbe (a grafikus kép) *aszimptotájának* nevezzük.

Az aszimptotákat három csoportba osztjuk:

1. függőleges aszimptoták (az Oy tengellyel párhuzamos aszimptoták);

2. vízszintes aszimptoták (az Ox tengellyel párhuzamos aszimptoták);

3. ferde aszimptoták (egyik tengellyel sem párhuzamos aszimptoták).

1. Függőleges aszimptoták

Az $x=a$ függőleges egyeneshez minden határon túl akkor közeledhet a grafikus kép, ha a-ban a függvény jobb- vagy baloldali határértéke ∞ vagy $-\infty$. Ezt a következő értelmezésben rögzítjük:

Értelmezés. Ha valamely a $(a\in\mathbb{R})$ pontban az $f:D\to\mathbb{R}$ függvénynek vagy a baloldali vagy a jobboldali határértéke végtelen, akkor az $x=a$ egyenes (párhuzamos az Oy tengellyel) a függvény grafikonjának *függőleges aszimptotája*.

Megjegyzés. Ha f értelmezett és folytonos az a pontban akkor

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=f(a),$$

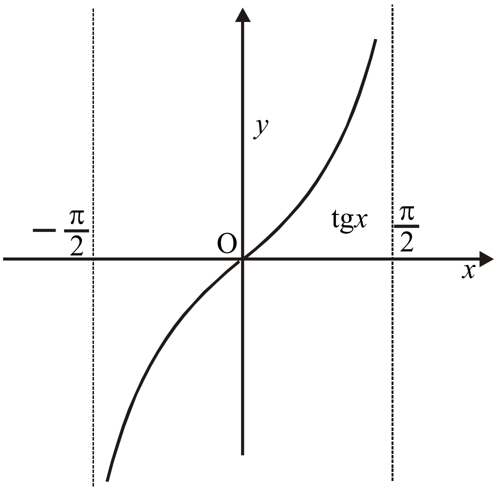
tehát a függvény grafikonjának az $x=a$ pontban nincs függőleges aszimptotája (a folytonossági pontokban nincs függőleges aszimptota).

Példák

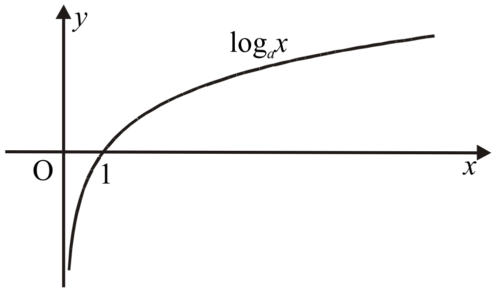
1. Az $f:\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{tg}x$ függvény esetében $\lim\limits_{x\nearrow\frac{\pi}{2}}\operatorname{tg}x=+\infty$ és $\lim\limits_{x\searrow-\frac{\pi}{2}}=-\infty$, tehát az $x=\dfrac{\pi}{2}$ és az $x=-\dfrac{\pi}{2}$ egyenesek függőleges aszimptoták.

Ha a tangens függvényt a maximális értelmezési tartományon vizsgáljuk, végtelen sok függőleges aszimptotát láthatunk és ezek az $x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ egyenletű egyenesek.

2. Az $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$ függvénynek az Oy tengely függőleges aszimptotája, mivel $\lim\limits_{x\searrow 0}\ln x = -\infty$.

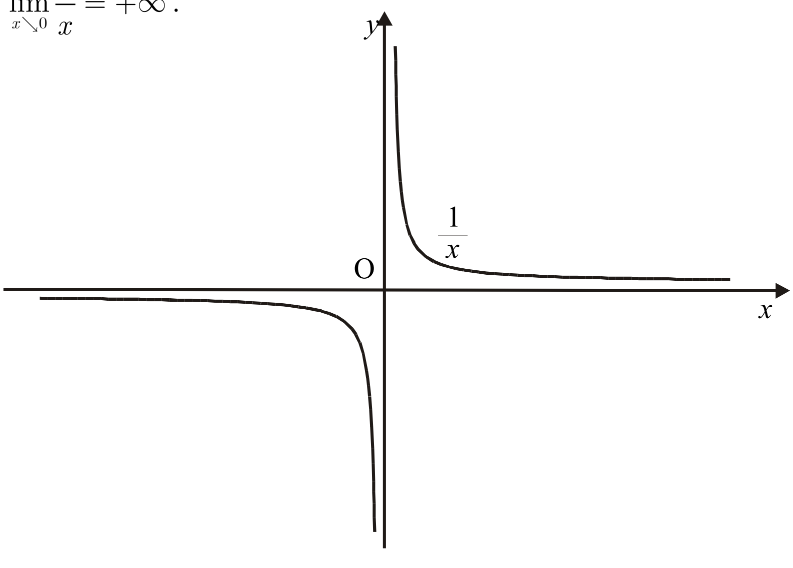


24. ábra



25. ábra

3. Az $f(x)=\dfrac{1}{x}$ függvénynek az Oy tengely függőleges aszimptotája, mivel $\lim\limits_{x\nearrow 0}\dfrac{1}{x}=-\infty$, $\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{1}{x}=+\infty$.



26. ábra

2. Vízszintes aszimptoták

Az előbbi ábrán az is látható, hogy a grafikus kép közeledik az $y = 0$ egyenletű egyeneshez, amikor $x \to \pm\infty$. Az $y = 0$ egyenletű egyenest a függvény vízszintes aszimptotájának nevezzük. Érvényes a következő értelmezés:

Értelmezés. Az $y = a$ egyenletű egyenest az $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ függvény *vízszintes aszimptotájának* nevezzük a $+\infty$ felé, ha $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$. Az $y = a$ egyenletű egyenest az $f : (-\infty, a) \to \mathbb{R}$ függvény *vízszintes aszimptotájának* nevezzük a $-\infty$ felé, ha $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$.

3. Ferde aszimptoták

Az $y = mx + n$ egyenletű egyenes és a grafikus kép x_0 abszcisszájú pontjai közti távolság $\left|f(x_0) - mx_0 - n\right|$, tehát a grafikus kép akkor tart az $y = mx + n$ egyenletű egyeneshez, ha az előbbi kifejezés határértéke $x_0 \to \pm\infty$ esetén 0. Ez indokolja az alábbi értelmezést:

Értelmezés. Az $y = mx + n$ egyenest az $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ függvény *ferde aszimptotájának* nevezzük a $+\infty$ -ben, ha

(1) $$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0.$$

Hasonlóan, ha a függvény értelmezési tartománya tartalmaz egy $(-\infty, a)$ alakú félegyenest, akkor az $y = mx + n$ egyenest ferde aszimptotának nevezzük a $-\infty$ felé, ha

(2) $$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0.$$

Az (1) határérték felírható $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left[\dfrac{f(x)}{x} - m\right] = 0$ alakban, mivel $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-n}{x} = 0$.

Tehát $+\infty$ felé a ferde aszimptota paramétereit az

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ és } n = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx]$$

egyenlőségekből számíthatjuk ki, ha az előbbi határértékek léteznek. m az aszimptota iránytényezője és n az aszimptota ordinátája az origóban.

Tehát a grafikon $+\infty$-be mutató ágához húzott aszimptotának a meghatározására a következő szabályt kapjuk:

a) Kiszámítjuk a $m = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ határértéket.

b) Ha m véges akkor kiszámítjuk a $n = \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - mx]$ határértéket.

c) Ha n is véges akkor az $y = mx + n$ egyenes a $+\infty$ -be aszimptota.

Hasonló eljárással grafikus kép $-\infty$-be mutató ágához húzott aszimptota is meghatározható. Az $y = m'x + n'$ egyenletű egyenes pontosan akkor ferde aszimptota a $-\infty$ felé, ha $m' = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ és $n' = \lim\limits_{x\to-\infty} \left[f(x) - m'x\right]$.

Megjegyzések. 1. Ha két határérték közül az egyik nem létezik vagy végtelen akkor nincs ferde aszimptotája.
2. Az értelmezésekből következik, hogy ha egy függvénynek $+\infty$-ben (vagy $-\infty$-ben) ferde aszimptotája van, akkor nincs vízszintes aszimptotája és fordítva.

Példák. 1. Határozzuk meg az $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ függvény aszimptotáit.

Megoldás. Az $x=0$ pontban függőleges aszimptota van, mert $f(+0)=\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{1}{x}=+\infty$ és $f(-0)=\lim\limits_{x\nearrow 0}\dfrac{1}{x}=-\infty$. Mivel $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)=1$ és $n=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\dfrac{1}{x}-1\cdot x\right)=0$, az $y=x$ egyenletű egyenes ferde aszimptota $+\infty$-ben. A $-\infty$-ben $m'=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$ és $n'=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\dfrac{1}{x}-x\right)=0$, tehát $y=x$ (az első szögfelező) a $-\infty$-ben is ferde aszimptota.

Ha a függvényt tanulmányozzuk az $f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}$ derivált segítségével, akkor a következő táblázatból látjuk a változását:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+\,+\,+\,+$	0	$-\,-\,-\,-$	$\vert$	$-\,-\,-\,-$	0	$+\,+\,+\,+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$\vert$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$
			Max				Min		

$f'(x)=0$, ha $x_{1,2}=\pm1$. $f''(x)=\dfrac{1}{x^3}>0$, ha $x>0$. $f''(x)<0$, ha $x<0$.

Egy közelítő grafikus kép a 27. ábrán látható.

2. Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$ függvénynek nincs semmilyen aszimptotája. f folytonos az $\mathbb{R}$-en, tehát nincs függőleges aszimptota. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x}=+\infty$ és $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$, tehát nincs sem vízszintes sem ferde aszimptota $+\infty$-ben. Hasonlóan belátható, hogy nincs aszimptota $-\infty$-ben sem.

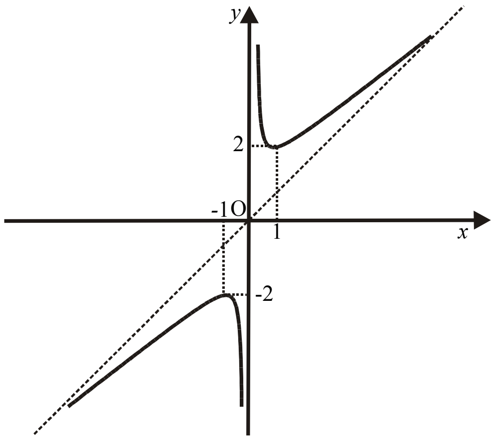
3. Határozzuk meg az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ függvény aszimptotáit.

Megoldás. A $+\infty$ felé $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=1$, és $n=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+1}-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$, tehát az első szögfelező az aszimptota. A $-\infty$-ben

$$m' = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = -1,$$

$$n' = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0,$$

tehát $y=-x$ az aszimptota egyenlete a $-\infty$ -ben.



27. ábra

Gyakorlatok

1. Határozd meg a következő függvények grafikus képeinek az aszimptotáit (a függvényeket a maximális értelmezési tartományukon értelmezzük):

a) $f(x) = \dfrac{x^2-x+1}{x-1}$; **b)** $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$; **c)** $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$;

d) $f(x) = \dfrac{x^3+x^2}{x^2-4}$; **e)** $f(x) = \dfrac{1-x^3}{x^2}$; **f)** $f(x) = e^x$;

g) $f(x) = \ln\left(1-x^2\right)$; **h)** $f(x) = xe^x$; **i)** $f(x) = x + \dfrac{\ln x}{x}$;

j) $f(x) = \sqrt{x^2+x}+x$; **k)** $f(x) = \sqrt[3]{x^3-x^2}$; **l)** $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$;

m) $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$; **n)** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2x-3}$; **o)** $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$;

p) $f : \left(-\infty, -1\right] \cup \left[1, +\infty\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2-1}$;

q) $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)}$.

8.4.2. Grafikus ábrázolás

Korábbi tanulmányaitok során láttátok, hogy az $f : D \to \mathbb{R}$ $(D \subseteq \mathbb{R})$ függvény grafikonja a $G = \left\{\left(x, f(x)\right) \mid x \in D\right\}$ halmaza és a grafikus kép ennek a halmaznak a síkbeli ábrázolása.

Ebben a paragrafusban a matematikai analízis eszközeivel tanulmányozzuk a függvényt. Ez a következő lépések elvégzését jelenti:

I. meghatározzuk (ha nincs megadva) a maximális értelmezési tartományt;

II. meghatározzuk a tengelymetszeteket;

III. meghatározzuk az aszimptotákat;

IV. az f' derivált segítségével tanulmányozzuk a függvény monotonitását és meghatározzuk a szélsőérték-pontokat;

IV. az f'' derivált segítségével tanulmányozzuk a függvény konvexitását és meghatározzuk az áthajlási pontokat;

V. az előbbi adatok alapján elkészítjük a függvény változási táblázatát;

VI. megrajzoljuk a grafikus képet.

Ezeknek a lépéseknek a betartása nem kötelező, fontos az, hogy a tanulmányozás minél átfogóbb legyen. Hasznosak lehetnek az alábbi pontosítások.

Érdemes megvizsgálni, hogy a függvény rendelkezik-e valamilyen jellegzetes tulajdonsággal (páros, páratlan, periodikus).

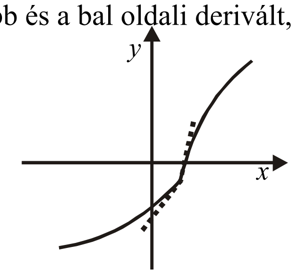
A folytonosság vizsgálatánál kiszámíthatjuk a szakadási pontokban a jobb és bal oldali határértéket.

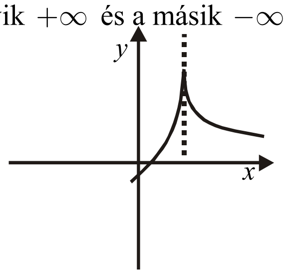
A deriválhatóság tanulmányozásakor a derivált szakadási pontjaiban kiszámítjuk a derivált jobb és baloldali határértékét. A derivált szakadási pontjai közül néhány különösen fontos kategóriát megemlítünk:

1. Szögpontok. Az $x_0 \in (a, b)$ pontot az $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ függvény (vagy a grafikus kép) *szögpontjának* nevezzük, ha x_0-ban a jobb és a baloldali érintők valamilyen 0-tól különböző szöget zárnak be. Ez azt jelenti, hogy létezik a jobb és a bal oldali derivált, nem egyenlők egymással és nem mind a kettő végtelen (lásd a 28. ábrát).

2. Visszatérési pontok. Az $x_0 \in (a, b)$ pontot az $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ függvény (vagy a grafikus kép) *visszatérési pontjának* nevezzük, ha a függvény nem deriválható x_0-ban de a jobb és a baloldali érintők $0°$-os szöget zárnak be. Ez azt jelenti, hogy létezik a jobb és a bal oldali derivált, az egyik $+\infty$ és a másik $-\infty$ (lásd 29. ábrát).

28. ábra





29. ábra

Példák

1. Ábrázoljuk az $f(x) = x^3$ függvényt.

I. $D = \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

II. A grafikus kép a koordinátatengelyeket a $(0, 0)$ pontban metszi.

$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$, tehát a függvény páratlan. (A grafikus kép szimmetrikus az origóra nézve)

III. Függőleges aszimptota nincs, mivel f folytonos az egész $\mathbb{R}$-en.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = (-\infty)^3 = -\infty \,;\; \lim_{x\to+\infty} f(x) = (+\infty)^3 = +\infty ,$$

tehát nincs vízszintes aszimptota. Ferde aszimptota sincs, mert

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty,\ \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty.$$

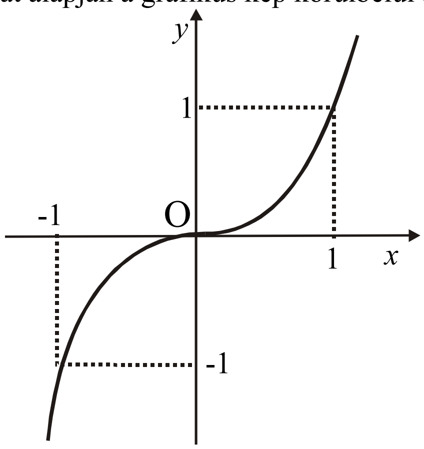
IV. $f'(x)=3x^2\geq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, és egyenlőség az $x=0$ esetén. Ebből következik, hogy a függvény az $\mathbb{R}$-en növekvő.

V. $f''(x)=6x$, tehát a függvény konkáv a $(-\infty,0)$ intervallumon és konvex a $(0,\infty)$ intervallumon, tehát az $x=0$ pont inflexiós pont.

VI. Az előbbi adatok alapján a változási táblázat a következő:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$++++$	0	$++++$	
$f''(x)$		$----$	0	$++++$	
$f(x)$		$\nearrow$ konkáv	0	$\nearrow$ konvex	

A táblázat alapján a grafikus kép körülbelül a 30. ábrának megfelelő görbe.



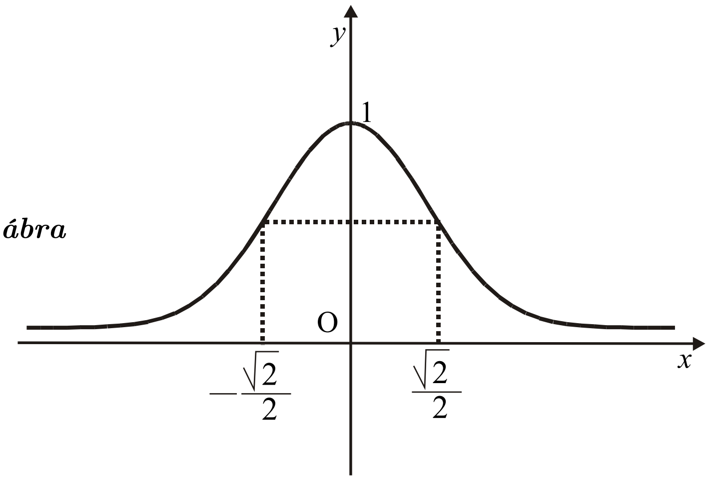
30. ábra

2. Ábrázoljuk az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{-x^2}$ függvényt.

Megoldás. A grafikus kép az Ox tengelyt nem metszi, mert az exponenciális függvény csak szigorúan pozitív értékeket vesz fel. A $\lim\limits_{x\to\pm\infty}e^{-x^2}=e^{-\infty}=0$ egyenlőségek alapján az Ox tengely mindkét irányban vízszintes aszimptota. A grafikus kép az Oy tengelyt a $(0,1)$ pontban metszi. $f'(x)=-2xe^{-x^2}$, tehát az $x=0$ pont az egyetlen stacionárius pont. Ez egyben helyi maximum is, mert a derivált előjele pozitívról negatívra változik. $f''(x)=2e^{-x^2}\left(2x^2-1\right)$, tehát az inflexiós pontok $x_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. (Ezekben a pontokban a másodrendű derivált előjele megváltozik.) Az eddigi adatok alapján a következő táblázathoz jutunk:

x	$-\infty$		$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$			$++++$		0		$----$		
$f''(x)$		$++++$	0		$----$		0	$++++$	
$f(x)$		$\nearrow$	$e^{-\frac{1}{2}}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$e^{-\frac{1}{2}}$	$\searrow$	

A függvény konvex a $\left(-\infty, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ és $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ intervallumokon és konkáv a $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ intervallumon. A függvény páros ($f(-x) = f(x)$) és ezért a grafikus kép szimmetrikus az Oy tengelyre nézve. A grafikon a jellegzetes Gauss-féle „haranggörbe”



31. ábra

3. Ábrázoljuk az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 2\sin x - \sin 2x$ függvényt!

Megoldás. Az $f(\pi - x) = -f(\pi + x)$ egyenlőség alapján a függvény grafikus képe az $x = \pi$ pontra nézve szimmetrikus. Ugyanakkor a függvény periodikus és a főperiódusa $T = 2\pi$, tehát elégsé a $[0, 2\pi]$ intervallumon tanulmányozni és ábrázolni. $f(x) = 2\sin x - 2\sin x\cos x = 2\sin x(1-\cos x)$, tehát

$$f'(x) = 2(1-\cos x)(2\cos x + 1).$$

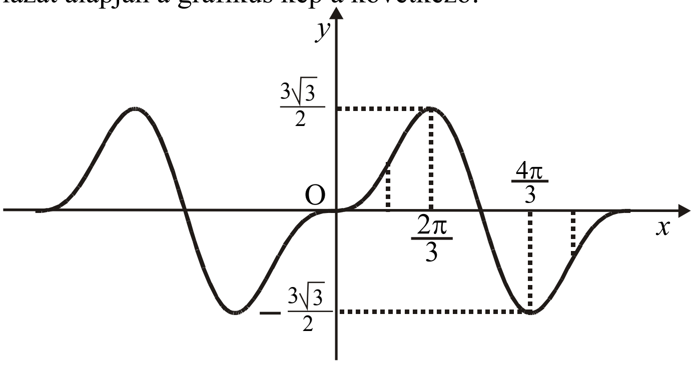
Így a vizsgált intervallumban csak az $x = 0$ és $x = \dfrac{2\pi}{3}$ a stacionárius pontok.

$$f''(x) = 2\sin x(4\cos x - 1) = 0,$$

tehát a másodrendű derivált az $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi - \arccos\dfrac{1}{4}$ és $x = \arccos\dfrac{1}{4}$ pontokban vált előjelt. Az eddigi adatok szerint az alábbi táblázatot készíthetjük:

x	0		$\arccos(1/4)$		$2\pi/3$		π
$f'(x)$	0		$++++$		0	$----$	
$f''(x)$	0	$++++$	0		$----$		0
$f(x)$	0		$\nearrow$		Max	$\searrow$	0
	konvex		|		konkáv		

A táblázat alapján a grafikus kép a következő:



32. ábra

4. Ábrázoljuk az $f:\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ függvényt.

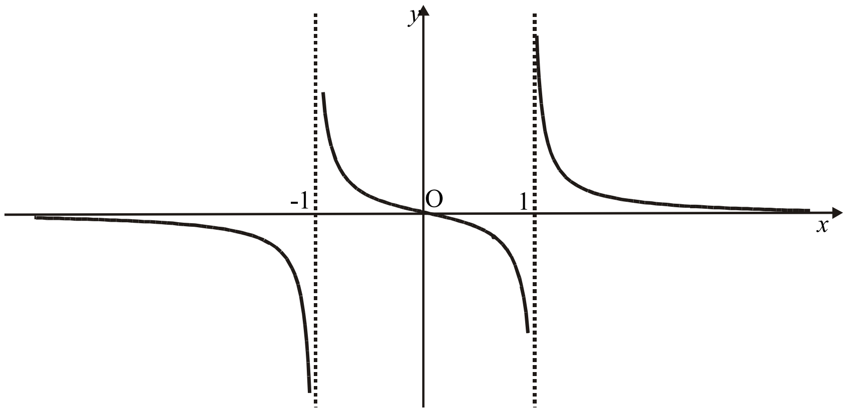
Megoldás. A grafikus kép a tengelyeket csak az origóban metszi. A $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{x}}=0$ egyenlőségek alapján az Ox tengely vízszintes aszimptota mindkét irányban. A függvény páratlan, tehát a grafikus kép szimmetrikus az origóra nézve. Továbbá $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\dfrac{x}{x^2-1}=-\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}\dfrac{x}{x^2-1}=+\infty$, (és ez alapján $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\dfrac{x}{x^2-1}=-\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\dfrac{x}{x^2-1}=+\infty$), tehát az $x=1$ és $x=-1$ egyenletű egyenesek függőleges aszimptoták (mindkét oldalukról). Mivel $f'(x)=-\dfrac{x^2+1}{\left(x^2-1\right)^2}<0$ minden megengedett x esetén, a függvény csökkenő.

$f''(x)=\dfrac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)^3}$, tehát az alábbi táblázatban láthatjuk a függvény változását:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$----$	|	$----$			|	$----$	
$f''(x)$		$----$	0	$++++$	0	$----$	|	$++++$	0
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty \mid +\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty \mid +\infty$	$\searrow$	0
		konkáv	|	konvex	|	konkáv	|	konvex	

Fejezet tartalma Tartalomjegyzék

A táblázat alapján a $\{-1, 0, 1\}$ halmaz elemei áthajlási pontok (nem mindegyik gyöke a másodrendű deriváltnak!) és a grafikus kép a 33. ábrán látható.



33. ábra

5. Ábrázoljuk az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = a^x$, $a \neq 1$, $a > 0$ függvényt!

I. $D = \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} \infty, \text{ ha } a > 1 \\ 0, \text{ ha } 0 < a < 1 \end{cases}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0, \text{ ha } a > 1 \\ \infty, \text{ ha } 0 < a < 1 \end{cases}$.

$f(0) = 1$, tehát a grafikus kép az Oy tengelyt a $(0, 1)$ pontban metszi. Mivel $f(x) = a^x > 0$ a grafikus kép nem metszi az Ox tengelyt.

II. Az Ox tengely vízszintes aszimptota: $y = 0$, a $-\infty$-ben, ha $a > 1$ és $+\infty$-ben, ha $0 < a < 1$.

III. $f'(x) = a^x \ln a > 0$, ha $a > 1$, és $f'(x) < 0$, ha $0 < a < 1$, tehát a függvény szigorúan monoton és nincs szélsőérték pontja.

IV. $f''(x) = a^x (\ln a)^2 > 0$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, tehát a függvény konvex.

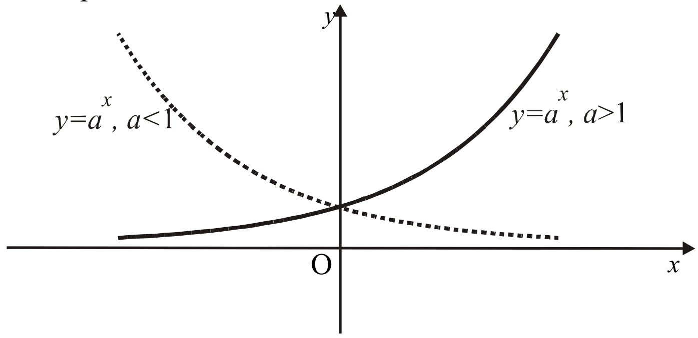
V. Az értéktáblázat $a > 1$ esetén.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	$++++$	$++++$	$++++$	$++++$	$+++++$
$f''(x)$	$++++$	$++++$	$++++$	$++++$	$+++++$
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
			konvex		

Az értéktáblázat $0 < a < 1$ esetén.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	$----$	$----$	$----$	$----$	$----$ $----$
$f''(x)$	$++++$	$++++$	$++++$	$++++$	$+++++$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0
			konvex		

A grafikus kép a 34. ábrán látható.



34. ábra

6. Az előbbi példában vizsgáltuk az exponenciális függvényt. A grafikonból és az értéktáblázatból is látható, hogy a függvény injektív, $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$ ezért az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ függvény szürjektív. Mivel injektív is és szürjektív is a függvény bijektív, tehát van inverz függvénye. Az inverz függvény folytonos és deriválható is (az általános tételek alapján) és a grafikus képe az eredeti függvény szimmetrikusa az első szögfelezőre nézve, tehát a $f^{-1} : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \log_a x$ függvény grafikus képe az alábbi ábrán látható. A tulajdonságok vizsgálata nem szükséges, mert az exponenciális függvény esetén ezeket elvégeztük. A könnyebb memorálás érdekében elkészítettük a változási táblázatot.

$0 < a < 1$ esetén

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\vert$	$- - - -$	$- - - -$	$- - - -$	
$f''(x)$	$\vert$	$+ + + +$	$+ + + +$	$+ + + +$	
$f(x)$	$\vert -\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

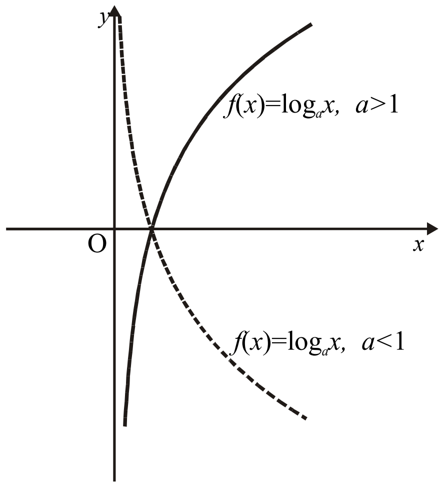
konvex

$a > 1$ esetén

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\vert$	$+ + + +$	$+ + + +$	$+ + + +$	
$f''(x)$	$\vert$	$- - - -$	$- - - -$	$- - - -$	
$f(x)$	$\vert +\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

konkáv

35. ábra

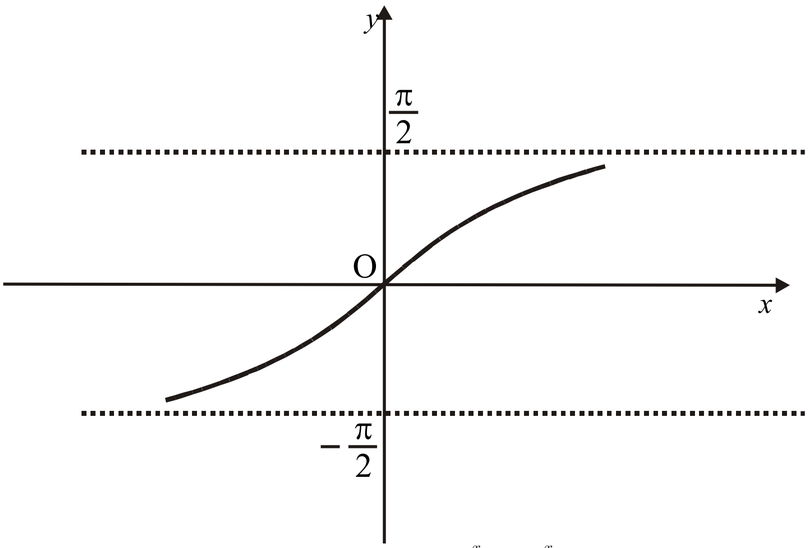


7. Ábrázoljuk az $f:\mathbb{R}\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, $f(x)=\operatorname{arctg} x$ függvényt!

Megoldás. $D=\mathbb{R}=\left(-\infty,+\infty\right)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\frac{\pi}{2}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\frac{\pi}{2}$, $f(0)=0$. $y=-\frac{\pi}{2}$ és $y=\frac{\pi}{2}$ vízszintes aszimptoták. $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}>0$ minden $x\in\mathbb{R}$ esetén, tehát a függvény szigorúan növekvő. $f''(x)=-\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$, tehát $x=0$ az egyetlen inflexiós pont (mivel $f''(x)>0$, ha $x<0$ és $f''(x)<0$, ha $x>0$). Az eddigiek alapján a következő táblázatot készíthetjük:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$++++$ $++++$	$++++$	$++++$ $++++$	
$f''(x)$		$++++$	0	$----$	
$f(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$
		konvex	|	konkáv	

A táblázat alapján az alábbi grafikus képet rajzolhatjuk.



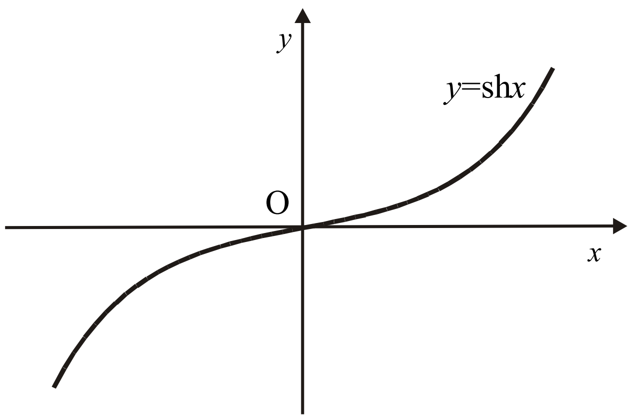
36. ábra

8. Ábrázoljuk az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\operatorname{sh} x$ (szinusz hiperbolikusz) függvényt!

Megoldás. A függvény az egész $\mathbb{R}$-en értelmezett és folytonos, a koordinátatengelyeket az $(0,\,0)$ pontban metszi. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ és $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$, tehát a függvénynek nincs aszimptotája. $f'(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}>0$, tehát f szigorúan növekvő. $f''(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=f(x)<0$, ha $x>0$ és $f''(x)>0$, ha $x<0$, tehát a következő táblázatot készíthetjük:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+ ++			
$f''(x)$		+ + + + + + +	0	- - - - - - - - - - - - - - - - - -	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ konkáv	0	$\nearrow$ konvex	$+\infty$

A függvény grafikus képe az alábbi ábrán látható:



37. ábra

9. Az előbbi $\operatorname{sh}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény bijektív, tehát van inverze $\operatorname{sh}^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Határozzuk meg az inverz függvényét és ábrázoljuk.

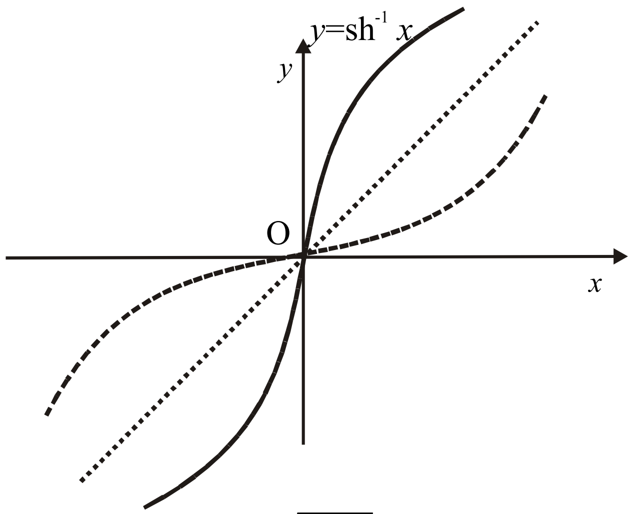
Megoldás. Megoldjuk az $\operatorname{sh} t=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}=x$ egyenletet. Az $e^t=u$ változócserét alkalmazzuk $u-\dfrac{1}{u}=2x$, tehát $u=x\pm\sqrt{x^2+1}$. Mivel $u=e^t$ csak pozitív lehet kapjuk, hogy $e^t=x+\sqrt{x^2+1}$, ahonnan $t=\operatorname{sh}^{-1}x=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$, tehát az inverz függvény

$$\operatorname{sh}^{-1}x=f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right).$$

Ennek a grafikus képét elkészíthetjük a függvény tanulmányozásával vagy az f és az f^{-1} grafikus képe közti szimmetria segítségével. A számításokat nem részletezzük, mert az előbbi megjegyzés és az előbbi példa értelmében nem szükségesek a grafikus kép megrajzolásához. A függvény változását a következő táblázat tartalmazza.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+ +			
$f''(x)$		+ + + + + + + + + + +	0	- - - - - - - - - - - - - - - - - -	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
		konvex	|	konkáv	

A grafikus kép az alábbi ábrán látható.



38. ábra

10. Ábrázoljuk az $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$ függvényt a maximális értelmezési tartományán.

Megoldás. I. Határozzuk meg a maximális értelmezési tartományt. $x^2 - 1 \geq 0$ vagyis $D = \left(-\infty, -1\right] \cup \left[1, +\infty\right)$. A függvény grafikus képe nem metszi a koordinátatengelyeket és a függvény nem páros, nem páratlan és nem periodikus.

II. Függőleges aszimptota nincs, mert folytonos a D halmazon.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 - 1} + x\right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} - x} = \frac{-1}{+\infty} = 0.$$

Tehát az $y = 0$ vízszintes aszimptota $-\infty$ -ben.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,\ m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right) = 2,$$

$$n = \lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - mx\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 1} - x\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = \frac{-1}{+\infty} = 0.$$

Tehát az $y = 2x$ egyenes a $+\infty$ -ben ferde aszimptota.

III. $f'(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$, ha $x \in \left(-\infty, -1\right) \cup \left(1, +\infty\right)$ és a függvény az $x = \pm 1$ pontokban nem deriválható.

Fejezet tartalma Tartalomjegyzék

$$f_b'(-1) = f'(-1-0) = \lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f'(x) = -\infty\,;\ f_j'(1) = f'(1+0) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f'(x) = +\infty\,.$$

Tehát az $x = \pm 1$ pontokban végtelen a baloldali, illetve jobboldali deriválrt (az Oy tengellyel párhuzamos bal-, illetve jobboldali fél-érintő).

$f'(x) < 0$, ha $x < -1$ és $f'(x) > 0$, ha $x > 1$, tehát a függvény a $\left(-\infty,\,-1\right)$ intervallumon csökkenő és az $\left(1,\,+\infty\right)$ intervallumon növekvő.

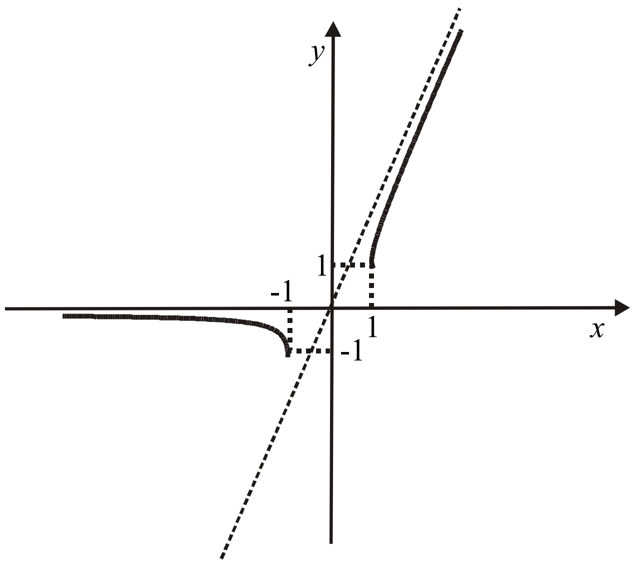
$$f''(x) = -\frac{1}{\left(x^2-1\right)\sqrt{x^2-1}} < 0\,,\ x \in \left(-\infty,\,-1\right) \cup \left(1,\,+\infty\right),$$

tehát a függvény konkáv az értelmezési tartományán.

IV. Az előbbiek alapján a következő változási táblázatot készíthetjük:

x	$-\infty$		-1	///////////////	1		$+\infty$
$f'(x)$		- - - - - - - - - - - -	$-\infty$	///////////////	$\vert +\infty$	+ + + + + + + + + +	
$f''(x)$		- - - - - - - - - - - -	$\vert$	///////////////	$\vert$	- - - - - - - - - - - - - -	
$f(x)$	0	$\searrow$ konkáv	-1	////////////////	1	$\nearrow$ konkáv	$+\infty$

A táblázat alapján a grafikus kép a következő:



39. ábra

Gyakorlatok és feladatok

Vizsgáld meg a következő függvények változását és ábrázold őket (a maximális értelmezési tartományukon)!

1. $f(x)=(x+1)^2(x-1)$; **2.** $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$; **3.** $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$;

4. $f(x)=x^3-3x^2+2$; **5.** $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{5-x}$; **6.** $f(x)=\dfrac{x-3}{\sqrt{x^2+4}}$;

7. $f(x)=(x-1)e^x$; **8.** $f:[0,\,2\pi]\to\mathbb{R}$, $f(x)=2\cos x-\cos 2x$;

9. $f(x)=\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x+1}$; **10.** $f:[0,\,2\pi]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x\cdot\sin 2x$;

11. $f:\left(-\dfrac{\pi}{2},\,\dfrac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{tg}x+\sin x$;

12. $f:[0,\,2\pi]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$;

13. $f(x)=\ln x-\operatorname{arctg}x$; **14.** $f(x)=(x-1)^2(x+2)^2$; **15.** $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$;

16. $f(x)=\operatorname{arctg}2x$; **17.** $f(x)=\dfrac{4\sqrt{x}}{x+2}$; **18.** $f(x)=|x|(x+2)$;

19. $f(x)=\sqrt[3]{x^2}-1$; **20.** $f(x)=x^3-2x+20$; **21.** $f(x)=\dfrac{x^2-\ln x}{x}$;

22. $f(x)=\sin x+\cos x$; **23.** $f(x)=x-\ln x$; **24.** $f(x)=x-\sin x$;

25. $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)}$; **26.** $f(x)=\dfrac{9x+x^3}{x-x^3}$.

27. Melyik nagyobb az $A=e^{\pi}$ vagy a $B=\pi^{e}$?

28. Melyik nagyobb az $A=\sin 2002$ vagy a $B=\sin 2001$?

29. Hány valós gyöke van az $x+e^x=0$ egyenletnek? Határozz meg egy egységnyi hosszúságú intervallumot, amely tartalmazza az egyenlet minden gyökét!

30. Hány valós gyöke van az $x\lg x=1$ egyenletnek? Határozz meg egy egységnyi hosszúságú intervallumot, amely tartalmazza az egyenlet minden gyökét!

31. Hány valós gyöke van az $x^2=\cos x$ egyenletnek? Határozz meg egy $I\subset[-1,1]$ intervallumot, amely tartalmazza az egyenlet minden gyökét!

32. Határozd meg az a, b paramétereket úgy, hogy az $y=ax+b$ egyenletű egyenes érintse a $g(x)=x^3-3x^2+2$ függvény grafikus képét az $x_0=-1$ abszcisszájú pontban.

33. Hogyan kell a b és c együtthatókat megválasztanunk, hogyha azt akarjuk az $f(x)=x^2+bx+c$ függvény grafikonja érintse a $g(x)=e^x$ függvény grafikonját az $x=0$ pontban?

34. Határozd meg az $f(x) = x - a\sin x$ függvény minimumát a $\left[0,\ \pi/2\right]$ intervallumon az a paraméter függvényében.
35. Milyen a alapszámok esetén lehet olyan számot találni, amely egyenlő saját a alapú logaritmusával?
36. Az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ egyenletű ellipszisbe írjál be maximális területű, az ellipszis tengelyeivel párhuzamos oldalú téglalapot $(0 < b < a)$.
37. Határozd meg az $M\left(p,\ p\right)$ pont és az $y^2 = 2px$ parabola pontjai közötti legrövidebb távolságot.
38. Határozd meg az $A\left(2,\ 0\right)$ pont és a $x^2 + y^2 = 1$ kör pontjai közötti legkisebb és legnagyobb távolságot.
39. Határozd meg az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(0 < b < a)$ ellipszis $B\left(0,\ b\right)$ pontján áthaladó leghosszabb húrját.
40. Készítsd el a következő függvények grafikus képét! (a másodrendű derivált is szükséges)

a) $f(x) = \arccos\frac{1-x}{1-2x}$; **b)** $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$; **c)** $f(x) = e^{-2x}\sin^2 x$;

d) $f(x) = \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$; **e)** $f(x) = 3x - x^3$; **f)** $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2+1}$;

g) $f(x) = \frac{x^4}{(1+x)^3}$; **h)** $f(x) = 1 - x + \sqrt{\frac{x^3}{3+x}}$.

41. Határozd meg az $f(x) = \max\left\{2|x|,\ |1+x|\right\}$ függvény maximumát.
42. Bizonyítsd be a következő egyenlőtlenségeket:

a) $|a\sin x + b\cos x| \le \sqrt{a^2 + b^2}$; **b)** $\left|3x - x^3\right| \le 2$, ha $|x| \le 2$.

43. Határozd meg az alábbi függvények szélsőértékeit:

a) $f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$,($n$ természetes szám);

b) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}$.

44. Bizonyítsd be az alábbi egyenlőtlenségeket és magyarázd meg a geometriai jelentésüket:

a) $\frac{e^x + e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}}$ $(x \ne y)$;

b) $x\ln x + y\ln y > (x+y)\ln\frac{x+y}{2}$, ha $x > 0$ és $y > 0$.

8.5. A kúpszeletek grafikus ábrázolása

8.5.1. A kör

Ha a kör középpontja $C(a,b)$ és sugara r, az egyenlete

$$(K) \qquad (x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

Kifejezzük az y változót x függvényében:

$(y-b)^2=r^2-(x-a)^2$, $y_{1,2}=b\pm\sqrt{r^2-(x-a)^2}$, így a kör a következő két folytonos függvénnyel hozható összefüggésbe:

$f_1(x)=b+\sqrt{r^2-(x-a)^2}$ és $f_2(x)=b-\sqrt{r^2-(x-a)^2}$, e két függvény grafikonja együtt alkotja a (K) kört: $K=G_{f_1}\cup G_{f_2}$.

Tanulmányozzuk az $f_1(x)=b+\sqrt{r^2-(x-a)^2}$ függvényt!

I. A maximális értelmezési tartomány az $r^2-(x-a)^2\geq 0$ egyenlőtlenség megoldása. Az $(x-a)^2\leq r^2$ egyenlőtlenség ekvivalens a $|x-a|\leq r$, egyenlőtlenséggel, tehát $-r\leq x-a\leq r$ és így a megoldás $D=[a-r,a+r]$.

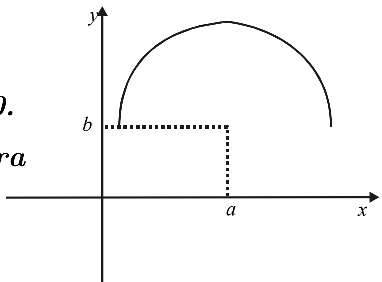
II. A függvény deriváltja $f_1'(x)=\dfrac{-2(x-a)}{2\sqrt{r^2-(x-a)^2}}=-\dfrac{(x-a)}{\sqrt{r^2-(x-a)^2}}$, tehát a függvény növekvő az $[a-r,a]$ intervallumon és csökkenő az $[a,a+r]$ intervallumon. A másodrendű deriváltból látható, hogy a függvény konkáv.

III. Mivel az értelmezési tartomány korlátos és a függvény is korlátos, nincsenek aszimptoták.

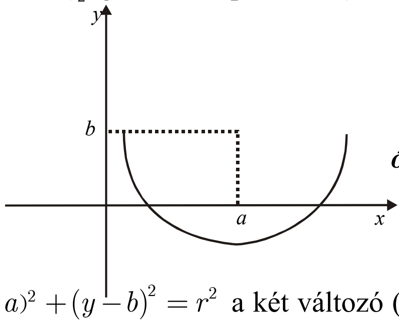
IV. A függvény változási táblázata

x	$a-r$		a		$a+r$
$f_1'(x)$	$\vert_{+\infty}$	$+$	0	-	$_{-\infty}\vert$
$f_1''(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	b	$\nearrow$	$b+r$	$\searrow$	b

Tehát a grafikus kép a következő (a 41. ábrán az f_2 grafikus képe látható)



40. ábra



41. ábra

Megjegyzés. A kör egyenlete, (K) $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ a két változó (x és y) között egy reláció, de ez a reláció nem függvény (a hozzárendelés nem egyértelmű). Általában, ha $f:D_1\times D_2\to\mathbb{R}$ egy függvény, akkor az $f(x,y)=0$ egyenletet a megoldások által meghatározott görbe implicit egyenletének nevezzük.

Fejezet tartalma Tartalomjegyzék

Ha a kör egyenletét valamelyik változóra megoldjuk (például y - ra), az

$$y_{1,2} = b \pm \sqrt{r^2 - (x-a)^2}\,,$$

kifejezéshez jutunk, tehát az

$$f_1 : [a-r, a+r] \to [b, b+r], \quad f_1(x) = b + \sqrt{r^2 - (x-a)^2} \text{ és}$$

$$f_1 : [a-r, a+r] \to [b-r, b], \quad f_2(x) = b - \sqrt{r^2 - (x-a)^2}\,.$$

folytonos függvények adják a megoldást. Mindkét függvény deriválható az $(a-r, a+r)$ nyílt intervallumon, $x = a - r$ és $x = a + r$ pontokban nem deriválhatóak, mert a jobb- illetve baloldali derivált értéke nem véges (van függőleges érintő $(a-r)$-ben és $(a+r)$-ben).

8.5.2. Az ellipszis

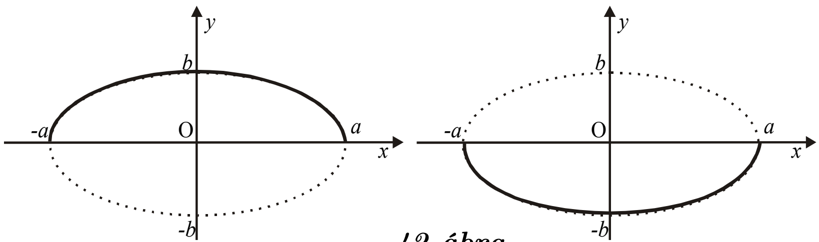
Az ellipszis egyenlete (E) $\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ahol $a, b > 0$.

Az előbbi gondolatmenet alapján $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, tehát az

$$f_1 : [-a, a] \to [0, b], \quad f_1(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \text{ és}$$

$$f_1 : [-a, a] \to [-b, 0], \quad f_2(x) = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,.$$

folytonos függvényeket kell ábrázolni. ($E = G_{f_1} \cup G_{f_2}$). Ezeknek a függvényeknek a grafikus képe a 42. ábrán látható:



42 ábra

8.5.3. A hiperbola

A hiperbola egyenlete

$$(H) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ ahol } a, b > 0.$$

Kifejezzük az y változót x függvényében:

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\,.$$

Tehát a hiperbola a következő két folytonos függvény grafikus képének egyesítése:

$$f_1 : (-\infty, -a] \cup [a, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad f_1(x) = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \text{ és}$$

$$f_1 : (-\infty, -a] \cup [a, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad f_1(x) = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\,.$$

Tanulmányozzuk az f_1 függvényt és ábrázoljuk grafikusan (az f_2 grafikus képe az f_1 grafikus képének az Ox szerinti szimmetrikusa, az ábrán szaggatott vonallal jelöltük be).

Fejezet tartalma Tartalomjegyzék

I. $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = +\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = +\infty$, de

$$m = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{b}{a}\sqrt{x^2\left(1-\frac{a}{x^2}\right)}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{b}{a}|x|\sqrt{1-\frac{a}{x^2}}}{x} = -\frac{b}{a},$$

$$n = \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-mx\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}+\frac{b}{a}x\right] = 0,$$

tehát $(-\infty)$ - ben a ferde aszimptota egyenlete $y = -\frac{b}{a}x$.

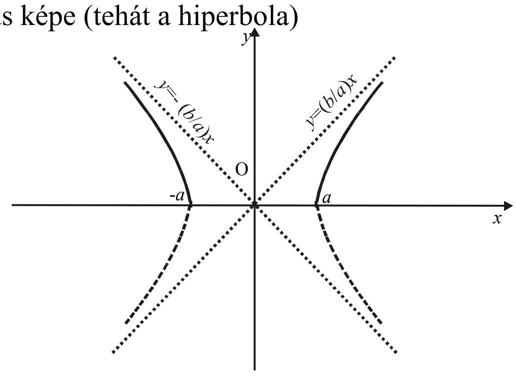
$(+\infty)$ - ben $m = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \frac{b}{a},\ n = 0$, így a ferde aszimptota egyenlete $y = \frac{b}{a}x$.

II. $f_1'(x) = \frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$, nem értelmezett az $x = \pm a$ pontokban, negatív ha $x < 0$ és pozitív ha $x > 0$. $\lim\limits_{x\nearrow -a} f_1'(x) = \frac{-a}{+0} = -\infty,\ \lim\limits_{x\searrow a} f_1'(x) = \frac{a}{+0} = +\infty$, tehát $-a$ - nál a baloldali derivált $f_1'(-a-) = -\infty$, a - nál a jobboldali derivált $f_1'(a+) = +\infty$.

III. Az előbbiek alapján az értéktáblázat a következő:

x	$-\infty$		$-a$	//////	a		$+\infty$
$f_1'(x)$	-	-	$-\infty\vert$	//////	$\vert^{+\infty}$	+	+
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	//////	0	↗	$+\infty$

A 43. ábrán látható a függvények grafikus képe (tehát a hiperbola)



43.
ábra

2.3.4. A parabola

$$(P)\qquad y^2 = 2px,$$ tételezzük fel, hogy $p > 0$.

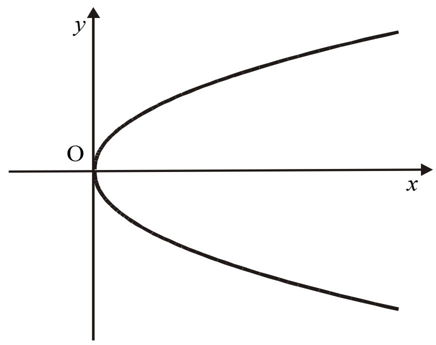
Kifejezzük az y változót x függvényében:

$$y = \pm\sqrt{2px}.$$

$f_1 : [0,+\infty) \to [0,+\infty),\ f_1(x) = \sqrt{2px}$, $f_2 : [0,+\infty) \to (-\infty,0],\ f_2(x) = -\sqrt{2px}$.

Az f_1 függvény változása az alábbi táblázatból olvasható ki és a grafikus kép a 44. ábrán látható (a szaggatott vonal az f_2 grafikus képét ábrázolja):

x	0		$+\infty$
$f_1'(x)$	$\vert_{+\infty}$	+	
$f_1''(x)$		−	
$f_1(x)$	0	↗	$+\infty$



44. ábra

Gyakorlatok

1. Bizonyítsd be, hogy a $K:\ x^2+y^2=1$ kör nem lehet egyetlen függvénynek sem a grafikus képe, de lehet két különböző függvény grafikus képének az egyesítése.

2. Számítsd ki azon háromszög kerületét, amelyet az $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}-1=0$ hiperbola két aszimptotája a $9x+2y-25=0$ egyenessel bezár.

3. Rajzold meg az alábbi függvények grafikus képét:

a) $f:D\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x+1}$;

b) $f:D\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{2}{3}\sqrt{(1+x)(5-x)}$;

c) $f:D\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{3}{4}\sqrt{x^2-2x-3}$.

4. Az $f(x)=e^{-x^2}$ képlettel értelmezett függvény ($f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$) grafikus képét Gauss-féle görbének nevezik. Határozd meg azokat a pontokat, amelyben az O középpontú, egységsugarú kör metszi ezt a görbét. Bizonyítsd be, hogy a két görbe Oy tengelyen fekvő közös pontjában közös az érintőjük.

5. Írd fel részletesebben és ábrázold az $\dfrac{x\cdot|x|}{4}+\dfrac{y\cdot|y|}{9}=1$ egyenletet teljesítő (x,y) ponthalmazt.

6. Rajzold meg az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{\left|\dfrac{x^2}{4}-1\right|}$ képlettel értelmezett függvény grafikus képét.

8.6. Egyenletek vizsgálata

8.6.1. A gyökök szétválasztása grafikus módszerrel

Ha az $f(x)=0$ alakú egyenlet gyökeinek (valós gyökök) pontos értékét nem tudjuk meghatározni (nincs módszer vagy eljárás), akkor egy fontos lépésnek tekinthető az, hogy megmondjuk hány valós gyöke van az egyenletnek, és mindegyik gyökre meghatározunk egy elég kis intervallumot, amelyben a gyök található. Az ilyen jellegű számításokat, *a gyökök szétválasztásának (szeparálásának)* nevezzük.

Fejezet tartalma Tartalomjegyzék

Az $f(x)=0$ alakú egyenletek esetében, ha az f függvény folytonos és deriválható, tanulmányozzuk a függvényt és ábrázoljuk grafikusan. Ahol a grafikus kép metszi az Ox tengelyt, ott vannak az egyenlet gyökei. A gyököket közelítőleg a grafikus kép alapján olvashatjuk le, az intervallumokat pedig, amelyekben a gyökök vannak, próbálgatással (próbaszámítás) állapítjuk meg a következő példában bemutatott módszerrel.

Példák

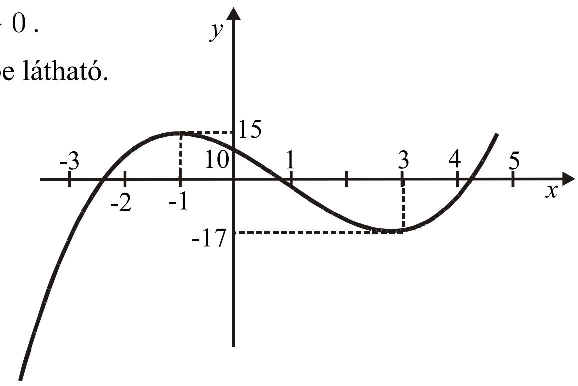
1. Válasszuk szét az $f(x)=x^3-3x^2-9x+10=0$ egyenlet valós gyökeit!

I. $f'(x)=3x^2-6x-9$ (deriváltuk az $f(x)$ függvényt). $f'(x)=0$, ha $x_1=-1$ és $x_2=3$. Vizsgáljuk a függvényt az elsőrendű derivált segítségével.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	15	$\searrow$	-17	$\nearrow$	$+\infty$

A táblázatból leolvasható, hogy a függvény az $I_1=\left(-\infty,-1\right)$ intervallumon szigorúan növekvő, negatív és pozitív értékeket is felvesz ($f(-1)>0$ és $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$). Így pontosan egy gyök létezik az I_1 intervallumban. Az $I_2=(-1,3)$ intervallumon a függvény szigorúan csökkenő, $f(-1)=15>0$ és $f(3)=-17<0$, tehát (mivel f folytonos) pontosan egy $x_2\in(-1,3)=I_2$ létezik úgy, hogy $f(x_2)=0$. Az $I_3=\left(3,\infty\right)$- ban is $f(3)=-17<0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, tehát I_3 - ban is pontosan egy gyök van. Tehát az egyenletnek három valós gyöke van és ezekre $x_1\in\left(-\infty,-1\right)$; $x_2\in(-1,3)$; $x_3\in(3,+\infty)$. Ezt a függvény grafikus képéről is leolvashatjuk, ha ezt elkészítjük. Ha a gyököket pontosabban lokalizálni szeretnénk, akkor a becsléseket végzünk. $x_1\in(-3,-2)$, mivel $f(-2)=8>0$, $f(-3)=-17<0$. $x_2\in(0,1)$, mivel $f(0)=10>0$, $f(1)=-1<0$. $x_3\in(4,5)$, mivel $f(4)=-10<0$, $f(5)=15>0$.

A 45. ábrán a függvény grafikus képe látható.

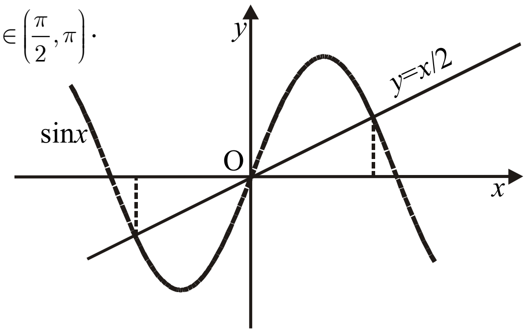


45. ábra

2. Hány megoldása van a $\sin x=\dfrac{x}{2}$ egyenletnek?

Fejezet tartalma Tartalomjegyzék

Megoldás. Ábrázoljuk az f és a g függvény grafikus képét és megvizsgáljuk, hogy a két grafikus kép hány pontban metszi egymást (és milyen intervallumba kerülnek a metszéspontok abszcisszái). Az ábráról leolvashatjuk, hogy a $g(x)=\frac{x}{2}$ egyenes három helyen metszi az $f(x)=\sin x$ grafikus képét: $x_1 \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$, $x_2 = 0$ és $x_3 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.



46. ábra

3. (Paramétertől függő egyenlet tárgyalása)

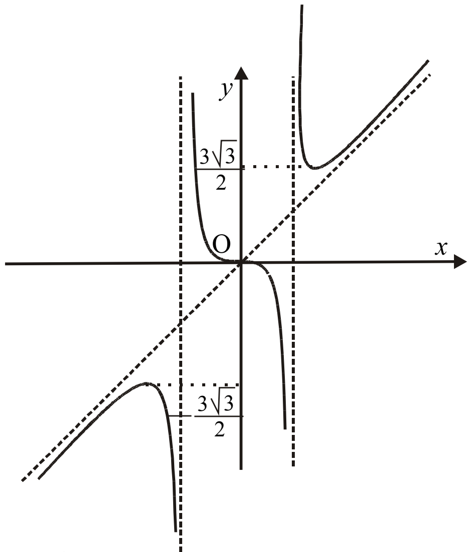
Tárgyaljuk a $P(x)=0$ egyenletet, ahol $P(x)=x^3-ax^2+a$, a valós paraméter. (Az egyenletet tárgyalni azt jelenti, hogy meghatározni a valós gyökök számát, ha az a paraméter változik.)

Megoldás. Fejezzük ki az a paramétert az egyenletből $a=\frac{x^3}{x^2-1}$. (Mivel $P(1)=1\neq 0$ és $P(-1)=-1\neq 0$ sem az $x=1$, sem az nem gyöke az eredeti egyenletnek egyetlen a esetén sem). A továbbiakban tanulmányozzuk az $f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$ függvényt és a $g(x)=a$ állandó függvényt:

$$f'(x)=\frac{x^2\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^2}=0 \Leftrightarrow x_1=0,\ x_{2,3}=\pm\sqrt{3}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{-2}$	$\searrow$	$-\infty\vert^{+\infty}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty\vert^{+\infty}$	$\searrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Az $x=\pm 1$ egyenesek függőleges aszimptoták, ugyanakkor $m=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=1,\ n=0$, tehát az első szögfelező ferde aszimptota a $+\infty$ felé. Az $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1,\ n=0$ egyenlőségekből következik, hogy az $y=x$ egyenletű egyenes a $-\infty$ felé is ferde aszimptota. A derivált előjeléből következik, hogy $M\left(-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ maximumpont és $N\left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ minimumpont. A 47. ábra a grafikus képet mutatja.



47. ábra

A grafikus képről leolvasható, hogy az f függvény grafikus képe hány pontban metszi a $g(x) = a$ függvény grafikus képét, ha az a értéke változik. Ezt táblázattal mutatjuk be:

a **értékei**	**A gyökök száma és elhelyezkedése**
$a < -\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$x_1 \in \left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$, $x_2 \in \left(-\sqrt{3}, -1\right)$, $x_3 \in (0,1)$
$a = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$x_1 = x_2 = -\sqrt{3}$, $x_3 \in (0,1)$
$-\frac{3\sqrt{3}}{2} < a < 0$	$x_1 \in (0,1)$
$a = 0$	$x_1 = x_2 = x_3 = 0$
$0 < a < \frac{3\sqrt{3}}{2}$	$x_1 \in (-1,0)$
$a = \frac{3\sqrt{3}}{2}$	$x_1 = x_2 = \sqrt{3}$, $x_3 \in (-1,0)$
$a > \frac{3\sqrt{3}}{2}$	$x_1 \in (-1,0)$, $x_2 \in \left(1, \sqrt{3}\right)$, $x_3 \in \left(\sqrt{3}, \infty\right)$

8.6.2. A gyökök szétválasztása a Rolle-tétel alapján (A Rolle-sorozat)

Az $f(x) = 0$ egyenlet két egymásután következő gyöke között az $f'(x) = 0$ egyenletnek van legalább egy gyöke. Szimbolikusan, ha $f(x_1) = f(x_2) = 0$ (ahol x_1 és x_2 két egymás után következő gyök), akkor Rolle tétele alapján létezik $c_1 \in \left(x_1, x_2\right)$ úgy, hogy $f'(c_1) = 0$. Ha az f függvény deriválható, legyen α és β az $f'(x) = 0$ egyenlet két egymásután következő valós gyöke. hány gyöke lehet az eredeti $f(x) = 0$ egyenletnek α és β között? Ha az $f(x) = 0$ egyenletnek α és β

között lenne legalább két gyöke, $x_1 < x_2$, akkor Rolle tételét alkalmazva az $[x_1, x_2]$ intervallumon f-re, létezne $c \in (x_1, x_2)$ úgy, hogy $f'(c) = 0$, $\alpha < c < \beta$ és $f'(\alpha) = f'(c) = f'(\beta)$. Ez ellentmond annak, hogy α és β az $f'(x) = 0$ egyenlet két egymásután következő gyöke. Tehát az α és β között az $f(x) = 0$ egyenletnek legfeljebb egy gyöke van. Ha $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$, akkor pontosan egy gyök van, ellenkező esetben nincs gyök. Tehát ha az $f'(x) = 0$ egyenlet valós gyökeit ki tudjuk számítani és ezek növekvő sorrendbe rendezve $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < b$, akkor elkészíthetjük a következő táblázatot:

x	a	x_1	x_2	...	x_n	b
$f(x)$	$\lim\limits_{x \searrow a} f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	...	$f(x_n)$	$\lim\limits_{x \nearrow b} f(x)$

Ha az (a, x_1), $(x_1, x_2), \ldots, (x_n, b)$ intervallumok valamelyikének a végpontjaiban az f függvény értékei különböző előjelűek (a függvénynek előjelváltása van), akkor az $f(x) = 0$ egyenletnek van ebben az intervallumban egy és csakis egy gyöke, ha pedig a függvény értékei azonos előjelűek, akkor az egyenletnek nincs gyöke abban az intervallumban.

Mivel a fenti intervallumok lefedik az f függvény értelmezési tartományát ($f : (a, b) \to \mathbb{R}$), az $f(x) = 0$ egyenlet gyökeit szétválasztottuk. A táblázat második sorát nevezzük *Rolle-sorozatnak.*

Példák

1. Adott az $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 10 = 0$ egyenlet. Válasszuk szét az egyenlet gyökeit!

Megoldás. $f'(x) = 12x(x^2 - x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = -1,\ x = 0,\ x = 2$. A Rolle-sorozat a következő:

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	+5	+10	-22	$+\infty$

A $(-\infty, -1)$ intervallum végpontjaiban az f függvény értékei azonos előjelűek, tehát nincs itt gyöke. $(-1, 0)$-ban ugyanaz az eset, $(0, 2)$-ben előjelváltás van, tehát létezik $x_1 \in (0, 2)$, amelyre $f(x_1) = 0$. Hasonlóan létezik $x_2 \in (2, +\infty)$ úgy, hogy $f(x_2) = 0$. Tehát az egyenletnek két valós gyöke van. Mivel $f(1) = -3 < 0, f(3) = 37 > 0$, következik, hogy $x_1 \in (1, 2)$ és $x_2 \in (2, 3)$, tehát az intervallumokat az $I_1 = (1, 2)$ és $I_2 = (2, 3)$ intervallumokra szűkítettük le.

2. (Paraméteres egyenlet tárgyalása az $a \in \mathbb{R}$ valós paraméter szerint.)

Tárgyaljuk az a valós paraméter szerint a következő egyenlet valós gyökeit:

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + a = 0.$$

Megoldás. Az $f'(x) = 0$ egyenlet gyökei $x = -1, x = 0$ és $x = 2$, a Rolle-sorozat a következő

($\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty,\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$):

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$a-5$	a	$a-32$	$+\infty$

A második sorban szereplő kifejezések előjele érdekel bennünket. Ezt az alábbi táblázatok adják:

a	$-\infty$	5	$+\infty$
$a-5$	–	0	+

és

a	$-\infty$	32	$+\infty$
$a-32$	–	0	+

A kifejezések zérushelyei $a_1 = 0,\ a_2 = 5,\ a_3 = 32$. A következő eseteket kell tárgyalnunk: $a < 0,\ a = 0,\ 0 < a < 5,\ \ a = 5,\ 5 < a < 32,\ 1 = 32,\ a > 32$.

A tárgyalást az alábbi táblázatban foglaljuk össze:

$\downarrow a$	x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$	Következtetések a valós gyökökre
	$f(x)$	$+\infty$	$a-5$	a	$a-32$	$+\infty$	
$a<0$		+	–	–	–	+	$x_1 \in (-\infty,-1)$, $x_2 \in (2,\infty)$
$a=0$		+	–	0	–	+	$x_1 \in (-\infty,-1)$, $x_2 = x_3 = 0$, $x_4 \in (2,\infty)$
$0<a<5$		+	–	+	–	+	$x_1 \in (-\infty,-1)$, $x_2 \in (-1,0)$, $x_3 \in (0,2)$, $x_4 \in (2,\infty)$
$a=5$		+	0	+	–	+	$x_1 = x_2 = -1$, $x_3 \in (0,2)$, $x_4 \in (2,\infty)$
$5<a<32$		+	+	+	–	+	$x_1 \in (0,2)$, $x_2 \in (2,\infty)$
$a=32$		+	+	+	0	+	$x_1 = x_2 = 2$
$a>32$		+	+	+	+	+	nincs valós gyök

Gyakorlatok

1. Válaszd szét az $x^3 - 3x^2 - 9x + 8 = 0$ egyenlet valós gyökeit.

2. Válaszd szét a következő egyenletek valós gyökeit:

a) $x^3 - 4x^2 + 7x - 12 = 0$; **b)** $x^5 - 5x^3 - 50x + 10 = 0$;

c) $\sqrt{x^2 - 2x} = 9 - x^2$; **d)** $\left|x^4 - 1\right| = x + 2$.

3. Tárgyald az m valós paraméter szerint a következő egyenlet valós gyökeit:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + m = 0.$$

4. A grafikus módszer alkalmazásával válaszd szét a következő egyenletek valós gyökeit:

a) $2^x = 3x^2$; **b)** $e^x = \cos x$; **c)** $\sin x = x^2$;

d) $\lg x + x = 0$; **e)** $\lg x = \sin x$; **f)** $tgx + x - 1 = 0$.

5. Tárgyald az $a \in \mathbb{R}$ paraméter szerint a következő egyenletek valós gyökeit:

a) $x^3 - ax + 1 = 0$; **b)** $ax^3 - x - a = 0$; **c)** $e^x = x + a$;

d) $\ln x = x + a$; **e)** $\sin x + \cos x = a$; **f)** $x - \sqrt{x} + a = 0$;

g) $x^4 - 2x^2 + a = 0$; **h)** $\operatorname{arctg} x = ax$.

Tovább