# V. Deriválható függvények

## 5.1. A derivált fogalmához vezető feladatok

### 1. A sebesség értelmezése

Legyen az $M$ egy egyenes vonalú egyenletes mozgást végző pont. Ez azt jelenti, hogy a mozgás pályája egyenes és az egyenlő időközökben megtett utak egymással egyenlők (a megtett út arányos az idővel).

A mozgás $v$ sebességét megkapjuk, ha megmérjük bizonyos számú $t$ időegység alatt megtett út $s$ hosszát, és ezt elosztjuk az $s$ út megtételéhez szükséges $t$ idővel: $v = \frac{s}{t}$.

Mivel a mozgó pont sebessége minden időszakban egyenlő $v$-vel, azt mondjuk, hogy e mozgás sebessége bármely időpillanatban éppen $v$-vel egyenlő.

Tegyük fel most, hogy az $M$ pont adott irányba egyenes vonalú, de nem egyenletes mozgást végez vagyis, hogy az egyenlő időközökben megtett utak általában nem egyenlők egymással (a megtett út nem arányos az idővel). Mit értünk tehát ebben az esetben a mozgó pont sebességén egy adott időpontban (a $t$ időpillanatban)?

Ha $s(t)$-vel jelöljük a $t$ idő alatt megtett utat, akkor a $t_0$ és $t$ időpontok között megtett út hossza $\Delta s = s(t) - s(t_0)$. Ezt az utat a test $\Delta t = t - t_0$ idő alatt teszi meg. Tehát ezen az útszakaszon az átlagos közepes sebesség

$$v_k = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

Ha ennek a kifejezésnek van határértéke, amikor $t \to t_0$, akkor azt mondjuk, hogy ez a határérték a test sebessége a $t_0$ időpontban. Ezt a sebességet $v(t_0)$-val jelöljük. Tehát

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0},$$

ha ez a határérték létezik.

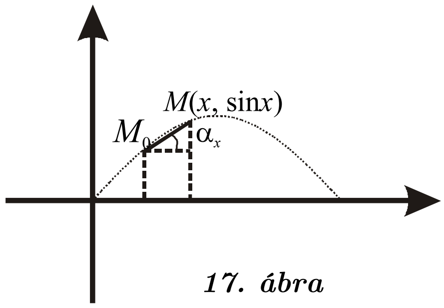
**Megjegyzés.** Bármilyen mennyiség változási sebességét ehhez hasonlóan értelmezzük. Ha $f : D \to \mathbb{R}$ egy $M$ mennyiség időbeli változását leíró függvény (a változója a $t$-idő), akkor az $M$ változásának sebessége a $t_0$ időpillanatban a

$$v_M(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

határérték, ha ez létezik.

### 2. Az érintő probléma

Tekintsük az $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ függvényt. Jelöljük $m(x)$-szel az $M_0\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ és $M(x, \sin x)$ pontokon áthaladó egyenes iránytényezőjét.




*17. ábra*

Van-e a $\alpha_x$ függvénynek határértéke, ha $x \to \frac{\pi}{4}$?

Az $M_0M$ húr iránytangensét vizsgáljuk:

$$m(x) = \frac{\sin x - \sin\frac{\pi}{4}}{x - \frac{\pi}{4}}.$$

Tehát meg kell vizsgálnunk, hogy létezik-e az

$$m = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} m(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \sin\frac{\pi}{4}}{x - \frac{\pi}{4}}$$

határérték. Alakítsuk át a kifejezést:

$$\frac{\sin x - \sin\frac{\pi}{4}}{x - \frac{\pi}{4}} = \frac{2\sin\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2}\cos\frac{x+\frac{\pi}{4}}{2}}{x-\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{x+\frac{\pi}{4}}{2}\cdot\frac{\sin\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2}}{\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2}}.$$

Tehát a határérték: $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \sin\frac{\pi}{4}}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \cos\frac{x+\frac{\pi}{4}}{2}\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2}}{\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2}} =$

$= \cos\frac{\pi}{4}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1\cdot\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, ahol $t = \frac{x-\frac{\pi}{4}}{2}$ és $t \to 0$, ha $x \to \frac{\pi}{4}$.

Mivel a húrok egyre jobban közelednek az $M_0\left(\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{4}\right)$ ponton áthaladó $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$ iránytényezőjű egyeneshez azt mondjuk, hogy ez az egyenes az $f$ grafikus képéhez húzott érintő az $M_0$ pontban. Tehát az érintő egyenlete

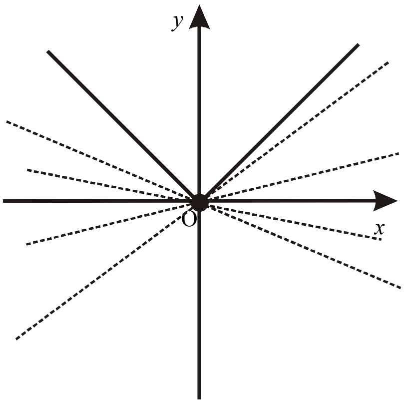
$$y - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Általában, ha $f : D \to \mathbb{R}$ egy függvény és $x_0 \in D$ egy torlódási pontja $D$-nek, akkor az $x_0$ ponton áthaladó húrok iránytényezői $m(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ alakúak, tehát ha létezik a $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ határérték, akkor azt mondjuk, hogy a függvény grafikus képének van érintője $x_0$ abszcisszájú pontban és az érintő iránytényezője az előbbi határérték.

Fejezet tartalma Tartalomjegyzék



**Megjegyzés.** A kör esetén az érintőt úgy értelmeztük, mint egy egyenes, amely pontosan egy pontba metszi a kört. Ez az értelmezés általában nem használható. Például az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x|$ függvény grafikus képét az origón áthaladó összes egyenes egy pontban metszi, mégsem mondanánk azt, hogy ezek érintik a grafikus képet (lásd a 18. ábrát).



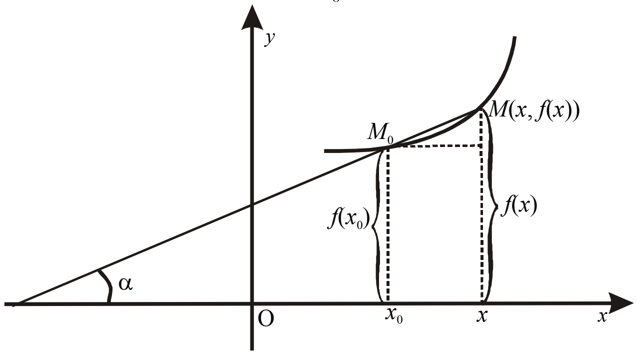

*18. ábra*

### 5.2. A derivált értelmezése

Az előbbi problémák mindegyikében $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ alakú határértékekehez juttunk. Ez motiválja a következő fogalom bevezetését.

**Értelmezés.** Legyen $x_0\in D$ a $D$ halmaz egy torlódási pontja. Azt mondjuk, hogy az $f:D\to\mathbb{R}$ függvénynek az $x_0$ pontban van *deriváltja*, ha létezik a $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ határérték. Ezt a határértéket nevezzük a függvény $x_0$ pontbeli *deriváltjának* (vagy differenciálhányadosának) és így jelöljük:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}.$$




*19. ábra*

**Értelmezés.** Az $f:D\to\mathbb{R}$ függvényt *deriválhatónak* nevezzük az $x_0$ helyen, ha az $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ határérték létezik és véges.

**Megjegyzés.** Ha létezik az $f'(x_0)$ véges szám akkor minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$, hogy ha $0 < |x - x_0| < \delta$ akkor $\left|\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)\right| < \varepsilon$.

Ezt a $\lim\limits_{x\to x_0}\left|\dfrac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0}\right| = 0$ alakban is írhatjuk.

**Értelmezés. 1.** Ha az $f$ függvény az $E \subseteq D$ halmaz minden pontjában deriválható, akkor azt mondjuk, hogy az $f$ függvény az $E$ halmazon *deriválható* függvény.

**2.** Azt az $f' : E \to \mathbb{R}$ függvényt, amely minden $x \in E$ esetén $f'(x_0)$-val egyenlő az $f$ függvény *derivált függvényének* nevezzük (vagy röviden deriváltjának) és $f'$ -tal vagy $\dfrac{df}{dx}$ -el jelöljük. (Leibniz jelölése)

**A derivált geometriai jelentése.** A bevezető problémák alapján azt mondjuki, hogy az $f$ függvény grafikus képének az $M_0\left(x_0,\, f(x_0)\right)$ pontjában létezik érintője, ha létezik az $f$ függvénynek az $x_0$ pontjában a deriváltja (differenciálhányadosa). Az érintő iránytangense $f'(x_0) = m$, tehát az érintő egyenlete

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0).$$

**Példák. 1.** Vizsgáljuk az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ függvény deriválhatóságát.

**Megoldás.** Rögzítsünk egy $x_0 \in \mathbb{R}$ pontot és tekintsük az $x_0$-ban a következő határértéket:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0}(x + x_0) = 2x_0.$$

Tehát az $f$ függvény az $x_0$ pontban deriválható és $f'(x_0) = 2x_0$. Az $x_0 \in \mathbb{R}$ pont semmilyen különleges tulajdonságát nem használtuk fel, ezért a függvény minden $x \in \mathbb{R}$ pontban deriválható és a derivált függvény

$$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f'(x) = 2x.$$

Az eredmény szemléletesen azt jelenti, hogy az $y = x^2$ parabolának minden pontjában van érintője. Az $M_0\left(x_0,\, x_0^2\right)$ pontbeli érintő egyenlete $y - x_0^2 = 2x_0(x - x_0)$ vagy

$$y = 2x_0 \cdot x - x_0^2.$$

**2.** Tanulmányozzuk az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, ahol $n \in \mathbb{N}$ függvény deriválhatóságát.

**Megoldás.** Rögzítsünk egy $x_0 \in \mathbb{R}$ pontot.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0}\left(\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}x_0^k\right) = n\cdot x_0^{n-1},$$

mert $\lim\limits_{x \to x_0} x^{n-1-k} x_0^k = x_0^{n-1}$, ha $k \in \{1, 2, 3, \ldots, n-1\}$ és az összegnek $n$ tagja van. Tehát a függvény minden $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban deriválható és $f'(x_0) = n \cdot x_0^{n-1}$. Így a vizsgált függvény derivált függvénye (vagy egyszerűen a deriváltja):

$$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ f'(x) = n \cdot x^{n-1}\,,\ \forall\ x \in \mathbb{R}\,.$$

**Következmény.** Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$, ahol $c \in \mathbb{R}$, egy adott állandó függvény deriváltja minden $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban $f'(x_0) = 0$.

**3.** Tanulmányozzuk az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ függvény deriválhatóságát!

**Megoldás.** Rögzítsünk először egy $x_0 > 0$ számot. Ha $|x - x_0| < \dfrac{x_0}{2}$ akkor $x$ is pozitív $(x > 0)$ és így $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{|x| - |x_0|}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x - x_0}{x - x_0} = 1$. Tehát $f'(x_0) = 1$, ha $x_0 > 0$. Ha $x_0 < 0$ akkor az előzőkhöz hasonlóan $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{|x| - |x_0|}{x - x_0} = -\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x - x_0}{x - x_0} = -1$, tehát $f'(x_0) = -1$ ha $x_0 < 0$. Ha $x_0 = 0$ akkor $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, \text{ ha } x > 0 \\ -1, \text{ ha } x < 0 \end{cases}$. Ebből leolvasható, hogy az $x_0 = 0$ pontban nem létezik az $f$ deriváltja. Tehát az $f$ függvény az $\mathbb{R}^*$ halmazon deriválható.

## 5.3. Deriválható függvények folytonossága

**Tétel.** Ha az $f : D \to \mathbb{R}$ függvény deriválható az $x_0 \in D$ pontban, akkor ez a függvény folytonos az $x_0$ pontban.

**Bizonyítás.** Az értelmezés alapján $x_0$ torlódási pontja $D$-nek és

$$f'(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \alpha(x)\text{, ahol } \lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0\text{, tehát}$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) - \alpha(x) \text{ és így}$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) - \alpha(x)(x - x_0)\,.$$

Ebből kapjuk, hogy $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, ami azt jelenti, hogy $f$ folytonos az $x_0 \in D$ pontban.

## 5.4. Jobb- és baloldali derivált

A jobb- és baloldali határértékhez hasonlóan értelmezhetjük egy függvény jobb- illetve baloldali deriváltját is.

**Értelmezés. 1.** Ha $x_0 \in D$ torlódási pontja a $\left(-\infty,\ x_0\right) \cap D$ halmaznak és létezik a $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ határérték, akkor ezt az $f$ függvény *baloldali deriváltjának* nevezzük az $x_0$ pontban és $f_b'(x_0)$-val vagy $f'(x_0 - 0)$-val jelöljük. Tehát

$$f_b'(x_0) = f'(x_0 - 0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

**2.** Ha $x_0 \in D$ torlódási pontja a $\left(x_0,\ +\infty\right) \cap D$ halmaznak és létezik a $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ határérték, akkor ezt az $f$ függvény *jobboldali deriváltjának* nevezzük $x_0$ pontban és $f_j'(x_0)$-val vagy $f'(x_0 + 0)$-val jelöljük. Tehát

$$f_j'(x_0) = f'(x_0 + 0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

**Megjegyzés**. Ha $x_0$ torlódási pontja a $\left(-\infty,\ x_0\right) \cap D$ és $\left(x_0,\ +\infty\right) \cap D$ halmazoknak, az $f : D \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor deriválható az $x_0$ pontban, ha $f_b'(x_0) = f_j'(x_0)$.

**Gyakorlatok**

**1.** Deriválhatók-e az alábbi függvények a megadott pontokban?

**a)** $f(x) = x \cdot |x|$, az $x_0 = 0$ pontban;

**b)** $f(x) = \ln|x|$, az $x_0 = 1$ és $x_0 = -1$ pontokban;

**c)** $f(x) = \left|(x-1)^2 (x+1)^3\right|$, az $x_0 = -1$ és $x_0 = 1$ pontokban;

**d)** $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{e^x + x + 1}$ az $x_0 = -1$ és $x_0 = 1$ pontokban;

**e)** $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, \text{ ha } |x| \le 1 \\ 1 - |x|, \text{ ha } |x| > 1 \end{cases}$ az $x_0 = 1$ és $x_0 = -1$ pontokban;

**f)** $f(x) = \arccos(4x - 1)$ az $x_0 = \dfrac{1}{4}$ pontban;

**g)** $f(x) = \begin{cases} \ln\left(x^2 + 1\right), & x \ge 0 \\ x^7 + 5x^4, & x < 0 \end{cases}$ az $x_0 = 0$ pontban;

**h)** $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x + 1}, & x \ge -1 \\ \dfrac{x + 1}{x - 1}, & x < -1 \end{cases}$ az $x_0 = -1$ pontban;

**i)** $f(x)=\begin{cases}3^x-1, & x\geq 0\\ \sin x, & x<0\end{cases}$ az $x_0=0$ pontban.

**2.** **a)** Határozd meg az $a,b$ paraméterek értékét úgy, hogy az $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\ln^4 x, & x\in(0,e]\\ ax^2+bx+c, & x>e\end{cases}$ függvény deriválható legyen $e$-ben.

**b)** Határozd meg az $a,b$ paraméterek értékét úgy, hogy az $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\in[-1,0)\\ x^3+ax+b, & x\in[0,1]\end{cases}$ függvény deriválható legyen $0$-ban, majd bizonyítsd be, hogy az így meghatározott $a,b$ értékekre $|f(x)|\leq 1,\ \forall\, x\in[-1,1]$.

## 5.5. A gyökfüggvény deriváltja

Tekintsük az $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[n]{x}$, $n\in\mathbb{N}^*$ függvényt. $x_0>0$ esetén

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{x_0}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{x_0}}{\left(\sqrt[n]{x}\right)^n-\left(\sqrt[n]{x_0}\right)^n}=$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{x_0}}{\left(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{x_0}\right)\left(\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{x^{n-2}x_0}+\ldots+\sqrt[n]{x_0^{n-1}}\right)}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt[n]{x_0^{n-1}}+\sqrt[n]{x_0^{n-1}}+\ldots+\sqrt[n]{x_0^{n-1}}}=\frac{1}{n\sqrt[n]{x_0^{n-1}}}=\frac{1}{n}\cdot x_0^{\frac{1}{n}-1}.$$

Az $f$ tehát minden $x>0$ pontban deriválható és

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)'=\left(x^{\frac{1}{n}}\right)'=\frac{1}{n}\cdot x^{\frac{1}{n}-1}=\frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

**Gyakorlatok.** Határozd meg a következő függvények maximális deriválhatósági tartományát és számítsd ki a deriváltját:

**1.** $f(x)=\sqrt[5]{x}$; **2.** $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$; **3.** $f(x)=x^2\sqrt{x}$;

**4.** $f(x)=(2x+1)\left(\sqrt[3]{x}+3\sqrt{x}+1\right)$.

## 5.6. Az exponenciális függvény deriváltja

Vizsgáljuk meg az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$ függvény deriválhatóságát.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{a^x-a^{x_0}}{x-x_0}=a^{x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{a^{x-x_0}-1}{x-x_0}=a^{x_0}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{a^t-1}{t}=a^{x_0}\cdot\ln a.$$

Tehát $\left(a^x\right)'=a^x\cdot\ln a$. Sajátos esetben $\left(e^x\right)'=e^x$.

## 5.7. A logaritmus függvény deriváltja

Legyen $f:\left(0,+\infty\right)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$ és $x_0>0$.

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{\ln x-\ln x_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{x-x_0}{x_0}\right)}{\dfrac{x-x_0}{x_0}}\cdot\frac{1}{x_0}=\frac{1}{x_0}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=\frac{1}{x_0},$$

tehát $(\ln x)'=\dfrac{1}{x},\ \forall x>0$. Ebből és a $\log_a x=\dfrac{\ln x}{\ln a}$ egyenlőségből következik, hogy $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\cdot\ln a}$.

## 5.8. A szinusz és a koszinusz függvény deriváltja

**1.** Számítsuk ki az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x$ függvény deriváltját!
Rögzített $x_0\in\mathbb{R}$ esetén

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sin x-\sin x_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{2\sin\dfrac{x-x_0}{2}\cos\dfrac{x+x_0}{2}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{\sin\dfrac{x-x_0}{2}}{\dfrac{x-x_0}{2}}\cos\frac{x+x_0}{2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{\sin\dfrac{x-x_0}{2}}{\dfrac{x-x_0}{2}}\cdot\lim_{x\to x_0}\cos\frac{x+x_0}{2}=1\cdot\cos x_0=\cos x_0,$$

mert a koszinusz függvény minden $x_0\in\mathbb{R}$ pontban folytonos. Tehát a szinusz függvény minden pontban deriválható és

$$(\sin x)'=\cos x.$$

**2.** Számítsuk ki az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x$ függvény deriváltját! Rögzített $x_0\in\mathbb{R}$ esetén:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\cos x-\cos x_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{-2\sin\dfrac{x+x_0}{2}\sin\dfrac{x-x_0}{2}}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\sin\frac{x+x_0}{2}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\sin\dfrac{x-x_0}{2}}{\dfrac{x-x_0}{2}}=-\sin x_0,\ \text{tehát}$$

$$(\cos x)'=-\sin x.$$

## 5.9. Műveletek deriválható függvényekkel

Éppen úgy, mint a folytonosság vizsgálata esetén, azt várjuk, hogy a számolás szempontjából hasznos megállapítani, mit mondhatunk az összeg, szorzat, stb. differenciálhatóságáról (deriválhatóságról).

## 1. Az összeg deriváltja

Tegyük fel, hogy az $f, g : D \to \mathbb{R}$ függvények deriválhatók a $D$ tartomány $x_0 \in D$ torlódási pontjában. Deriválható-e az $f+g$ függvény az $x_0$ pontban és ha igen, akkor hogyan számíthatjuk ki deriváltját? A feltevés szerint létezik $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$ és $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = g'(x_0)$. Az $(f+g)$-hez tartozó hányados $\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0} =$

$$= \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0},$$

és ebből

$$\lim_{x\to x_0} \frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) + g'(x_0),$$

azaz $f+g$ deriválható és a deriváltja az $f$ és $g$ deriváltjainak összegével egyenlő. Rövid jelölés:

$$(f+g)' = f' + g'.$$

**Gyakorlatok**

**1.** Számítsd ki a következő függvények deriváltját:

**a)** $x + x^2$; **b)** $x+3$; **c)** $\left(x^2+x-1\right)^2$.

**2.** Számítsd ki a következő függvények deriváltját és állapítsd meg a deriválhatósági tartományt:

**a)** $f(x) = \sin x + \cos x$; **b)** $f(x) = \cos x - \operatorname{tg} x$; **c)** $f(x) = \operatorname{ctg} x + 5^x$;

**d)** $f(x) = \log_3 x - \left(\frac{1}{2}\right)^x$; **e)** $f(x) = \sqrt[5]{x^3} + \sqrt[4]{x^3}$; **f)** $f(x) = e^x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}$.

**3.** Ha az $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ függvények $\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$ az $x_0$ pontban deriválhatók, akkor deriválható-e az $f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k$ függvény az $x_0$ pontban? Ha igen, mi a deriváltja?

**4.** Bizonyítsd be, hogy ha $f$ és $g$ deriválható az $x_0$-ban akkor $f-g$ is az, és $(f-g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$.

**5.** Ha $f$ és $g$ egyike sem deriválható az $x_0$-ban, következik-e ebből, hogy $f+g$ sem deriválható az $x_0$-ban?

## 2. Szorzat deriváltja

Tegyük fel, hogy az $f, g : D \to \mathbb{R}$ függvények deriválhatók a $D$ tartomány $x_0 \in D$ torlódási pontjában. Deriválható-e az $f \cdot g$ függvény az $x_0$ pontban?

A feltevés szerint létezik a $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$ és $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=g'(x_0)$ határérték. Az

$$\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=$$

$$=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot g(x)+f(x_0)\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

egyenlőség alapján

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(fg)(x)-(fg)(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0).$$

Tehát ha az $f$ és $g$ függvény az $x_0$ pontban deriválható akkor az $f\cdot g$ függvény is deriválható ebben a pontban és a deriváltja $(fg)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$.

Rövid jelöléssel $(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$.

**Következmény.** Ha az $f:D\to\mathbb{R}$ függvény deriválható a $D$ tartomány $x_0\in D$ torlódási pontjában, akkor a $(c\cdot f):D\to\mathbb{R}$ függvény ($c$-állandó) is deriválható az $x_0\in D$ pontban és

$$(c\cdot f)'(x_0)=c\cdot f'(x_0).$$

## Gyakorlatok és feladatok

**1.** Deriválhatók-e a következő $\mathbb{R}$-en értelmezett függvények? Ha igen számítsd ki a deriváltjukat is.

**a)** $f(x)=(x+1)(2x^2+1)$; **b)** $f(x)=|x|^3$;

**c)** $f(x)=(3x^3+x-1)(x^2-4x+5)$; **d)** $f(x)=|x|^2-|x|+2$.

**2.** Számítsd ki a következő függvények deriváltját és állapítsd meg a deriválhatósági tartományt!

**a)** $f(x)=3x\cdot\ln x$; **b)** $f(x)=x^2\cdot e^x$; **c)** $f(x)=\dfrac{1}{x}\cdot\sin x$;

**d)** $f(x)=\sqrt[3]{x}\cdot 3^x$; **e)** $f(x)=5^x\cdot\cos x$; **f)** $f(x)=\ln 2\cdot(\lg x)\cdot\sqrt{x}$;

**g)** $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\cdot\ln x+\sqrt{2}x^3\cdot\operatorname{tg}x$; **h)** $f(x)=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{7}}x\cdot\operatorname{ctg}x+\ln 4$.

**3.** Ha az $f_1$, $f_2$, $f_3$ függvények az $x_0$ pontban deriválhatók, akkor az $f_1f_2f_3$ szorzat deriválható-e az $x_0$ pontban? Ha igen, mi a deriváltja?

**4.** Ha $f_1, f_2, \dots, f_n$ függvények deriválható függvények az $x_0$ pontban, akkor

$f_1 f_2 \, \dots \, f_n = \prod_{k=1}^{n} f_k$ deriválható függvény-e és mennyi a deriváltja?

**5.** Számítsd ki a következő függvények deriváltját:

**a)** $f(x) = 10x \cdot \ln x \cdot e^x$; **b)** $f(x) = 7\sqrt{x} \cdot \sin x \cdot \operatorname{tg} x$;

**c)** $f(x) = \sqrt[4]{x} \cdot \log_3 x \cdot \cos x \cdot 5^x$.

**6. a)** Bizonyítsd be, hogy ha a $P \in \mathbb{R}[X]$ polinom gyökei az $x_1, x_2, \dots, x_n$ páronként különböző valós számok, akkor $\frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \dots + \frac{1}{x - x_n} = \frac{P'(x)}{P(x)}$, $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

**b)** Számítsd ki az $\frac{1}{1 + x_1} + \frac{1}{1 + x_2} + \dots + \frac{1}{1 + x_n}$ összeget, ha $x_1, x_2, \dots, x_n$ a $P(X) = X^n - X + 1$ polinom gyökei.

**7.** Ha az $f$ és $g$ nem deriválható az $x_0$ pontban következik-e ebből, hogy $f \cdot g$ sem deriválható az $x_0$ pontban?

### 3. Hányados deriváltja

Vizsgáljuk meg az $\frac{f}{g}$ függvény deriválhatóságát az $x_0$ pontban ha $f, g : D \to \mathbb{R}$ deriválhatók az $x_0 \in D$ pontban és $g(x_0) \neq 0$ ($x_0$ torlódási pontja a $D$-nek)!

Az $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ miatt elegendő az $\frac{1}{g}$ deriválhatóságát vizsgálni ha $g$ deriválható az $x_0$ pontban és $g(x_0) \neq 0$.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \cdot \left( -\frac{1}{g(x_0)\, g(x)} \right) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)},$$

Tehát az $\frac{1}{g}$ is deriválható és $\left( \frac{1}{g}(x_0) \right)' = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$. Így az $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ egyenlőség alapján az $\frac{f}{g}$ függvény is deriválható az $x_0$ pontban és

$$\left( \frac{f}{g} \right)'(x_0) = \left( f \cdot \frac{1}{g} \right)'(x_0) = f'(x_0) \cdot \frac{1}{g(x_0)} + f(x_0) \cdot \left( \frac{1}{g} \right)'(x_0) =$$

$$= f'(x_0) \cdot \frac{1}{g(x_0)} - \frac{f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)} = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Fejezet tartalma Tartalomjegyzék



Érvényes tehát a következő deriválási szabály: $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.

**Példák. 1.** Az $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - x$ és $g(x) = x^4 + 2$ függvények deriválhatók minden $x \in \mathbb{R}$ pontban és $g(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Ezért $\dfrac{f}{g}$ minden pontban deriválható és

$$\left(\frac{2x^3 - x}{x^4 + 2}\right)' = \frac{(6x^2 - 1)(x^4 + 2) - (2x^3 - x)(4x^3)}{(x^4 + 2)^2} = \frac{-2x^6 + 3x^4 + 12x^2 - 2}{(x^4 + 1)^2}.$$

**2.** Az $f : \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ függvény az értelmezési tartomány minden pontjában deriválható és egyenlő $\dfrac{1}{\cos x_0}$-val ugyanis

$$(\mathrm{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Hasonlóan az $f(x) = \mathrm{ctg} x$ függvény esetén, ahol $x \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

$$(\mathrm{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x . \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

## Gyakorlatok

**1.** Számítsd ki az alábbi függvények deriváltját (a megadott pontban), határozd meg a függvény maximális értelmezési tartományát és maximális deriválhatósági tartományát:

**a)** $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x^2 - x + 1}$, $x_0 = 1$; **b)** $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x_0 = 2$;

**c)** $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$, $x_0 = -1$; **d)** $f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$, $x_0 = \pm 1$;

**e)** $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^4}$, $x_0 = 0$; **f)** $f(x) = \dfrac{\sqrt[4]{x} + 1}{\sqrt[6]{x} + 2}$; **g)** $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$;

**h)** $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + x^4}$; **i)** $f(x) = \dfrac{\ln x + x}{\ln x - x}$; **j)** $f(x) = \dfrac{4 \sin x}{3 \cos x + 1}$;

**k)** $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$; **l)** $f(x) = \dfrac{\mathrm{tg}\, x + \sin x}{\cos x + 2}$; **m)** $f(x) = \dfrac{\log_3 x}{\log_3 x - 1}$.

Fejezet tartalma Tartalomjegyzék



### 4. Összetett függvény deriváltja

A $\sin 2x$ vagy $\sin^3 x$ függvények összetett függvények. Az $f(x) = \sin(2x)$ vagy $f(x) = (\sin x)^3 = \sin^3 x$ függvény összetevői (komponensei) külön deriválhatók. Általában hogyan számolhatjuk ki az $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$ függvény deriváltját (az $x_0$ pontban) az $f$ és $g$ deriváltjának segítségével?

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right] =$$

$$= \lim_{u\to u_0} \frac{f(u) - f(u_0)}{u - u_0} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0},$$

ahol $u = g(x)$, $u_0 = g(x_0)$. Ha $x \to x_0$ akkor $u \to u_0 = g(x_0)$, tehát

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Röviden:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

**Példák. 1.** Az $f(x) = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$ függvény az $x^2$ és $x^{\frac{1}{3}}$ összetevéséből származik.

$\left(x^2\right)' = 2x$ és $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$, tehát $f'(x) = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$.

Általában, ha $m, n \in \mathbb{N}^*$ akkor

$$\left(x^{\frac{m}{n}}\right)' = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1}.$$

**2.** Ha $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$, akkor

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 + x + 1\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x + 1) = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}.$$

**3.** Ha $f(x) = \sin^{50} x$, akkor $f'(x) = 50\sin^{49} x \cdot \cos x$.

**4.** Ha $f(x) = \cos^4\left(x^3 + x\right)$, akkor $f'(x) = 4\cos^3\left(x^3 + x\right) \cdot \left(\cos\left(x^3 + x\right)\right)' =$

$= -4\cos^3\left(x^3 + x\right)\sin\left(x^3 + x\right)\left(3x^2 + 1\right) = -4\left(3x^2 + 1\right)\cos^3\left(x^3 + x\right)\sin\left(x^3 + x\right)$.

**5.** Ha $f(x) = (\sin x)^3 = \sin^3 x$, akkor $f'(x) = 3\sin^2 x \cos x$.

**6.** Ha $f(x) = \sin 2x$, akkor $f'(x) = 2\cos 2x$.

**7.** Ha $f(x) = \left(2x^4 - 5x^2 + 6\right)^8$, akkor $f'(x) = 8\left(2x^4 - 5x^2 + 6\right)^7\left(8x^3 - 10x\right)$.

**8.** Ha $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2} = \left(a^2 - x^2\right)^{\frac{1}{2}}$, akkor

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(a^2 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \text{ ha } x \in (-a, a).$$

**9.** Ha $f(x) = \sin^3 5x$, akkor $f'(x) = 3\sin^2 5x \cdot 5\cos 5x = 15\sin^2 5x \cdot \cos 5x$.

## Gyakorlatok

**I.** Határozd meg a következő függvények deriválási tartományát és számítsd ki a deriváltjukat:

**1)** $f(x) = e^x \sin 2x$; **2)** $f(x) = x^2 \cdot \sin^2 x + e^x \cdot \cos x$; **3)** $f(x) = \dfrac{\cos 2x}{e^x}$;

**4)** $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{e^x + x + 1}$ **5)** $f(x) = x^3 \cdot \ln x$; **6)** $f(x) = e^x \cdot \ln x$;

**7)** $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$; **8)** $f(x) = x^2 \cos x + x^3 \sin x$; **9)** $f(x) = x \sin x$;

**10)** $f(x) = \sin x \cos x$; **11)** $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{x^2 - x + 1}$; **12)** $f(x) = \dfrac{\mathrm{tg} x}{x^2 + 1}$;

**13)** $f(x) = \left(x^3 + 2\right)^4$; **14)** $f(x) = \dfrac{\sin^6 x + \cos^6 x - 1}{\sin^4 x + \cos^4 x - 1}$; **15)** $f(x) = \sqrt{1 + 5x^2}$;

**16)** $f(x) = e^{x^2 - 3x}$; **17)** $f(x) = \ln\left(2x^3 - 4x^2\right)$; **18)** $f(x) = \sqrt{\mathrm{tg}\, x}$;

**19)** $f(x) = 5^{\sin x}$; **20)** $f(x) = \log_{0,3}\left(8x^2 - 2x^3\right)$; **21)** $f(x) = \cos(2x - 1)$;

**22)** $f(x) = \cos^2 3x$; **23)** $f(x) = \lg\left(2x^3 - 4x^2\right)$; **24)** $f(x) = x \cdot \mathrm{tg}^2 x$;

**25)** $f(x) = \sin\sqrt{ax}$; **26)** $f(x) = \sqrt[3]{\cos x - \sin x}$; **27)** $f(x) = 3^{\frac{1}{x}}$;

**28)** $f(x) = \dfrac{1}{\cos 2x}$; **29)** $f(x) = \left(x^2 + 5x - 8\right)^{100} \cdot x^5$; **30)** $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$;

**31)** $f(x) = \ln \sin x$; **32)** $f(x) = \dfrac{1}{\ln^5(3x)}$; **33)** $f(x) = \mathrm{tg}^2\left(x^2 + x^4\right)$;

**34)** $f(x) = e^{\frac{x-1}{x+1}}$; **35)** $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{\log_2\left(x^4 + x^2 + 1\right)}}$.

**II.**

**1.** Bizonyítsd be, hogy az $f(x) = c\sqrt{1 + x^2}$, $x \in \mathbb{R}$ függvényre igaz az $f'(x) = \dfrac{xf(x)}{1 + x^2}$ egyenlőség.

**2.** Vezess le egy deriválási szabályt a $h(x) = f(x)^{g(x)}$ függvényre, ahol $f : D \to \mathbb{R}_+^*$ és $g : D \to \mathbb{R}$ deriválható függvények. Ennek a segítségével számítsd ki a következő függvények deriváltját:

**a)** $f(x) = x^x$; **b)** $f(x) = \left(x^2 + 1\right)^{\sin x}$; **c)** $f(x) = x^{x^x}$.

**3.** Bizonyítsd be, hogy ha az $f_{ij} : D \to \mathbb{R}$ függvények deriválhatók $i, j = \overline{1,3}$, akkor a

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & f_{13}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & f_{23}(x) \\ f_{31}(x) & f_{32}(x) & f_{33}(x) \end{vmatrix}, \ \forall\, x \in D$$

függvény is deriválható és

$$\Delta'(x) = \begin{vmatrix} f'_{11}(x) & f'_{12}(x) & f'_{13}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & f_{23}(x) \\ f_{31}(x) & f_{32}(x) & f_{33}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & f_{13}(x) \\ {f_{21}}'(x) & f'_{22}(x) & f'_{23}(x) \\ f_{31}(x) & f_{32}(x) & f_{33}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & f_{13}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & f_{23}(x) \\ f'_{31}(x) & f'_{32}(x) & f'_{33}(x) \end{vmatrix}$$

**4.** Számítsd ki a következő függvények deriváltját:

**a)** $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$; **b)** $f(x) = \sqrt{x^2+2}$; **c)** $f(x) = x^3 \cdot e^{2x+1}$;

**d)** $f(x) = \ln \ln x$; **e)** $f(x) = \left(x^2+1\right)\sin(2x+1)$;

**f)** $f(x) = e^{2x+3}$; **g)** $f(x) = x \cdot \ln x$; **h)** $f(x) = (x+1)^2 e^{2x}$;

**i)** $f(x) = e^{2x} \ln x$; **j)** $f(x) = 2^{2x} \sin^2 x$; **k)** $f(x) = \left(e^x + x\right)^{12}$;

**l)** $f(x) = e^x \cos^3 x$; **m)**; $f(x) = (\sin x + \cos x)^6$

**n)** $f(x) = \dfrac{2+\ln x}{1+e^x}$; **o)** $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-x+1}{\ln x}}$;

**p)** $f(x) = e^{\cos^2 x}$; **q)** $f(x) = \left(\sin^3 x + 7\right)^7$;

**r)** $f(x) = \sin \sin \sin x$; **s)** $f(x) = \left(x^2 - x + 2\right)^{100}$.

**5.** Számítsd ki az $f(x) = x^\alpha,\ x > 0$ függvény deriváltját, ha $\alpha$ irracionális szám!

**6.** Határozd meg a következő függvények grafikus képéhez a megadott pontban húzott érintő egyenletét:

**a)** $f(x) = x^3 + x + 1$, $M_0(1,\ 3)$; **b)** $f(x) = \cos 2x$, $M_0(\pi,\ 1)$;

**c)** $f(x) = \ln x$, $M_0(3,\ \ln 3)$; **d)** $f(x) = e^x$, $M_0(0,\ 1)$;

**7.** $f(x) = x^2 - 3x - 6$. Írd fel az érintő egyenletét a grafikus kép $x_0 = -1$ abszcisszájú pontjában[1].

**8.** $f(x) = x^2$. Mi az érintő egyenlete az $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban?

**9.** $f(x) = x(x-1)(x+2)(x+3)$. Mi az $x_0 = 1$-ben húzott érintő egyenlete?

**10.** $f(x) = (x-2)^2 (x+3)$. Mi az érintő egyenlete az $x_0 = 2$ pontban?

---

[1] A továbbiakban, ha félreértésre nem ad okot, egyszerűen az $x_0$ pontban húzott érintőről beszélünk.

**11.** $f(x)=(x-3)\sqrt{7-x}$, az $x_0=3$ pontban írd fel az érintő egyenletét!

**12.** $f(x)=\sqrt{5+x^2}$, az $y_0=3$ ordinátájú pontokban írd fel az érintők egyenletét!

**13.** Az $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ függvény grafikus képén határozzuk meg azt a pontot, amelyben a grafikus képhez húzott érintő párhuzamos az $y=\frac{x}{2}+1$ egyenessel.

**14.** Az $f(x)=(1-x)(1+x)^2$ függvény grafikus képének melyik pontjában húzott érintő halad át a $(-1,\ 0)$ ponton?

**15.** Van-e az $f(x)=x^2+4x+8$ és $g(x)=x^2+8x+4$ függvények grafikonjának egy közös érintője?

**16.** Határozd meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely az $f(x)=x^4-2x^3+x^2+x-2$ függvény grafikonját két helyen érinti.

**17)** Adott az $f:\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{2}{3}\right\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{ax+2}{3x-2}$ függvény. Határozd meg az $a\in\mathbb{R}$ paraméter értékét úgy, hogy az $x_0$ pontban a grafikus képhez húzott érintő az $Oy$ tengellyel $45°$-os szöget zárjon be.

**18)** Határozd meg az $m$ és az $n$ paraméter értékét úgy, hogy az $f(x)=\frac{x}{x+1}$ és $g(x)=mx^2+nx+1$ függvények $2$ abszcisszájú pontban érintsék egymást.

## 5. Az inverz függvény deriváltja

A folytonos függvények tulajdonságai alapján ha $I\subseteq\mathbb{R}$ intervallum és az $f:I\to\mathbb{R}$ függvény folytonos, akkor $f(I)$ is intervallum. Az $f:I\to f(I)$ függvény szürjektív, tehát ha az $f$ függvény injektív is, akkor létezik az $f^{-1}:J\to I$ inverz függvény, ahol $J=f(I)$. A folytonos függvények tulajdonságaiból az is következik, hogy az inverz függvény folytonos. A következő tétel az inverz függvény deriválhatóságát biztosítja, ha $f$ deriválható és a deriváltja sehol sem $0$.

**Tétel.** Ha $I$ és $J$ intervallumok és $f:I\to J$ bijektív, valamint $f$ deriválható az $x_0$ pontban és $f'(x_0)\neq 0$, akkor $f^{-1}$ deriválható az $y_0=f(x_0)$ pontban és igaz az alábbi egyenlőség:

$$\left(f^{-1}\right)'\left(f(x_0)\right)=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

**Bizonyítás.** $\lim\limits_{y\to y_0}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{f(x)-f(y_0)}=\frac{1}{f'(x_0)}$, ahol az $f^{-1}(y)=x$ változócserét hajtottuk végre a határértékben. Ebből következik, hogy $f^{-1}$ deriválható $y_0=f(x_0)$-ban és igaz a tételben szereplő egyenlőség.

**Következmény.** Ha $f$ deriválható $I$-n és $f'(x) \neq 0$, $\forall\, x \in I$, akkor $f^{-1}$ deriválható $J = f(I)$-n és $\left(f^{-1}\right)'(f(x)) = \dfrac{1}{f'(x)}$, $\forall\, x \in I$. Ezt az összefüggést úgy is megkaphatjuk, ha az $\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = f(f^{-1}(x)) = x$ egyenlőséget deriváljuk. Így az eredményt előre is megmondhatjuk.

**Példák**

**1.** Az $f : \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$ függvény szigorúan növekvő a $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ intervallumon, tehát van inverze $f^{-1} : [-1, 1] \to \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $f^{-1}(x) = \arcsin x$. Az inverz függvény deriválási szabályát alkalmazva:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \text{ ha } x \in (-1, 1).$$

**2.** Az $f : [0, \pi] \to [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$ függvény szigorúan csökkenő és inverze $f^{-1} = \arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$, tehát

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = (\arccos x)' = \frac{1}{-\sin(\arccos x)} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

ha $x \in (-1, 1)$.

**3.** Az $f : \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$ függvény szigorúan növekvő, inverze $f^{-1} : \mathbb{R} \to \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x$, tehát

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg} x)}} = \cos^2(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

**Gyakorlatok**

Számítsd ki a következő függvények deriváltját és határozd meg a deriválhatósági tartományt:

**a)** $f(x) = \sqrt{x \cdot \sqrt[3]{x \cdot \sqrt[4]{x}}}$;

**b)** $f(x) = x - \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} 2x + \dfrac{5}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{3}$;

**c)** $f(x) = \arcsin\dfrac{1 + 3x}{2}$;

**d)** $f(x) = \arccos\dfrac{2x}{1 + x^2}$;

**e)** $f(x) = 5x \arcsin 3x$;

**f)** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\arccos\left(x^2 + 1\right)$;

**g)** $f(x) = \frac{2}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$; **h)** $f(x) = \left(x^2+1\right) \operatorname{arctg} x$;

**i)** $f(x) = \arcsin(\cos x)$.

## 5.10. A függvény differenciálja

**Értelmezés.** Az $f : D \to \mathbb{R}$ függvényt differenciálhatónak nevezzük az $x_0 \in D$ pontban, ha létezik olyan $m \in \mathbb{R}$ szám, amelyre

$$\lim_{x \to x_0} \left( \frac{f(x) - f(x_0) - m(x - x_0)}{x - x_0} \right) = 0 .$$

A $df(x_0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $df(x_0)(h) = m \cdot h$ függvényt az $f$ *differenciáljának* nevezzük az $f$ pontban.

Tehát az $f$ függvény akkor és csakis akkor differenciálható az $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban, ha deriválható $x_0$-ban és a függvény differenciálja az $x_0$-ban a $df(x_0)$ lineáris függvény: $df(x_0)(t) = f'(x_0) \cdot t$.

## 5.11. Magasabb rendű deriváltak

**Értelmezés.** Az $f : D \to \mathbb{R}$ függvényt az $x_0 \in D$ pontban *kétszer deriválhatónak* nevezzük, ha $f$ deriválható az $x_0$ egy $V \cap D$ környezetén és az $f' : V \cap D \to \mathbb{R}$ függvény is deriválható az $x_0$ pontban. Az $f$ *másodrendű deriváltját* az $x_0$ pontban $(f')'(x_0) = f''(x_0)$-val jelöljük.

Ha $f'$ deriválható a $D$ halmazon akkor azt mondjuk, hogy $f$ kétszer deriválható a $D$-n és a másodrendű deriváltját $f'' = (f')'$-vel jelöljük. Az $f'' : D \to \mathbb{R}$ függvényt másodrendű deriváltnak (második deriváltnak) nevezzük és $f^{(2)}$-vel is jelöljük.

**Értelmezés.** Azt mondjuk, hogy az $f : D \to \mathbb{R}$ függvény $n$-szer deriválható $(n \geq 2)$ az $x_0 \in D$ pontban, ha $f$ $(n-1)$-szer deriválható az $x_0$ pont egy $V \cap D$ környezetén és az $(n-1)$-ed rendű derivált deriválható az $x_0 \in D$ pontban.

Az $f^{(n)}(x_0) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x_0)$ jelölést alkalmazzuk és ezt az $f$ $n$-ed rendű deriváltjának nevezzük az $x_0$ pontban. Ha az $f : D \to \mathbb{R}$ függvény $n$-szer deriválható $D$-n, akkor az $f^{(n)} : D \to \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x)$ függvényt az $f$ $n$-ed rendű deriváltjának nevezzük..

Ha minden $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}^*$ esetén az $f$ függvény *$n$-szer deriválható* egy pontban (vagy egy halmazon) akkor azt mondjuk, hogy $f$ *végtelenszer deriválható* (az illető pontban vagy halmazon).

Megegyezés szerint, a nulladrendű derivált $f^{(0)} = f$ éppen a függvénnyel egyenlő.

Fejezet tartalma Tartalomjegyzék



**Példák**

**1.** Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^k$ $(k\in\mathbb{N})$ természetes kitevőjű hatványfüggvény végtelenszer deriválható és $f^{(k)}(x)=k!$, $f^{(n)}(x)=0$, ha $n>k$.

**2.** Az $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}$ függvény végtelenszer deriválható és $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n\cdot n!}{x^{n+1}}$, ahol $n\geq 1$, $x\neq 0$.

**3.** Az $f(x)=e^x$ függvény esetében $f^{(n)}(x)=e^x$, $n\in\mathbb{N}$, $x\in\mathbb{R}$.

**4.** $\sin^{(n)} x=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$, $n\in\mathbb{N}$, $x\in\mathbb{R}$.

**5.** $\cos^{(n)} x=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$, $n\in\mathbb{N}$, $x\in\mathbb{R}$.

**6.** $(\ln x)^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{x^n}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

**7.** $(a^x)^{(n)}=a^x\cdot\ln^n a$, $(a>0)$.

**Gyakorlatok**

**1.** Az $u:D\to\mathbb{R}$ és $v:D\to\mathbb{R}$ függvények $n$-szer deriválhatók. Igazold, hogy

**a)** $(u+v)^{(n)}=u^{(n)}+v^{(n)}$;

**b)** $(u\cdot v)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(k)}v^{(n-k)}$ (A Leibniz-formula)

**2.** Határozd meg $f''(x)$-et az alábbi függvények esetében (a maximális tartományon):

**a)** $f(x)=x\sqrt{1+x^2}$; **b)** $f(x)=x\ln x$; **c)** $f(x)=e^{-x^2}$;

**d)** $f(x)=(1+x^2)\operatorname{arctg} x$.

**3.** Számítsd ki $f(0)$-t, $f'(0)$-t és $f''(0)$-t, ha $f(x)=e^{\sin x}\cdot\cos(\sin x)$.

**4.** Bizonyítsd be, hogy az alábbi függvények kétszer deriválhatók a megadott pontokban:

**a)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg} x, & x\geq 0\\ x^3+x, & x<0\end{cases}$, $x_0=0$;

**b)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\sin^2 x, & x\leq 0\\ x^2, & x>0\end{cases}$, $x_0=0$;

**c)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|2x-6|^5$, $x_0=3$.

**5.** Határozd meg az $a, b, c \in \mathbb{R}$ paraméterek értékeit úgy, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b, & x \le 0 \\ cx + 4 + \ln\left(x^2 - x + 1\right), & x < 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$; függvény kétszer deriválható legyen az $\mathbb{R}$-en.

**6.** Határozd meg az $a \in \mathbb{R}$ paraméter értékeit úgy, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot e^{ax}$ függvény teljesítse az $f'''(x) - f''(x) - 8f'(x) + 12f(x) = 0$ összefüggést minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

**7.** Bizonyítsd be, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left(3x^2 - 4\right)e^x$ függvény $n$-edik deriváltja $f^{(n)}(x) = \left(3x^2 + a_n x + b_n\right)e^x$ alakú, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén, ahol $a_n, b_n$ valós számok. Határozd meg az $a_n$ és $b_n$ valós számokat az $n$ függvényében!

**8.** Számítsd ki az $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ függvény $n$-ed rendű deriváltját!

**9.** Adott az $f(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ függvény, ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ állandók. Bizonyítsd be, hogy $f''(x) + f'(x) = 0$.

**10.** Számítsd ki a következő függvények $n$-ed rendű deriváltját:

**a)** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \cdot e^x$; **b)** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \cdot e^{2x}$;

**c)** $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot \ln x$; **d)** $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln\left(1 - x^2\right)$;

**e)** $f : \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, $f(x) = \dfrac{1}{x(1-x)}$; **f)** $f : \mathbb{R} \setminus \{1,2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 3x + 2}$;

**g)** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left(1 - x^2\right) \cdot \cos x$; **h)** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x^2}$.

**11.** Azt mondjuk, hogy az $f : D \to \mathbb{R}$ és $g : D \to \mathbb{R}$ függvények grafikus képei az $x_0$ pontban $n$-ed rendben érintik egymást, ha $f^{(k)}\left(x_0\right) = g^{(k)}\left(x_0\right)$, $k = \overline{0, n}$ és $f^{(n+1)}\left(x_0\right) \neq g^{(n+1)}\left(x_0\right)$. Vizsgáljuk meg, hogy hányad rendben érintik egymást az alábbi függvénypárok grafikus képei:

**a)** $f(x) = x^2$ és $g(x) = x + 1 - \dfrac{1}{x}$; **b)** $f(x) = e^x$ és $g(x) = \dfrac{x^2}{2} + x + 1$.

**12.** Számítsd ki a következő görbék által bezárt szög mértékét:

**a)** $f(x) = (x-2)^2$ és $g(x) = 4x - x^2 - 4$; **b)** $f(x) = \sin x$ és $g(x) = \cos x$.

**13.** Bizonyítsd be, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}}, & x \in \left(-1, 1\right) \\ P(x), & x \in \mathbb{R} \setminus \left(-1, 1\right) \end{cases}$

függvény, ahol $P \in \mathbb{R}[X]$, pontosan akkor végtelenszer deriválható, ha $P$ identikusan nulla. (Felvételi feladat, Kolozsvár)

Fejezet tartalma Tartalomjegyzék



A könnyebb memorálás érdekében összefoglaltuk a fontosabb deriválási képleteket és szabályokat.

| $f$ | $f'$ | deriválhatósági tart. |
|---|---|---|
| $x^n,\ n\in\mathbb{N}$ | $nx^{n-1}$ | $\mathbb{R}$ |
| $x^m,\ n\in\mathbb{Z}_-^*$ | $mx^{m-1}$ | $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ |
| $x^a,\ a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ | $a\cdot x^{a-1}$ | $(0,\ \infty)$ |
| $e^x$ | $e^x$ | $\mathbb{R}$ |
| $a^x,\ a>0,\ a\neq 1$ | $a^x\cdot\ln a$ | $\mathbb{R}$ |
| $\ln x$ | $\dfrac{1}{x}$ | $(0,\infty)$ |
| $\log_a x,\ a>0,\ a\neq 1$ | $\dfrac{1}{x\ln a}$ | $(0,\infty)$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ | $\mathbb{R}$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ | $\mathbb{R}$ |
| $\operatorname{tg} x$ | $\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\operatorname{tg}^2 x$ | $\mathbb{R}\setminus\left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2}\middle\|\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ |
| $\operatorname{ctg} x$ | $\dfrac{-1}{\sin^2 x}=-1-\operatorname{ctg}^2 x$ | $\mathbb{R}\setminus\left\{k\pi\middle\|\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ |
| $\arcsin x$ | $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $(-1,\ 1)$ |
| $\arccos x$ | $\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $(-1,\ 1)$ |
| $\operatorname{arctg} x$ | $\dfrac{1}{1+x^2}$ | $\mathbb{R}$ |
| $\operatorname{arcctg} x$ | $\dfrac{-1}{1+x^2}$ | $\mathbb{R}$ |

| |
|---|
| $(f+g)'=f'+g'$ |
| $(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$ |
| $\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$ |
| $\left(f(g(x))\right)'=f'\left(g(x)\right)\cdot g'(x)$ |
| $(f\cdot g)^{(n)}=\sum\limits_{k=1}^{n}C_n^k\cdot f^{(n-k)}\cdot g^{(k)}$ |
| $\left(f(x)^{g(x)}\right)'=g(x)\cdot f(x)^{g(x)-1}\cdot f'(x)+f(x)^{g(x)}\cdot\ln f(x)\cdot g'(x)$ |

Tovább