

I. FEJEZET

SOROZATOK, SZÁMTANI ÉS MÉRTANI HALADVÁNYOK

I.1. Sorozatok

A legtöbb ember szókincsében szerepel a *sorozat* szó. Ez azt jelenti, hogy rendelkezik valamilyen *sorozatfogalommal*. Megérti, ha a minket sújtó katasztrófa-sorozatáról mesélünk, vagy az Európa Kiadó sorozatában megjelent legújabb könyvet dicsérjük. Mi több, ha tanult már a π számról, akkor is fog érteni bennünket, ha a π számjegyeinek sorozatáról beszélünk. Sok intelligenciateszt erre az intuitív sorozatfogalomra épít. Gyakoriak a „Folytasd a következő sorozatot!” típusú felszólítások. Vegyük a következő sorozatokat:

1. január, február, március, április,...
2. Petre Roman, Teodor Stolojan, Nicolae Văcăroiu,...
3. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,...
4. 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49,...
5. 1, 3, 5, 7, 9, 11,...
6. 1, 2, 4, 5, 10, 11, 22, 23, 46,...
7. 1, 2, 5, 26, 677,...

A legtöbbben azonnal látják, hogy a következő elem

az 1. sorozatban a *május* (az év hónapjait soroljuk fel);

a 2. sorozatban *Victor Ciorbea* (a '90 utáni román miniszterelnökök neveit soroljuk fel);

a 3. sorozatban a 9 (a természetes számokat soroljuk növekvő sorrendben);

a 4. sorozatban a 64 (a természetes számok négyzeteit soroljuk növekvő sorrendben);

az 5. sorozatban a 13 (a páratlan természetes számokat soroljuk fel);

a 6. sorozatban a 47 (ha az első taghoz egyet hozzáadunk, megkapjuk a második tagot, ha ezt kettővel szorozzuk, megkapjuk a harmadik tagot, majd felváltva ismétljük ezt a két műveletet);

a 7. sorozatban a $677^2 + 1 = 458\,330$ (a második tagtól kezdődően mindegyik pontosan eggyel nagyobb, mint az előtte álló négyzete).

Természetesen a felszólításban rejtőzik az az előfeltételezés, hogy a sorozat tagjait valamilyen jól meghatározott szabály szerint írtuk fel, és erre a szabályra rá is lehet jönni. Sok esetben ez a szabály nem egyértelmű. Vizsgáljuk meg a következő példát:

8. 10, 11, 13, 17, 25, ...

A számok közti különbség rendre 1, 2, 4 és 8, így ésszerű azt állítani, hogy a következő tag $25+16=41$. Másrészt a számok számjegyösszege szintén 1, 2, 4 és 8 (az utolsónak 7). Így az is lehetséges, hogy az egymás utáni tagok különbsége a kisebb tag számjegyeinek összegével egyenlő. Ennek alapján a következő elem $25+7=32$.

Ahhoz, hogy a sorozatokat matematikai vizsgálódásnak vethessük alá, mindenekelőtt a sorozat fogalmának pontos matematikai értelmezésére van szükségünk. Észre kell vennünk, hogy a felsorolt példákban kétféle sorozattal találkoztunk. Az egyik típus véges számú tagot tartalmaz (pl. az év hónapjainak

sorozata) a másik végtelen sokat (pl. a természetes számok sorozata). Eszerint véges és végtelen sorozatokról fogunk beszélni.

I.1.1. Véges sorozatok

1.1.1. Értelmezés. Ha $n \in \mathbb{N}^*$ egy szám és E egy halmaz, akkor az $f: \{1, 2, 3, \dots, n\} \rightarrow E$ függvényt az E halmaz elemeiből alkotott (vagy egyszerűen E -beli) **véges sorozatnak** nevezzük.

1.1.2. Példák

1. Az $f: \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \rightarrow \{a, o, r, s, t, z\}$ függvényt a következő táblázattal értelmezzük:

x	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	s	o	r	o	z	a	t

Másképpen: $f(i)$ a „sorozat” szó i -edik betűje.

2. Az $f: \{1, 2, 3, \dots, 90\} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(n) = 9 + n$ függvény a kétjegyű természetes számok sorozatát adja.

1.1.3. Megjegyzések

- Ha az 1.1.1. értelmezésben szereplő E számhalmaz, akkor **számsorozatról** beszélünk: $E = \mathbb{R}$ esetén **valós számsorozatról**, $E = \mathbb{Q}$ esetén **racionális számsorozatról**, $E = \mathbb{Z}$ esetén **egész számsorozatról** és $E = \mathbb{N}$ esetén **természetes számsorozatról**.
- A sorozat tagjai: $f(1), f(2), f(3), \dots, f(n)$, egyszerűbben jelölve: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, a sorozat k -adik tagja tehát $x_k = f(k)$, $\forall k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Az 1.1.2. paragrafus 1. példájában a sorozat tagjai: $x_1 = s, x_2 = o, x_3 = r, x_4 = o, x_5 = z, x_6 = a$ és $x_7 = t$.
- Mivel véges halmazon értelmezett függvényt megszerkeszthetünk az egyes elemek képeinek egyenkénti megadásával is (lásd 1.1.2/1-es példát) a sorozat elemei lehetnek egymástól függetlenek is. Ebből is látszik, hogy a bevezetőben említett „Folytasd a sorozatot!” felszólítás mennyire pontatlan. Tulajdonképpen azt a képzési szabályt kell megtalálnunk, amelynek segítségével a sorozat már meglevő elemeit generáltuk, majd e szabály segítségével megszerkeszthetjük a következő elemet. Könnyen képezhetünk olyan sorozatot, amelynek elemei között nincs ilyen összefüggés. Gondoljunk csak a lottóhúzás eredményeire, vagy egy Las Vegas-i kaszinó nyertes rulett-számaira.



8 12 42 6 20 ???
8 12 42 6 20 ???

I.1.2. Végtelen sorozatok

1.2.1. Értelmezés. Ha E egy halmaz, akkor az $f: \mathbb{N}^* \rightarrow E$ függvényt az E halmaz elemeiből alkotott (vagy egyszerűen E -beli) **sorozatnak** nevezzük.

1.2.2. Megjegyzések

1. A végtelen sorozatok tagjait is általában így jelöljük: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$, a sorozat k -adik tagja tehát $x_k = f(k)$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$. A sorozatokat röviden így jelöljük: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vagy $(x_n)_{n \geq 1}$, és így olvassuk: az x_n általános tagú sorozat.

2. Az f függvény tulajdonságai szerint beszélhetünk **növekvő sorozatról** (ha f növekvő, vagyis ha $x_{n+1} \geq x_n, \forall n \geq 1$ esetén), **csökkenő sorozatról** (ha f csökkenő, vagyis ha $x_{n+1} \leq x_n, \forall n \geq 1$ esetén) vagy **periodikus sorozatról** (ha f periodikus, azaz ha létezik olyan m természetes szám, amelyre $x_{n+m} = x_n, \forall n \geq 1$ esetén).
3. Hasonlóan a véges sorozatokhoz a végtelen sorozatok esetén is beszélhetünk természetes, valós, egész, racionális stb. sorozatról, az E halmaz elemeinek természetéről szerint.

1.2.3. Példák

1. Az $f_1 : N^* \rightarrow N, f_1(n) = n$ függvény az I.1. paragrafus harmadik sorozatát származtatja (szimbólumokkal). A sorozat általános tagját a továbbiakban így jelöljük: $x_n = n, \forall n \in N^*$.
2. Az $f_2 : N^* \rightarrow N, f_2(n) = n^2$ függvény az I.1. paragrafus negyedik sorozatát értelmezi, tehát $x_n = n^2, \forall n \in N^*$.
3. Az $f_3 : N^* \rightarrow N, f_3(n) = 2n - 1$ függvény az I.1. paragrafus ötödik sorozatát írja le, tehát $x_n = 2n - 1, \forall n \in N^*$.
4. Az I.1. paragrafus hatodik példájában szereplő sorozat képzési szabálya szerint: $x_2 = x_1 + 1, x_3 = 2x_2, x_4 = x_3 + 1, x_5 = 2x_4, \dots$ általában $x_{2n} = x_{2n-1} + 1, \dots$ illetve $x_{2n+1} = 2x_{2n}, \forall n \in N^*$. Az előbbi összefüggések alapján a sorozat bármely tagja kiszámolható, de az x_{2001} kiszámításához ki kellene számolnunk a sorozat első 2000 elemét. Ezt elkerülhetjük, ha előbb megtaláljuk azt az f függvényt, amely a sorozat elemeit származtatja (az értelmezés szerint).
5. Az I.1. paragrafus hetedik példájában a sorozat egyes tagjait (a másodiktól kezdődően) úgy kaptuk, hogy az előtte álló tag négyzetéhez hozzáadtunk 1-et. Ezt matematikailag az $x_{n+1} = x_n^2 + 1, \forall n \geq 1$ egyenlőség fejezi ki. Ez az egyenlőség önmagában még nem határozza meg a sorozat minden tagját. Ha viszont ismerjük az első tagot is (az x_1 -et), akkor a sorozat minden tagja kiszámítható.

1.2.4. Megjegyzés. Ha az $(x_n)_{n \in N^*}$ sorozat tagjait n függvényében adjuk meg, akkor azt mondjuk, hogy ismerjük **a sorozat általános tagjának képletét**¹ (vagy egyszerűen az **általános tagot**). Ha a sorozat tagjait az őket megelőző egy vagy több tag függvényében adjuk meg, akkor a sorozatot **rekurzívnak** nevezzük, és a tagokat generáló összefüggést **rekurzió**nak (vagy rekurencia-reláció) nevezzük. Valamely, rekurzióval adott sorozat tagjait csak a rekurzió alapján általában nem tudjuk meghatározni, szükségünk van a tagok további tulajdonságaira, vagy (esetleg) a sorozat néhány tagjának pontos ismeretére. Az előbbi öt példában az első három sorozat esetében ismerjük az általános tagot, míg az utolsó kettő esetén egy-egy rekurziót ismerünk.

¹ A függvény megadása nem jelent föltétlenül képletet. A prímszámok sorozata is egy helyesen értelmezett sorozat annak ellenére, hogy sem az n -edik prímet megadó általános képletet, sem pedig a prímek közötti rekurencia-relációt nem ismerünk.

1.2.5. Példák

1. Az $x_n = 2^n - n^2, \forall n \geq 1$ általános tagú sorozat első hat eleme $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = -1, x_4 = 0, x_5 = 7, x_6 = 28$.

2. Jelöljük x_n -nel az $\frac{1}{n}$ szám második tizedes jegyét. Ha az első tizenkét tagot kiszámítjuk a következő értékek adódnak: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 3, x_4 = 5, x_5 = 0, x_6 = 6, x_7 = 4, x_8 = 2, x_9 = 1, x_{10} = 0, x_{11} = 9, x_{12} = 8$. A sorozat általános tagja a következő képlettel adható meg:

$$x_n = \left[100 \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{10} \cdot \left[\frac{10}{n} \right] \right) \right], \forall n \in N^* \text{ (az összefüggés nem szükséges a sorozat}$$

értelmezéséhez, de megkönnyítheti a dolgunkat, ha az n -edik tagot egy számítógépes program segítségével szeretnénk kiszámítani, vagy ha további számításokat kell végeznünk vele).

3. Az $x_{n+1} = x_n + 3, \forall n \in N^*, x_1 = 1$ összefüggésekkel értelmezett rekurzív sorozat első öt elemét kiszámíthatjuk, ha a rekurzióba behelyettesítjük rendre az 1, 2, 3 és 4 számokat. Így a következő értékekhez jutunk: $x_2 = x_1 + 3 = 4, x_3 = x_2 + 3 = 7, x_4 = x_3 + 3 = 10, x_5 = x_4 + 3 = 13$. Észrevehetjük, hogy ezek éppen a $3k + 1$ alakú számok. A sorozat tagjait a következő alakban írhatjuk: $x_1 = 3 \cdot 0 + 1, x_2 = 3 \cdot 1 + 1, x_3 = 3 \cdot 2 + 1, x_4 = 3 \cdot 3 + 1$ és $x_5 = 3 \cdot 4 + 1$. Az általános tagra vonatkozóan kialakulhat a következő sejtés: $x_n = 3 \cdot (n-1) + 1, \forall n \in N^*$. Ezt a matematikai indukció segítségével igazoljuk. $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ esetén az összefüggés igaz. Feltételezzük, hogy sejtésünk igaz k -ra, és kiszámítjuk az x_{k+1} -et.

$$x_{k+1} = x_k + 3 = 3 \cdot (k-1) + 1 + 3 = 3 \cdot k + 1 = 3 \cdot ((k+1)-1) + 1,$$

tehát sejtésünk igaz $(k+1)$ -re is. Így a matematikai indukció elve alapján, sejtésünk bármely $n \geq 1$ természetes szám esetén igaz, tehát a sorozat általános tagja:

$$x_n = 3 \cdot (n-1) + 1, \forall n \in N^*.$$

1.2.6. Megoldott feladatok

1. Az $(x_n)_{n \in N^*}$ sorozatot az $x_{n+2} = 4 \cdot x_{n+1} - 4 \cdot x_n, x_1 = 2, x_2 = 8$ rekurziós relációval értelmeztük. Határozzuk meg a sorozat általános tagjának képletét!

Megoldás. Kiszámítjuk a sorozat első néhány tagját: $x_1 = 2, x_2 = 8, x_3 = 4 \cdot (8 - 2) = 24, x_4 = 4 \cdot (24 - 8) = 64, x_5 = 4 \cdot (64 - 24) = 160, x_6 = 4 \cdot (160 - 64) = 384, x_7 = 4 \cdot (384 - 160) = 896$. Tényezőkre bontjuk, és táblázatba foglaljuk a kapott értékeket:

n	1	2	3	4	5	6	7
x_n	2	2^3	$3 \cdot 2^3$	2^6	$5 \cdot 2^5$	$3 \cdot 2^7$	$7 \cdot 2^7$

A 3, 5 és 7 esetén a kapott értékek bizonyos szabályszerűséget sugallnak. Az $x_n = n \cdot 2^n$ alakra gyanakszunk. Megpróbáljuk 1, 2, 4 és 6 esetén is hasonló formában felírni a sorozat tagjait. $x_1 = 2 = 1 \cdot 2^1$, $x_2 = 8 = 2 \cdot 2^2$, $x_4 = 64 = 4 \cdot 2^4$ és $x_6 = 384 = 6 \cdot 2^6$, tehát megfogalmazhatjuk a sejtésünket, amely szerint $x_n = n \cdot 2^n$, $\forall n \geq 1$. Ezt a matematikai indukció segítségével igazoljuk. Mivel x_{n+1} nemcsak x_n -től függ, indukciós állításunk a következő:

$$P(n): x_k = k \cdot 2^k, \forall k \leq n.$$

Ez az állítás $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ esetén igaz. Ha feltételezzük, hogy sejtésünk n -re igaz, akkor bizonyítanunk kell, hogy $x_{n+1} = (n+1) \cdot 2^{n+1}$. Másrészt

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 4 \cdot (x_n - x_{n-1}) = \\ &= 4 \cdot (n \cdot 2^n - (n-1) \cdot 2^{n-1}) = 2n \cdot 2^{n+1} - (n-1) \cdot 2^{n+1} = (n+1) \cdot 2^{n+1}, \end{aligned}$$

tehát a matematikai indukció elve alapján $x_n = n \cdot 2^n$, $\forall n \geq 1$.

2. Adott az $x_n = 2^n - n^2$, $\forall n \geq 1$ általános tagú sorozat. Határozzunk meg egy rekurziót a sorozat tagjaira!

Megoldás. Felírjuk az adott összefüggést n -re és $(n-1)$ -re, majd kiküszöböljük a 2 hatványait:

$$\left. \begin{aligned} 2 \cdot x_{n-1} &= 2^n - 2(n-1)^2 \\ x_n &= 2^n - n^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x_n - 2 \cdot x_{n-1} = n^2 - 4n + 2, \forall n \geq 1 \quad (1)$$

Az így kapott összefüggésből kiküszöbölhetjük az $(n^2 - 4n)$ -et is²:

$$\left. \begin{aligned} x_n - 2x_{n-1} &= n^2 - 4n + 2 \\ x_{n-1} - 2x_{n-2} &= (n-1)^2 - 4(n-1) + 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x_n - 3x_{n-1} + 2x_{n-2} = 2n - 5 \quad (2)$$

A (2) összefüggésből kiküszöböljük a $2n$ -et:

$$\left. \begin{aligned} x_n - 3x_{n-1} + 2x_{n-2} &= 2n - 5 \\ x_{n-1} - 3x_{n-2} + 2x_{n-3} &= 2(n-1) - 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x_n - 4x_{n-1} + 5x_{n-2} - 2x_{n-3} = 2 \quad (3)$$

A (3) összefüggés alapján érvényes a következő rekurzió:

$$x_{n+3} = 4x_{n+2} - 5x_{n+1} + 2x_n + 2, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

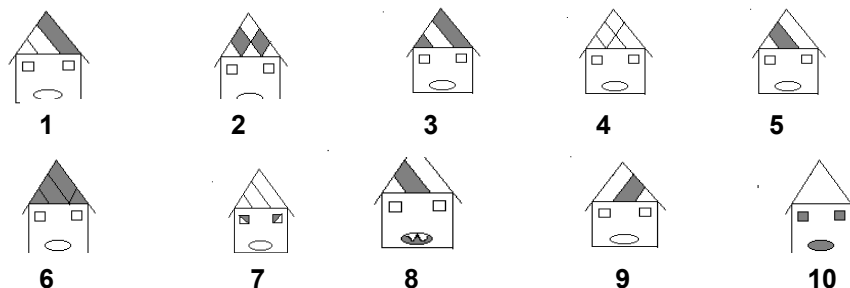
3. Az $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sorozatot az $y_{n+3} = 4y_{n+2} - 5y_{n+1} + 2y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $y_1 = 1$, $y_2 = 0$ és $y_3 = -1$ összefüggésekkel értelmezzük. Bizonyítsd be, hogy $y_n = x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, ahol $x_n = 2^n - n^2$, $\forall n \geq 1$ a 2. feladatban szereplő sorozat.

Megoldás. Kiszámítjuk az x_1 , x_2 és x_3 értékeit: $x_1 = 2^1 - 1^2 = 1$, $x_2 = 2^2 - 2^2 = 0$ és $x_3 = 2^3 - 3^2 = -1$. Tehát a két sorozatnak közös az első három tagja, és a tagok ugyanazt a rekurziót teljesítik (lásd a (2) összefüggést). Mivel ez a

² A kapott összefüggés is egy rekurzió. A további számolásokat azért végezzük el, hogy bemutassuk, hogyan lehet kiküszöbölni egy n -ben polinomiális tagot a rekurzióból.

négy összefüggés egyértelműen meghatározza a sorozatot, felírhatjuk, hogy $y_n = 2^n - n^2$, $\forall n \geq 1$.

4. Egy üdülőtáborban tíz házikót építettek. A házikókat kékre vagy zöldre festik, de két egymás utáni számmal rendelkező ház nem lehet kék. Hányféleképpen lehet lefesteni a házakat?



Megoldás. Próbáljunk egyszerűbb eseteket megvizsgálni. Ha csak egy ház lenne a táborban, akkor kétféleképpen lehetne lefesteni (kékre vagy zöldre).

Ha két ház volna a táborban, azt háromféleképpen lehetne lefesteni (a négy lehetséges színezés közül nem felel meg az, amikor mindkét ház kékre van festve).

A továbbiakban n házikó esetén jelöljük a_n -nel a megengedett festések számát. Láttuk, hogy $a_1 = 2$ és $a_2 = 3$. Próbáljuk meg kifejezni a_n -et az öt megelőző tagok függvényében. Ha az első házikót zöldre festjük, akkor a maradék $n-1$ házikót a_{n-1} különböző módon festhetjük le. Ha az első házikót kékre festjük, akkor a másodikat kötelező módon zöldre kell festeni, a többi $n-2$ házikót a_{n-2} különböző módon festhetjük le. Így az n házikót összesen $a_{n-1} + a_{n-2}$ különböző módon festhetjük le. Tehát $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $\forall n \geq 3$. Ha ezt az összefüggést használjuk rendre a következő értékeket kapjuk:

$$\begin{aligned} a_3 &= a_2 + a_1 = 2 + 3 = 5, & a_4 &= a_3 + a_2 = 5 + 3 = 8, & a_5 &= a_4 + a_3 = 13, \\ a_6 &= a_5 + a_4 = 13 + 8 = 21, & a_7 &= a_6 + a_5 = 21 + 13 = 34, & a_8 &= a_7 + a_6 = 34 + 21 = 55, \\ a_9 &= a_8 + a_7 = 55 + 34 = 89 \text{ és } a_{10} &= a_9 + a_8 = 89 + 55 = 144. \end{aligned}$$

Tehát a tíz házat a feladat feltételeinek megfelelően 144 különböző módon lehet lefesteni.

5. a) Bizonyítsuk be a $3 \cdot (55a + 84b)^2 - 7 \cdot (36a + 55b)^2 = 3a^2 - 7b^2$ azonosságot!

b) Bizonyítsuk be, hogy a $3x^2 - 7y^2 + 1 = 0$ egyenletnek végtelen sok megoldása van a természetes számok halmazában!

Megoldás. A $3 \cdot (55a + 84b)^2 - 7 \cdot (36a + 55b)^2 = 3a^2 - 7b^2$ azonosság alapján, ha az (a, b) számpár megoldása az egyenletnek, akkor az $(55a + 84b, 36a + 55b)$ számpár is megoldása. Szerkesszük meg a következő, rekurzióval értelmezett sorozatokat:

$$x_1 = 3, \quad y_1 = 2 \quad x_{n+1} = 55 \cdot x_n + 84 \cdot y_n \text{ és } y_{n+1} = 36 \cdot x_n + 55 \cdot y_n. \quad (3)$$

Az előbbi észrevételünk alapján az (x_n, y_n) számpár megoldása az egyenletnek bármely $n \geq 1$ esetén. A (3) összefüggés biztosítja, hogy $x_n > 0$ és $y_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, tehát az $(x_n)_{n \geq 1}$ és $(y_n)_{n \geq 1}$ sorozatok pozitív tagú és szigorúan növekvő sorozatok. Sikertült tehát megszerkesztenünk a vizsgált egyenlet végtelen sok, különböző megoldását.

2.2.7. Gyakorlatok és feladatok

1. Vajon milyen törvényszerűség alapján képeztük az alábbi sorozatokat? Az általad talált szabályszerűség alapján írd fel a következő két elemet!

- a) szén, szilícium, germánium, ón,...
- b) 2, 4, 16, 256,...
- c) 1, 1, 2, 3, 5, 8,...
- d) 1, 3, 6, 8, 11, 13, 16,...
- e) 9, 27, 54, 90, 135, 189,...
- f) 3, 2, 6, 5, 15, 14, 42,...
- g) 190, 192, 64, 66, 22, 24, 8, 10,...
- h) 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28,...
- i) 246, 810, 121, 416, 182,...
- j) 123, 14, 17, 50, 25, 29,...
- k) 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14, 16, 19,...

2. Számítsd ki a következő sorozatok első hat elemét, ha az általános tag képlete:

- a) $x_n = 4n - 3, \forall n \geq 1$; b) $x_n = 2n^2 - 3n + 1, \forall n \geq 1$;
- c) $x_n = \max\{n^2 - n - 6, -|n - 5|\}, \forall n \geq 1$;
- d) $x_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}, \forall n \geq 1$; e) $x_n = \frac{\cos(n\pi)}{n}, \forall n \geq 1$.

3. Keresd meg a párját! Az első oszlopbeli képletekkel értelmezett sorozatok mindegyikének van egy párja a második oszlopban (a két sorozat megfelelő tagjai egyenlők). Bizonyítsd is be, hogy a megfelelő sorozatok tagjai egyenlők!

- a) $y_n = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2} \cdot \pi\right)}{n^2}, \forall n \geq 1$; 1) $a_1 = 4, a_{n+1} = 3a_n - 2, \forall n \geq 1$;
- b) $z_n = 3^n + 1, \forall n \geq 1$; 2) $b_{n+2} = 5b_{n+1} - 4b_n, \forall n \geq 1$,
 $b_1 = 3$ és $b_2 = 15$;
- c) $x_n = 4^n - 1, \forall n \geq 1$; 3) $c_n = \frac{u_n}{v_n}$, ahol
 $u_{n+2} = -2u_{n+1} - u_n, u_1 = -1$,
 $u_2 = 1, v_{n+2} = 2v_{n+1} - v_n + 2$,
 $v_1 = 1$ és $v_2 = 4$.

4. Számítsd ki a következő rekurziókkal adott sorozatok első hat tagját:

a) $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2}, \forall n \geq 1, x_1 = \frac{1}{2};$

b) $x_1 = 1, x_2 = 2, x_{n+2} = 3x_{n+1} - 2x_n, \forall n \geq 1;$

c) $x_1 = 3, x_{n+1} = \frac{x_n}{1+2x_n}, \forall n \geq 1;$

d) $x_0 = 3, x_1 = 4, x_{n+1} = x_{n-1}^2 - nx_n, \forall n \geq 1;$

e) $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 1, x_4 = 1, x_n = x_{n-1} \cdot x_{n-2} \cdot x_{n-4}, \forall n \geq 5.$

5. Az előbbi sorozatok esetén, a kiszámított tagok alapján, próbáld meghatározni az általános tagot! Sejtésedet bizonyítsd is! Vizsgáld meg a sorozatok monotonitását! Van-e közöttük periodikus sorozat?

6. Bizonyítsd be, hogy az I.1. paragrafus hatodik példájában szereplő sorozat általános tagját a következő egyenlőségek származtatják:

$$x_n = \begin{cases} 3 \cdot 2^k - 2, & \text{ha } n = 2k + 1 \\ 3 \cdot 2^k - 1, & \text{ha } n = 2k + 2 \end{cases}.$$

7. Az $A \subseteq N$ halmazról tudjuk, hogy

a) $1 \in A$; b) $n \in A \Rightarrow 2n + 1 \in A$; c) $3n + 1 \in A \Rightarrow n \in A.$

Igaz-e, hogy $8 \in A$?

8. Határozd meg azokat az $(x_n)_{n \in N^*}$ számsorozatokat, amelyek teljesítik az $(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 = x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3$ egyenlőséget $\forall n \in N^*$ esetén!

9. Bizonyítsd be, hogy ha az $(a_n)_{n \in N^*}$ pozitív tagú számsorozat teljesíti az $a_n^2 \leq a_n - a_{n+1}$ egyenlőtlenséget $\forall n \in N^*$ esetén, akkor $a_n \leq \frac{1}{n}, \forall n \in N^*!$

10. Bizonyítsd be, hogy ha az $x_{n+1} = -\frac{1}{2}x_n^2 + x_n + 1$ rekurziót teljesítő $(x_n)_{n \in N^*}$ sorozat első tagja 1 és 2 között van, akkor $|x_n - \sqrt{2}| < \frac{1}{2^n}, \forall n \in N, n \geq 3!$

11. Bizonyítsd be, hogy létezik olyan $(x_n)_{n \in N^*}$ számsorozat, amelyre $x_n \in \{1, 2\}, \forall n \geq 1$ és az $\overline{x_n x_{n-1} \dots x_2 x_1}$ szám osztható 2^n -nel, $\forall n \in N^*!$

12. Bizonyítsd be, hogy egyetlen olyan $(x_n)_{n \in N^*}$ számsorozat létezik, amely teljesíti a következő feltételeket:

a) $x_1 = 5$;

b) bármely $\overline{x_n x_{n-1} \dots x_2 x_1}$ -ben végződő szám négyzete is $\overline{x_n x_{n-1} \dots x_2 x_1}$ -ben végződik, $\forall n \in N^*.$

13. Bizonyítsd be, hogy az $x_{n+1} = \frac{x_n + \sqrt{2} - 1}{1 - x_n \cdot (\sqrt{2} - 1)}, \forall n \geq 1$ rekurziót teljesítő sorozatok periodikusak!

I.2. Számítási haladványok

I.2.1. A számítási haladvány fogalma

Mi lehet az alábbi sorozatok képzési szabálya? Írd fel a sorozat következő két tagját!

1. $5, 8, 11, 14, 17, \dots$

2. $-3, -\frac{5}{2}, -2, -\frac{3}{2}, -1, \dots$

3. $\frac{32}{3}, \frac{26}{3}, \frac{20}{3}, \frac{14}{3}, \frac{8}{3}, \dots$

Mi a közös a megadott sorozatok képzési szabályában? Írd fel te is két olyan sorozatot, amelyet hasonló szabállyal szerkesztettél!

$$\begin{array}{lll} a_1 = \dots & a_{n+1} = a_n + \dots & a_2 = \dots \quad a_3 = \dots \quad a_4 = \dots \\ b_1 = \dots & b_{n+1} = b_n + \dots & b_2 = \dots \quad b_3 = \dots \quad b_4 = \dots \end{array}$$

2.1.1. Értelmezés. Az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ számsorozatot **számítási haladványnak** (vagy **számítási sorozatnak**) nevezzük, ha létezik olyan $r \in \mathbb{R}$ szám, amelyre

$$a_{n+1} = a_n + r, \forall n \geq 1.^1$$

2.1.2. Jelölés. Azt, hogy az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sorozat számítási haladvány, a következőképpen jelöljük: $\div a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$.

2.1.3. Megjegyzések

1. A rekurzióban szereplő r számot a sorozat **állandó különbségének** nevezzük. A fenti példákban az első tag, illetve az állandó különbség értéke:

1. $a_1 = 5$ és $r = 3$;

2. $a_1 = -3$ és $r = \frac{1}{2}$;

3. $a_1 = \frac{32}{3}$ és $r = -2$.

2. Az $(a_k)_{k=1, n}$ véges sorozatot akkor nevezzük számítási haladványnak (vagy számítási sorozatnak), ha létezik olyan $r \in \mathbb{R}$ szám, amelyre $a_{k+1} = a_k + r$, $k = 1, n-1$. Ha a számok nem sorozat formájában adóttak, csak akkor mondhatjuk, hogy számítási haladványt alkotnak, ha valamilyen sorrendben teljesítik az előbbi értelmezés feltételeit.

3. Az $a_{n+1} = a_n + r$, $\forall n \geq 1$ rekurzió nem határozza meg egyértelműen az $(a_n)_{n \geq 1}$ számítási sorozatot, csak azt biztosítja, hogy a sorozat számítási haladvány legyen. Ahhoz, hogy a sorozat tagjait meghatározhassuk, további információk szükségesek (például egy meghatározott sorszámú tag és az állandó különbség elégséges).

¹ A komplex számok bevezetése után még visszatérünk erre az értelmezésre.

2.1.4. Feladat. Keressünk összefüggést egy számtani haladvány három egymás utáni tagja közt!

Megoldás. Ha az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sorozat számtani haladvány, akkor létezik olyan r valós szám, amelyre $a_{n+1} = a_n + r$ és $a_n = a_{n-1} + r$. Mindkét összefüggésből kifejezzük a sorozat állandó különbségét, és írhatjuk, hogy: $a_{n+1} - a_n = r = a_n - a_{n-1}$. Tehát

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \quad \forall n \geq 2.$$

A kapott összefüggés azt fejezi ki, hogy a sorozat minden tagja (a másodiktól kezdődően) a két szomszédos tag számtani középarányosa. Ezt a tulajdonságot gyakran használjuk, ezért külön is megfogalmazzuk.

2.1.5. Tulajdonság. Az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ számtani haladvány minden tagja (a másodiktól kezdődően) a két szomszédos tag számtani középarányosa.

2.1.6. Megjegyzések

1. A 2.1.5. tulajdonság indokolja az ilyen típusú sorozatok megnevezését.
2. A 2.1.5. tulajdonság fordítottja is egy igaz kijelentés. Azok a sorozatok, amelyek teljesítik az $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ rekurziót minden kettőnél nem kisebb természetes n értékre, számtani haladványok.

Valóban, ha $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \forall n \geq 2$, akkor $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}, \forall n \geq 2$, és így

$a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1}, \forall n \geq 2$. Jelöljük r -rel az $a_2 - a_1$ különbséget. Az előbbieken alapján

$$a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1} = a_{n-1} - a_{n-2} = \dots = a_3 - a_2 = r,$$

tehát az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sorozat számtani haladvány.

3. Igazoljuk a következő általánosabb tulajdonságot is:

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}, \quad \forall n \geq k+1.$$

I.2.2. A számtani haladvány általános tagjának képlete

Próbáljuk megkeresni az alábbi számtani haladványok általános tagjának képletét!

1. $a_{n+1} = a_n + 4, \forall n \geq 1$ és $a_1 = 1$;
2. $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \forall n \geq 2, a_1 = -5$ és $a_2 = 0$.

I. próbálkozás

Számítsuk ki a sorozat első öt tagját! $a_2 = a_1 + 4 = 1 + 4$, $a_3 = a_2 + 4 = 1 + 4 + 4$, $a_4 = a_3 + 4 = 1 + 4 + 4 + 4$, és $a_5 = a_4 + 4 = 1 + 4 + 4 + 4 + 4$, tehát $a_2 = 1 + 1 \cdot 4$, $a_3 = 1 + 2 \cdot 4$, $a_4 = 1 + 3 \cdot 4$ és $a_5 = 1 + 4 \cdot 4$. Ennek alapján sejthető, hogy $a_n = 1 + (n-1) \cdot 4, \forall n \geq 1$. A matematikai indukció segítségével sejtésünk azonnal igazolható.

$n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ esetén az eddigi számolásaink szerint sejtésünk igaz. Ha feltételezzük, hogy $a_k = 1 + (k-1) \cdot 4$ valamilyen k értékre, akkor a rekurzió alapján $a_{k+1} = a_k + 4 = 1 + (k-1) \cdot 4 + 4 = 1 + k \cdot 4$. Tehát a matematikai indukció elve alapján $a_n = 1 + (n-1) \cdot 4, \forall n \geq 1$.

II. próbálkozás

Írjuk fel az $a_{k+1} - a_k = 4$ egyenlőséget, ha k rendre felveszi az 1, 2, 3, ..., $n-1$ értékeket, majd adjuk össze a kapott egyenlőségek megfelelő oldalait. A bal oldalon az a_1 és a_n kivételével minden tag kétszer jelenik meg. Egyszer negatív előjellel és egyszer pozitív előjellel, tehát a bal oldalon az összegzés eredménye $a_n - a_1$. A jobb oldalon összesen $(n-1)$ darab 4-es van, tehát az összeg $4 \cdot (n-1)$. Mindezt a következő séma szemlélteti:

$$\begin{array}{r} a_2 - a_1 = 4 \\ a_3 - a_2 = 4 \\ a_4 - a_3 = 4 \\ a_5 - a_4 = 4 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n-2} - a_{n-3} = 4 \\ a_{n-1} - a_{n-2} = 4 \\ \hline a_n - a_{n-1} = 4 \end{array} +$$

$$a_n - a_1 = 4 \cdot (n-1)$$

Az utolsó egyenlőség alapján $a_n = 1 + 4 \cdot (n-1), \forall n \geq 1$.

A második sorozattal próbálkozz egyedül! Töltsd ki az üresen hagyott helyeket az odaillő számokkal!

$a_3 = \dots$ $a_4 = \dots$ $a_5 = \dots$ $a_6 = \dots$ és $a_n = \dots$

Belátható, hogy az előbbi gondolatsorok bármelyike az általános esetben is eredményhez vezet. Érvényes tehát a következő tétel²:

2.2.1. Tétel. Az $a_{n+1} = a_n + r, \forall n \geq 1$ rekurzióval értelmezett számtani haladvány általános tagjának képlete:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r, \forall n \geq 1.$$

Bizonyítás. Jelöljük $P(n)$ -nel az $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$ kijelentést. A $P(1)$ igaz állítás mert $a_1 = a_1$. Ha feltételezzük, hogy $P(n)$ igaz, akkor írhatjuk, hogy $a_{n+1} = a_n + r = a_1 + (n-1) \cdot r + r = a_1 + n \cdot r$, amely éppen azt fejezi ki, hogy $P(n+1)$ is igaz. A matematikai indukció elve szerint $P(n)$ igaz állítás minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén, tehát $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r, \forall n \geq 1$.

² A teljesség kedvéért bizonyítjuk is a tételt.

2.2.2. Feladat. Egy munkahelyre három fiatalember pályázik. A cégvezető a következőt mondja: „A kezdő fizetés havi 1 000 000 lej, amit félhavi részletekben fizetünk. Ha munkájuk megfelel, fizetésüket minden hónapban emeljük. Két lehetőség közül választhatnak: havonta 15 000 lejjel, vagy félhavonta 5000 lejjel emeljük a fizetésüket. Melyik lehetőséget választják?”

Két pályázó az első lehetőséget választotta, míg a harmadik kis gondolkodás után a második mellett döntött. A cégvezető őt vette fel. Miért?

Megoldás. Vizsgáljuk meg, hogy mekkora fizetést kapnának a két különböző módon döntő emberek! A jobb áttekinthetőség kedvéért eredményeinket a következő táblázatba foglaltuk:

	I. hónap		II. hónap		III. hónap	
I. lehetőség	500 000	500 000	$\frac{1015000}{2}$	$\frac{1015000}{2}$	$\frac{1030000}{2}$	$\frac{1030000}{2}$
II. lehetőség	500 000	505 000	510 000	515 000	520 000	525 000

Jelöljük a_k -val az első, illetve b_k -val a második lehetőség szerint a k -adik hónapban kapott fizetést. A következő értékeket kapjuk:

$$a_1 = 1000000, \quad a_2 = 1015000, \quad a_3 = 1030000, \quad a_4 = 1045000, \quad a_5 = 1060000;$$

$$b_1 = 1005000, \quad b_2 = 1025000, \quad b_3 = 1045000, \quad b_4 = 1065000, \quad b_5 = 1085000.$$

Látható, hogy a második lehetőség már az első hónapban kedvezőbb, mint az első, és a két fizetés közötti különbség minden hónapban 5000 lejjel növekszik. Világos, hogy akik az első ajánlatot választották, nem gondolták végig a lehetőségeket, ezért alkalmazta a cégvezető a harmadik pályázót.

A továbbiakban azt fogjuk vizsgálni, hogy tulajdonképpen mitől (és hogyan) függ az, hogy melyik lehetőség a kedvezőbb. Jelöljük r_1 -gyel és r_2 -vel a havi, illetve a félhavi fizetésemelés nagyságát valamint a -val a kezdő fizetés nagyságát. A feladat jelöléseit megőrizve a következő táblázathoz jutunk:

	I. hónap	II. hónap	III. hónap	IV. hónap	V. hónap
I. lehetőség	a	$a + r_1$	$a + 2r_1$	$a + 3r_1$	$a + 4r_1$
II. lehetőség	$a + r_2$	$a + 5r_2$	$a + 9r_2$	$a + 13r_2$	$a + 17r_2$

A táblázat alapján látható, hogy a havi fizetések mindkét esetben számtani haladványt alkotnak. Az első lehetőség esetén az állandó különbség r_1 , míg a második lehetőség esetén $4 \cdot r_2$. Az általános tagra vonatkozó tétel értelmében $a_k = a + (k-1) \cdot r_1$ és $b_k = a + (4k-3) \cdot r_2$. Tehát, ha $4r_2 \geq r_1$, akkor a második lehetőség, ha $4r_2 < r_1$, akkor az első lehetőség a kedvezőbb.

2.2.3. Feladat. Ha $\div a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$,

a) bizonyítsd be, hogy $a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}, \forall n \geq k+1$;

b) számítsd ki az $a_k + a_{n-k+1}$ alakú összegeket, ha $k \in \{1, 2, \dots, n\}$! Mit észlelsz?

Megoldás

- a) Az általános tag képletét használjuk: $a_{n-k} = a_1 + (n-k-1) \cdot r$ és $a_{n+k} = a_1 + (n+k-1) \cdot r$. Tehát $a_{n-k} + a_{n+k} = 2a_1 + 2 \cdot (n-1) \cdot r = 2 \cdot a_n$.
- b) Szintén az általános tag képletét használjuk: $a_k = a_1 + (k-1) \cdot r$ és $a_{n-k+1} = a_1 + (n-k) \cdot r$, tehát $a_k + a_{n-k+1} = 2a_1 + (n-1) \cdot r$. Mivel az összegre vonatkozó kifejezés nem tartalmazza a k változót, független k -től és minden $1 \leq k \leq n$ esetén $a_1 + a_n$ -nel egyenlő.

1.2.3. A számítási haladvány első n tagjának összege

A következőkben kiszámítjuk az első n természetes szám összegét.

1. módszer. Az $S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (n-3) + (n-2) + (n-1) + n$ összeg tagjait írjuk fordított sorrendben, majd adjuk hozzá az eredeti összeghez. Az $(n-k+1) + k = n+1$ egyenlőség alapján az összegben megjelenő $2n$ tagot n darab csoportba lehet osztani úgy, hogy az egyes csoportokon belül a számok összege $n+1$ legyen. Így írhatjuk, hogy $2S_n = n \cdot (n+1)$, tehát $S_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$. Jobban áttekinthetjük az előbbi számolásokat, ha a két összeget egymás alá írjuk és oszloponként adjuk össze.

$$\begin{array}{rcccccccc} S_n & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & (n-1) & + & n \\ S_n & = & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \dots & + & 2 & + & 1 \\ \hline 2S_n & = & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + & \dots & + & (n+1) & + & (n+1) \end{array} +$$

Mivel a jobb oldalon n -szer szerepel az $n+1$, írhatjuk, hogy $S_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$.

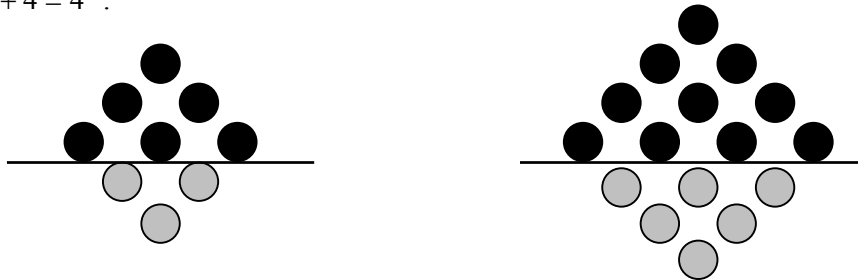
2. módszer. Az $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ azonosságba rendre helyettesítsük az $x = 1$, $x = 2$, ..., $x = n-1$ és $x = n$ értékeket, majd a kapott egyenlőségek megfelelő oldalait adjuk össze.

$$\begin{array}{rcccccccc} (n+1)^2 & = & n^2 & + & 2n & + & 1 \\ (n-1+1)^2 & = & (n-1)^2 & + & 2(n-1) & + & 1 \\ (n-2+1)^2 & = & (n-2)^2 & + & 2(n-2) & + & 1 \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ 3^2 & = & 2^2 & + & 2 \cdot 2 & + & 1 \\ 2^2 & = & 1^2 & + & 2 \cdot 1 & + & 1 \\ \hline (n+1)^2 & = & 1^2 & + & 2 \cdot S_n & + & n \end{array} +$$

Az utolsó egyenlőségből kifejezzük az S_n -et:

$$S_n = \frac{(n+1)^2 - n - 1}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

3. módszer. Vizsgáljuk meg a mellékelt ábrákat! Az első sorban egy korong, a másodikban kettő, a harmadikban pedig három helyezkedik el. Így a vonal fölött látható korongok száma éppen $1+2+3$. Ha ezt kiegészítjük az $1+2$ összeggel, amelynek megfelelő korongok a vonal alatt helyezkednek el, $3 \times 3 = 9$ korongot kapunk. A korongok egy csúcsára állított négyzetet határoznak meg. A kapott összefüggés alapján $S_3 + S_2 = 3^2$ vagy $2 \cdot S_2 + 3 = 3^2$. A második ábra alapján $S_4 + S_3 = 4^2$ vagy $2 \cdot S_3 + 4 = 4^2$.



Ha $(n+1)^2$ korongot tekintünk, akkor a $2 \cdot S_n + n + 1 = (n+1)^2$ összefüggéshez jutunk. Ebből kifejezzük az S_n -et:

$$S_n = \frac{(n+1)^2 - n - 1}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

2.3.1. Megjegyzés. Az $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$ alakú számokat háromszögszámoknak nevezzük. A megnevezést az előbbi ábrák indokolják.

2.3.2. Feladat. Számítsuk ki az első n páratlan természetes szám összegét legalább három különböző módon!

Az előbb használt három módszert próbáljuk most is alkalmazni.

1. módszer. Jelöljük S_n -nel az első n páratlan természetes szám összegét. Az összeg tagjait fordított sorrendben írjuk, majd a megfelelő tagokat az alábbiak szerint csoportosítjuk.

$$\begin{array}{rcccccccc} S_n & = & 1 & + & 3 & + & 5 & + & \dots & + & 2n-3 & + & 2n-1 \\ S_n & = & 2n-1 & + & 2n-3 & + & 2n-5 & + & \dots & + & 3 & + & 1 \\ \hline 2S_n & = & 2n & + & 2n & + & 2n & + & \dots & + & 2n & + & 2n & + \end{array}$$

$$\text{Tehát } S_n = \frac{n \cdot (2n)}{2} = n^2.$$

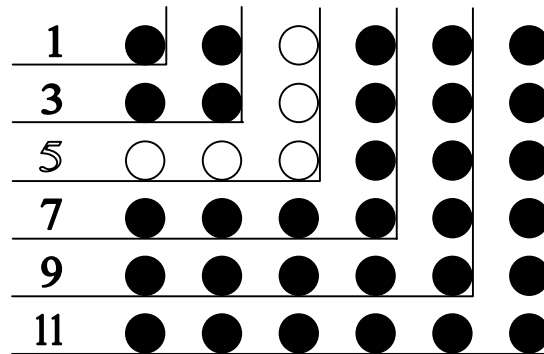
2. módszer. Az $(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$ azonosságba rendre behelyettesítjük az $x=1, x=3, \dots, x=2n-3$ és $x=2n-1$ értékeket, majd a kapott egyenlőségek megfelelő oldalait összeadjuk.

$$\begin{array}{rclclcl}
(2n+1)^2 & = & (2n-1)^2 & + & 4 \cdot (2n-1) & + & 4 \\
(2n-1)^2 & = & (2n-3)^2 & + & 4 \cdot (2n-3) & + & 4 \\
(2n-3)^2 & = & (2n-5)^2 & + & 4 \cdot (2n-5) & + & 4 \\
\hline
5^2 & = & 3^2 & + & 4 \cdot 3 & + & 4 \\
3^2 & = & 1^2 & + & 4 \cdot 1 & + & 4 \\
\hline
(2n+1)^2 & = & 1^2 & + & 4 \cdot S_n & + & 4 \cdot n
\end{array}$$

Az utolsó egyenlőségből kifejezzük az S_n -et, és kapjuk, hogy

$$S_n = \frac{(2n+1)^2 - 4n - 1}{4} = \frac{4n^2 + 4n + 1 - 4n - 1}{4} = n^2.$$

3. módszer. Vizsgáljuk meg az alábbi ábrát! Minden vonalra azoknak a korongoknak a számát írtuk, amelyek a vonal fölött vagy tőle balra vannak, de az az előtti vonal alatt vagy tőle jobbra helyezkednek el. Például az 5-ös a fehér korongokra vonatkozik.



Látható, hogy $1 + 3 = 2^2$ (a korongok egy 2×2 -es négyzetbe rendezhetők);

$1 + 3 + 5 = 3^2$ (a korongok egy 3×3 -as négyzetbe rendezhetők);

$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$ (a korongok egy 4×4 -es négyzetbe rendezhetők);

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2$ (5×5 -ös négyzetbe rendezhetők);

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 6^2$ (6×6 -os négyzetbe rendezhetők).

Ha figyelembe vesszük, hogy az $(n+1) \times (n+1)$ -es négyzetet az $n \times n$ -es négyzetből pontosan $2n+1$ korong hozzáadásával szerkesztjük, állíthatjuk, hogy $S_n = n^2$.

4. módszer. S_n kiszámítását vezessük vissza az első n természetes szám összegére vonatkozó összefüggésre:

$$S_n = \sum_{k=1}^n (2k-1) = 2 \cdot \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1 = 2 \cdot \sum_{k=1}^n k - n = 2 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} - n = n^2.$$

A 2.2.3. feladat b) pontjának eredményei biztosítják, hogy az 1. módszer alkalmazható bármely számtani haladvány első n tagjának az összege esetén. Az $(x+r)^2 = x^2 + 2r \cdot x + r^2$ azonosság alapján a 2. módszer segítségével is ki tudjuk számítani egy tetszőleges számtani haladvány első n tagjának összegét. Sajnos a 3. módszer nem alkalmas az általános eset tárgyalására (hisz minden haladványra valami más reprezentációt kellene kitalálni, és ennek szemléltetését $r \notin \mathbb{Z}$ esetén más alapokra kell helyezni). A 4. módszert nagyon sok összeg kiszámítására lehet alkalmazni, hisz alapgondolata az, hogy a kiszámítandó összeget egyszerűbb összeg(ek)re bontjuk. Vizsgáljuk meg az általános esetet! Számítsuk ki az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ számtani haladvány első n tagjának összegét! Jelöljük S_n -nel ezt az összeget:

$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$. A pontosság kedvéért előbb kijelentjük az összegre vonatkozó tételt:

2.3.3. Tétel. Az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ számtani haladvány első n tagjának az összege

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}, \quad \forall n \geq 1.$$

1. bizonyítás

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (a_1 + (k-1) \cdot r) = n \cdot a_1 + r \cdot \sum_{k=1}^n (k-1) = n \cdot a_1 + r \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2}.$$

Másrészt $n \cdot a_1 + r \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2} = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_1 + (n-1) \cdot r) = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$, tehát a tétel állítása igaz.

2. bizonyítás. Az összeg tagjait fordított sorrendben írjuk, majd a megfelelő tagokat az alábbiak szerint csoportosítjuk, és használjuk a 2.2.3. feladat b) pontjának eredményét:

$$\begin{array}{ccccccccccc} S_n & = & a_1 & + & a_2 & + & \dots & + & a_{n-1} & + & a_n \\ S_n & = & a_n & + & a_{n-1} & + & \dots & + & a_2 & + & a_1 \\ \hline 2S_n & = & (a_1 + a_n) & + & (a_1 + a_n) & + & \dots & + & (a_1 + a_n) & + & (a_1 + a_n) & + \end{array}$$

Tehát $S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}.$

I.3. Mértani haladványok

I.3.1. A mértani haladvány fogalma

Mi lehet az alábbi sorozatok képzési szabálya? Írd fel a sorozat következő két tagját!

1. $2, 6, 18, 54, 162, 486, \dots$

2. $3, 6, 12, 24, 48, 96, \dots$

3. $27, 9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots$

4. $\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, \dots$

5. $1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots$

Mi a közös a megadott sorozatok képzési szabályában? Írj te is két olyan sorozatot, amelyet hasonló szabállyal szerkesztettél!

$$\begin{array}{lll} b_1 = \dots & b_{n+1} = b_n \cdot \dots & b_2 = \dots \quad b_3 = \dots \quad b_4 = \dots \\ b_1 = \dots & b_{n+1} = b_n \cdot \dots & b_2 = \dots \quad b_3 = \dots \quad b_4 = \dots \end{array}$$

3.1.1. Értelmezés. A $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ számsorozatot **mértani haladványnak** (vagy **mértani sorozatnak**) nevezzük, ha létezik olyan $q \in \mathbb{R}$ szám, amelyre

$$b_{n+1} = b_n \cdot q, \quad \forall n \geq 1.^1$$

3.1.2. Jelölés. Azt, hogy a $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sorozat mértani haladvány az $\div\div b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ szimbólummal jelöljük.

3.1.3. Megjegyzések

1. A rekurzióban szereplő q számot a sorozat **állandó hányadosának** (vagy **kvóciensének**) nevezzük. A fenti példákban az első tag, illetve az állandó hányados értéke:

1. $b_1 = 2$ és $q = 3$;

2. $b_1 = 3$ és $q = 2$;

3. $b_1 = 27$ és $q = \frac{1}{3}$;

4. $b_1 = \sqrt{2}$ és $q = \sqrt{2}$;

5. $b_1 = -1$ és $q = -1$.

2. A $(b_k)_{k=1, \overline{n}}$ véges sorozatot akkor nevezzük mértani haladványnak (vagy mértani sorozatnak), ha létezik olyan $q \in \mathbb{R}$ szám, amelyre $b_{k+1} = b_k \cdot q$, $k = \overline{1, n-1}$. Ha a számok nem sorozat formájában adottak, csak akkor mondjuk, hogy mértani haladványt alkotnak, ha valamilyen sorrendben teljesítik az előbbi értelmezés feltételeit.

¹ A komplex számok bevezetése után még visszatérünk erre az értelmezésre.

3.1.4. Feladat. Keressünk összefüggést valamely mértani haladvány három egymás utáni tagja közt!

Ha a $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sorozat mértani haladvány, akkor létezik olyan q valós szám, amelyre: $b_{n+1} = b_n \cdot q$ és $b_n = b_{n-1} \cdot q$. Szorozzuk meg b_{n-1} -gyel az első összefüggést: $b_{n+1} \cdot b_{n-1} = b_n \cdot q \cdot b_{n-1} = b_{n-1}^2 \cdot q^2 = b_n^2$. Tehát $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$, $\forall n \geq 2$. Ha a sorozat pozitív tagú, az előbbi összefüggés mindkét oldalából négyzetgyököket vonhatunk, így a $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$, $\forall n \geq 2$ összefüggéshez jutunk. Ez azt fejezi ki, hogy a sorozat minden tagja (a másodiktól kezdve) a két szomszédos tag mértani középárányosa. Az előbbi két tulajdonsággal gyakran találkozhatunk, ezért külön is megfogalmazzuk.

3.1.5. Tulajdonság

- a) A $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ mértani haladvány tagjai teljesítik a $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$ egyenlőséget, $\forall n \geq 2$ természetes számra.
- b) Pozitív tagú mértani haladvány minden tagja (a másodiktól kezdve) a két szomszédos tag mértani középárányosa.

3.1.6. Megjegyzések

1. A 3.1.5. tulajdonság indokolja az ilyen típusú sorozatok megnevezését.
2. A 3.1.5. tulajdonság fordított állításai is igaz állítások (lásd a 3.2.2. megoldott feladatot).
3. Akárcsak a számtani haladványok esetén, itt is érvényes egy általánosabb összefüggés: $b_n^2 = b_{n-k} \cdot b_{n+k}$, $\forall n \geq k+1$, ahol $k \geq 1$ rögzített természetes szám.

I.3.2. A mértani haladvány általános tagjának képlete

Próbáljuk megkeresni az alábbi mértani haladványok általános tagjának képletét!

1. $b_{n+1} = 2 \cdot b_n$, $\forall n \geq 1$ és $b_1 = 3$;
2. $b_{n+1} = 3 \cdot b_n$, $\forall n \geq 1$ és $b_1 = 5$.

I. próbálkozás

Számítsuk ki a sorozat első öt tagját! $b_2 = 2 \cdot b_1 = 3 \cdot 2$, $b_3 = 2 \cdot b_2 = 3 \cdot 2^2$, $b_4 = 2 \cdot b_3 = 3 \cdot 2^3$, és $b_5 = 2 \cdot b_4 = 3 \cdot 2^4$. Ésszerűnek tűnik azt állítani, hogy a $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sorozat tagjai a 2 hatványainak háromszorosai, vagyis $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$, $\forall n \geq 1$. A matematikai indukció segítségével sejtésünk azonnal igazolható: $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ esetén az eddigi számolásaink szerint sejtésünk igaz. Ha feltételezzük, hogy $b_k = 3 \cdot 2^{k-1}$ valamilyen k értékre, akkor a rekurzió alapján $b_{k+1} = 2 \cdot b_k = 2 \cdot 3 \cdot 2^{k-1} = 3 \cdot 2^k$. Tehát a matematikai indukció elve alapján

$$b_n = 3 \cdot 2^{n-1}, \forall n \geq 1.$$

II. próbálkozás

Írjuk fel a $b_{k+1} = 2 \cdot b_k$ egyenlőséget, ha k rendre felveszi az $1, 2, 3, \dots, n-1$ értékeket, majd szorozzuk össze a kapott egyenlőségek megfelelő oldalait. Mivel a sorozatnak sem a kvóciense, sem az első tagja nem nulla, a sorozat egyetlen tagja sem nulla. A b_1 és b_n kivételével minden tag kétszer jelenik meg, egyszer a bal oldalon és egyszer a jobb oldalon, ezért ezekkel egyszerűsíthetünk. Így a $b_n = b_1 \cdot 2^{n-1} = 3 \cdot 2^{n-1}$ összefüggéshez jutunk. Mindezt az alábbi séma szemlélteti:

$$\begin{array}{r} b_2 = 2 \cdot b_1 \\ b_3 = 2 \cdot b_2 \\ b_4 = 2 \cdot b_3 \\ b_5 = 2 \cdot b_4 \\ \dots\dots\dots \\ b_{n-2} = 2 \cdot b_{n-3} \\ b_{n-1} = 2 \cdot b_{n-2} \\ b_n = 2 \cdot b_{n-1} \\ \hline b_n = 2^{n-1} \cdot b_1 \end{array} \cdot$$

Az utolsó egyenlőség alapján $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$, $\forall n \geq 1$.

III. próbálkozás

Írjuk az előbbi egyenlőségeket fordított sorrendbe, majd szorozzuk a másodikat 2-vel, a harmadikat 2^2 -nel és általában a k -adikat 2^{k-1} -nel, majd adjuk össze az így kapott egyenlőségeket.

$$\begin{array}{r} b_n = 2 \cdot b_{n-1} \\ 2 \cdot b_{n-1} = 2^2 \cdot b_{n-2} \\ 2^2 \cdot b_{n-2} = 2^3 \cdot b_{n-3} \\ \dots\dots\dots \\ 2^{n-4} \cdot b_4 = 2^{n-3} \cdot b_3 \\ 2^{n-3} \cdot b_3 = 2^{n-2} \cdot b_2 \\ 2^{n-2} \cdot b_2 = 2^{n-1} \cdot b_1 \\ \hline b_n = 2^{n-1} \cdot b_1 \end{array} +$$

Tehát $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$, $\forall n \geq 1$ esetén.

A második sorozattal próbálkozz egyedül! Töltsd ki az üresen hagyott helyeket az odaillő számokkal!

$b_2 = \dots$ $b_3 = \dots$ $b_4 = \dots$ $b_5 = \dots$ és $b_n = \dots$

Belátható, hogy az előbbi gondolatsorok bármelyike az általános esetben is eredményhez vezet. Érvényes tehát a következő tétel:

3.2.1. Tétel. A $b_{n+1} = b_n \cdot q, \forall n \geq 1$ rekurzióval értelmezett mértani haladvány általános tagjának képlete:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, \forall n \geq 1.$$

Bizonyítás. Jelöljük $P(n)$ -nel a $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ kijelentést. $P(1)$ igaz állítás, mert $b_1 = b_1$. Ha feltételezzük, hogy $P(n)$ igaz, akkor írhatjuk, hogy $b_{n+1} = b_n \cdot q = b_1 \cdot q^{n-1} \cdot q = b_1 \cdot q^n$, ami éppen azt fejezi ki, hogy $P(n+1)$ is igaz. A matematikai indukció elve szerint $P(n)$ igaz állítás minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén, tehát $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, \forall n \geq 1$.

3.2.2. Feladat. Egy munkahelyre három fiatalember pályázik. A cégvezető a következőt mondja: „A kezdő fizetés havi 1 000 000 lej, amit félhavi résztelekben fizetünk. Ha munkájuk megfelel, fizetésüket minden hónapban emeljük. Két lehetőség közül választhatnak: havonta 44%-kal, vagy félhavonta 20%-kal emeljük a fizetésüket. Melyik lehetőséget választják? Melyik lehetőséget választanák akkor, ha havonta 45%-kal vagy félhavonta 20%-kal emelnék a fizetésüket?”

Megoldás. Próbáljuk általánosan vizsgálni a kérdést, úgy hogy ne végezzük el kétszer ugyanazokat a műveleteket a két eset tárgyalásakor. Jelöljük a -val és b -vel a havonkénti, illetve félhavonkénti emelések százalékarányát az emelendő fizetésekhez képest és x -szel a kezdeti fizetést. Vizsgáljuk meg, hogy mekkora fizetéseket kapnának a két különböző módon döntő emberek. A jobb áttekinthetőség kedvéért eredményeinket a következő táblázatba foglaltuk:

	I. hónap	II. hónap	III. hónap
I. lehetőség	x	$x \cdot (1 + a)$	$x \cdot (1 + a)^2$
II. lehetőség	$x + \frac{b \cdot x}{2}$	$\frac{x}{2} \cdot (1 + b)^2 \cdot (2 + b)$	$\frac{x}{2} \cdot (1 + b)^4 \cdot (2 + b)$

Látható, hogy az első esetben a havi fizetések összegei $(1 + a)$ kvóciensű mértani haladványt alkotnak, míg a második esetben a félhavi fizetések $(1 + b)$ kvóciensű mértani haladványt alkotnak. Így az n -edik hónapban az első lehetőség szerint $a_n = x \cdot (1 + a)^{n-1}$ lenne a fizetés, míg a második lehetőség szerint $b_n = \frac{x}{2} \cdot (1 + b)^{2n-2} + \frac{x}{2} \cdot (1 + b)^{2n} = \frac{x}{2} \cdot (1 + b)^{2n-2} \cdot (2 + b)$. Most rátérhetünk a konkrét esetek vizsgálatára.

a) $a = 0,44$ és $b = 0,2$ esetén $a_n = x \cdot 1,44^{n-1}, \forall n \geq 1$ és $b_n = 1,1 \cdot x \cdot 1,44^{n-1}$, mert $1,2^2 = 1,44$. Összehasonlítjuk a két lehetőséget, és láthatjuk, hogy a második lehetőség az előnyösebb.

b) $a = 0,45$ és $b = 0,2$ esetén $a_n = x \cdot 1,45^{n-1}$, $\forall n \geq 1$ és $b_n = 1,1 \cdot x \cdot 1,44^{n-1}$, mert

$$1,2^2 = 1,44. \quad \text{Számítsuk ki az } \frac{a_n}{b_n} \text{ arányt!} \quad \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{1,1} \cdot \left(1 + \frac{0,01}{1,44}\right)^{n-1} \geq$$

$$\geq \frac{1}{1,1} \cdot \frac{0,01 \cdot (n-1)}{1,44} \quad (\text{az } (1+x)^n \geq 1+n \cdot x \text{ Bernoulli-egyenlőtlenséget használtuk}$$

$$n \geq 1 \text{ és } x = \frac{0,01}{1,44} \text{ esetén). Az előbbi becslés alapján látható, hogy ha } n \text{ elég nagy}$$

($n \geq 160$), akkor az első lehetőség szerint számolt fizetés nagyobb lesz, mint a második lehetőség szerint számolt összeg.

3.2.3. Megjegyzés. Itt a havi fizetéseket vizsgáltuk. Az I.3.3. paragrafus után ajánljuk az n -edik hónapig számolt összjövedelmek összehasonlítását. Pontosabb becslések alkalmazásával biztatóbb eredményekhez juthatunk. Az összjövedelem ugyanis már másfél év után nagyobb lesz az első lehetőség esetén.

I.3.3. A mértani haladvány első n tagjának összege

3.3.1. Feladat. Vizsgáld meg, hogyan változnak a következő felbontásokban a második zárójelbeli kifejezések kitévői! Az észlelt szabályszerűségek alapján próbáld kiegészíteni a hiányos felbontásokat!

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= (x-y)(x+y) \\ x^3 - y^3 &= (x-y)(x^2 + xy + y^2) \\ x^4 - y^4 &= (x-y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3) \\ x^5 - y^5 &= (x-y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4) \\ x^6 - y^6 &= (x-y)(x^5 + x^4y + x^3y^2 + x^2y^3 + xy^4 + y^5) \\ x^7 - y^7 &= (x-y)(x^6 + x^5y + x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 + xy^5 + y^6) \end{aligned}$$

Az előbbi felbontásokat bizonyítsd is!

3.3.2. Tétel. Ha n természetes szám, akkor

$$x^{n+1} - y^{n+1} = (x-y) \cdot \sum_{k=0}^n x^{n-k} \cdot y^k,$$

bármely x és y valós számra.

1. bizonyítás

$$\begin{aligned} (x-y) \cdot \sum_{k=0}^n x^{n-k} \cdot y^k &= \sum_{k=0}^n x^{n+1-k} \cdot y^k - \sum_{k=0}^n x^{n-k} \cdot y^{k+1} = x^{n+1} - y^{n+1} + \\ &+ (x^n y + x^{n-1} y^2 + \dots + xy^n) - (x^n y + x^{n-1} y^2 + \dots + xy^n) = x^{n+1} - y^{n+1} \end{aligned}$$

2. bizonyítás

A matematikai indukció módszerét használjuk. Ha $x = y$, akkor az egyenlőség igaz, tehát feltételezhetjük, hogy $x \neq y$. $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ esetén direkt számolással

ellenőriztük (lásd a 3.3.1. feladatot). Ha a tétel állítása igaz egy tetszőlegesen választott n természetes számra, akkor írhatjuk, hogy

$$x^{n-1} + x^{n-2} \cdot y + \dots + x \cdot y^{n-2} + y^{n-1} = \frac{x^n - y^n}{x - y}.$$

Az egyenlőség mindkét oldalát megszorozzuk y -nal és hozzáadunk x^n -t, így kapjuk, hogy

$$x^n + y \cdot (x^{n-1} + x^{n-2} \cdot y + \dots + x \cdot y^{n-2} + y^{n-1}) = x^n + y \cdot \frac{x^n - y^n}{x - y}, \text{ vagyis}$$

$$x^n + x^{n-1} \cdot y + x^{n-2} \cdot y^2 + \dots + x \cdot y^{n-1} + y^n = x^n + y \cdot \frac{x^n - y^n}{x - y} = \frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{x - y}.$$

Ha az utolsó egyenlőséget $(x - y)$ -nal beszorozzuk, akkor

$$x^{n+1} - y^{n+1} = (x - y) \cdot \sum_{k=0}^n x^{n-k} \cdot y^k$$

adódik, tehát az állításunk $(n+1)$ -re is igaz. A matematikai indukció elve szerint a tétel állítása minden természetes számra igaz.

3.3.3. Feladat. Az előbbi tétel segítségével számítsuk ki a következő összegeket:

- a) $S_1(n) = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1}$;
 b) $S_2(n) = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$;
 c) $S_3(n) = 1 + \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^3 + \dots + (\sqrt{2})^{n-1}$.

Megoldás

a) Az $x^n - y^n = (x - y) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} \cdot y^k$ azonosságba $x = 1$ -et és $y = 2$ -t helyettesítünk. $S_1(n) = 2^n - 1$.

b) Az $x^n - y^n = (x - y) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} \cdot y^k$ azonosságba $x = 1$ -et és $y = \frac{1}{2}$ -et helyettesítünk. $S_2(n) = \frac{2^n - 1}{2^{n-1}}$.

c) Az $x^n - y^n = (x - y) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} \cdot y^k$ azonosságba $x = 1$ -et és $y = \sqrt{2}$ -t helyettesítünk. $S_3(n) = \frac{(\sqrt{2})^n - 1}{\sqrt{2} - 1}$.

Az előbbi összegeket más módszerrel is kiszámíthatjuk. Az $S_3(n)$ helyett kiszámítjuk az $S_3(n) - \sqrt{2} \cdot S_3(n)$ különbséget. Az összeg tagjai közül a legtöbb kétszer jelenik meg: egyszer pozitív előjellel és egyszer negatív előjellel. Ezt a következő ábrán szemléltetjük:

$$\begin{array}{rcl}
S_3(n) & = & 1 + \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 \dots + (\sqrt{2})^{n-1} \\
-\sqrt{2}S_3(n) & = & -\sqrt{2} - (\sqrt{2})^2 \dots - (\sqrt{2})^{n-1} - (\sqrt{2})^n \\
\hline
(1-\sqrt{2})S_3(n) & = & 1 + 0 + 0 \dots + 0 - (\sqrt{2})^n +
\end{array}$$

Tehát $S_3(n) = \frac{1 - (\sqrt{2})^n}{1 - \sqrt{2}}$.

3.3.4. Tétel. A $b_k = b_1 \cdot q^{k-1}$ általános tagú mértani haladvány első n tagjának összege a következőképpen fejezhető ki:

$$S_n = \begin{cases} b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}, & \forall n \geq 1, \text{ ha } q \neq 1; \\ n \cdot b_1, & \text{ha } q = 1. \end{cases}$$

Bizonyítás. Ha $q \neq 1$, akkor $x = 1$ -re és $y = q$ -ra a 3.3.2. tétel alapján

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}, \text{ tehát}$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n = b_1 \cdot (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Ha $q = 1$, akkor a sorozat konstans és minden eleme b_1 -gyel egyenlő, tehát az összeg $n \cdot b_1$.

I.4. Megoldott feladatok

1. Bizonyítsd be, hogy ha a $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ számsorozat tagjai teljesítik a $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$ egyenlőséget minden $n \geq 2$ esetén, akkor a sorozat mértani haladvány.

Bizonyítás. Ha a sorozat egyetlen tagja sem nulla, akkor a $q = \frac{b_2}{b_1}$ jelölést

$$\text{használva írhatjuk, hogy } q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \frac{b_4}{b_3} = \frac{b_5}{b_4} = \dots = \frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n} \quad (\text{itt a } k\text{-adik}$$

egyenlőséget $k \geq 2$ esetén az adott összefüggés biztosítja $n = k$ -ra). Az előbbi aránysor első és utolsó tagjának egyenlőségéből következik, hogy $b_{n+1} = b_n \cdot q, \forall n \geq 1$. Az értelmezés alapján a $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sorozat mértani haladvány.

Ha nulla tagja a sorozatnak, jelöljük n_0 -val az első nullával egyenlő tag sorszámát. A rekurzió alapján a sorozat összes többi tagja nulla. Ha $n_0 \geq 3$, akkor a $b_{n_0-1}^2 = b_{n_0} \cdot b_{n_0-2}$ egyenlőség szerint b_{n_0-1} is nulla. Mivel ez ellentmond az n_0 megválasztásának, $n_0 \leq 2$. Így a $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sorozat első tagja b_1 , és minden további tag nulla. Ez azt jelenti, hogy $b_{n+1} = b_n \cdot 0, \forall n \geq 1$, vagyis a sorozat mértani haladvány.

2. Számítsd ki a következő összeget:

$$S(n) = \sum_{k=0}^n (k+1) \cdot 2^k = 1 + 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \dots + (n+1) \cdot 2^n.$$

1. megoldás. A kiszámítandó összeg $n+1$ mértani haladvány összegére bontható:

$$\begin{array}{rcll} 1 & + & 2 & + & 2^2 & + & 2^3 & + & \dots & + & 2^n & = & 2^{n+1} - 1 \\ & & 2 & + & 2^2 & + & 2^3 & + & \dots & + & 2^n & = & 2 \cdot (2^n - 1) \\ & & & & 2^2 & + & 2^3 & + & \dots & + & 2^n & = & 2^2 \cdot (2^{n-1} - 1) \\ & & & & & & 2^3 & + & \dots & + & 2^n & = & 2^3 \cdot (2^{n-2} - 1) \\ & & & & & & & & \dots & & & & \\ & & & & & & & & & & 2^n & = & 2^n \cdot (2^1 - 1) \\ \hline & & & & & & & & & & & & + \\ 1 & + & 2 \cdot 2 & + & 3 \cdot 2^2 & + & 4 \cdot 2^3 & + & \dots & + & n \cdot 2^n & = & n \cdot 2^{n+1} + 1 \end{array}$$

Tehát $S(n) = n \cdot 2^{n+1} + 1, \forall n \geq 1$.

2. megoldás. A következő diagram alapján $2^{n+1} - 1 = -S(n) + (n+1) \cdot 2^{n+1}$.

$$\begin{array}{rcll} 1 & + & 2 \cdot 2 & + & 3 \cdot 2^2 & + & \dots & + & (n+1) \cdot 2^n & = & S(n) \\ - & 2 \cdot 1 & - & 2 \cdot 2^2 & - & \dots & - & n \cdot 2^n & = & -2S(n) + (n+1) \cdot 2^{n+1} \\ \hline 1 & + & 2 & + & 2^2 & + & \dots & + & 2^n & = & -S(n) + (n+1) \cdot 2^{n+1} \end{array}$$

$S(n) = n \cdot 2^{n+1} + 1, \forall n \geq 1$. Próbáljuk általánosítani ezt az eljárást!

3. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok $4k-1$ alakú prímszám létezik!

Bizonyítás. A lehetetlenre való visszavezetés módszerét használjuk. Tételezzük fel, hogy véges számú $4k-1$ alakú prímszám létezik, és jelöljük őket p_1 -gyel, p_2 -vel, ..., p_n -nel. Az $N = 4 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n - 1$ szám relatív prím mindegyikkel, hisz $N+1$ osztható mindegyik ilyen prímszámmal. Másrészt az N prímtenyezős felbontásában nem szerepelhetnek csak $4k+1$ alakú prímekek (mert ebben az esetben a szorzatuknak, vagyis az N -nek is $4k+1$ alakúnak kellene lennie), tehát N prímtenyezői közt létezik $4k-1$ alakú is. Mivel ez relatív prím a $p_1, p_2, \dots, p_n$ számok mindegyikével, különbözik ezektől. Ez ellentmond feltételezésünknek, tehát a kért tulajdonságot igazoltuk.

4. Mikor létezik két, nullától és egymástól különböző kvóciensű mértani haladvány, amely teljesíti az $x_{n+2} = a \cdot x_{n+1} + b \cdot x_n$ rekurziót, $\forall n \geq 1$ és $a, b \neq 0$ esetén?

Megoldás. Jelöljük r_1 -gyel és r_2 -vel a keresett mértani haladványok kvócienseit, és helyettesítsük be a rekurzióba az $x_n = x_1 \cdot r_1^n$, valamint $y_n = y_1 \cdot r_2^n$ általános tagú sorozatokat. Az adott feltételek alapján r_1 és r_2 az $r^2 - a \cdot r - b = 0$ másodfokú egyenlet gyökei, tehát a keresett feltétel: $a^2 - 4b > 0$.

Megjegyzés. Ha $a^2 - 4b > 0$, az adott rekurziót teljesítő sorozat általános tagjának képlete $x_n = \frac{x_2 - x_1 \cdot r_2}{r_1 \cdot (r_1 - r_2)} \cdot r_1^n + \frac{x_2 - x_1 \cdot r_1}{r_2 \cdot (r_2 - r_1)} \cdot r_2^n$, $\forall n \geq 1$, ahol x_1 és x_2 a sorozat első két tagja¹.

5. Számítsuk ki az $S_1(n) = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n}$ összeget, ha $n \geq 2$.

Megoldás. Az összeg általános tagját egy sorozat két egymás után következő elemének különbségeként írjuk fel. Vegyük észre, hogy az $\frac{1}{k \cdot (k+1)}$ tört számlálója a

nevezőben szereplő két tényező különbségének is tekinthető: $\frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

Helyettesítsük ebbe az azonosságba k helyett rendre az $1, 2, 3, \dots, (n-1)$ értékeket, majd a kapott egyenlőségek megfelelő oldalait adjuk össze.

$$\begin{array}{r}
 \frac{1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \\
 \frac{1}{3 \cdot 2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\
 \dots\dots\dots \\
 \frac{1}{(n-2) \cdot (n-3)} = \frac{1}{n-3} - \frac{1}{n-2} \\
 \frac{1}{(n-1) \cdot (n-2)} = \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} \\
 \frac{1}{n \cdot (n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \\
 \hline
 S_1(n) = 1 - \frac{1}{n}
 \end{array}$$

A jobb oldalon az 1 és az $\frac{1}{n}$ kivételével minden tört kétszer jelenik meg: egyszer

pozitív előjellel és egyszer negatív előjellel, tehát $S_1(n) = \frac{n-1}{n}$, $\forall n \geq 2$.²

¹ Ez a képlet a matematikai indukció segítségével igazolható. Látható, hogy az ilyen sorozatok meghatározásához szükséges az első két tag ismerete.

I.5. Gyakorlatok és feladatok

1. Döntsétek el, hogy a következő sorozatok számtani haladványok-e vagy sem?
 - a) $x_n = 7n - 13, \forall n \geq 1$;
 - b) $x_n = -3n + 2, \forall n \geq 1$;
 - c) $x_n = -2n^2 + 3n + 1, \forall n \geq 1$;
 - d) $x_n = \frac{n^2 + 2n}{n+1}, \forall n \geq 1$;
 - e) $x_n = \frac{2^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}, \forall n \geq 1$.
2. Döntsétek el, hogy a következő sorozatok mértani haladványok-e vagy sem!
 - a) $x_n = 3^n, \forall n \geq 1$;
 - b) $x_n = 2^n \cdot 3^{2n} \cdot 5^{3n-1}, \forall n \geq 1$;
 - c) $x_n = 2^n + 3^n, \forall n \geq 1$;
 - d) $x_n = \frac{n}{2^n}, \forall n \geq 1$;
 - e) $x_n = \left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)^n + \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)^n, \forall n \geq 1$.
3. Az előbb vizsgált sorozatok esetén vezessetek le egy-egy rekurziót!
4. Az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ számtani haladványban határozd meg
 - a) az a_{20} -at, ha $a_1 = \frac{1}{2}$ és $r = -\frac{1}{3}$;
 - b) az a_{100} -at, ha $a_3 = 7$ és $a_9 = 22$;
 - c) az S_{30} -at, ha $S_{50} = 230$ és $a_5 = 25$;
 - d) az $a_{10} + a_{11} + a_{12} + \dots + a_{80}$ összeget, ha $a_2 + a_7 = 26$ és $a_{10} - a_{35} = -100$;
 - e) az első tagot és az állandó különbséget, ha $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{25} = 39$ és $2a_3 - a_7 = -4$;
 - f) az S_{25} -öt, ha $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 120$ és $a_1 + a_2 + a_3 = 15$.
5. A $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ mértani haladványban határozd meg
 - a) a b_{17} -et, ha $b_1 = 256$ és $q = -\frac{1}{2}$;
 - b) a b_{50} -et, ha $b_5 = 11$ és $b_{13} = 121$;

² $n=2$ -re és $n=3$ -ra a felírt összefüggések közül néhány értelmetlen, de reméljük ez nem túlzottan zavaró, hisz ezekre az értékekre gyorsan ki lehet számolni az összeg értékét.

- c) az S_8 -at, ha $b_2 + b_5 = -84$ és $b_4 + b_7 = -756$;
- d) az első tagot és a kvóciens, ha $b_1 + b_2 + b_3 = 14$ és $b_4 + b_5 + b_6 = 112$;
- e) az S_n -t, ha $b_1 = 7$ és $b_{2001} = -2 \cdot b_{2000}$;
- f) az első öt tagot, ha $b_3 - b_2 + b_1 = \frac{7}{8}$ és $b_1 + b_4 = \frac{7}{16}$.
6. Határozd meg a következő egyenletek megoldásait a valós számok halmazában:
- a) $(3x+6) + (3x+11) + \dots + (3x+71) = 819$;
- b) $1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + x^{100} = 0$;
- c) $1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \dots + 2^{49}x^{49} = 0$.
7. Jelöld S_n -nel az $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sorozat első n tagjának összegét, és vizsgáld meg, hogy az alábbi S_n értékek számtani vagy mértani haladványokhoz tartoznak!
- a) $S_n = n^2 + 2n, \forall n \geq 1$;
- b) $S_n = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^n, \forall n \geq 1$;
- c) $S_n = n, \forall n \geq 1$;
- d) $S_n = n^3 - 2n^2 + 1, \forall n \geq 1$;
- e) $S_n = \frac{n^2 + 1}{n + 1}, \forall n \geq 1$.
8. Bizonyítsd be, hogy ha az $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sorozat számtani (mértani) haladvány, akkor $(x_{3n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ is számtani (mértani) haladvány!
9. Határozd meg azt a négy számtani haladványban levő valós számot, amelyek összege 36 és a szélső, valamint belső tagok szorzatainak aránya $\frac{45}{77}$!
10. Az első n természetes szám összege a tízes számrendszerben olyan háromjegyű szám, amelynek számjegyei egyenlők. Határozd meg az n értékét!
11. Az első n természetes szám összege a tízes számrendszerben olyan háromjegyű szám, amelynek számjegyei valamilyen sorrendben számtani haladványt alkotnak. Határozd meg az n értékét!
12. Bizonyítsd be, hogy $\frac{S_m}{m} \cdot (n-p) + \frac{S_n}{n} \cdot (p-m) + \frac{S_p}{p} \cdot (m-n) = 0$, ahol S_k az $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ számtani sorozat első k elemének összegét jelöli és $m, n, p \in \mathbb{N}^*$!
13. Az $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ számtani haladvány n -edik tagja $\frac{1}{m}$, az m -edik tagja $\frac{1}{n}$. Számítsd ki az első $m \cdot n$ tag összegét ($m \neq n$)!
14. Az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ számtani haladvány első n tagjának összege nem nulla és egyenlő a következő n tag összegének a felével. Számítsd ki az $\frac{S_n}{S_{3n}}$ arány értékét!

- 15.** Bizonyítsd be, hogy ha $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ egy számtani haladvány és létezik $m \neq n \in \mathbb{N}^*$ úgy, hogy $S_m = m^2$ és $S_n = n^2$, akkor $S_k = k^2$, $\forall k \geq 1$!
- 16.** Bizonyítsd be, hogy az a , b és c számok pontosan akkor alkotnak számtani haladványt, ha $2 \cdot (a+b+c)^3 + 27abc = 9 \cdot (a+b+c) \cdot (ab+bc+ca)$!
- 17.** Bizonyítsd be, hogy ha az $E(x, y) = a(b-c)x^2 + b(c-a)xy + c(a-b)y^2$ kifejezés minden $x, y \in \mathbb{Z}$ esetén egy természetes szám négyzete és $a, b, c \neq 0$, akkor $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ és $\frac{1}{c}$ számtani haladványt alkotnak!
- 18.** Lehet a $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$ és $\sqrt{13}$ ugyanannak a számtani sorozatnak a tagja? Hát mértani haladványnak?
- 19.** Igaz-e, hogy ha az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sorozat tagjai bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén teljesítik az $a_n a_{n+1} - 2a_n a_{n+2} + a_{n+1} a_{n+2} = 2(a_{n+1} - a_n)^2$ rekurziót, akkor a sorozat vagy számtani haladvány, vagy mértani haladvány?
- 20.** Bizonyítsd be, hogy ha $ab(a+b) > 0$, akkor az $x = \sqrt{\frac{ab}{a+b}} - a\sqrt{\frac{a+b}{ab}}$, $y = \sqrt{\frac{ab}{a+b}}$ és $z = \sqrt{\frac{ab}{a+b}} - b\sqrt{\frac{a+b}{ab}}$ számok mértani haladványt alkotnak!
- 21.** Bizonyítsd be, hogy ha $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ mértani haladvány, akkor
- $$S_n \cdot (S_{3n} - S_{2n}) = (S_{2n} - S_n)^2 !$$
- 22.** Határozd meg azokat az a_1, a_2, a_3 és a_4 mértani haladványban levő számokat, amelyekre az $a_1 - 1, a_2 - 2, a_3 - 9$ és $a_4 - 28$ számok számtani haladványt alkotnak!
- 23.** Határozd meg azt a 16 tagú számtani haladványt, amelynek az első, a negyedik és a tizenhatodik tagja mértani haladványt alkot (ebben a sorrendben)!
- 24.** Bizonyítsd be, hogy ha $a_1, a_2, \dots, a_n$ számtani haladványt alkot és $a_k \neq 0$, ha $k = \overline{1, n+1}$, akkor

$$\text{a) } \frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}},$$

ha $a_k > 0$, $k = \overline{1, n}$;

$$\text{b) } \frac{a_1 + a_2}{a_1^2 \cdot a_2^2} + \frac{a_2 + a_3}{a_2^2 \cdot a_3^2} + \dots + \frac{a_n + a_{n+1}}{a_n^2 \cdot a_{n+1}^2} = \frac{n \cdot (a_1 + a_{n+1})}{a_1^2 \cdot a_{n+1}^2}, \text{ ha } a_k \neq 0, k = \overline{1, n+1}.$$

- 25.** Ha $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ számtani haladványt alkot, számítsd ki a következő összegeket és szorzatokat:

$$\text{a) } S_2(n) = \frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3} + \dots + \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}}, \quad a_i \neq 0 \quad i = \overline{1, n+1};$$

- b)** $S_3(n) = \frac{1}{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3 \cdot a_4} + \dots + \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1} \cdot a_{n+2}}, \quad a_i \neq 0 \quad i = \overline{1, n+2};$
- c)** $S_k(n) = \frac{1}{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{k+1}} + \dots + \frac{1}{a_{n+1} \cdot a_{n+2} \cdot \dots \cdot a_{n+k}}, \quad a_i \neq 0;$
- d)** $O_2(n) = a_1 \cdot a_2 + a_2 \cdot a_3 + \dots + a_{n-1} \cdot a_n;$
- e)** $O_3(n) = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 + a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 + \dots + a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot a_n;$
- f)** $N(n) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_{n-1}^2 + a_n^2;$
- g)** $P_1(n) = \left(1 - \frac{r^2}{a_2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{r^2}{a_3^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{r^2}{a_4^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{r^2}{a_n^2}\right), \quad a_i \neq 0 \quad i = \overline{2, n};$
- h)** $P_2(n) = \frac{a_2^3 - r^3}{a_2^3 + r^3} \cdot \frac{a_3^3 - r^3}{a_3^3 + r^3} \cdot \frac{a_4^3 - r^3}{a_4^3 + r^3} \cdot \dots \cdot \frac{a_n^3 - r^3}{a_n^3 + r^3}, \quad a_i \neq -r \quad i = \overline{2, n}.$

26. Bizonyítsd be, hogy ha $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ szigorúan pozitív tagú számtani haladvány, akkor

- a)** $\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_3}{a_4} \cdot \frac{a_5}{a_6} \cdot \dots \cdot \frac{a_{2n-1}}{a_{2n}} \leq \sqrt{\frac{a_1}{a_{2n+1}}};$
- b)** $\frac{n}{a_1 \cdot a_{2n+1}} \leq \frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3} + \dots + \frac{1}{a_{2n-1} \cdot a_{2n}} \leq \frac{n}{(a_1 - r) \cdot a_{2n}}, \quad \text{ha } 2r > a_1 > r;$
- c)** $\sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \sqrt{a_3 + \dots + \sqrt{a_n}}}} < a_2, \quad \text{ha } a_1 \geq 1 \text{ és } r \geq 1.$

27. Bizonyítsd be, hogy a következő számok teljes négyzetek:

- a)** $\underbrace{11\dots11}_{n-1} \underbrace{22\dots22}_n, \quad \forall n \geq 1;$
- b)** $\underbrace{11\dots1}_{2n} - \underbrace{22\dots2}_n, \quad \forall n \geq 1.$

28. Számítsd ki a következő összegeket:

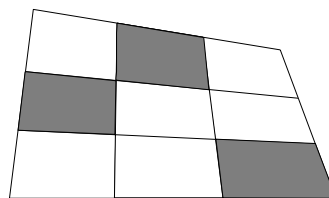
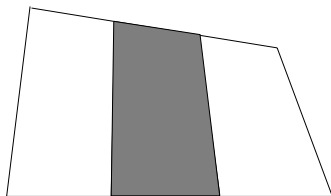
- a)** $S_1(n) = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n;$
- b)** $S_2(n) = x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + \dots + n^2x^n.$

29. Számítsd ki az $S_3(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2 - 1}$ összeget!

30. Bizonyítsd be, hogy $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2!$

31. Egy $n \times n$ -es táblázat minden sorába egy a állandó különbségű és minden oszlopába egy b állandó különbségű számtani haladványt írtunk. Bizonyítsd be, hogy bárhogyan is választod ki a táblázat n olyan elemét, amelyek között nincs kettő sem egy sorban, sem egy oszlopban, a kiválasztott számok összege mindig ugyanannyi!

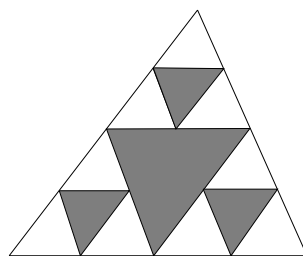
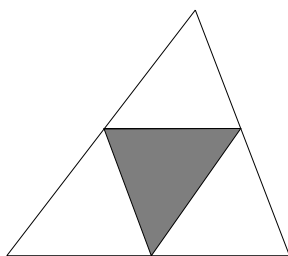
- 32.** Bizonyítsd be, hogy egy trapéz alapjainak és középvonalának hossza számtani haladványt alkot!
- 33.** Egy konvex négyszög két szemben fekvő oldalát osszuk fel n egyenlő részre, majd a megfelelő osztópontokat kössük össze (lásd a mellékelt ábrát). Bizonyítsd be, hogy az így kapott n , diszjunkt belsővel rendelkező négyszög területe számtani haladványban van!
- 34.** Egy konvex négyszög minden oldalát osszuk fel n darab egyenlő részre, majd a szemben fekvő oldalak megfelelő osztópontjait kössük össze (lásd a mellékelt ábrát). Az így keletkezett n^2 négyszög közül válassz ki n darabot úgy, hogy a kiválasztott négyszögek közt ne legyen két olyan, amely ugyanahhoz a „sávhoz” tartozik. („Sáv”-nak nevezzük a 34-es feladatbeli négyszögeket. Mivel mind a négy oldalt felosztottuk, összesen $2n$ sáv van; a mellékelt ábrán beszíneztünk egy sávot és egy lehetséges választásnak megfelelő három négyszöget.) Bizonyítsd be, hogy a kiválasztott négyszögek területének összege az eredeti négyszög területének n -ed része!



- 35.** Adott háromszöglapból kivágjuk az oldalak felezőpontjai által meghatározott háromszöglapot. A megmaradt három darab háromszöglap mindegyikéből ismét kivágjuk az oldalaik felezőpontjai által alkotott háromszöglapokat, és az újonnan keletkező háromszöglapokra megismételjük ugyanezt.

- a)** Hány háromszög keletkezik n lépés után?
- b)** Számítsd ki az n -edik lépés után keletkező háromszögek területének összegét az eredeti háromszög területének függvényében!

(Az első két lépést az alábbi ábrán láthatod.)



- 36.** Határozd meg azokat a derékszögű háromszögeket, amelyeknek oldalhosszai számtani haladványban álló természetes számok!
- 37.** Keress olyan derékszögű háromszögeket, amelyeknek oldalhosszai számtani haladványt alkotó számjegyekben végződő természetes számok, és amelyek nem hasonlóak az előbbi feladatban talált háromszögekkel!

- 38.** Bizonyítsd be, hogy egy háromszög oldalhosszainak négyzetei pontosan akkor alkotnak számtani haladványt, amikor az oldalfelezők hosszának négyzetei számtani haladványt alkotnak!
- 39.** Az ABC háromszög AB , illetve AC oldalán vegyük fel az M , illetve N tetszőleges pontot, majd a BC -n a P pontot úgy, hogy $NP \parallel AB$. Bizonyítsd be, hogy az ABC és CNP háromszög, valamint az $MNCP$ négyszög területe mértani haladványt alkot!
- 40.** Keress két olyan hasonló, de nem kongruens háromszöget, amelyek közül az egyiknek két oldala kongruens a másiknak két oldalával!
- 41.** Egy n sejtől álló szövettenyészetbe bekerül egy baktérium. A baktérium (és minden utóda) Δt idő alatt elpusztít egy sejtet és kettéosztódik. Ha a tenyészet minden sejtje Δt idő alatt kettéosztódik, mit állíthatunk a tenyészet életbenmaradásáról?
- 42.** A világűrben egy idegen vírus érkezik a sztratoszférába. A vírus p valószínűséggel osztdódik egy perc alatt ketté (magával azonos vírust hoz létre), és minden percben pontosan egy vírus osztdódhat ketté. Jelöljük $f(n, k)$ -val annak a valószínűségét, hogy n perc elteltével pontosan k darab vírus van. Bizonyítsd be, hogy $f(n, k) = (1-p) \cdot f(n-1, k) + p \cdot f(n-1, k-1)$! Számítsd ki $f(n, k)$ -t, ha $n \leq 4$.
- 43.** Valószínűleg hallottál arról, hogy valamely őselet életkorát, annak C^{14} -es szén izotóp tartalma alapján meg lehet állapítani. Nézz utána a könyvtárban, hogy milyen eljárás alapján történnek az ilyen típusú életkorbecslések, majd állapítsd meg, hogy milyen idős az a dinoszaurusz-lelet, amelynek széntartalma 1 kg, és amely percenként 3825 radioaktív bomlást mutat. (A C^{14} -es szénizotóp felezési ideje 5568 ± 30 év, és az élő szervezetek $15,3 \pm 0,1$ bomlást mutatnak egy gramm széntartalom esetén)
- 44.** Bizonyítsd be, hogy ha egy n tagú számtani haladványnak minden tagja prímszám, akkor a haladvány állandó különbsége osztható az n -nél kisebb prímeikkel!
- 45.** Az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ nem állandó sorozat tagjai teljesítik az $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{a_{n+1}}{3}$ összefüggést, $\forall n \geq 1$ esetén. Bizonyítsd be, hogy a $b_n = \frac{a_n}{n}$ sorozat számtani haladvány!
(Megyei olimpia, 1993, Călărași)
- 46.** Az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ növekvő számtani haladvány első tagja 1-nél nagyobb. Bizonyítsd be, az alábbi egyenlőtlenséget:

$$\sqrt{a_2 \cdot \sqrt{a_3 \cdot \sqrt{a_4 \cdot \sqrt{a_5 \cdot \dots \cdot \sqrt{a_n}}}}} < a_3, \forall n \geq 2!$$

(Grigore Moisil emléktverseny, 1995., D. Acu)