

Tartalomjegyzék

I. fejezet. Valós számok	5
II. fejezet. Egyenletek és egyenlőtlenségek.....	44
III. fejezet. Egyenletrendszerek.....	97
IV. fejezet. A matematikai logika elemei	124
V. fejezet. Függvények.....	157
VI. fejezet. Analitikus geometria	205
VII. fejezet. Vektorok a síkban	232
VIII. fejezet. A trigonometria elemei	255
IX. fejezet. A trigonometria alkalmazása a geometriában.....	283
X. fejezet. Összefoglaló gyakorlatok és feladatok.....	309

I. Valós számok

I.1. Természetes, egész és racionális számok

I.1.1. Feladatok (8. oldal)

1. Fogalmazz meg és bizonyíts be egy-egy oszthatósági kritériumot a 2-vel, 3-mal, 5-tel, 7-tel, 9-cel, 11-gyel való oszthatóságra.

Megoldás. A kettővel való oszthatósági kritériumot könnyű észrevenni: egy szám akkor osztható 2-vel, ha utolsó számjegye 0, 2, 4, 6 vagy 8 (vagyis egy szám pontosan akkor páros, ha utolsó számjegye is páros).

Bizonyítás. Legyen n egy természetes szám és a az n utolsó számjegye. Ekkor n felírható $n = 10 \cdot n_1 + a$ alakba, ahol $n_1 \in \mathbb{R}$ (tulajdonképpen $n = \overline{n_1 a}$). Innen következik, hogy $n - a = 10 \cdot n_1 = 2 \cdot 5 \cdot n_1$, tehát $n - a$ osztható kettővel. Ez pedig azt jelenti, hogy az n és a számok paritása (páros vagy páratlan volta) megegyezik, vagyis n pontosan akkor páros, ha a is páros (0, 2, 4, 6 vagy 8), és ha a páratlan, akkor n is páratlan.

Hasonlóan igazolható a következő kijelentés helyessége is (öttel való oszthatósági szabály): egy szám pontosan akkor osztható ötten, ha utolsó számjegye 0 vagy 5.

A hárommal való oszthatósági szabály a következő: egy szám akkor és csak akkor osztható 3-mal, ha számjegyeinek összege is osztható 3-mal.

Bizonyítás. Ha $n = \overline{a_1 a_2 \dots a_m}$ ($a_1, a_2, \dots, a_m$ számjegyek), S a számjegyek összege, akkor a szám és számjegyeinek különbsége

$$\begin{aligned} n - S &= \overline{a_1 a_2 \dots a_m} - (a_1 + a_2 + \dots + a_m) = \\ &= a_1 \cdot 10^{m-1} + a_2 \cdot 10^{m-2} + \dots + a_{m-1} \cdot 10 + a_m - (a_1 + a_2 + \dots + a_m) = \\ &= \sum_{k=1}^m (10^{m-k} - 1) a_k = \sum_{k=1}^m \underbrace{99 \dots 9}_{m-k} \cdot a_k = 3 \cdot 3 \cdot \left[\sum_{k=1}^m \underbrace{11 \dots 1}_{m-k} \cdot a_k \right], \end{aligned}$$

tehát az n és S különbsége osztható hárommal. Innen következik, hogy az n csakis akkor osztható 3-mal, ha számjegyei összege is osztható 3-mal. A bizonyításból jól látszik a kilenccel való oszthatósági szabály is (sőt, a két kritérium bizonyítása teljesen azonos): egy természetes szám akkor és csak akkor osztható 9-cel, ha számjegyei összege osztható kilenccel.

Héttel való oszthatósági kritérium: az $n = \overline{a_1 a_2 \dots a_m}$ természetes szám akkor és csak akkor osztható 7-tel, ha az $f(n) = \overline{a_1 a_2 \dots a_{m-1}} - 2a_m$ szám osztható héttel (például $f(203) = 20 - 2 \cdot 3 = 14$, tehát 203 osztható 7-tel).

Bizonyítás. “ $\Rightarrow$ ” Tegyük fel, hogy n osztható héttel, ekkor $n = 7k, k \in \mathbb{N}$. De $n = 10 \cdot \overline{a_1 a_2 \dots a_{m-1}} + a_m = 10 \cdot (\overline{a_1 a_2 \dots a_{m-1}} - 2a_m) + 21a_m = 10f(n) + 21a_m$, innen

pedig következik, hogy $n = 10f(n) + 21a_m = 7k \Rightarrow 10f(n) = 7(k - 3a_m)$, tehát $10f(n)$ osztható héttel. Mivel 10 és 7 relatív prímek, kapjuk, hogy $f(n)$ osztható héttel.

“ $\Leftarrow$ ” Ha $f(n) = 7l, l \in \mathbb{N}$, akkor

$$n = 10f(n) + 21a_m = 10 \cdot 7l + 21a_m = 7 \cdot (10l + 3a_m),$$

így n is osztható héttel.

Tizeneggyel való oszthatóság: egy szám csak akkor osztható 11-gyel, ha a számjegyeiből alkotott alternáló összeg osztható 11-gyel (például a 80729 számjegyeiből alkotott alternáló összeg $9 - 2 + 7 - 0 + 8 = 22$, tehát 80729 osztható 11-gyel). A bizonyítás hasonlít a 3-mal, illetve 9-cel való oszthatóság igazolásához. Ha $n = \overline{a_1 a_2 \dots a_m}$, akkor a számjegyeiből alkotott alternáló összeg

$S = a_m - a_{m-1} + a_{m-2} - \dots + (-1)^{m-1} a_1$, így

$$\begin{aligned} n - S &= \overline{a_1 a_2 \dots a_m} - (a_m - a_{m-1} + \dots + (-1)^{m-1} a_1) = \\ &= a_1 \cdot 10^{m-1} + a_2 \cdot 10^{m-2} + \dots + a_{m-2} \cdot 10^2 + a_{m-1} \cdot 10 + \\ &\quad + a_m - (a_m - a_{m-1} + a_{m-2} - \dots + (-1)^{m-1} a_1) = \\ &= (10 + 1)a_{m-1} + (10^2 - 1)a_{m-2} + (10^3 + 1)a_{m-3} + \dots + (10^{m-1} + (-1)^m)a_1 = \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} (10^k + (-1)^{k-1}) \cdot a_{m-k} = \sum_{k=1}^{m-1} [(11 - 1)^k + (-1)^{k-1}] \cdot a_{m-k} = \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} [M11 + (-1)^k + (-1)^{k-1}] \cdot a_{m-k} = \sum_{k=1}^{m-1} (M11) \cdot a_{m-k} : 11, \end{aligned}$$

ahol $M11$ a 11 valamely többszörösét jelenti. Tehát $n - S$ mindig osztható 11-gyel, így n akkor és csak akkor osztható 11-gyel, ha S osztható 11-gyel.

2. Bizonyítsd be, hogy ha n páratlan természetes szám, akkor $n^4 + 14n^2 + 49$ osztható 64-gyel.

Bizonyítás. Mivel n egy páratlan természetes szám, létezik egyetlen olyan $k \in \mathbb{N}$ szám, amelyre $n = 2k + 1$. Tehát

$$A = n^4 + 14n^2 + 49 = (n^2 + 7)^2 = (4k^2 + 4k + 1 + 7)^2 = [4k(k + 1) + 8]^2.$$

Tudjuk, hogy két egymás utáni szám szorzata mindig páros (az egyikük biztosan páros), így $k(k + 1) = 2m, m \in \mathbb{N}$. Ezt felhasználva írhatjuk, hogy

$$A = (8m + 8)^2 = [8(m + 1)]^2 = 64(m + 1)^2,$$

tehát A többszöröse 64-nek.

3. Bizonyítsd be, hogy ha $b \mid a$, $c \mid a$ és $(b, c) = 1$, akkor $bc \mid a$.

Bizonyítás. A $b \mid a$ és $c \mid a$ oszthatóságokból következik, hogy léteznek a k, l természetes számok, amelyekre $a = k \cdot b$ és $a = l \cdot c$. Innen $k \cdot b = l \cdot c$, tehát kb

osztható c -vel, de mivel $(b, c) = 1$, k osztható c -vel. Tehát létezik olyan $m \in \mathbb{N}$, amelyre $k = m \cdot c$. Ezt visszahelyettesítve az $a = k \cdot b$ összefüggésbe, kapjuk, hogy $a = m \cdot b \cdot c$, vagyis a osztható $b \cdot c$ -vel.

4. Bizonyítsd be, hogy öt egymás utáni természetes szám szorzata osztható 120-szal.
Általánosítás!

Bizonyítás. $120 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, tehát elégséges igazolni, hogy öt egymás utáni természetes szám szorzata osztható 2^3 -nel, 3-mal és 5-tel. Az öt szám közül legalább kettő páros, ezek egymás utáni páros számok, tehát az egyik osztható 4-gyel és a másik 2-vel, így a szorzatuk osztható 8-cal. Három egymás utáni természetes szám közül az egyik osztható 3-mal, tehát az öt közt is van 3-mal osztható. Öt egymás utáni természetes szám közül az egyik osztható 5-tel, tehát a szorzat osztható $2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$ -szal. Ez a gondolatmenet nehezen terjeszthető ki több számra, ezért az általános esetre más megoldást kell találnunk. A tulajdonság általánosabban a következőképpen fogalmazható meg:

k darab egymás utáni természetes szám szorzata osztható $k!$ -sal, ahol $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k$.

A tulajdonság ekvivalens azzal, hogy az $\frac{(n+k)!}{n! \cdot k!}$ kifejezés egész szám minden

$n, k \in \mathbb{N}^*$ esetén és ezt úgy fogjuk belátni, hogy tetszőleges p prímszámra igazoljuk, hogy a számlálóban legalább akkora a kitevője, mint a nevezőben. Ehhez szükséges megvizsgálni, hogy a p -nek mi a kitevője $m!$ prímtényezős felbontásában ($m \in \mathbb{N}$

tetszőleges). Az $1, 2, 3, \dots, m$ számok közt p -nek $\left\lfloor \frac{m}{p} \right\rfloor$ többszöröse van, ezek közül

$\left\lfloor \frac{m}{p^2} \right\rfloor$ osztható p^2 -tel, $\left\lfloor \frac{m}{p^3} \right\rfloor$ osztható p^3 -nel és általában $\left\lfloor \frac{m}{p^r} \right\rfloor$ osztható p^r -nel, ha

$r \geq 1$. Így a p kitevője az $m!$ prímtényezős felbontásában

$$\left\lfloor \frac{m}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{p^3} \right\rfloor + \dots = \sum_{r=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{m}{p^r} \right\rfloor$$

Ezt a tulajdonságot Legendre-féle tételnek is nevezik. Másrészt az $[x] + [y] \leq [x + y]$,

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ egyenlőtlenség alapján $\sum_{r=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^r} \right\rfloor + \sum_{r=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{k}{p^r} \right\rfloor \leq \sum_{r=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n+k}{p^r} \right\rfloor$, vagyis $(n+k)!$

felbontásában a p kitevője legalább akkora, mint az $n! \cdot k!$ felbontásában. Mivel ez a

tulajdonság minden prímszámra igaz, az $\frac{(n+k)!}{n! \cdot k!}$ kifejezés egész szám minden

$n, k \in \mathbb{N}^*$ esetén, és így az $(n+1)(n+2)\dots(n+k)$ szorzat osztható $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k$ -val.

5. *Hány nullára végződik az $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2001$ szorzat?*

Megoldás. A vizsgált szorzat prímtényezősz felbontásában nagyobb 2-nek a kitevője, mint 5-nek, ezért elégséges az 5 kitevőjét meghatározni. Az $1, 2, 3, \dots, 2001$

számok közül $\left\lfloor \frac{2001}{5} \right\rfloor = 400$ osztható 5-tel. Ezek közül $\left\lfloor \frac{2001}{25} \right\rfloor = 80$ osztható 25-tel,

$\left\lfloor \frac{2001}{125} \right\rfloor = 16$ osztható 125-tel, $\left\lfloor \frac{2001}{625} \right\rfloor = 3$ osztható 625-tel, és így az 5 kitevője

$$400 + 80 + 16 + 3 = 3 \cdot 4 + (16 - 3) \cdot 3 + (80 - 16) \cdot 2 + (400 - 80) \cdot 1 = 499.$$

Tehát az $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2001$ szorzat 499 nullában végződik.

6. *Határozd meg a 3 kitevőjét az $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2001$ szorzatban.*

Megoldás. Az előbbi gondolatmenet vagy a Legendre-tétel alapján a 3 kitevője az

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2001 \text{ szorzatban } \sum_{r=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{2001}{3^r} \right\rfloor = 667 + 222 + 74 + 24 + 8 + 2 = 997.$$

7. *Bizonyítsd be, hogy a $2^9 + 2^{99}$ szám osztható 10-zel.*

Bizonyítás

$$\begin{aligned} 2^9 + 2^{99} &= 2^9 \cdot \left((2^{30})^3 + 1 \right) = 2^9 (2^{30} + 1)(2^{60} - 2^{30} + 1) = \\ &= 2^9 \cdot (2^{10} + 1)(2^{20} - 2^{10} + 1)(2^{60} - 2^{30} + 1) = \\ &= 2^9 \cdot 1025 \cdot (2^{20} - 2^{10} + 1)(2^{60} - 2^{30} + 1) = \\ &= 10 \cdot 2^8 \cdot 205 \cdot (2^{20} - 2^{10} + 1)(2^{60} - 2^{30} + 1), \end{aligned}$$

tehát $2^9 + 2^{99}$ osztható tízzel.

8. *Bizonyítsd be, hogy ha a , b és c egész számok és $(a + b + c) : 6$, akkor $a^5 + b^3 + c$ is osztható 6-tal.*

Bizonyítás. Elégséges igazolni, hogy $\left[(a^5 + b^3 + c) - (a + b + c) \right] : 6$. De $b^3 - b = b(b-1)(b+1) : 6$, mert három egymás utáni természetes szám közt biztosan van páros is és hárommal osztható is. Hasonlóan

$$a^5 - a = a(a^2 - 1)(a^2 + 1) = a(a-1)(a+1)(a^2 + 1) : 6,$$

tehát $\left[(a^5 + b^3 + c) - (a + b + c) \right] = \left[(a^5 - a) + (b^3 - b) \right] : 6$.

9. *Bizonyítsd be, hogy $(3^n + 2n + 3) : 4$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Bizonyítás. Két esetet különböztetünk meg n paritása szerint.

Ha $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$, akkor

$$3^n + 2n + 3 = (4 - 1)^{2k+1} + 4k + 2 + 3 = v \cdot 4 - 1 + 4k + 5 = 4 \cdot (v + k + 1) : 4,$$

ahol $v \in \mathbb{N}$.

Ha $n = 2k, k \in \mathbb{N}$, akkor

$$3^n + 2n + 3 = (4 - 1)^{2k} + 4k + 3 = v \cdot 4 + 1 + 4k + 3 = 4 \cdot (v + k + 1) : 4,$$

ahol v egy természetes szám.

10. Milyen számrendszerben érvényes a következő szorzás $25 \cdot 314 = 10274$?

Megoldás. Ha x a számrendszer alapja, akkor a

$$(2x + 5)(3x^2 + x + 4) = x^4 + 2x^2 + 7x + 4$$

egyenlethez jutunk. Ez $x^4 - 6x^3 - 15x^2 - 6x - 16 = 0$ alakba írható, és az egyetlen 7-nél nagyobb természetes szám gyöke az $x = 8$, tehát a szorzás a 8-as számrendszerben érvényes.

11. Vizsgáld meg, hogy az alábbi egyenleteknek van-e megoldása a természetes számok halmazában:

- a)** $xy(x + y) = 2001$; **b)** $x^2 + y^2 - x - y = 2001$; **c)** $3x - 21y = 14$;
d) $x^2 - 2y^2 = 17$; **e)** $5^x + 11^y = 12^z$ ($x \neq 0$); **f)** $x^2 + y^2 = 2x + 2y - 3$.

Bizonyítás

a) Ha az x, y számok közül valamelyik páros, akkor az $xy(x + y)$ szorzat is páros, tehát $xy(x + y)$ nem lehet páratlan. Ha x és y páratlanok, akkor $x + y$ páros, így $xy(x + y)$ ebben az esetben sem lehet páratlan. Mivel más eset nincs, következik, hogy $xy(x + y)$ mindig páros, tehát az $xy(x + y) = 2001$ egyenletnek nincs megoldása $\mathbb{N}$ -ben.

b) Az $x^2 + y^2 - x - y = 2001$ egyenlet még $x(x - 1) + y(y - 1) = 2001$ alakban is írható. Mivel két egymás utáni szám szorzata mindig páros és két páros szám összege is páros, következik, hogy az egyenlet bal oldala csak páros értékeket vehet fel, tehát sosem lehet 2001.

c) Tegyük fel, hogy a $3x - 21y = 14$ egyenletnek van természetes megoldása. Ekkor létezik $x_0, y_0 \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $3x_0 - 21y_0 = 14 \Rightarrow 14 = 3 \cdot (x_0 - 7y_0)$, s mivel $(x_0 - 7y_0) \in \mathbb{N}$, ez azt jelentené, hogy 14 osztható hárommal, így nyilvánvalóan ellentmondáshoz jutottunk. Következik, hogy feltételezésünk hamis volt, tehát az egyenletnek nincs természetes megoldása.

d) Az egyenlet egy megoldása $x_1 = 5$ és $y_1 = 2$.

e) A bal oldal utolsó számjegye 6, tehát $z \not\equiv 4$. A jobb oldal osztható 4-gyel és a bal oldal 4-gyel való osztási maradéka $1 + (-1)^y$, tehát y páratlan. A jobb oldal 3-mal is osztható, míg a bal oldal 3-mal való osztási maradéka $(-1)^x - 1$, tehát x páros. Ezek alapján létezik olyan $x_1, y_1, z_1 \in \mathbb{N}$, amelyekre $x = 2x_1$, $y = 2y_1 + 1$ és $z = 4z_1$. Az eredeti egyenlet tehát

$$11^{2y_1+1} = (12^{2z_1})^2 - (5^{x_1})^2 = (12^{2z_1} - 5^{x_1})(12^{2z_1} + 5^{x_1})$$

alakban írható. $12^{2z_1} - 5^{x_1}$ és $12^{2z_1} + 5^{x_1}$ relatív prímelek és 11 prímszám, tehát az előbbi egyenlőség csak akkor lehetséges, ha $12^{2z_1} - 5^{x_1} = 1$ és $12^{2z_1} + 5^{x_1} = 11^{2y_1+1}$.

Másrészt $12^{2z_1} - 1 = ((12^2)^{z_1} - 1) : 143$ és $5^{x_1} \nmid 143$, tehát a vizsgált egyenletnek nincs megoldása a természetes számok halmazában.

$$\textbf{f)} \quad x^2 + y^2 = 2x + 2y - 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = -1 \Leftrightarrow$$

$(x-1)^2 + (y-1)^2 = -1$, ami lehetetlen, mert két pozitív szám összege nem lehet negatív.

12. Határozd meg a hiányzó számjegyeket úgy, hogy

$$\textbf{a)} \quad 36 \mid \overline{52x2y};$$

$$\textbf{b)} \quad 45 \mid \overline{24x68y};$$

$$\textbf{c)} \quad 99 \mid \overline{62xy427}.$$

Megoldás. **a)** $36 \mid 52x2y \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \mid \overline{52x2y} \\ 9 \mid \overline{52x2y} \end{cases}$ Az első oszthatóság alapján y értéke 0, 4

vagy 8 lehet. Ha $y = 0$, a második oszthatóság alapján $9 \mid (9 + x)$, s mivel x számjegy, következik, hogy $x = 0$. Ha $y = 4$, akkor $9 \mid (13 + x)$, tehát $x = 5$. Ha $y = 8$, akkor $9 \mid (17 + x)$, tehát $x = 1$.

$$\textbf{b)} \quad 45 \mid \overline{24x68y} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \mid \overline{24x68y} \\ 9 \mid \overline{24x68y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in \{0, 5\} \\ 9 \mid (20 + x + y) \end{cases}.$$

Ha $y = 0$, akkor $9 \mid (20 + x)$, tehát $x = 7$. Ha $y = 5$, akkor $9 \mid (25 + x)$, tehát $x = 2$.

$$\textbf{c)} \quad 99 \mid \overline{62xy427} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 \mid \overline{62xy427} \\ 11 \mid \overline{62xy427} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 \mid (21 + x + y) \\ 11 \mid (13 + x - y) \end{cases},$$

ahol x, y számjegyek. Ebből következik, hogy $\begin{cases} (x+y) \in \{6, 15\} \\ (x-y) \in \{-2, 9\} \end{cases}$. Az így kapott négy egyenletrendszer közül csak

$$\text{egynek van megfelelő megoldása, az } \begin{cases} x+y=6 \\ x-y=-2 \end{cases} \text{ rendszernek, innen pedig } \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}.$$

13. Lehet-e egyszerre egész az $\frac{n+1}{15}$ és az $\frac{n+8}{21}$, ha $n \in \mathbb{N}$?

Megoldás. Tételezzük fel, hogy létezik olyan n , amelyre $\frac{n+1}{15}$ és $\frac{n+8}{21}$ egészek.

Ekkor $(n+1):15$, $(n+8):21$, innen pedig $n+1$ és $n+8$ oszthatóak hárommal. Következik, hogy különbségük is osztható 3-mal, tehát $(n+8) - (n+1) = 7:3$, ami egy hamis állítás. Következik, hogy nem létezik olyan n , amelyre mindkét tört értéke egész legyen.

14. Bizonyítsd be, hogy ha a természetes számokat írjuk a tizedes vessző után növekvő sorrendben, a kapott szám nem lesz racionális.

Megoldás. A kapott szám nem véges, mert végtelen sok természetes szám létezik és nem lehet periodikus sem, mert tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén végtelen sok olyan természetes szám létezik, amelynek több mint $3n - 2$ darab egymás utáni számjegye 0. Így ha a periódus hossza n volna, akkor ezeket a számokat a periodikus rész nem tartalmazhatná és ez nem lehetséges (mert végtelen sok van belőlük).

15. Határozd meg azokat az a , b , c és d számjegyeket, amelyekre $\overline{abcd} + \overline{bcd} + \overline{cd} + \overline{d} = 9844$.

Megoldás

$$\begin{aligned}\overline{abcd} + \overline{bcd} + \overline{cd} + \overline{d} &= 9844 \Leftrightarrow 1000 \cdot a + 200 \cdot b + 30 \cdot c + 4 \cdot d = 9844 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1000 \cdot (a - 9) + 100 \cdot (2b - 8) + 10 \cdot (3c - 4) + (4d - 4) = 0.\end{aligned}$$

Az összeg első három tagja többszöröse 10-nek, innen következik, hogy $(4d - 4)$ is osztható kell legyen tízzel, tehát $d \in \{1, 6\}$.

Ha $d = 1$ -et helyettesítünk vissza, következik, hogy

$$1000 \cdot (a - 9) + 100 \cdot (2b - 8) + 10 \cdot (3c - 4) = 0,$$

innen pedig $100(a - 9) + 20(b - 4) + (3c - 4) = 0$. Az összeg első két tagja többszöröse 20-nak, következik, hogy $(3c - 4) : 20$, tehát $c = 8$ és $100(a - 9) + 20(b - 4) + 20 = 0$ azaz $5a + b = 48$, ami csak úgy lehetséges, ha $a = 9$ és $b = 3$.

Ha $d = 6$ -ot helyettesítünk vissza, következik, hogy

$$1000 \cdot (a - 9) + 100 \cdot (2b - 8) + 10 \cdot (3c - 4) + 20 = 0,$$

innen pedig $100(a - 9) + 20(b - 4) + (3c - 2) = 0$. Az összeg első két tagja többszöröse 20-nak, következik, hogy $(3c - 2) : 20$, ami egyetlen c számjegy esetén sem teljesül.

Tehát az egyetlen szám, amely kielégíti az egyenletet, az $\overline{abcd} = 9381$.

16. Vizsgáld meg, mi lehet az osztási maradéka egy teljes négyzetnek 4-gyel, 3-mal, 5-tel, 7-tel.

Megoldás. Ha $x = 2k, k \in \mathbb{N}$, akkor $x^2 = 4k^2$, tehát $x^2 : 4$. Ha $x = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$, akkor $x^2 = 4(k^2 + k) + 1$. Tehát egy teljes négyzetnek négygyel való osztási maradéka 0 vagy 1 lehet.

Hasonlóan, ha $x = 3k \pm 1$, akkor $x^2 = 3(3k^2 \pm 2k) + 1$, ha pedig $x = 3k$, akkor $x^2 : 3$, tehát egy teljes négyzet 3-al való osztáskor 0 vagy 1 maradékot adhat.

Ha $x = 5k \pm 1$, akkor $x^2 = 5(5k^2 \pm 2k) + 1$, ha $x = 5k \pm 2$, akkor $x^2 = 5(5k^2 \pm 4k) + 4$, ha pedig $x = 5k$, akkor $x^2 : 5$. A lehetséges maradékok: 0, 1, 4.

Hasonlóan kapjuk, hogy egy teljes négyzet héttel való osztási maradéka 0, 1, 2, 4 lehet.

Megjegyzés. A levezetések alapján jól látszik, hogy a teljes négyzetek n -nel való osztási maradékait megkapjuk, ha meghatározzuk az $\frac{n+1}{2}$ -nél kisebb természetes számok négyzeteinek n -el való osztási maradékainak halmazát.

17. Határozd meg azokat az x egész számokat, amelyekre

a) $(4x - 3) : 7$; **b)** $(3x - 2) : 11$; **c)** $(7x + 4) : 13$.

Megoldás

a) Mivel $(5, 7) = 1$, ezért a $(4x - 3) : 7$ feltétel egyenértékű azzal, hogy $[5(4x - 3)] : 7$, ez pedig rendre a következőkkel ekvivalens: $(20x - 15) : 7$, $[7(3x - 2) - (20x - 15)] : 7$, $(21x - 14 - 20x + 15) : 7$, $(x + 1) : 7$, tehát $\exists k \in \mathbb{Z}$ úgy, hogy $x + 1 = 7k$, innen pedig $x = 7k - 1$. Tehát minden $x = 7k - 1, k \in \mathbb{Z}$ alakú szám megoldás.

b) $(3x - 2) : 11 \Leftrightarrow [4(3x - 2)] : 11 \Leftrightarrow (11x + x - 8) : 11 \Leftrightarrow (x - 8) : 11 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ úgy, hogy $x - 8 = 11k \Leftrightarrow x = 11k + 8, k \in \mathbb{Z}$.

c) $(7x + 4) : 13 \Leftrightarrow [2(7x + 4)] : 13 \Leftrightarrow (13x + x + 8) : 13 \Leftrightarrow (x + 8) : 13 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ úgy, hogy $x + 8 = 13k \Leftrightarrow x = 13k - 8, k \in \mathbb{Z}$.

18. Bizonyítsd be, hogy ha $a = b \cdot c + d$, akkor $(a, b) = (b, d)$.

Bizonyítás. Ha $(a, b) = x$ és $(b, d) = y$, igazolni kell, hogy $x = y$.

Mivel $x = (a, b)$, x osztja a -t is és b -t is, tehát $x \mid a$, $x \mid bc$, innen pedig $x \mid (a - bc) \Rightarrow x \mid d$. Tehát $x \mid d$ és $x \mid b$, így x -nek osztania kell y -t is (mert y értelmezés szerint b és d közös osztói közül a legnagyobb). Kapjuk tehát, hogy $x \mid y$.

Hasonlóan bizonyítható a fordított oszthatóság is: $y = (b, d) \Rightarrow y \mid b, y \mid d \Rightarrow y \mid (bc + d) \Rightarrow y \mid a, y \mid b \Rightarrow y \mid (a, b) \Rightarrow y \mid x$.

Az $x \mid y$ és $y \mid x$ oszthatóságokból következik az $x = y$ egyenlőség.

19. Adjál algoritmust két szám l.n.k.o-jának és l.k.k.t.-ének meghatározására.

Megoldás. Ha a és b a két szám ($a > b$), akkor az előbbi tulajdonság alapján a következő lépéseket végezhetjük:

1. Osztjuk a -t b -vel, jelöljük q_1 -gyel és r_1 -gyel a hányadost és a maradékot.
2. Osztjuk b -t r_1 -gyel, jelöljük q_2 -vel és r_2 -vel a hányadost és a maradékot.
3. Minden $n \geq 2$ esetén osztjuk r_n -et r_{n-1} -gyel, jelöljük q_{n+1} -gyel és r_{n+1} -gyel a hányadost és a maradékot.

Ebben az eljárásban az előbbi feladat alapján $(r_n, r_{n+1}) = (a, b)$, $\forall n \geq 1$, tehát az utolsó nullától különböző maradék az eredeti két szám legnagyobb közös osztója (ezt nevezik Euklideszi algoritmusnak). Ha $d = (a, b)$ és $t = [a, b]$, akkor $t = \frac{a \cdot b}{d}$, tehát meghatározható a legkisebb közös többszörös is.

20. Bizonyítsd be, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén az $n^3 - n$ szám osztható 6-tal.

Bizonyítás. Mivel $6 = 2 \cdot 3$ és $(2, 3) = 1$, elég igazolni, hogy az $n^3 - n = (n-1)n(n+1)$ szorzat osztható 2-vel és 3-mal. Az $n-1$ és n egymás utáni számok közül pontosan az egyik biztosan páros, ezért $(n-1)n:2$ minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén, tehát $n^3 - n$ mindig páros. Ha $n = 3k, k \in \mathbb{N}$, akkor $n^3 - n = 3(n-1)k(n+1):3$, ha $n = 3k+1$, $n^3 - n = 3kn(n+1):3$, ha pedig $n = 3k-1$, akkor $n^3 - n = 3(n-1)nk:3$.

Tehát minden természetes n szám esetén $n^3 - n:2, 3$, így $n^3 - n:6, \forall n \in \mathbb{N}$.

21. Igazold, hogy három egymás utáni egész szám köbének összege osztható 3-mal.

Megoldás

$A = a^3 + (a+1)^3 + (a+2)^3 = a^3 + (a^3 + 3a^2 + 3a + 1) + (a^3 + 6a^2 + 12a + 8) = 3 \cdot (a^3 + 3a^2 + 5a + 3)$, tehát A osztható hárommal.

22. Adottak az $a = 3^{100} : [3^{40} \cdot 3^{58} + (3^{110} \cdot 3^{15}) : 3^{27} + (4^{57} : 4^{56} - 1^4) \cdot 3^{97}] \cdot 2$ és $b = 10^3 : \left\{ 123 + 34 : \left[(2 \cdot 3^2)^2 : 18 - 17^0 \cdot 1^{125} \right] \right\}$ számok. Határozd meg az a és b számok l.n.k.o-ját és l.k.k.t-ét.

Megoldás

$$\begin{aligned} a &= 3^{100} : [3^{40} \cdot 3^{58} + (3^{110} \cdot 3^{15}) : 3^{27} + (4^{57} : 4^{56} - 1^4) \cdot 3^{97}] \cdot 2 = \\ &= 3^{100} : [3^{40+58} + 3^{110+15-27} + (4^{57-56} - 1) \cdot 3^{97}] \cdot 2 = \\ &= 3^{100} : [3^{98} + 3^{98} + (4-1) \cdot 3^{97}] \cdot 2 = 3^{100} : (3 \cdot 3^{98}) \cdot 2 = 3^{100-99} \cdot 2 = 2 \cdot 3 = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= 10^3 : \left\{ 123 + 34 : \left[(2 \cdot 3^2)^2 : 18 - 17^0 \cdot 1^{125} \right] \right\} = \\ &= 10^3 : \left\{ 123 + 34 : \left[(2^2 \cdot 3^4) : (2 \cdot 3^2) - 1 \right] \right\} = \\ &= 10^3 : (123 + 34 : 17) = 1000 : 125 = 8 \end{aligned}$$

$(a, b) = (6, 8) = 2$ és $[a, b] = [6, 8] = 24$.

23. Az a és b számok l.n.k.o-ja 15, l.k.k.t-e 180. Melyek ezek a számok?

Megoldás. Az a, b számok ln.k.o.-ja 15, ezért $a = 15x$, $b = 15y$, ahol $x, y \in \mathbb{N}$ és $(x, y) = 1$. Ekkor $180 = [a, b] = [15x, 15y] = 15[x, y]$, tehát $[x, y] = 180 : 15 = 12$.

$$\begin{cases} (x, y) = 1 \\ [x, y] = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 12 \end{cases} \text{ vagy } \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases} \text{ vagy } \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases} \text{ vagy } \begin{cases} x = 12 \\ y = 1 \end{cases}. \text{ Tehát a} \\ \text{megoldások: } \begin{cases} a = 15 \\ b = 180 \end{cases}, \begin{cases} a = 45 \\ b = 60 \end{cases}, \begin{cases} a = 60 \\ b = 45 \end{cases}, \begin{cases} a = 180 \\ b = 15 \end{cases}.$$

24. Két természetes szám összege 2001. Határozzuk meg a számokat, ha legnagyobb közös osztójuk 87.

Megoldás. Legyen a két szám a és b . Az $(a, b) = 87$ feltétel alapján $a = 87x$, $b = 87y$, ahol x és y két egymással relatív prím természetes szám. Ekkor $2001 = a + b = 87(x + y)$, innen kapjuk, hogy $x + y = 23$. Ez utóbbi összefüggés tartalmazza azt is, hogy x és y relatív prímek, hiszen ha $d \mid x, d \mid y$, akkor $d \mid (x + y) = 23$, innen pedig $d \in \{1, 23\}$. De $d = 23$ nem lehetséges, így marad a $d = 1$ eset, tehát $(x, y) = 1$. Következik, hogy minden $(k, 23 - k)$, $k = \overline{1, 22}$ alakú számpár megoldás, tehát a feladat megoldásai $(a, b) = (87k, 87 \cdot (23 - k))$, $k = \overline{1, 22}$.

25. Határozd meg az $n = \overline{49a4b}$ számot, ha $n : 28$ és $(\overline{ab} + 1) : 9$.

Megoldás

$$\begin{aligned} \begin{cases} n : 28 \\ (\overline{ab} + 1) : 9 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} n : 4, n : 7 \\ (10a + b + 1) : 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{4b} : 4, (\overline{49a4} - 2b) : 7 \\ (a + b + 1) : 9 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b \in \{0, 4, 8\}, (10a + 4 - 2b) : 7 \\ (a + b) \in \{8, 17\}. \end{cases} \end{aligned}$$

Ha $a + b = 17$, a $b \in \{0, 4, 8\}$ feltétel alapján $a = 9$ és $b = 8$, ekkor viszont $10a + 4 - 2b = 78$ nem osztható héttel. Következik, hogy $a = 8 - b$, így $10a - 2b + 4 = 84 - 12b$ csak akkor osztható héttel, ha $b = 0$, ekkor $a = 8$, tehát a keresett szám az $n = 49840$.

26. Bizonyítsd be, hogy ha az n természetes szám nem osztható 7-tel, akkor az

$$N = \frac{n^6}{7} + \frac{6}{7} \text{ szám természetes szám.}$$

Bizonyítás. Az n szám héttel való maradéka lehet 1, 2, 3, 4, 5 vagy 6. Mind a hat esetben n^6 -nak 7-tel való osztási maradéka 1, tehát $(n^6 + 6) : 7$.

27. Bizonyítsd be, hogy az $N = 3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^{2000}$ szám osztható 13-mal és az $M = N - 3^{2000}$ szám osztható 40-nel.

Bizonyítás. Észrevesszük, hogy 13 felírható $3^0 + 3^1 + 3^2$ alakba. Ezért az N összeg tagjait a következőképpen csoportosítjuk:

$$\begin{aligned}
 N &= 3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^{2000} = \\
 &= (3^0 + 3^1 + 3^2) + (3^3 + 3^4 + 3^5) + \dots + (3^{1998} + 3^{1999} + 3^{2000}) = \\
 &= (3^0 + 3^1 + 3^2) + 3^3 \cdot (3^0 + 3^1 + 3^2) + \dots + 3^{1998} \cdot (3^0 + 3^1 + 3^2) = \\
 &= (1 + 3 + 9) \cdot (1 + 3^3 + 3^6 + \dots + 3^{1998}) = 13 \cdot (1 + 3^3 + 3^6 + \dots + 3^{1998}) \Rightarrow N : 13.
 \end{aligned}$$

Hasonlóan, mivel $40 = 3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3$, M tagjait négyesével csoportosítjuk:

$$\begin{aligned}
 M &= 3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^{1999} = \\
 &= (3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3) + (3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7) + \dots + (3^{1996} + 3^{1997} + 3^{1998} + 3^{1999}) = \\
 &= (3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3) + 3^4 \cdot (3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3) + \dots + 3^{1996} \cdot (3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3) = \\
 &= (1 + 3 + 9 + 27) \cdot (1 + 3^4 + 3^8 + \dots + 3^{1996}) = 40 \cdot (1 + 3^4 + \dots + 3^{1996}) \Rightarrow M : 40.
 \end{aligned}$$

28. a) Bizonyítsd be, hogy nem létezik olyan természetes szám, amely négyzetének hárommal való osztási maradéka 2.

b) Oldd meg az egész számok halmazán a $b^2 = 9a - 2b + 10$ egyenletet.

Megoldás. a) Három esetet vizsgálunk n -nek hárommal való osztási maradéka szerint:

- ha $n = 3l$, $l \in \mathbb{N}$, akkor $n^2 = 9l^2 : 3$, tehát n^2 nem $3k + 2$ alakú
- ha $n = 3l + 1$, akkor $n^2 = 9l^2 + 6l + 1 = 3(3l^2 + 2l) + 1$ nem $3k + 2$ alakú
- ha $n = 3l + 2$, akkor $n^2 = 9l^2 + 12l + 4 = 3(3l^2 + 4l + 1) + 1$ nem $3k + 2$ alakú

Következik, hogy egy teljes négyzet hárommal való osztási maradéka csak a 0 és 1 értékek valamelyikét veheti fel, sosem lehet 2.

b) A $b^2 = 9a - 2b + 10$ egyenletet még így is írhatjuk: $b^2 + 2b + 1 = 9a + 11$, $(b + 1)^2 = 3 \cdot (3a + 3) + 2$. Mindkét oldal hárommal való osztási maradékát nézve, azt kapjuk, hogy $(b + 1)^2$ -nek 3-mal való osztásakor maradéku kettőt kapunk, ez pedig ellentmond az a) pontban megfogalmazott állításnak. Tehát az adott egyenletnek nincs megoldása az egész számok halmazában.

29. Határozd meg azokat az $n \in \mathbb{N}$ természetes számokat, amelyekre az $n + 1$, $n + 7$, $n + 13$, $n + 19$, $n + 25$ számok mindegyike prímszám.

Megoldás. n -nek ötten való lehetséges osztási maradékai szerint öt esetet különböztetünk meg.

Ha $n = 5k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, akkor $n + 19 = 5k + 20 = 5 \cdot (k + 4)$ nem lehet prímszám.

Ha $n = 5k + 2$, $k \in \mathbb{N}$, akkor $n + 13 = 5k + 15 = 5 \cdot (k + 3)$ nem lehet prímszám.

Ha $n = 5k + 3$, $k \in \mathbb{N}$, akkor $n + 7 = 5k + 10 = 5 \cdot (k + 2)$ nem lehet prímszám.

Ha $n = 5k + 4$, $k \in \mathbb{N}$, akkor $n + 1 = 5k + 5 = 5 \cdot (k + 1)$ pontosan akkor lesz prímszám, ha $k + 1 = 1$, vagyis ha $n = 4$. Ez az érték valóban teljesíti a feltételeket.

Ha $n = 5k$, $k \in \mathbb{N}$, akkor $n + 25 = 5k + 25 = 5 \cdot (k + 5)$ nem lehet prímszám.

Tehát az egyetlen megfelelő szám az $n = 4$.

30. Bizonyítsd be, hogy az $\frac{5n+3}{13n+8}$ tört irreducibilis, bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén.

Bizonyítás. Adott n esetén legyen $d = (5n+3, 13n+8)$. Ekkor $d \mid 5n+3$, $d \mid 13n+8$, tehát $d \mid [5 \cdot (13n+8) - 13 \cdot (5n+3)]$, innen pedig $d \mid 1$. Következik, hogy $d = 1$, vagyis bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $(5n+3, 13n+8) = 1$.

31. a) Igazold, hogy $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

b) Bizonyítsd be, hogy $\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{100} < \frac{19}{20}$.

Bizonyítás. a) $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{k+1}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$;

b)

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{100} &= \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{10 \cdot 10} < \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{9 \cdot 10} = \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}. \end{aligned}$$

32. Bizonyítsd be, hogy a $2^{17} + 2^5 - 1$, $2^{12} - 2^5 - 1$ és $2^{13} - 2^4 + 1$ számok összetett számok.

Bizonyítás

$2^{17} + 2^5 - 1 = (3-1)^{17} + (3-1)^5 - 1 = v_1 \cdot 3 - 1 + v_2 \cdot 3 - 1 - 1 = 3 \cdot (v_1 + v_2 - 1)$, ahol v_1, v_2 egész számok. Tehát $(2^{17} + 2^5 - 1) : 3$, így nem lehet prím.

$$\begin{aligned} 2^{12} - 2^5 - 1 &= (2^4)^3 - 2 \cdot 2^4 - 1 = (17-1)^3 - 2 \cdot (17-1) - 1 = \\ &= v_3 \cdot 17 - 1 - 2 \cdot 17 + 2 - 1 = 17 \cdot (v_3 - 2) : 17, \text{ ahol } v_3 \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^{13} - 2^4 + 1 &= 2 \cdot (2^4)^3 - 2^4 + 1 = 2 \cdot (17-1)^3 - (17-1) + 1 = \\ &= 2 \cdot (17v_4 - 1) - 17 + 2 = 17 \cdot (2v_4 - 1) : 17, \text{ ahol } v_4 \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

33. Bizonyítsd be, hogy a $2^{105} + 3^{105}$ szám osztható 5-tel, 35-tel, 275-tel és 2315-tel.

Az $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \dots - ab^{2n-1} + b^{2n})$ képlet alapján $(2^{105} + 3^{105}) : (2+3) = 5$. Ugyanezt a képletet használva, kapjuk, hogy

$$2^{105} + 3^{105} = ((2^3)^{35} + (3^3)^{35}) : (2^3 + 3^3) = 35,$$

illetve

$$2^{105} + 3^{105} = \left((2^5)^{21} + (3^5)^{21} \right) : (2^5 + 3^5) = 275,$$

és

$$2^{105} + 3^{105} = \left((2^7)^{15} + (3^7)^{15} \right) : (2^7 + 3^7) = 2315.$$

I.2.1. Gyakorlatok és feladatok (15. oldal)**1. Milyen racionális számok tizedes reprezentációi a következő számok?**

- a)** $0,(135)$; **b)** $1,23$; **c)** $-24,5$; **d)** $0,(3)$;
e) $2,(12)$; **f)** $-5,(234)$; **g)** $0,1(23)$; **h)** $-5,15(12)$;
i) $-0,4(31)$; **j)** $2,43(1)$.

Megoldás

- a)** $0,(135) = \frac{135}{999} = \frac{5}{37}$; **b)** $1,23 = 1\frac{23}{100} = \frac{123}{100}$; **c)** $-24,5 = -\frac{245}{10} = -\frac{49}{2}$;
d) $0,(3) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$; **e)** $2,(12) = 2\frac{12}{99} = 2\frac{4}{33} = \frac{70}{33}$;
f) $-5,(234) = -5\frac{234}{999} = -5\frac{26}{111} = -\frac{581}{111}$; **g)** $0,1(23) = \frac{123-1}{990} = \frac{61}{495}$;
h) $-5,15(12) = -5\frac{1512-15}{9900} = -5\frac{499}{3300} = -\frac{16999}{3300}$;
i) $-0,4(31) = -\frac{431-4}{990} = -\frac{427}{990}$; **j)** $2,43(1) = 2\frac{431-43}{900} = 2\frac{97}{225} = \frac{547}{225}$.

2. Írd végtelen tizedes szám alakjában a következő törtet:

- a)** -10 ; **b)** $\frac{7}{3}$; **c)** $\frac{3}{2}$; **d)** $-\frac{8}{5}$;
e) $-\frac{1}{6}$; **f)** $\frac{12}{13}$; **g)** $-\frac{13}{30}$; **h)** $\frac{11}{35}$.

Megoldás. **a)** $-10 = -9,(9) = -10,(0)$; **b)** $\frac{7}{3} = 2,(3)$;**c)** $\frac{3}{2} = 1,5(0) = 1,4(9)$; **d)** $-\frac{8}{5} = -1,6(0) = -1,5(9)$;**e)** $-\frac{1}{6} = -\frac{16-1}{90} = -0,1(6)$; **f)** $\frac{12}{13} = 0,(923076)$; **g)** $-\frac{13}{30} = -0,4(3)$;**h)** $\frac{11}{35} = 0,3(142857)$.**3. Határozd meg a következő számok századik tizedes jegyét:**

- a)** $3,12(21)$; **b)** $-2,75$; **c)** $2,(243)$; **d)** $\frac{4}{5}$;
e) $\frac{10}{3}$; **f)** $-\frac{23}{15}$; **g)** $-\frac{1}{47}$.

Megoldás. a) Könnyű belátni, hogy a tizedesvessző utáni számjegyek az első kettő kivételével periodikusan ismétlődnek. Mivel a periódus kettő, ezért a századik számjegy megegyezik a 98.-al, ez pedig a 96.-al, s folytatva a gondolatmenetet, kapjuk, hogy a századik számjegy egyenlő a negyedikkel, ami az 1-es.

Általánosan, az $N = c, a_1 a_2 \dots a_i (b_1 b_2 \dots b_j)$ alakú szám n -dik tizedes jegyét a következőképpen határozhatjuk meg:

- ha $0 < n \leq i$, akkor a keresett számjegy a_n lesz,
- ha $i < n$, akkor legyen m az $(n - i)$ -nek j -vel való osztási maradéka. Ha $m = 0$, akkor az n -dik számjegy a b_j , ha pedig $0 < m < j$, akkor a keresett számjegy az a_m .

b) A második tizedes után mind nullák állnak, így a századik számjegy a 0.

c) A századik számjegy a kettes. **d)** $\frac{4}{5} = 0,8 = 0,8(0)$, a századik tizedes jegy a 0.

e) $\frac{10}{3} = 3,(3)$, a századik tizedes jegy a 3. **f)** $-\frac{23}{15} = -1,5(3)$, a századik tizedes jegy a 3.

4. Hasonlítsd össze a következő számokat. Melyik szám a nagyobb?

a) $\frac{2}{3}$ és $\frac{6}{9}$; **b)** $-\frac{4}{5}$ és $\frac{5}{6}$; **c)** $-\frac{13}{5}$ és $-\frac{16}{7}$;

d) $\frac{15}{2}$ és 7,49; **e)** $\frac{14}{3}$ és 4,667; **f)** $-1,(17)$ és $-1,1(7)$;

g) $-4,123(4)$ és $-4,12(35)$; **h)** $\sqrt{2}$ és 1,(41); **i)** π és 3,1(4).

Megoldás. a) $\frac{2}{3} = \frac{4}{9} < \frac{6}{9}$; **b)** $-\frac{4}{5} < 0 < \frac{5}{6}$; **c)** $-\frac{13}{5} = -\frac{91}{35} < -\frac{90}{35} = -\frac{16}{7}$;

d) $\frac{15}{2} = 7,5 > 7,49$; **e)** $\frac{14}{3} = 4,(6) = 4,666\dots < 4,667$;

f) $1,(17) = 1,1717\dots < 1,1777\dots = 1,1(7) \Rightarrow -1,1(7) < -1,(17)$;

g) $4,123(4) = 4,123444\dots < 4,123535\dots = 4,12(35) \Rightarrow -4,12(35) < -4,123(4)$;

h) $\sqrt{2} > 1,4142\dots > 1,4141\dots = 1,(41)$; **i)** $\pi \approx 3,141 < 3,1444\dots = 3,1(4)$

5. Határozd meg a következő számok egészrészét, illetve a törtrészét:

a) $\frac{17}{2}$; **b)** $\frac{65}{6}$; **c)** $\frac{15}{28}$; **d)** 4,9(2);

e) $-3,125$; **f)** $-11,8(41)$; **g)** $-\frac{16}{5}$; **h)** $-\frac{512}{63}$.

Megoldás. a) $\frac{17}{2} = 8,5$, így egészrésze 8, törtrésze pedig 0,5;

b) $\frac{65}{6} = 10,8(3)$, egészrésze 10, törtrésze 0,8(3);

c) $\frac{15}{28} = 0,53(571428)$, egészrésze 0, törtrésze 0,53(571428);

d) $[4, 9(2)] = 4, \{4, 9(2)\} = 0, 9(2);$

e) $-3, 125 = -4 + 0, 875 \Rightarrow [-3, 125] = -4, \{-3, 125\} = 0, 875;$

f) $-11, 8(41) = -12 + 0, 1(58) \Rightarrow [-11, 8(41)] = -12, \{-11, 8(41)\} = 0, 1(58);$

g) $-\frac{16}{5} = -3, 2 = -4 + 0, 2, \left[-\frac{16}{5}\right] = -4, \left\{-\frac{16}{5}\right\} = 0, 2;$

h) $-\frac{512}{63} = -8, (126984),$ tehát $\left[-\frac{512}{63}\right] = -9,$ és $\left\{-\frac{512}{63}\right\} = 0, (873015).$

6. Határozd meg a következő irracionális számok 1, 2 illetve 4 tizedessel hiánnyal, majd többlettel való közelítéseit:

a) $\sqrt{2};$ **b)** $\sqrt{5};$ **c)** $\sqrt{13};$ **d)** $-\sqrt{17};$
e) $-\sqrt{85};$ **f)** $-\sqrt{2001}.$

Megoldás. a) $1, 4 < \sqrt{2} < 1, 5; 1, 41 < \sqrt{2} < 1, 42; 1, 4142 < \sqrt{2} < 1, 4143;$

b) $2, 2 < \sqrt{5} < 2, 3; 2, 23 < \sqrt{5} < 2, 24; 2, 2360 < \sqrt{5} < 2, 2361;$

c) $3, 6 < \sqrt{13} < 3, 7; 3, 60 < \sqrt{13} < 3, 61; 3, 6055 < \sqrt{13} < 3, 6056;$

d) $-4, 2 < -\sqrt{17} < -4, 1; -4, 13 < -\sqrt{17} < -4, 12; -4, 1232 < -\sqrt{17} < -4, 1231;$

e) $-9, 3 < -\sqrt{85} < -9, 2; -9, 22 < -\sqrt{85} < -9, 21; -9, 2196 < -\sqrt{85} < -9, 2195;$

f) $-44, 8 < -\sqrt{2001} < -44, 7; -44, 74 < -\sqrt{2001} < -44, 73;$

$-44, 7326 < -\sqrt{2001} < -44, 7325$

7. Határozd meg az $x + y$, illetve az $x \cdot y$ számok három tizedessel hiánnyal, majd többlettel való közelítéseit, ha

a) $x = \sqrt{2}$ és $y = \sqrt{7};$ **b)** $x = 2, 41321...$ és $y = 5, 12347;$
c) $x = 3, (12)$ és $y = \sqrt{10};$ **d)** $x = -4, 71654...$ és $y = -8, 1(4).$

Megoldás. a) $4, 059 < \sqrt{2} + \sqrt{7} < 4, 06$ és $3, 741 < \sqrt{2} \cdot \sqrt{7} < 3, 742;$

b) $7, 536 < x + y < 7, 537$ és $12, 364 < x \cdot y < 12, 365;$

c) $6, 283 < x + y < 6, 284$ és $9, 870 < x \cdot y < 9, 871;$

d) $-12, 861 < x + y < -12, 860$ és $38, 413 < x \cdot y < 38, 414.$

8. Bizonyítsd be, hogy a következő számok irracionálisak:

a) $\sqrt{3};$ **b)** $\sqrt{5};$ **c)** $\sqrt{n}$, ha n nem teljes négyzet;
d) $\sqrt{2} + \sqrt{3};$ **e)** $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}.$

Bizonyítás. Az **a)** és **b)** alpontok a **c)** sajátos esetei, amikor $n \in \{3, 5\}.$

c) Tegyük fel, hogy létezik olyan nem teljes négyzet n szám, amelyre $\sqrt{n}$ racionális. Ekkor léteznek az a, b egész számok úgy, hogy $\sqrt{n} = \frac{a}{b}$ és $b \neq 0.$

Négyzetre emelve, majd b^2 -el átszorozva ez utóbbi egyenlőség mindkét oldalát, kapjuk, hogy $a^2 = n \cdot b^2$, tehát $a^2 : b^2$, ami egyenértékű azzal, hogy $a : b$. Így létezik egy k egész szám, amelyre $a = k \cdot b$. Visszahelyettesítve,

$$n = \frac{a^2}{b^2} = \frac{(kb)^2}{b^2} = \frac{k^2 b^2}{b^2} = k^2, \text{ ami ellentmond annak, hogy } n \text{ nem teljes négyzet.}$$

Következik, hogy $\sqrt{n}$ pontosan akkor racionális, ha n teljes négyzet, és ebben az esetben $\sqrt{n}$ is egész szám.

d) Tegyük fel, hogy $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Ekkor

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = \frac{a^2}{b^2}, \quad 5 + 2\sqrt{6} = \frac{a^2}{b^2}, \quad \sqrt{6} = \frac{a^2 - 5b^2}{2b^2}, \quad \text{és mivel } a^2 - 5b^2, 2b^2 \text{ egészek,}$$

ez azt jelenti, hogy $\sqrt{6}$ racionális, ami ellentmond a **c)** pontban szereplő állításnak. Tehát $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ irracionális.

Más megoldás. Könnyű belátni, hogy egy nullától különböző szám pontosan akkor racionális, ha inverze is az. Mivel $(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 3 - 2 = 1$, ezért $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ és $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ egymás inverzei. Így, feltételezve, hogy $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ racionális, következik, hogy $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ is az. Két racionális szám összege is az, tehát $(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 2\sqrt{3}$ is racionális kell legyen, ez pedig szintén ellentmond a **c)** alpontnak.

e) Feltételezzük, hogy $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} = \frac{a}{b}$, ahol a, b egészek, $b \neq 0$. Ekkor

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = \frac{a}{b} - \sqrt{5} \quad \text{és} \quad 5 + 2\sqrt{6} = \frac{a^2}{b^2} - 2\sqrt{5} \frac{a}{b} + 5, \quad \text{tehát}$$

$$24b^4 = a^4 + 20a^2b^2 - 4\sqrt{5}a^3b \Leftrightarrow \sqrt{5} = \frac{a^4 + 20a^2b^2 - 24b^4}{4a^3b},$$

vagyis $\sqrt{5}$ racionális, ami ellentmondás.

9. Bizonyítsd be, hogy ha $(m, n) = 1$, akkor az $\frac{1}{n}$ és $\frac{m}{n}$ számok tizedes ábrázolásában a szakasz hossza ugyanaz.

Bizonyítás. A 2.4. tétel g) alpontja alapján a legkisebb szakasz hossza csak az irreducibilis alakban írt tört nevezőjétől függ, tehát $\frac{1}{n}$ és $\frac{m}{n}$ tizedes reprezentációjában ugyanakkora a szakasz hossza.

10. Ha $m, n \in \mathbb{N}^*$ $(m, n) = 1$ és $(n, 9) = 1$, akkor $\frac{m}{n}$ felírható olyan tizedes tört formájában, amelynek a szakasza egy 9-cel osztható szám.

Bizonyítás. Ha $a, b, c \in \mathbb{N}$, akkor az $x = a, b(c)$ tizedes szám átalakítása során az

$$x = a + \frac{b(10^k - 1) + c}{99 \dots 9 \underbrace{00 \dots 0}_k} \quad (*)$$

törtet kapjuk. Ha ez ekvivalens egy $\frac{m}{n}$ irreducibilis törttel, amelyben $(n, 9) = 1$, akkor a (*) tört egyszerűsíthető 9-cel, tehát $c : 9$.

11. Bizonyítsd be, hogy $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}$ vegyes szakaszos tizedes tört, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

Bizonyítás. $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} = \frac{3n^2 + 6n + 2}{n(n+1)(n+2)}$. A tört nevezője osztható 3-mal és a számlálója nem, tehát a tört tizedes reprezentációja szakaszt is tartalmaz (2.4. tétel a) alpontja). Másrészt a számláló páratlan n esetén páratlan, páros n esetén nem osztható 4-gyel, míg a tört nevezője az első esetben páros és a második esetben osztható 4-gyel. Így a tört nevezője egyszerűsítés után mindig páros lesz, tehát a tört tizedes ábrázolása vegyes szakaszos tört (2.4. tétel c) alpont).

12. Bizonyítsd be, hogy $\frac{n^2 + 1}{n(n^2 - 1)}$ vegyes szakaszos tizedes tört, bármely $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ esetén.

Bizonyítás. Az $\frac{n^2 + 1}{n(n^2 - 1)}$ tört számlálója nem osztható 3-mal és a nevezője osztható, tehát irreducibilis alakban a nevezőnek van 2-től és 5-től különböző osztója. Ugyanakkor páros n esetén a nevező páros és a számláló páratlan, míg páratlan n esetén a nevező osztható 8-cal és a számláló nem osztható 4-gyel, tehát az irreducibilis alakra hozott tört nevezője páros. Így a 2.4. tétel c) alpontja szerint a tört tizedes reprezentációja vegyes szakaszos.

13. Bizonyítsd be, hogy két tiszta szakaszos tizedes tört szorzata is tiszta szakaszos tizedes tört.

Bizonyítás. Ha az $\frac{a}{b}$ és $\frac{c}{d}$ irreducibilis törtek tizedes reprezentációja tiszta szakaszos, akkor $(b, 10) = 1$ és $(d, 10) = 1$, tehát $(b \cdot d, 10) = 1$. Ebből következik, hogy $b \cdot d$ minden osztója is relatív prím 10-zel, tehát az $\frac{ac}{bd}$ tört tizedes reprezentációja is tiszta szakaszos.

14. Ha az x és y valós számoknak ismerjük az n jegű hiánnyal illetve többlettel való közelítését, akkor milyen közelítést adhatunk a következő kifejezésekre:

a) $x + y$; b) $x - y$; c) $x \cdot y$; d) $x^2 + y^2$?

Megoldás. Feltételezhetjük, hogy $x, y > 0$, mert a többi eset erre visszavezethető.

Az $a < x < a + \frac{1}{10^n}$ és $b < y < b + \frac{1}{10^n}$ egyenlőtlenségek alapján írhatjuk, hogy:

$$\begin{aligned} a + b &< x + y < a + b + \frac{2}{10^n} < a + b + \frac{1}{10^{n-1}}, \\ a - b - \frac{1}{10^n} &< x - y < a - b + \frac{1}{10^n} < a - b - \frac{1}{10^n} + \frac{2}{10^{n-1}}, \\ ab &< xy < ab + \frac{a+b}{10^n} + \frac{1}{10^{2n}}, \text{ és} \\ a^2 + b^2 &< x^2 + y^2 < a^2 + b^2 + \frac{2(a+b)}{10^n} + \frac{2}{10^{2n}}. \end{aligned}$$

Ez alapján látható, hogy az összeadás és a kivonás esetén csak a legutolsó számjegy veszhet el (tehát az eredmény $n-1$ tizedesjegye pontos), míg a szorzás és négyzetösszeg kiszámítása során több számjegyet is veszíthetünk a számok nagyságrendjétől függően.

I.6. Gyakorlatok és feladatok (21. oldal)

1. Számítsd ki:

$$\begin{array}{llllll} \text{a)} \left(\frac{1}{3}\right)^2; & \text{b)} \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}; & \text{c)} \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}; & \text{d)} (-\sqrt{3})^2; & \text{e)} (\sqrt[3]{3})^{27}; \\ \text{f)} (\sqrt[3]{-3})^9; & \text{g)} (-\sqrt{5})^3; & \text{h)} \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}; & \text{i)} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-2}; & \text{j)} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^{-3}; \\ \text{k)} \left(\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}\right)^{-2}. \end{array}$$

Megoldás. a) $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1^2}{3^2} = \frac{1}{9}$; b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$; c) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$; d) $(-\sqrt{3})^2 = 3$;

e) $(\sqrt[3]{3})^{27} = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^{27} = 3^{\frac{27}{3}} = 3^9$; f) $(\sqrt[3]{-3})^9 = (-3)^{\frac{9}{3}} = (-3)^3 = -27$;

g) $(-\sqrt{5})^3 = [(-1) \cdot \sqrt{5}]^3 = (-1)^3 \cdot (\sqrt{5})^3 = -5\sqrt{5}$; h) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = (3^{-1})^{-1} = 3$;

i) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-2} = \left((\sqrt{2})^{-1}\right)^{-2} = \left(2^{-\frac{1}{2}}\right)^{-2} = 2$; j) $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^{-3} = \left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^{-3} = 3$;

k) $\left(\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}\right)^{-2} = \left(\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3 - 2}\right)^{-2} = \frac{1}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2} = \frac{1}{5 - 2\sqrt{6}} = 5 + 2\sqrt{6}$.

2. Írd egyszerűbb alakba a következő számokat:

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{2}$; b) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[6]{a}$, ahol $a > 0$; c) $\sqrt{\sqrt[3]{3}} (\sqrt[4]{3})^2$;
d) $\sqrt{175}$; e) $\sqrt[5]{-96}$; f) $\sqrt[3]{\frac{x^6 y}{z^9}}$.

Megoldás. a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{2} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = 2^1 = 2$;

b) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[6]{a} = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = a^1 = a$;

c) $\sqrt{\sqrt[3]{3}} (\sqrt[4]{3})^2 = \sqrt[2]{\sqrt[3]{3}} \cdot 3^{\frac{2}{4}} = \sqrt[2]{3^{\frac{1}{3}}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{6} + \frac{1}{2}} = 3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9}$;

d) $\sqrt{175} = \sqrt{7 \cdot 5^2} = \sqrt{7} \cdot \sqrt{5^2} = 5\sqrt{7}$;

e) $\sqrt[5]{-96} = \sqrt[5]{(-32) \cdot 3} = \sqrt[5]{(-2)^5} \cdot \sqrt[5]{3} = -2\sqrt[5]{3}$;

f) $\sqrt[3]{\frac{x^6 y}{z^9}} = \sqrt[3]{\frac{x^{2 \cdot 3}}{z^{3 \cdot 3}}} \cdot y = \sqrt[3]{\left(\frac{x^2}{z^3}\right)^3} \cdot y = \frac{x^2}{z^3} \sqrt[3]{y}$.

3. Hozd egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:

a) $\sqrt{300} - \sqrt{45} + 3\sqrt{27} + 2\sqrt{20} - \sqrt{64}$; b) $\sqrt[3]{64a^4} + 3\sqrt[3]{27a} - \frac{4}{a}\sqrt[3]{8a^7}$;

c) $3\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{3}$; d) $\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{25}$; e) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{192} : 3\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$; f) $\sqrt[3]{\frac{1}{25}x^5y^7} : \sqrt{5x^5y^3}$.

Megoldás. a) $\sqrt{300} - \sqrt{45} + 3\sqrt{27} + 2\sqrt{20} - \sqrt{64} =$
 $= 10\sqrt{3} - 3\sqrt{5} + 9\sqrt{3} + 4\sqrt{5} - 8 = 19\sqrt{3} + \sqrt{5} - 8;$

b) $\sqrt[3]{64a^4} + 3\sqrt[3]{27a} - \frac{4}{a}\sqrt[3]{8a^7} = 4a\sqrt[3]{a} + 9\sqrt[3]{a} - \frac{4}{a}2a^2\sqrt[3]{a} =$
 $= (4a + 9)\sqrt[3]{a} - 8a\sqrt[3]{a} = (9 - 4a)\sqrt[3]{a};$

c) $3\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{3} = 3\sqrt[3]{9 \cdot 3} = 3\sqrt[3]{27} = 3 \cdot 3 = 9;$

d) $\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{25} = 5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{2}{3}} = 5^{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}} = 5^{\frac{7}{6}} = 5\sqrt[6]{5};$

e) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{192} : 3\sqrt[3]{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \cdot 4\sqrt[3]{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = 2 \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} = 6^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{6^2};$

f) $\sqrt[3]{\frac{1}{25}x^5y^7} : \sqrt{5x^5y^3} = 5^{-\frac{2}{3}}xy^2\sqrt[3]{x^2y} \cdot \left(5^{\frac{1}{2}} \cdot x^2y\sqrt{xy}\right)^{-1} =$
 $= 5^{-\frac{2}{3}}xy^2x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{-\frac{1}{2}} \cdot x^{-2}y^{-1}x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}} = 5^{-\frac{7}{6}}x^{-\frac{5}{6}}y^{\frac{5}{6}}.$

4. Számítsd ki:

a) $\sqrt[5]{0,00001}$; b) $\sqrt[3]{0,001} \cdot \sqrt[4]{625} \cdot \sqrt[11]{2048}$; c) $\frac{\sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[5]{32} \cdot \sqrt[6]{64}}{\sqrt{81} \cdot \sqrt[3]{125}};$

d) $\left(\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{32}}\right)^2 : \frac{1}{4\sqrt[4]{2}}.$

Megoldás. a) $\sqrt[5]{0,00001} = \sqrt[5]{\frac{1}{10^5}} = \sqrt[5]{\left(\frac{1}{10}\right)^5} = \frac{1}{10} = 0,1;$

b) $\sqrt[3]{0,001} \cdot \sqrt[4]{625} \cdot \sqrt[11]{2048} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{10}\right)^3} \cdot \sqrt[4]{5^4} \cdot \sqrt[11]{2^{11}} = \frac{5 \cdot 2}{10} = 1;$

c) $\frac{\sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[5]{32} \cdot \sqrt[6]{64}}{\sqrt{81} \cdot \sqrt[3]{125}} = \frac{\sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[5]{2^5} \cdot \sqrt[6]{2^6}}{\sqrt{9^2} \cdot \sqrt[3]{5^3}} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 2}{9 \cdot 5} = \frac{4}{15};$

d) $\left(\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{32}}\right)^2 : \frac{1}{4\sqrt[4]{2}} = \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{32}} \cdot 4\sqrt[4]{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4(\sqrt[4]{2})^2} \cdot 4\sqrt[4]{2} = \frac{1}{2\sqrt[4]{2}}.$

5. Írd egyszerűbb alakba:

a) $\sqrt{3 + \sqrt{2}}$; b) $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$; c) $\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$; d) $\sqrt[4]{17 - 12\sqrt{2}}$; e) $\sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}}.$

Megoldás. a) A megoldás során vagy az összetett gyökök képletét használjuk, vagy a külső gyök alatti kifejezést teljes négyzetté alakítjuk. Az első módszerrel

$$\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{3^2 - 8}}{2}} + \sqrt{\frac{3 - \sqrt{3^2 - 8}}{2}} = \sqrt{2} + 1,$$

a második módszerrel

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{2+2\sqrt{2}+1} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} = |\sqrt{2}+1| = \sqrt{2}+1;$$

$$\text{b) } \sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{5+1}{2}} + \sqrt{\frac{5-1}{2}} = \sqrt{3} + \sqrt{2};$$

$$\text{c) } \sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2} = |\sqrt{3}-\sqrt{2}| = \sqrt{3}-\sqrt{2};$$

$$\text{d) } \sqrt[4]{17-12\sqrt{2}} = \sqrt[4]{(3-2\sqrt{2})^2} = \sqrt[4]{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1;$$

e) Mivel a köbgyökökben belül gyökjel alatt csak a hármas szám szerepel, ezért várhatóan a keresett egyszerűbb alak $a+b\sqrt{3}$ lesz. Meg kell határozni az a, b

(lehetőleg racionális) számokat úgy, hogy teljesüljön az $\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}} = a+b\sqrt{3}$ egyenlőség. Köbre emelve mindkét oldalt, kapjuk, hogy $26-15\sqrt{3} = a^3 + 9ab^2 + (3a^2b + 3b^3)\sqrt{3}$. Ha a, b racionálisak, akkor ez azt jelenti,

$$\text{hogy } \begin{cases} 26 = a^3 + 9ab^2 \\ -15 = 3a^2b + 3b^3 \end{cases}. \text{ Az egyenletrendszernek egy megoldása } (a, b) = (2, -1).$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy valóban teljesül a $\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$ egyenlőség.

6. Írd egyszerűbb alakba:

$$\text{a) } (\sqrt[5]{7})^{10} : 49; \quad \text{b) } (\sqrt[4]{3})^{10} : \sqrt{3}; \quad \text{c) } (\sqrt[7]{\sqrt{50} + \sqrt{18}})^3; \quad \text{d) } (\sqrt[3]{\sqrt{48} - \sqrt{3}})^{-2}.$$

$$\text{Megoldás. a) } (\sqrt[5]{7})^{10} : 49 = 7^{\frac{10}{5}} : 49 = 7^2 : 49 = 1;$$

$$\text{b) } (\sqrt[4]{3})^{10} : \sqrt{3} = 3^{\frac{10}{4}} : \sqrt{3} = 3^{\frac{5}{2}} : \sqrt{3} = 9\sqrt{3} : \sqrt{3} = 9;$$

$$\text{c) } (\sqrt[7]{\sqrt{50} + \sqrt{18}})^3 = (\sqrt[7]{5\sqrt{2} + 3\sqrt{2}})^3 = (\sqrt[7]{8\sqrt{2}})^3 = \left(\sqrt[7]{2^{\frac{7}{2}}}\right)^3 = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 2\sqrt{2};$$

$$\text{d) } (\sqrt[3]{\sqrt{48} - \sqrt{3}})^{-2} = \frac{1}{(\sqrt[3]{4\sqrt{3} - \sqrt{3}})^2} = \frac{1}{(\sqrt[3]{3\sqrt{3}})^2} = \frac{1}{(\sqrt[3]{\sqrt{3^3}})^2} = \frac{1}{\sqrt[6]{3^6}} = \frac{1}{3}.$$

7. Hozd egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:

$$\text{a) } (x\sqrt[3]{y^2x})^3; \quad \text{b) } \left(\frac{1}{x}\sqrt[3]{y^2x}\right)^2; \quad \text{c) } (-x\sqrt[3]{xy^2})^2;$$

$$\text{d) } \left(3xy^2\sqrt[3]{\frac{8}{x^2y^4}}\right)^{12}; \quad \text{e) } \left(\frac{x+y}{y} : \sqrt[4]{\frac{(x+y)^3}{y^{-1}}}\right)^4.$$

$$\text{Megoldás. a) } (x\sqrt[3]{y^2x})^3 = x^3 \cdot y^2 \cdot x = x^4 \cdot y^2;$$

$$\text{b) } \left(\frac{1}{x}\sqrt[3]{y^2x}\right)^2 = \frac{1}{x^2} \cdot \sqrt[3]{y^4x^2} = y^{\frac{4}{3}}x^{-\frac{4}{3}};$$

$$\text{c) } (-x\sqrt[3]{xy^2})^2 = x^2\sqrt[3]{x^2y^4} = x^2y\sqrt[3]{x^2y} = (x^2y)^{\frac{4}{3}};$$

$$\text{d)} \left(3xy^2 \sqrt[3]{\frac{8}{x^2y^4}} \right)^{12} = 3^{12} x^{12} y^{24} \left(\frac{8}{x^2y^4} \right)^4 = \frac{3^{12} \cdot 2^{12} \cdot x^{12} \cdot y^{24}}{x^8 \cdot y^{16}} = 6^{12} x^4 y^8;$$

$$\text{e)} \left(\frac{x+y}{y} : \sqrt[4]{\frac{(x+y)^3}{y^{-1}}} \right)^4 = \frac{(x+y)^4}{y^4} \cdot \frac{y^{-1}}{(x+y)^3} = \frac{x+y}{y^5}, \text{ ha } y(x+y) > 0.$$

8. Számítsd ki:

$$\text{a)} \left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{2}} \right)^2; \quad \text{b)} \left(\sqrt[3]{a+\sqrt{b}} + \sqrt[3]{a-\sqrt{b}} \right)^3.$$

$$\text{Megoldás. a)} \left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{2}} \right)^2 = 2 + \sqrt{2} + 2\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{2}} + 2 - \sqrt{2} = \\ = 4 + 2\sqrt{4-2} = 4 + 2\sqrt{2};$$

$$\text{b)} \left(\sqrt[3]{a+\sqrt{b}} + \sqrt[3]{a-\sqrt{b}} \right)^3 = \\ = a + \sqrt{b} + 3\sqrt[3]{(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})} \cdot \left(\sqrt[3]{a+\sqrt{b}} + \sqrt[3]{a-\sqrt{b}} \right) + a - \sqrt{b} = \\ = 2a + 3\sqrt[3]{a^2-b} \cdot \left(\sqrt[3]{a+\sqrt{b}} + \sqrt[3]{a-\sqrt{b}} \right).$$

9. Bizonyítsd be a következő egyenlőségeket:

$$\text{a)} \sqrt{3(2-\sqrt{5})^2} = \sqrt{15} - 2\sqrt{3}; \quad \text{b)} \sqrt{10+\sqrt{40}-\sqrt{24}+\sqrt{60}} = \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{5};$$

$$\text{c)} \sqrt{3+\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{2}}; \quad \text{d)} \sqrt[3]{26-15\sqrt{3}} + \sqrt[3]{26+15\sqrt{3}} = 4.$$

Megoldás. a)

$$\sqrt{3(2-\sqrt{5})^2} = \sqrt{3(9-4\sqrt{5})} = \sqrt{27-12\sqrt{5}} = \sqrt{15+12-4\sqrt{45}} = \\ = \sqrt{(\sqrt{15}-2\sqrt{3})^2} = |\sqrt{15}-2\sqrt{3}| = \sqrt{15}-2\sqrt{3}, \text{ vagy}$$

$$\sqrt{3(2-\sqrt{5})^2} = \sqrt{3}\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = \sqrt{3}|2-\sqrt{5}| = \sqrt{3}(\sqrt{5}-2) = \sqrt{15}-2\sqrt{3}.$$

$$\text{b)} \sqrt{10+\sqrt{40}-\sqrt{24}+\sqrt{60}} = \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10 + 2\sqrt{10} - 2\sqrt{6} + 2\sqrt{15} = 2 + 3 + 5 - 2\sqrt{6} + 2\sqrt{10} - 2\sqrt{15},$$

ami nyilván igaz.

c) Mivel mindkét oldal pozitív, ezért a négyzetre emelés ekvivalens átalakítást jelent.

$$\sqrt{3+\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 3+\sqrt{5} = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{2} \Leftrightarrow 3+\sqrt{5} = 3+\sqrt{5};$$

d) Ha $\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}} + \sqrt[3]{26+15\sqrt{3}} = x$, akkor

$$x^3 = 26 - 15\sqrt{3} + 3\sqrt[3]{(26-15\sqrt{3})(26+15\sqrt{3})}x + 26 + 15\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x - 52 = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x^2+4x+13) = 0 \Leftrightarrow x = 4, \text{ mert } x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Tehát } \sqrt[3]{26-15\sqrt{3}} + \sqrt[3]{26+15\sqrt{3}} = 4.$$

10. Rendezd növekvő sorrendbe a következő számokat:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \sqrt{12} - \sqrt{6}; \sqrt{20} - \sqrt{12}; 3 - \sqrt{2}; & \text{b)} 0,1; \frac{\sqrt{3}}{4}; \frac{1}{2}; \sqrt{3} - \sqrt{2}; \\ \text{c)} 0,45; \frac{\sqrt{2}}{3}; \frac{19}{40}; \frac{\sqrt[3]{9}}{5}; & \text{d)} 0,75; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{15}{21}; \frac{\sqrt[4]{63}}{4}. \end{array}$$

Megoldás. a) Hasonlítsuk össze az első két számot. A $\sqrt{12} - \sqrt{6} > \sqrt{20} - \sqrt{12}$ egyenlőség a következőképpen alakítható:

$$\sqrt{12} - \sqrt{6} > \sqrt{20} - \sqrt{12} \Leftrightarrow 4\sqrt{3} < 2\sqrt{5} + \sqrt{6} \stackrel{(\cdot)^2}{\Leftrightarrow} 22 < 4\sqrt{30} \stackrel{(\cdot)^2}{\Leftrightarrow} 121 < 120.$$

Mivel az utolsó egyenlőtlenség nem igaz és ekvivalens átalakításokat végeztünk, az eredeti egyenlőtlenség sem volt igaz, tehát $\sqrt{12} - \sqrt{6} < \sqrt{20} - \sqrt{12}$. Hasonló módon a $\sqrt{12} - \sqrt{6} > 3 - \sqrt{2}$ egyenlőtlenség átrendezés és négyzetre emelés segítségével a következőképpen írható:

$$\sqrt{12} - \sqrt{6} > 3 - \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{12} + \sqrt{2} > 3 + \sqrt{6} \stackrel{(\cdot)^2}{\Leftrightarrow} 14 + 4\sqrt{6} > 15 + 6\sqrt{6}.$$

Mivel az utolsó egyenlőtlenség nem igaz, $\sqrt{12} - \sqrt{6} < 3 - \sqrt{2}$. Az eddigi két egyenlőtlenség alapján nem állapítható meg a sorrend, tehát a harmadik összehasonlítást is el kell végeznünk.

$$\sqrt{20} - \sqrt{12} < 3 - \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{20} + \sqrt{2} < 3 + \sqrt{12} \stackrel{(\cdot)^2}{\Leftrightarrow} 1 + 4\sqrt{10} < 6\sqrt{12}.$$

Másrészt $1 + 4\sqrt{10} < 1 + 4 \cdot 4 = 17 < 18$ és $18 < 12\sqrt{3} \Leftrightarrow 3 < 2\sqrt{3} \Leftrightarrow 9 < 12$, tehát $\sqrt{20} - \sqrt{12} < 3 - \sqrt{2}$.

b) A gyökök közelítő értékeit használjuk. $1,7 < \sqrt{3} < 1,74$, tehát $0,4 < \frac{\sqrt{3}}{4} < 0,5$.

$1,4 < \sqrt{2} < 1,42$, tehát $0,28 = 1,7 - 1,42 < \sqrt{3} - \sqrt{2} < 1,74 - 1,4 = 0,34$. Ezek alapján a sorrend a következő: $0,1 < \sqrt{3} - \sqrt{2} < \frac{\sqrt{3}}{4} < \frac{1}{2}$.

c) $0,45 = \frac{45}{100} = \frac{9}{20} = \frac{18}{40} < \frac{19}{40}$, tehát $0,45 < \frac{19}{40}$. Ugyanakkor

$$\frac{\sqrt[3]{9}}{5} = \frac{4\sqrt[3]{9}}{20} < \frac{9}{20} \Leftrightarrow 4 < \sqrt[3]{9^2} \Leftrightarrow 64 < 81, \quad \text{tehát} \quad \frac{\sqrt[3]{9}}{5} < 0,45 < \frac{19}{40}.$$

$$3 \cdot 0,45 = 1,35 < 1,4 < \sqrt{2}, \quad \text{tehát} \quad 0,45 < \frac{\sqrt{2}}{3}, \quad \text{és így a } \frac{\sqrt{2}}{3} \text{-at kell}$$

összehasonlítani a $\frac{19}{40}$ -nel. $\frac{\sqrt{2}}{3} < \frac{19}{40} \Leftrightarrow 40\sqrt{2} < 57 \Leftrightarrow 3200 < 3249$, tehát a

helyes sorrend a következő: $\frac{\sqrt[3]{9}}{5} < 0,45 < \frac{\sqrt{2}}{3} < \frac{19}{40}$.

d) $\frac{\sqrt[4]{63}}{4} < \frac{\sqrt[4]{64}}{4} = \frac{\sqrt{8}}{4} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{3}{4}$, tehát $\frac{\sqrt[4]{63}}{4} < \frac{\sqrt{2}}{2} < 0,75$. Másrészt

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{5}{7} \Leftrightarrow 7\sqrt{2} < 10 \Leftrightarrow 98 < 100 \quad \text{és} \quad \frac{5}{7} < \frac{3}{4} \Leftrightarrow 20 < 21, \quad \text{tehát}$$

$$\frac{\sqrt[4]{63}}{4} < \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{15}{21} < 0,75.$$

11. Bizonyítsd be, hogy a következő számok irracionálisak:

a) $\sqrt{10}$; b) $\sqrt[3]{3}$; c) $\sqrt[4]{2}$; d) $\sqrt[5]{7}$.

Megoldás. a) Tegyük fel, hogy $\sqrt{10}$ racionális. Ekkor léteznek az a, b relatív prím egész számok úgy, hogy $b \neq 0$ és $\sqrt{10} = \frac{a}{b}$. Innen kapjuk, hogy $a^2 = 10b^2$, tehát a^2

osztható kettővel, ami egyenértékű azzal, hogy a páros, vagyis $a = 2m$, ahol m egy egész szám. Visszahelyettesítve, $10b^2 = a^2 = 4m^2 \Rightarrow 5b^2 = 2m^2$, tehát $b^2 : 2 \Rightarrow b : 2$. Ez viszont azt jelenti, hogy mind a , mind b osztható kettővel, ez pedig ellentmond feltételezésünknek, miszerint $(a, b) = 1$. Következik, hogy $\sqrt{10}$ irracionális.

b) A bizonyítást az a) ponthoz hasonlóan végezzük. Feltételezzük, hogy $\sqrt[3]{3} = \frac{a}{b}$,

$$(a, b) = 1, a, b \in \mathbb{Z}. \text{ Így } a^3 = 3b^3 \Rightarrow a^3 : 3 \Rightarrow a : 3 \Rightarrow a = 3m, m \in \mathbb{Z}, \text{ innen}$$

$$3b^3 = a^3 = 27m^3 \Rightarrow b^3 = 9m^3 \Rightarrow b^3 : 3 \Rightarrow b : 3 \Rightarrow (a, b) : 3 \Rightarrow (a, b) \neq 1,$$

ellentmondás.

Hasonlóan igazoljuk a c) és d) alpontokat is.

12. Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy a $\sqrt[k]{n}$ szám racionális legyen, ha $k, n \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$?

Megoldás. Ha az n prímtényezős felbontásában van olyan p_0 prímszám, amelynek a kitevője legalább k , akkor p_0 kihozható a gyök alól, és $\sqrt[k]{n} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \frac{\sqrt[k]{n}}{p_0} \in \mathbb{Q}$, tehát

feltételezhetjük, hogy az n prímtényezős felbontásában nincs k -val egyenlő vagy annál nagyobb kitevő. Ha p az n legkisebb prímosztója, és $\sqrt[k]{n} = \frac{a}{b}$, ahol $a, b \in \mathbb{Z}$

és $(a, b) = 1$, akkor $a^k = n \cdot b^k$ és így $a^k : p$. Ez csak úgy lehetséges, ha $a : p$ viszont ebben az esetben $a^k = p^k \cdot a_1^k$ és $(a, b) = 1$ alapján $n : p^k$. Ez csak akkor lehetséges, ha n felbontásában nincs legkisebb prím, vagyis ha $n = 1$. Figyelembe véve, hogy a gyök alól csak a teljes k -adik hatványok emelhetők ki $\sqrt[k]{n}$ pontosan akkor racionális szám, ha n teljes k -adik hatványa egy természetes számnak.

13. Bizonyítsd be, hogy ha $a + b \cdot \sqrt[3]{2} + c \cdot \sqrt[3]{4} = 0$ és $a, b, c \in \mathbb{Q}$, akkor $a = b = c = 0$.

Megoldás. Az $a + b \cdot \sqrt[3]{2} + c \cdot \sqrt[3]{4} = 0$ egyenlőség mindkét oldalát megszorozva $\sqrt[3]{2} \cdot c$ -vel, kapjuk, hogy $ac\sqrt[3]{2} + bc\sqrt[3]{4} + 2c^2 = 0$. Az eredeti egyenlőségből kifejezve $c\sqrt[3]{4}$ -t és ez utóbbiba behelyettesítve, kapjuk, hogy $ac\sqrt[3]{2} - b(a + b\sqrt[3]{2}) + 2c^2 = 0$, vagyis $(2c^2 - ab) + \sqrt[3]{2}(ac - b^2) = 0$. Ha

$$2c^2 - ab \neq 0, \text{ akkor } \sqrt[3]{2} = -\frac{2c^2 - ab}{ac - b^2} \in \mathbb{Q}, \text{ ami ellentmondana annak, hogy } \sqrt[3]{2}$$

irracionális. Következik hogy $ac - b^2 = 0$, innen pedig $2c^2 - ab = 0$. Tehát a

következő egyenletrendszerhez jutottunk:
$$\begin{cases} 2c^2 - ab = 0 \\ ac - b^2 = 0 \end{cases}$$
. Az első egyenlet mindkét

oldalát megszorozva c -vel és felhasználva a második egyenletet, kapjuk, hogy $2c^3 = bac = bb^2 = b^3$. Ha $c \neq 0$, akkor $2 = \frac{b^3}{c^3}$, $\sqrt[3]{2} = \frac{b}{c} \in \mathbb{Q}$, így ellentmondáshoz jutottunk ($\sqrt[3]{2}$ irracionális). Tehát $c = 0$, innen pedig következik, hogy $b = 0$ és $a = 0$.

14. Bizonyítsd be, hogy az

$$S = \sqrt{26 + 6\sqrt{13 - 4\sqrt{8 + 2\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}}}} + \sqrt{26 - 6\sqrt{13 + 4\sqrt{8 - 2\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}}}}$$

szám racionális.

Megoldás. Belülről kifele haladva rendre egyszerűbb alakra hozzuk a gyököket:

$$\begin{aligned} \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} &= \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} = \sqrt{5} - 1, \\ \sqrt{8 + 2(\sqrt{5} - 1)} &= \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5} + 1)^2} = \sqrt{5} + 1, \\ \sqrt{13 - 4(\sqrt{5} + 1)} &= \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} = \sqrt{5} - 2, \\ \sqrt{26 + 6(\sqrt{5} - 2)} &= \sqrt{14 + 6\sqrt{5}} = \sqrt{(3 + \sqrt{5})^2} = 3 + \sqrt{5}, \text{ és} \\ \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} &= \sqrt{(\sqrt{5} + 1)^2} = \sqrt{5} + 1, \\ \sqrt{8 - 2(\sqrt{5} + 1)} &= \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} = \sqrt{5} - 1, \\ \sqrt{13 + 4(\sqrt{5} - 1)} &= \sqrt{9 + 4\sqrt{5}} = \sqrt{(2 + \sqrt{5})^2} = \sqrt{5} + 2, \\ \sqrt{26 - 6(\sqrt{5} + 2)} &= \sqrt{14 - 6\sqrt{5}} = \sqrt{(3 - \sqrt{5})^2} = 3 - \sqrt{5}. \end{aligned}$$

Tehát $S = 3 + \sqrt{5} + 3 - \sqrt{5} = 6$.

15. Bizonyítsd be, hogy

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2} - b\sqrt{2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2} - a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a + b},$$

ha a törtek mind értelmezettek.

Megoldás.

$$\begin{aligned} &\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2} - b\sqrt{2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2} - a\sqrt{2}} = \\ &= \frac{a(\sqrt{a^2 + b^2} + b\sqrt{2})}{a^2 + b^2 - 2b^2} + \frac{b(\sqrt{a^2 + b^2} + a\sqrt{2})}{a^2 + b^2 - 2a^2} = \frac{(a - b)\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 - b^2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{(a + b)}. \end{aligned}$$

16. Számítsd ki az $E(x) = \frac{\sqrt[4]{x+1} + \sqrt[4]{x-1}}{\sqrt[4]{x+1} - \sqrt[4]{x-1}}$, kifejezés értékét, ha $x = \frac{a^2 + b^2}{4ab} + \frac{ab}{a^2 + b^2}$.

Megoldás.
$$x = \frac{a^2 + b^2}{4ab} + \frac{ab}{a^2 + b^2} = \frac{a^4 + 6a^2b^2 + b^4}{4ab(a^2 + b^2)},$$
$$x + 1 = \frac{a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4}{4ab(a^2 + b^2)} = \frac{(a + b)^4}{4ab(a^2 + b^2)},$$
$$x - 1 = \frac{a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4}{4ab(a^2 + b^2)} = \frac{(a - b)^4}{4ab(a^2 + b^2)}.$$

Mivel x kifejezése szimmetrikus a, b -ben, feltételezhetjük, hogy $a \geq b$. Így $\sqrt[4]{x+1} = \frac{a+b}{\sqrt[4]{4ab(a^2+b^2)}}$ és $\sqrt[4]{x-1} = \frac{a-b}{\sqrt[4]{4ab(a^2+b^2)}}$, tehát $E(x) = \frac{a}{b}$.

17. Bizonyítsd be, hogy ha $0 < \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, akkor $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

Bizonyítás. $0 < \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad < bc$ és $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ pontosan akkor teljesül, ha $a(b+d) < b(a+c)$ és $d(a+c) < c(b+d)$. Az utóbbi két egyenlőtlenség ekvivalens az $ad < bc$ egyenlőtlenséggel, tehát a bizonyítás teljes.

18. Számítsd ki az $x = \sqrt[3]{0, \overline{99 \dots 9}}_{2001}$ szám első 2001 tizedesjegyét.

Megoldás. Mivel $0, \overline{99 \dots 9}_{2001} \in (0, 1)$ és minden $x \in (0, 1)$ esetén $1 > \sqrt[3]{x} \geq x$, következik, hogy $1 > \sqrt[3]{0, \overline{99 \dots 9}_{2001}} \geq 0, \overline{99 \dots 9}_{2001}$, tehát $\sqrt[3]{0, \overline{99 \dots 9}_{2001}}$ első 2001 tizedesjegye 9-es.

19. Van-e olyan a és b irracionális szám, amelyre $a + b$ és $a \cdot b$ racionális?

Megoldás. Ha $a + b = s \in \mathbb{Q}$ és $a \cdot b = p \in \mathbb{Q}$, akkor $a, b = \frac{-s \pm \sqrt{s^2 - 4p}}{2}$, tehát

ha úgy választjuk meg az s és p értékét, hogy $s^2 - 4p$ ne legyen teljes négyzet, akkor irracionális számokat kapunk. Ilyenek például az $a = 3 - \sqrt{2}$ és $b = 3 + \sqrt{2}$.

20. Határozd meg az $A = \{999 \cdot n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ halmaz legkisebb elemét, amely nem tartalmazza a 9-es számjegyet.

Megoldás. $999 \cdot n = n \cdot 1000 - n$. Ha n egy számjegyű akkor a kivonás elvégzése során az utolsó előtti számjegy 9-es. Ha az n két számjegyű, akkor hátulról a harmadik számjegy 9-es, tehát az n legalább háromjegyű kell legyen. Ebben az esetben az utolsó számjegy nem lehet 1 és az előtte álló számjegy nem lehet 0. Így a legkisebb n , amit érdemes kipróbálni a 112. Másrészt $112 \cdot 999 = 111888$, tehát az A halmaz legkisebb eleme 112.

1.7.2 Gyakorlatok és feladatok (25. oldal)**1. a)** Bizonyítsd be, hogy

$$(x-1)(x+1)(x^2+1) = x^4 - 1 \text{ és } (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1) = x^8 - 1.$$

b) Számítsd ki az $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1) \cdot \dots \cdot (x^{2^n}+1)$ szorzatot.**Megoldás. a)** $(x-1)(x+1)(x^2+1) = (x^2-1)(x^2+1) = x^4 - 1.$

$$\begin{aligned} (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1) &= (x^2-1)(x^2+1)(x^4+1) = \\ &= (x^4-1)(x^4+1) = x^8 - 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1) \dots (x^{2^n}+1) &= \\ &= (x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1) \dots (x^{2^n}+1) = \\ &= (x^4-1)(x^4+1)(x^8+1) \dots (x^{2^n}+1) = \dots = \\ &= (x^{2^{n-1}}-1)(x^{2^{n-1}}+1)(x^{2^n}+1) = (x^{2^n}-1)(x^{2^n}+1) = x^{2^{n+1}} - 1. \end{aligned}$$

2. Bizonyítsd be, hogy $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$ és

$$x^8 + x^4 + 1 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)(x^4 - x^2 + 1).$$

Bizonyítás

$$\begin{aligned} x^4 + x^2 + 1 &= x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1) \\ x^8 + x^4 + 1 &= x^8 + 2x^4 + 1 - x^4 = (x^4 + 1)^2 - x^4 = (x^4 - x^2 + 1)(x^4 + x^2 + 1) = \\ &= (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)(x^4 - x^2 + 1). \end{aligned}$$

3. Bizonyítsd be, hogy $(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = (x^2 + y^2)^2$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.**Bizonyítás**

$$(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 4x^2y^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)^2.$$

4. Bizonyítsd be, hogy ha a , b és c páronként különböző valós számok, akkor:

$$\frac{a^k}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^k}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^k}{(c-a)(c-b)} = \begin{cases} 0, & k = 1 \\ 1, & k = 2 \\ a + b + c, & k = 3 \\ \frac{1}{abc}, & k = -1 \end{cases}.$$

Bizonyítás. Mind a négy esetben elvégezzük a műveleteket.

$$\begin{aligned} & \frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-a)(b-c)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)} = \\ & = \frac{a(c-b) + b(a-c) + c(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 0, \text{ mert} \end{aligned}$$

$$a(c-b) + b(a-c) + c(b-a) = ac - ab + ba - bc + cb - ca = 0.$$

$$\begin{aligned} & \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} = \\ & = \frac{a^2(c-b) + b^2(a-c) + c^2(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 1, \text{ mert} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & a^2(c-b) + b^2(a-c) + c^2(b-a) = a^2c - a^2b + b^2a - b^2c + c^2b - c^2a = \\ & = a^2(c-b) + a(b^2 - c^2) - bc(b-c) = -(b-c)(a^2 - a(b+c) + bc) = \\ & = (a-b)(b-c)(c-a). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)} = \\ & = \frac{a^3(c-b) + b^3(a-c) + c^3(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = a + b + c, \text{ mert} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & a^3(c-b) + b^3(a-c) + c^3(b-a) = a^3(c-b) + a(b^3 - c^3) - bc(b^2 - c^2) = \\ & = (b-c)(a^3 - a(b^2 + bc + c^2) + bc(b+c)) = \\ & = -(b-c)(a(a^2 - b^2) + bc(b-a) + c^2(b-a)) = \\ & = -(a-b)(b-c)(a(a+b) - bc - c^2) = \\ & = (a-b)(b-c)(-a^2 + ac - ab + bc - ac + c^2) = \\ & = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a(a-b)(a-c)} + \frac{1}{b(b-a)(b-c)} + \frac{1}{c(c-a)(c-b)} = \\ & = \frac{bc(c-b) + ac(a-c) + ba(b-a)}{abc(a-b)(b-c)(c-a)} = \frac{1}{abc}, \text{ mert} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & bc(c-b) + ac(a-c) + ba(b-a) = bc^2 - b^2c + a^2c - c^2a + b^2a - a^2b = \\ & = (a-b)(b-c)(c-a). \end{aligned}$$

5. Bizonyítsd be, hogy ha a , b és c páronként különböző valós számok, akkor:

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c-a}{(b-c)(b-a)} + \frac{a-b}{(c-a)(c-b)} = \frac{2}{a-b} + \frac{2}{b-c} + \frac{2}{c-a}.$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} & \frac{b-c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c-a}{(b-c)(b-a)} + \frac{a-b}{(c-a)(c-b)} = \\ &= \frac{c-b}{(a-b)(c-a)} + \frac{a-c}{(b-c)(a-b)} + \frac{b-a}{(c-a)(b-c)} = \\ &= \frac{c-a+a-b}{(a-b)(c-a)} + \frac{a-b+b-c}{(b-c)(a-b)} + \frac{b-c+c-a}{(c-a)(b-c)} = \\ &= \frac{1}{a-b} + \frac{1}{c-a} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{a-b} + \frac{1}{c-a} + \frac{1}{b-c} = \frac{2}{a-b} + \frac{2}{b-c} + \frac{2}{c-a}. \end{aligned}$$

6. Bizonyítsd be, hogy ha $a+b+c=0$, akkor $a^3+b^3+c^3=3abc$.

Megoldás. A 7.2. tétel 15. alpontja szerint

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca),$$

tehát ha $a+b+c=0$, akkor $a^3+b^3+c^3=3abc$.

Más megoldás. Az $a+b+c=0$ feltételből $c=-a-b$. Ezt behelyettesítjük:

$$\begin{aligned} a^3+b^3+c^3-3abc &= a^3+b^3-(a+b)^3+3ab(a+b)= \\ &= a^3+b^3-a^3-3a^2b-3ab^2-b^3+3a^2b+3ab^2=0, \text{ tehát } a^3+b^3+c^3=3abc. \end{aligned}$$

7. Bizonyítsd be, hogy ha $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3$, akkor

$$(a+b+c)^{2001}=a^{2001}+b^{2001}+c^{2001}.$$

Bizonyítás. A 7.2. tétel 14. alpontja alapján csoportosítás segítségével belátható, hogy $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, tehát a feladatban megjelenő számokra $(a+b)(b+c)(c+a)=0$. Ha $a+b=0$, akkor $a^{2001}+b^{2001}+c^{2001}=a^{2001}+(-a)^{2001}+c^{2001}=c^{2001}$ és $(a+b+c)^{2001}=c^{2001}$, tehát $(a+b+c)^{2001}=a^{2001}+b^{2001}+c^{2001}$. Hasonlóan a másik két esetben is ugyanehhez az egyenlőséghez jutunk.

8. Bizonyítsd be, hogy ha $a^3+b^3+c^3=3abc$ és $a+b+c \neq 0$, akkor $a=b=c$.

Bizonyítás. A 7.2. tétel 15. alpontja szerint

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca),$$

tehát ha $a^3+b^3+c^3=3abc$ akkor $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$. Figyelembe véve az $a+b+c \neq 0$ feltételt, következik, hogy $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$. Beszorozva 2-vel és átcsoportosítva a tagokat, kapjuk, hogy $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$. Mivel három szám négyzetösszege csak akkor lehet nulla, ha a számok mind nullák, következik, hogy $a-b=b-c=c-a=0$, vagyis $a=b=c$.

9. Bizonyítsd be, hogy ha az a , b és c nullától különböző valós számok páronként különböznek és $a + b + c = 0$, akkor

$$\left(\frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} + \frac{a-b}{c} \right) \left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} \right) = 9.$$

Bizonyítás. Mindkét zárójelben elvégezzük a műveleteket.

$$\begin{aligned} \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} + \frac{a-b}{c} &= \frac{(b-c)bc + (c-a)ca + (a-b)ab}{abc} = \\ &= -\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc} \text{ és} \\ \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} &= -\frac{a(a-c)(a-b) + b(b-a)(b-c) + c(c-a)(c-b)}{(b-c)(c-a)(a-b)} = \\ &= -\frac{a^3 + b^3 + c^3 - a^2(b+c) - b^2(c+a) - c^2(a+b) + 3abc}{(b-c)(c-a)(a-b)}. \end{aligned}$$

Az $a + b + c = 0$ feltétel alapján $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ (lásd 6. feladat) és $a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) = -a^3 - b^3 - c^3 = -3abc$, tehát

$$\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = -\frac{9abc}{(b-c)(c-a)(a-b)},$$

$$\text{és így } \left(\frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} + \frac{a-b}{c} \right) \left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} \right) = 9.$$

I.8.2. Gyakorlatok (27. oldal)

1. Racionalizáld a következő törtek nevezőjét:

$$\text{a) } \frac{1}{\sqrt[5]{4}}; \quad \text{b) } \frac{1}{\sqrt[3]{4}}; \quad \text{c) } \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \text{d) } \frac{1}{\sqrt[3]{9}}; \quad \text{e) } \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}};$$

$$\text{f) } \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}; \quad \text{g) } \frac{1}{\sqrt{7}-1}; \quad \text{h) } \frac{1}{\sqrt{3}+2}; \quad \text{i) } \frac{1}{\sqrt[3]{3}-1}; \quad \text{j) } \frac{1}{\sqrt[3]{7}+2};$$

$$\text{k) } \frac{1}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1}; \quad \text{l) } \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{7}}; \quad \text{m) } \frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}.$$

Megoldás. a) $\frac{1}{\sqrt[5]{4}} = \frac{\sqrt[5]{4^4}}{\sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[5]{4^4}} = \frac{\sqrt[5]{4^4}}{4}$; b) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[3]{4^2}}{4}$; c) $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

d) $\frac{1}{\sqrt[3]{9}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3^2}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{3}$; e) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$;

f) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$; g) $\frac{1}{\sqrt{7}-1} = \frac{\sqrt{7}+1}{6}$; h) $\frac{1}{\sqrt{3}+2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4-3} = 2-\sqrt{3}$;

$$\textbf{i)} \frac{1}{\sqrt[3]{3}-1} = \frac{\sqrt[3]{3^2} + \sqrt[3]{3} + 1}{3-1} = \frac{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1}{2};$$

$$\textbf{j)} \frac{1}{\sqrt[3]{7}+2} = \frac{\sqrt[3]{7^2} - 2\sqrt[3]{7} + 2^2}{(\sqrt[3]{7}+2)(\sqrt[3]{7^2} - 2\sqrt[3]{7} + 2^2)} = \frac{\sqrt[3]{49} - 2\sqrt[3]{7} + 4}{(\sqrt[3]{7})^3 + 2^3} = \frac{\sqrt[3]{49} - 2\sqrt[3]{7} + 4}{15};$$

$$\textbf{k)} \frac{1}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1} = \frac{\sqrt[3]{3}+1}{3+1} = \frac{\sqrt[3]{3}+1}{4}; \quad \textbf{l)} \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{7}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 - (\sqrt{7})^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2\sqrt{6}-2} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{7})(2\sqrt{6}+2)}{24-4} = \frac{4\sqrt{2}+3\sqrt{3}+\sqrt{7}+\sqrt{42}}{10};$$

$$\textbf{m)} \frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}} = \frac{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}}{[(1+\sqrt{6})+(\sqrt{2}+\sqrt{3})][(1+\sqrt{6})-(\sqrt{2}+\sqrt{3})]} =$$

$$= \frac{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}}{[(1+\sqrt{6})+(\sqrt{2}+\sqrt{3})][(1+\sqrt{6})-(\sqrt{2}+\sqrt{3})]} = \frac{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}}{(1+\sqrt{6})^2 - (\sqrt{2}+\sqrt{3})^2} =$$

$$= \frac{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}}{(1+\sqrt{6})^2 - (\sqrt{2}+\sqrt{3})^2} = \frac{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}}{7+2\sqrt{6}-5-2\sqrt{6}} = \frac{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}.$$

2. Racionalizáld a következő törtek nevezőjét:

$$\textbf{a)} \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}, \text{ ahol } a, b, c \in \mathbb{Q}_+; \quad \textbf{b)} \frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}, \text{ ahol } a, b, c \in \mathbb{Q}_+;$$

$$\textbf{c)} \frac{1}{\sqrt[n]{4}-3\sqrt[n]{2}+2}; \quad \textbf{d)} \frac{1}{\sqrt[4]{27}+\sqrt[4]{9}+\sqrt[4]{3}+1}; \quad \textbf{e)} \frac{1}{\sqrt[n]{9}-5\sqrt[n]{3}+6}.$$

Megoldás. a)

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}}{a+b-c+2\sqrt{ab}} = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(a+b-c-2\sqrt{ab})}{(a+b-c)^2-4ab};$$

$$\textbf{b)} \frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}} = \frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{bc}-\sqrt[3]{ca}}{a+b+c-3\sqrt[3]{abc}} =$$

$$= \frac{S \cdot ((a+b+c)^2 + 3(a+b+c)\sqrt[3]{abc} + 9\sqrt[3]{a^2b^2c^2})}{(a+b+c)^3 - 27abc}, \text{ ahol}$$

$$S = \sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{c^2} - \sqrt[3]{ab} - \sqrt[3]{bc} - \sqrt[3]{ca}.$$

$$\textbf{c)} \frac{1}{\sqrt[n]{4}-3\sqrt[n]{2}+2} = \frac{1}{(\sqrt[n]{2}-1)(\sqrt[n]{2}-1)} = \frac{\sqrt[n]{2^{n-1}} + \sqrt[n]{2^{n-2}} + \sqrt[n]{2^{n-3}} + \dots + \sqrt[n]{2} + 1}{((\sqrt[n]{2})^n - 1^n)(\sqrt[n]{2} - 2)} =$$

$$= \frac{(\sqrt[n]{2^{n-1}} + \sqrt[n]{2^{n-2}} + \dots + \sqrt[n]{2} + 1)(\sqrt[n]{2^{n-1}} + 2\sqrt[n]{2^{n-2}} + \dots + 2^{n-2}\sqrt[n]{2} + 2^{n-1})}{2-2^n};$$

$$\text{d)} \frac{1}{\sqrt[4]{27} + \sqrt[4]{9} + \sqrt[4]{3} + 1} = \frac{\sqrt[4]{3} - 1}{(\sqrt[4]{3} - 1)(\sqrt[4]{3^3} + \sqrt[4]{3^2} + \sqrt[4]{3} + 1)} = \frac{\sqrt[4]{3} - 1}{3 - 1} = \frac{\sqrt[4]{3} - 1}{2};$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad \frac{1}{\sqrt[n]{9} - 5\sqrt[n]{3} + 6} &= \frac{1}{(\sqrt[n]{3} - 2)(\sqrt[n]{3} - 3)} = \frac{\sqrt[n]{3^{n-1}} + 2\sqrt[n]{3^{n-2}} + \dots + 2^{n-2}\sqrt[n]{3} + 2^{n-1}}{((\sqrt[n]{3})^n - 2^n)(\sqrt[n]{3} - 3)} = \\ &= \frac{(\sqrt[n]{3^{n-1}} + 2\sqrt[n]{3^{n-2}} + \dots + 2^{n-2}\sqrt[n]{3} + 2^{n-1})(\sqrt[n]{3^{n-1}} + 3\sqrt[n]{3^{n-2}} + \dots + 3^{n-2}\sqrt[n]{3} + 3^{n-1})}{(3 - 2^n)(3 - 3^n)}. \end{aligned}$$

9.1.2. Alkalmazások (28. oldal)

1. Ha $a, b, c \geq 0$, akkor $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$.

Bizonyítás. Mivel $a, b, c \geq 0$, felírhatjuk az (a, b) , (b, c) , (c, a) számpárookra a számtani-mértani középátlósok közti egyenlőtlenséget. $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, $b + c \geq 2\sqrt{bc}$, $c + a \geq 2\sqrt{ca}$. Ha az egyenlőtlenségek megfelelő oldalait összeszorozzuk, kapjuk, hogy

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 2 \cdot \sqrt{ab} \cdot 2 \cdot \sqrt{bc} \cdot 2 \cdot \sqrt{ca} = 8abc.$$

Egyenlőség abban az esetben áll fenn, ha $a = b = c$.

2. $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$, $\forall x, y > 0$.

Bizonyítás. Az $x, y > 0$ feltétel alapján $\frac{x}{y}$ és $\frac{y}{x}$ pozitívak, így írhatjuk, hogy

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}} = 2. \text{ Egyenlőség akkor áll fenn, ha } \frac{x}{y} = \frac{y}{x}, \text{ vagyis ha } x = y.$$

3. $(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9$, $\forall x, y, z > 0$.

Bizonyítás

$$\begin{aligned} (x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) &= 1 + \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + 1 + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y} + 1 = \\ &= 3 + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) \geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9. \end{aligned}$$

Felhasználtuk az előző feladatban szereplő egyenlőtlenséget. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $x = y = z$.

4. Ha $a, b > 0$ és $a + b = 1$, akkor $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$.

Bizonyítás. Az $x^2 + y^2 = \frac{x^2 + y^2 + x^2 + y^2}{2} \geq \frac{x^2 + y^2 + 2xy}{2} = \frac{1}{2}(x + y)^2$ és $\sqrt{xy} \leq \frac{x + y}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{xy}} \geq \frac{2}{x + y}$ egyenlőtlenségek figyelembe vételével írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} E &= \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b}\right)^2 = \frac{1}{2} \left(a + b + \frac{a + b}{ab}\right)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{ab}\right)^2 \geq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{a^2 + b^2}\right)^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{1 - 2ab}\right)^2 \geq \frac{1}{2} (1 + 4)^2 = \frac{25}{2}. \end{aligned}$$

5. Ha $a, b > 0$ és $a + b = 4$, akkor $a^2 + b^2 + \frac{32}{ab} \geq \frac{32}{\sqrt{ab}}$.

Bizonyítás. $a^2 + b^2 + \frac{32}{ab} = a^2 + \frac{16}{ab} + b^2 + \frac{16}{ab} \geq 2\sqrt{\frac{16a^2}{ab}} + 2\sqrt{\frac{16b^2}{ab}} =$
 $= 8 \cdot \left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right) = 8 \cdot \left(\frac{a + b}{\sqrt{ab}}\right) = 8 \cdot \frac{4}{\sqrt{ab}} = \frac{32}{\sqrt{ab}}.$

9.1.4. Alkalmazások (29. oldal)

Bizonyítsd be, hogy:

1. $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a};$
2. $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c$, ha $abc > 0$;
3. $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$;
4. $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$;
5. $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq ab + bc + cd + da$.

Bizonyítás. 1. Ha az $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ egyenlőtlenségben az $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{b}{c}$ és $z = \frac{c}{a}$ helyettesítést alkalmazzuk, a bizonyítandó egyenlőtlenséghez jutunk.

2. Ha a $abc > 0$, akkor $\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} = \left(\sqrt{\frac{bc}{a}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{ca}{b}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{ab}{c}}\right)^2 \geq$
 $\geq \sqrt{\frac{bc}{a} \cdot \frac{ca}{b}} + \sqrt{\frac{ca}{b} \cdot \frac{ab}{c}} + \sqrt{\frac{ab}{c} \cdot \frac{bc}{a}} \geq a + b + c.$

3. Ha a 9.1.3. paragrafusban bizonyított egyenlőtlenségbe a , b , c helyébe a^2 -et, b^2 -et illetve c^2 -et helyettesítünk, a bizonyítandó egyenlőtlenséghez jutunk.

4. Az előbbi egyenlőtlenség valamint a 9.1.3. paragrafus alapján

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 + c^4 &\geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = \\ &= (ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 \geq abbc + bcca + caab = abc(a + b + c). \end{aligned}$$

5. Az $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - d)^2 + (d - a)^2 \geq 0$ egyenlőtlenségből következik, hogy $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2d^2 - 2ab - 2bc - 2cd - 2da \geq 0$, tehát

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq ab + bc + cd + da.$$

9.1.8. Alkalmazások (30. oldal)

1. $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq 3$, ha $x, y, z > 0$.

Bizonyítás. Mivel az $\frac{x}{y}, \frac{y}{z}$ és $\frac{z}{x}$ számok pozitívak, alkalmazhatjuk rájuk a

számtani-mértani közepek közti egyenlőtlenséget: $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq 3\sqrt[3]{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \cdot \frac{z}{x}} = 3$.

2. $(a + 2b + c)(a + b + 2c)(2a + b + c) \geq 54abc$, ha $a, b, c \geq 0$.

Bizonyítás. Az $a + 2b + c$, $2a + b + c$ és $a + b + 2c$ összegekre alkalmazzuk külön-külön a számtani mértani közepek közti egyenlőtlenséget.

$$\begin{cases} 2a + b + c \geq 3\sqrt[3]{2abc} \\ a + 2b + c \geq 3\sqrt[3]{2abc} \Rightarrow (2a + b + c)(a + 2b + c)(a + b + 2c) \geq 3^3 \cdot \sqrt[3]{(2abc)^3} \\ a + b + 2c \geq 3\sqrt[3]{2abc} \end{cases}$$

3. $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \geq \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$, ha $x, y, z \geq 0$.

Bizonyítás. A négyzetes és számtani közép közti egyenlőtlenség alapján

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \geq \frac{1}{3} \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \right)^2 \geq \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}, \text{ az utolsó egyenlőtlenség az } \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq 3 \text{ -ból következik.}$$

4. Bizonyítsd be, hogy ha $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ és $x, y, z > 0$, akkor $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3\sqrt{3}$.

Bizonyítás. A harmonikus és négyzetes középátlalozók közti egyenlőtlenség alapján

$$\frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow 3\sqrt{3} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

5. Bizonyítsd be, hogy ha $a, b, c > 0$, akkor $\sqrt{\frac{a+b}{c}} + \sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} \geq 3\sqrt{2}$.

Bizonyítás. Alkalmazzuk a $\sqrt{\frac{a+b}{c}}, \sqrt{\frac{b+c}{a}}$ és $\sqrt{\frac{c+a}{b}}$ számokra a számtani-mértani közepek közti egyenlőtlenséget, majd a 9.1.2 alkalmazások közül az első.

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{a+b}{c}} + \sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} &\geq 3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{a+b}{c}} \cdot \sqrt{\frac{b+c}{a}} \cdot \sqrt{\frac{c+a}{b}}} \geq \\ &\geq 3\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}} \geq 3\sqrt[3]{8} = 3\sqrt{2}. \end{aligned}$$

9.2.2. Alkalmazások (31. oldal)

1. Bizonyítsd be az $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$ egyenlőtlenséget a Cauchy-Buniakovski egyenlőtlenség segítségével.

Bizonyítás. Alkalmazzuk a Cauchy-Buniakovski egyenlőtlenséget az (a, b, c) és $(x = b, y = c, z = a)$ számhármassokra. Így

$$(ab + bc + ca)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + a^2),$$

tehát négyzetgyökvonással a keresett egyenlőtlenséghez jutunk:

$$ab + bc + ca \leq |ab + bc + ca| \leq a^2 + b^2 + c^2.$$

2. $\sqrt{a(b+c)} + \sqrt{b(c+a)} + \sqrt{c(a+b)} \leq \sqrt{2}(a+b+c)$, ahol a, b és c pozitív.

Bizonyítás

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{a(b+c)} + \sqrt{b(c+a)} + \sqrt{c(a+b)}\right)^2 &= \left(\sqrt{a}\sqrt{b+c} + \sqrt{b}\sqrt{c+a} + \sqrt{c}\sqrt{a+b}\right)^2 \leq \\ &\leq \left((\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 + (\sqrt{c})^2\right)\left((\sqrt{b+c})^2 + (\sqrt{c+a})^2 + (\sqrt{a+b})^2\right) = 2(a+b+c)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sqrt{a(b+c)} + \sqrt{b(c+a)} + \sqrt{c(a+b)} \leq \sqrt{2}(a+b+c). \end{aligned}$$

3. $(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9$, ha $x, y, z > 0$.

Bizonyítás

$$\begin{aligned} (x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) &= \left((\sqrt{x})^2 + (y)^2 + (\sqrt{z})^2\right)\left(\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + \left(\frac{1}{y}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right)^2\right) \geq \\ &\geq \left(\sqrt{x} \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{y} \frac{1}{\sqrt{y}} + \sqrt{z} \frac{1}{\sqrt{z}}\right)^2 = 3^2 = 9. \end{aligned}$$

4. Határozd meg az $a - 2b + 3c$ kifejezés minimumát és maximumát, ha $a^2 + b^2 + 2c^2 = 1$ és $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Megoldás

$$\begin{aligned}(a - 2b + 3c)^2 &= \left(1 \cdot a - 2b + \frac{3}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}c)\right)^2 \leq \left(1^2 + (-2)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2\right)(a^2 + b^2 + 2c^2) = \\ &= \left(1 + 4 + \frac{9}{2}\right) \cdot 1 = \frac{19}{2}.\end{aligned}$$

Tehát az $a - 2b + 3c$ kifejezés értéke mindig kisebb, mint $\sqrt{\frac{19}{2}}$ és nagyobb, mint $-\sqrt{\frac{19}{2}}$. Még ellenőrizni kell, hogy felveszi-e ezeket a szélsőértékeket. Ez akkor lehetséges, ha a Cauchy-Buniakovski egyenlőtlenségben egyenlőség van, vagyis ha $\frac{1}{a} = \frac{-2}{b} = \frac{3}{2c}$. Innen $b = -2a$, $c = \frac{3}{2}a$. Az $a^2 + b^2 + 2c^2 = 1$ egyenlőségből következik, hogy $a^2 + 4a^2 + \frac{9}{2}a^2 = 1$, ahonnan $a = \pm\sqrt{\frac{2}{19}}$. Tehát $a = \sqrt{\frac{2}{19}}$, $b = -2\sqrt{\frac{2}{19}}$, $c = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{19}}$ esetén megkapjuk az $a - 2b + 3c$ kifejezés maximális értékét, $\sqrt{\frac{19}{2}}$ -t, ha pedig $a = -\sqrt{\frac{2}{19}}$, $b = 2\sqrt{\frac{2}{19}}$, $c = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{19}}$, akkor $a - 2b + 3c$ értéke minimális, $-\sqrt{\frac{19}{2}}$.

5. Bizonyítsd be, hogy az ABC és $A'B'C'$ háromszögek pontosan akkor hasonlóak, ha $\sqrt{aa'} + \sqrt{bb'} + \sqrt{cc'} = 2\sqrt{pp'}$, ahol $p = \frac{a+b+c}{2}$ és $p' = \frac{a'+b'+c'}{2}$.

Bizonyítás. A Cauchy-Buniakovski egyenlőtlenség alapján

$$(\sqrt{aa'} + \sqrt{bb'} + \sqrt{cc'})^2 \leq (a+b+c)(a'+b'+c') = 4pp',$$

ahonnan $\sqrt{aa'} + \sqrt{bb'} + \sqrt{cc'} \leq 2\sqrt{pp'}$. Az egyenlőtlenségben pontosan akkor van egyenlőség, ha $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a'}} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b'}} = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c'}}$, vagyis $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$, ami egyenértékű azzal, hogy a két háromszög hasonló.

9.3.4 Alkalmazások (34. oldal)

1. $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c$, ahol $abc > 0$.

Bizonyítás. Mivel az egyenlőtlenség szimmetrikus, feltételezhetjük, hogy $a \geq b \geq c$. Ekkor fennáll a következő egyenlőtlenségsor is: $\sqrt{\frac{ab}{c}} \geq \sqrt{\frac{ac}{b}} \geq \sqrt{\frac{bc}{a}}$.

Ezekre a számokra felírva a rendezési tételt, kapjuk, hogy

$$\sqrt{\frac{ab}{c}} \sqrt{\frac{ab}{c}} + \sqrt{\frac{ac}{b}} \sqrt{\frac{ac}{b}} + \sqrt{\frac{bc}{a}} \sqrt{\frac{bc}{a}} \geq \sqrt{\frac{ab}{c}} \sqrt{\frac{ac}{b}} + \sqrt{\frac{ac}{b}} \sqrt{\frac{bc}{a}} + \sqrt{\frac{bc}{a}} \sqrt{\frac{ab}{c}},$$

ami éppen a bizonyítandó egyenlőtlenség.

2. $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq ab + bc + cd + de + ea$, ahol $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$.

Bizonyítás. Feltételezhetjük, hogy $a \geq b \geq c \geq d \geq e$, így a rendezési tételből következik, hogy $a \cdot a + b \cdot b + c \cdot c + d \cdot d + e \cdot e \geq a \cdot b + b \cdot c + c \cdot d + d \cdot e + e \cdot a$.

3. $3(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \geq 9abc$, ha $a, b, c > 0$.

Bizonyítás. Az egyenlőtlenségsor szimmetrikus volta miatt feltételezhetjük, hogy $a \geq b \geq c$, ekkor igazak az $a^2 \geq b^2 \geq c^2$ egyenlőtlenségek is. A rendezési elv alapján felírhatjuk a következő egyenlőtlenségeket:

$$\begin{cases} a \cdot a^2 + b \cdot b^2 + c \cdot c^2 \geq a \cdot b^2 + b \cdot c^2 + c \cdot a^2 \\ a \cdot a^2 + b \cdot b^2 + c \cdot c^2 \geq a \cdot c^2 + b \cdot a^2 + c \cdot b^2 \end{cases}$$

Ha összeadjuk az előbbi egyenlőtlenségek megfelelő oldalait és mindkét oldalhoz hozzáadunk $(a^3 + b^3 + c^3)$ -t, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 3(a^3 + b^3 + c^3) &\geq a^3 + b^3 + c^3 + ab^2 + ac^2 + ba^2 + bc^2 + ca^2 + cb^2 = \\ &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2). \end{aligned}$$

Másrészt az $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ és $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$ egyenlőtlenségek összeszorozásával a második egyenlőtlenséghez jutunk.

4. $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ca} + c^2\sqrt{ab}$, $a, b, c > 0$.

Bizonyítás. Az $a^2\sqrt{bc} \leq \frac{1}{2}a^2(b + c)$ egyenlőtlenség alapján írhatjuk, hogy

$$a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ac} + c^2\sqrt{bc} \leq \frac{1}{2}(a^2(b + c) + b^2(a + c) + c^2(a + b)).$$

A rendezési elv alapján viszont

$$a^2b + b^2c + c^2a \leq a^3 + b^3 + c^3 \text{ és } a^2c + b^2a + c^2b \leq a^3 + b^3 + c^3,$$

tehát $a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ac} + c^2\sqrt{bc} \leq a^3 + b^3 + c^3$.

5. $\frac{a}{a + 2b + 2c} + \frac{b}{2a + b + 2c} + \frac{c}{2a + 2b + c} \geq \frac{3}{5}$, ha $a, b, c > 0$.

Bizonyítás. Az (a, b, c) és $\left(\frac{1}{a + 2b + 2c}, \frac{1}{2a + b + 2c}, \frac{1}{2a + 2b + c}\right)$ számhármassok ellentétes rendezésűek, tehát a rendezési tétel alapján írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{a}{a+2b+2c} + \frac{b}{2a+b+2c} + \frac{c}{2a+2b+c} &\geq \frac{b}{a+2b+2c} + \frac{c}{2a+b+2c} + \frac{a}{2a+2b+c} \\ \frac{a}{a+2b+2c} + \frac{b}{2a+b+2c} + \frac{c}{2a+2b+c} &\geq \frac{c}{a+2b+2c} + \frac{a}{2a+b+2c} + \frac{b}{2a+2b+c} \\ \frac{a}{a+2b+2c} + \frac{b}{2a+b+2c} + \frac{c}{2a+2b+c} &= \frac{a}{a+2b+2c} + \frac{b}{2a+b+2c} + \frac{c}{2a+2b+c} \end{aligned}$$

Ha az első két egyenlőtlenséget szorozzuk 2 -vel és összeadjuk mindhárom egyenlőtlenség megfelelő oldalait a bizonyítandó egyenlőtlenséghez jutunk.

I.9.4. Gyakorlatok és feladatok (34. oldal)

1. $(a+b)\sqrt{c} + (b+c)\sqrt{a} + (c+a)\sqrt{b} \geq 6\sqrt{abc}$, ha $a, b, c \geq 0$.

Bizonyítás. Tudjuk, hogy $a+b \geq 2\sqrt{ab}$, $b+c \geq 2\sqrt{bc}$, $c+a \geq 2\sqrt{ac}$, így $(a+b)\sqrt{c} + (b+c)\sqrt{a} + (c+a)\sqrt{b} \geq 2\sqrt{abc} + 2\sqrt{abc} + 2\sqrt{abc} = 6\sqrt{abc}$.

2. $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \geq 4$, ahol $a, b, c, d > 0$.

Bizonyítás. A számtani-mértani középarányosok közti egyenlőtlenség alapján

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c}} + 2\sqrt{\frac{c}{d} \cdot \frac{d}{a}} \geq 4 \cdot \sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{d}{a}} = 4.$$

3. Bizonyítsd be, hogy ha $a+b+c=1$, akkor

$$\text{a) } a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}; \quad \text{b) } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9.$$

Bizonyítás. a) A számtani és négyzetes közepek közti egyenlőtlenség alapján

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} \geq \frac{a+b+c}{3} = \frac{1}{3}, \text{ tehát } a^2 + b^2 + c^2 \geq \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 3 = \frac{1}{3}.$$

b) A 9.1.2. alkalmazások 3. feladata (vagy a számtani és harmonikus közép közti egyenlőtlenség) alapján $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$, tehát az adott feltétel alapján

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9.$$

4. Bizonyítsd be, hogy:

$$\text{a) } \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right), \text{ ha } a, b, c \in \mathbb{R}_+^*;$$

$$\text{b) } \frac{2}{a+b} + \frac{2}{a+1} + \frac{2}{b+1} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 1, \text{ ha } a, b \in \mathbb{R}_+^*;$$

$$\text{c)} \frac{a+b}{a^2+b^2} + \frac{b+c}{b^2+c^2} + \frac{c+a}{c^2+a^2} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}, \text{ ha } a, b, c \in \mathbb{R}_+^*;$$

$$\text{d)} \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a^2+b^2}{2} \leq \frac{a^3+b^3}{2} \text{ ha } a+b > 0;$$

$$\text{e)} abc \geq (-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c), \text{ ha } a, b, c > 0;$$

$$\text{f)} \frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}} + \frac{b}{\sqrt{(b^2+a^2)(b^2+c^2)}} + \frac{c}{\sqrt{(c^2+a^2)(c^2+b^2)}} \leq \\ \leq \frac{1}{2} \frac{a^2+b^2+c^2}{abc}, \text{ ha } a, b, c \in \mathbb{R}_+^*;$$

$$\text{g)} 3 \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) \geq 4 \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} \right)^2, \text{ ha } a, b, c \in \mathbb{R}_+^*.$$

Bizonyítás. **a)** A számtani és harmonikus közép közti egyenlőtlenség alapján $\frac{a+b}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$, tehát $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$. Hasonlóan írhatjuk, hogy $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{4}{b+c}$ és

$$\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \geq \frac{4}{c+a}, \text{ tehát ha az előbbi egyenlőtlenségek megfelelő oldalait összeadjuk, a}$$

bizonyítandó egyenlőtlenséghez jutunk.

b) Ha az előbbi egyenlőtlenséget $c=1$ esetén írjuk fel, megkapjuk a kívánt egyenlőtlenséget.

c) Az $a^2 + b^2 \geq 2ab$ egyenlőtlenségből következik, hogy $2(a^2 + b^2) \geq (a+b)^2$, tehát $\frac{a+b}{a^2+b^2} \leq \frac{2}{a+b}$. Hasonlóan írhatjuk, hogy $\frac{b+c}{b^2+c^2} \leq \frac{2}{b+c}$ és $\frac{c+a}{c^2+a^2} \leq \frac{2}{c+a}$,

tehát $\frac{a+b}{a^2+b^2} + \frac{b+c}{b^2+c^2} + \frac{c+a}{c^2+a^2} \leq 2 \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right)$ és így az a) alpont alapján következik a kért egyenlőtlenség.

d) Ha az $a^2 - ab + b^2 \geq \frac{a^2+b^2}{2}$ egyenlőtlenség mindkét oldalát szorozzuk $a+b > 0$ -val, a bizonyítandó egyenlőtlenséghez jutunk.

e) Mivel $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, a jobboldalon megjelenő zárójelek közül csak egy lehet negatív (bármely kettő összege nagyobb, mint 0) és ebben az esetben a bal oldal pozitív és a jobb oldal negatív, feltételezhetjük, hogy $-a+b+c = x > 0$, $a-b+c = y > 0$ és

$$a+b-c = z > 0. \text{ Így viszont } a = \frac{y+z}{2}, \quad b = \frac{x+z}{2} \text{ és } c = \frac{x+y}{2}, \text{ tehát az}$$

egyenlőtlenség $8xyz \leq (x+y)(y+z)(z+x)$ alakban írható, és ezt már igazoltuk a 9.1.2. alkalmazások 1. feladatainál.

Más megoldás. Összeszorozzuk az $a^2 - (b - c)^2 \leq a^2$, $b^2 - (c - a)^2 \leq b^2$ és $c^2 - (a - b)^2 \leq c^2$ egyenlőtlenségeket.

f) Az $a^2 + b^2 \geq 2ab$, $a^2 + c^2 \geq 2ac$ egyenlőtlenség alapján

$$\frac{a}{\sqrt{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)}} \leq \frac{a}{\sqrt{2ab \cdot 2ac}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{bc}},$$

$$\text{tehát az } S = \frac{a}{\sqrt{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)}} + \frac{b}{\sqrt{(b^2 + a^2)(b^2 + c^2)}} + \frac{c}{\sqrt{(c^2 + a^2)(c^2 + b^2)}}$$

összeg nem nagyobb, mint $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} + \frac{1}{\sqrt{ab}} \right)$. Másrészt az

$$\frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} + \frac{1}{\sqrt{ab}} \leq \frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab}$$

egyenlőtlenség ekvivalens a $\sqrt{abc}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \leq a^2 + b^2 + c^2$ egyenlőtlenséggel

és ez a 9.1.4. alkalmazások 4. feladata $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ és $\sqrt{c}$ -re.

g) Alkalmazzuk a Cauchy-Buniakovski egyenlőtlenséget az $\left(\frac{1}{\sqrt{bc}}, \frac{1}{\sqrt{ac}}, \frac{1}{\sqrt{ab}} \right)$ és

$\left(\frac{2\sqrt{bc}}{b+c}, \frac{2\sqrt{ac}}{a+c}, \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \right)$ számhármassokra. Így írhatjuk, hogy

$$\left(\frac{2}{b+c} + \frac{2}{a+c} + \frac{2}{a+b} \right)^2 \leq \left(\frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ab} \right) \left(\frac{4bc}{(b+c)^2} + \frac{4ac}{(a+c)^2} + \frac{4ab}{(a+b)^2} \right).$$

Ebből következik a kért egyenlőtlenség, mert $\frac{4bc}{(b+c)^2} \leq 1$, $\frac{4ac}{(a+c)^2} \leq 1$ és

$$\frac{4ab}{(a+b)^2} \leq 1.$$

II. Egyenletek és egyenlőtlenségek

II.1.3. Gyakorlatok és feladatok (37. oldal)

1. Oldd meg a következő egyenleteket:

a) $x + 2 = \sqrt{3}$; **b)** $\sqrt{2}x - \sqrt{3} = \sqrt{6}$; **c)** $\frac{x+1}{2} - \frac{3x+1}{3} = -\frac{1}{3}$;

d) $(x-2)(x+1) - (x-1)(x+1) = -5$; **e)** $\frac{2x}{x-3} = \frac{2x-1}{x+2}$;

f) $(x+1)^3 - (x-1)^3 = 6x^2 + 2$.

Megoldás. a) $x + 2 = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \sqrt{3} - 2$;

b) $\sqrt{2}x - \sqrt{3} = \sqrt{6} \Leftrightarrow \sqrt{2}x = \sqrt{6} + \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{6}}{2}$;

c) $\frac{x+1}{2} - \frac{3x+1}{3} = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow 3(x+1) - 2(3x+1) = -2 \Leftrightarrow -3x = -3 \Leftrightarrow x = 1$;

d) $(x-2)(x+1) - (x-1)(x+1) = -5 \Leftrightarrow (x+1)[(x-2) - (x-1)] = -5 \Leftrightarrow \Leftrightarrow (x+1)(-1) = -5 \Leftrightarrow x+1 = 5 \Leftrightarrow x = 4$;

e) Ahhoz, hogy a $\frac{2x}{x-3}$ és $\frac{2x-1}{x+2}$ törték értelmezettek legyenek, szükséges, hogy $x \neq 3$ és $x \neq -2$. Ha ez teljesül, az eredeti egyenlet a következő módon alakítható:

$$2x(x+2) = (2x-1)(x-3) \Leftrightarrow 2x^2 + 4x = 2x^2 - 7x + 3 \Leftrightarrow 11x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{11};$$

f) $(x+1)^3 - (x-1)^3 = 6x^2 + 2 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = 6x^2 + 2 \Leftrightarrow 6x^2 + 2 = 6x^2 + 2 \Leftrightarrow 0 = 0$. Az egyenlőség tehát minden valós x esetén teljesül, így a megoldáshalmaz $\mathbb{R}$.

2. Oldd meg a következő egyenleteket:

a) $\frac{a+b+x}{c} + \frac{b+c+x}{a} + \frac{c+a+x}{b} + 3 = 0$, ahol $a, b, c \in \mathbb{R}^*$;

b) $\frac{x+ab}{a+b} + \frac{x+bc}{b+c} + \frac{x+ac}{a+c} = -(a+b+c)$, ahol $(a+b)(b+c)(a+c) \neq 0$ és $a, b, c \in \mathbb{R}$;

c) $\frac{x+a}{b+c} + \frac{x+b}{c+a} + \frac{x+c}{a+b} = \frac{-3x}{a+b+c}$, ahol $(a+b)(b+c)(a+c) \neq 0$, $a+b+c \neq 0$ és $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Megoldás. a) A következő átalakításokat végezhetjük

$$\begin{aligned} & \frac{a+b+x}{c} + \frac{b+c+x}{a} + \frac{c+a+x}{b} + 3 = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) x + \frac{a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 + 3abc}{abc} = 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (ab + bc + ca)x + (a + b + c)(ab + bc + ca) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (ab + bc + ca)(x + a + b + c) = 0.$$

Ha $ab + bc + ca = 0$, akkor minden valós szám megoldása az egyenletnek.

Ha $ab + bc + ca \neq 0$, akkor $x + a + b + c = 0$, tehát az egyenlet egyetlen megoldása az $x = -(a + b + c)$;

b) Az egyenlet a következőképpen alakítható:

$$\frac{x + ab}{a + b} + \frac{x + bc}{b + c} + \frac{x + ca}{c + a} = -(a + b + c) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{x + ab}{a + b} + c + \frac{x + bc}{b + c} + a + \frac{x + ca}{c + a} + b = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{x + ab + bc + ca}{a + b} + \frac{x + bc + ca + ab}{b + c} + \frac{x + ca + ab + bc}{c + a} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x + ab + bc + ca) \left(\frac{1}{a + b} + \frac{1}{b + c} + \frac{1}{c + a} \right) = 0.$$

Ha $\frac{1}{a + b} + \frac{1}{b + c} + \frac{1}{c + a} = 0$, akkor minden valós szám megoldása az egyenletnek,

míg ha $\frac{1}{a + b} + \frac{1}{b + c} + \frac{1}{c + a} \neq 0$, akkor $x = -(ab + bc + ca)$ az egyenlet egyetlen megoldása.

c) A következő ekvivalens átalakításokat végezzük:

$$\frac{x + a}{b + c} + \frac{x + b}{a + c} + \frac{x + c}{a + b} = \frac{-3x}{a + b + c} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{x + a}{b + c} + 1 + \frac{x + b}{a + c} + 1 + \frac{x + c}{a + b} + 1 = \frac{-3x}{a + b + c} + 3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{x + a + b + c}{b + c} + \frac{x + b + a + c}{a + c} + \frac{x + c + a + b}{a + b} = \frac{-3(x + a + b + c)}{a + b + c} + 6 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x + a + b + c) \left(\frac{1}{b + c} + \frac{1}{a + c} + \frac{1}{a + b} + \frac{3}{a + b + c} \right) = 6.$$

Ha $\frac{1}{b + c} + \frac{1}{a + c} + \frac{1}{a + b} + \frac{3}{a + b + c} = 0$, az egyenletnek nincs megoldása, míg ha

$\frac{1}{b + c} + \frac{1}{a + c} + \frac{1}{a + b} + \frac{3}{a + b + c} \neq 0$, az egyetlen megoldás

$$x = \frac{6}{\frac{1}{b + c} + \frac{1}{a + c} + \frac{1}{a + b} + \frac{3}{a + b + c}} - a - b - c.$$

3. Oldd meg a következő egyenleteket:

a) $\frac{1 \cdot 2 \cdot x - 3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{2 \cdot 3 \cdot x - 5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{3 \cdot 4 \cdot x - 7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{k \cdot (k + 1) \cdot x - 2k - 1}{k^2 \cdot (k + 1)^2} = 0;$

$$\text{b). } \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)} = \frac{4}{5x}.$$

$$\text{Megoldás. a) } \sum_{i=1}^k \frac{i(i+1)x - 2i - 1}{i^2(i+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x \left(\sum_{i=1}^k \frac{1}{i(i+1)} \right) = \sum_{i=1}^k \frac{2i+1}{i^2(i+1)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \left(\sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) \right) = \sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{i^2} - \frac{1}{(i+1)^2} \right) \Leftrightarrow x \left(1 - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{(k+1)^2}.$$

Tehát $x = 1 + \frac{1}{k+1}$ az egyenlet egyetlen megoldása.

b) Az értelmezési tartomány $D = \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, -3, -4\}$.

$$\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)} = \frac{4}{5x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4} = \frac{4}{5x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{x+4} = \frac{4}{5x} \Leftrightarrow \frac{4}{x(x+4)} = \frac{4}{5x} \stackrel{x \neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{1}{x+4} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow x+4=5 \Leftrightarrow x=1.$$

Mivel $1 \in D$, az egyenlet egyetlen megoldása az $x=1$.

4. Oldd meg és tárgyald a következő egyenleteket:

a) $mx + n = 0$, $m, n \in \mathbb{R}$; **b)** $m(m-1)x = 2(m^2-1)$, $m \in \mathbb{R}$;

c) $(m^2-1)x + m^3 - 1 = 0$, $m \in \mathbb{R}$; **d)** $\frac{x-m}{x-2} = \frac{x-2m}{x-4}$, $m \in \mathbb{R}$;

e) $\frac{mx+1}{x} = \frac{mx}{x-2}$, $m \in \mathbb{R}$; **f)** $x(x-m) = (x-1)(x+m)$, $m \in \mathbb{R}$;

g) $(x+1)(x+m) = (x-2m)(x+2) + n$, $m, n \in \mathbb{R}$;

h) $\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{3}{mx}$, ahol $m \in \mathbb{R}^*$.

Megoldás. a) Az $mx + n = 0$ egyenletet ekvivalens az $mx = -n$ egyenlettel. A következő eseteket kell tárgyalnunk:

1. Ha $m \neq 0$, akkor végigoszthatjuk az egyenlet mindkét oldalát m -mel, így kapjuk az egyenlet egyetlen megoldását az $x = -\frac{n}{m}$ -et.

2. Ha $m = 0$, akkor az egyenlet így alakul: $0 = -n$. Így ismét két esetet különböztetünk meg:

2.a. Ha $n \neq 0$, akkor az egyenletnek nincs megoldása.

2.b. Ha $n = 0$, akkor a megoldáshalmaz a valós számok halmaza.

b) $m(m-1)x = 2(m^2-1) \Leftrightarrow m(m-1)x = 2(m-1)(m+1)$

Ha $m = 1$, akkor az egyenlet $1 \cdot 0 \cdot x = 2 \cdot 0 \cdot 2$ alakot ölt, amelyet minden valós szám kielégít.

Ha $m \neq 1$, akkor az egyenlet mindkét oldalát eloszthatjuk $(m - 1)$ -el, így kapjuk, hogy $mx = 2(m + 1)$. Így tárgyalás szükséges. Ha $m = 0$, akkor az egyenlet $0 = 2$, a megoldáshalmaz tehát az üres halmaz, míg ha $m \neq 0$, akkor az egyenlet mindkét oldalát végigoszthatunk m -mel, a megoldás: $x = \frac{2(m + 1)}{m}$. Az előbbi eseteket a következő táblázatba foglalhatjuk:

m	A megoldáshalmaz
$m = 1$	$\mathbb{R}$
$m = 0$	$\emptyset$
$m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$	$M = \left\{ \frac{2(m + 1)}{m} \right\}$

c) $(m^2 - 1)x + m^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow (m - 1)[(m + 1)x + m^2 + m + 1] = 0$

Ha $m = 1$, azonosságot kapunk, tehát minden valós szám megoldás.

Ha $m \neq 1$, akkor $(m + 1)x = -m^2 - m - 1$. Két esetet különböztetünk meg, aszerint, hogy $(m + 1)$ nulla vagy sem. Ha $m + 1 = 0$, vagyis $m = -1$, akkor az egyenlet: $0 = -1 + 1 - 1$, amelynek nyilvánvalóan nincs megoldása. Ha $m \neq 1$ és $m \neq -1$, akkor az egyenletnek egyetlen megoldása van, $x = -\frac{m^2 + m + 1}{m + 1}$. Tehát az esetek a következő táblázatban foglalhatók össze:

m	A megoldáshalmaz
$m = 1$	$\mathbb{R}$
$m = -1$	$\emptyset$
$m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$	$M = \left\{ -\frac{m^2 + m + 1}{m + 1} \right\}$

d) Az $\frac{x - m}{x - 2} = \frac{x - 2m}{x - 4}$ egyenlet gyökeit az $\mathbb{R} \setminus \{2, 4\}$ halmazban kell keresnünk, másként a törtek nem lennének értelmezettek. Átalakítva az egyenletet, kapjuk, hogy

$$(x - m)(x - 4) = (x - 2m)(x - 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x - mx + 4m = x^2 - 2x - 2mx + 4m \Leftrightarrow (m - 2)x = 0.$$

Ha $m = 2$, akkor minden $\mathbb{R} \setminus \{2, 4\}$ halmazbeli szám megoldás. Ha $m \neq 2$, akkor az egyenlet megoldása $x = 0$, ez a törtek értelmezési tartományában is benne van.

m	A megoldáshalmaz
$m = 2$	$\mathbb{R} \setminus \{2, 4\}$
$m \neq 2$	$M = \{0\}$

e) Az egyenlet értelmezési tartománya $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$.

$$\frac{mx + 1}{x} = \frac{mx}{x - 2} \Leftrightarrow mx^2 + x - 2mx - 2 = mx^2 \Leftrightarrow (1 - 2m)x = 2.$$

Ha $1 - 2m = 0$, vagyis $m = \frac{1}{2}$, akkor a $0 = 2$ hamis egyenlőséget kapjuk, így az egyenletnek nincs megoldása. Ha $m \neq \frac{1}{2}$, akkor $x = \frac{2}{1 - 2m}$, tehát azt kell megvizsgálni, hogy ez benne van-e az értelmezési tartományban vagy sem. A $\frac{2}{1 - 2m} = 0$ egyenlőség nem teljesülhet egyetlen $m \in \mathbb{R}$ esetén sem, míg a $\frac{2}{1 - 2m} = 2$ egyenlőségből $m = 0$. Így a következő táblázathoz jutunk:

m	A megoldáshalmaz
$m = \frac{1}{2}$	$\emptyset$
$m = 0$	$\emptyset$
$m \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$	$M = \left\{\frac{2}{1 - 2m}\right\}$

f) $x(x - m) = (x - 1)(x + m) \Leftrightarrow x^2 - mx = x^2 - x + mx - m \Leftrightarrow (2m - 1)x = m$.

Ha $m = \frac{1}{2}$, akkor a $0 \cdot x = \frac{1}{2}$ egyenlőséghez jutunk, amelyet egyetlen valós szám

sem teljesít. Ha $m \neq \frac{1}{2}$, akkor a megoldás $x = \frac{m}{2m - 1}$.

m	A megoldáshalmaz
$m = \frac{1}{2}$	$\emptyset$
$m \neq \frac{1}{2}$	$M = \left\{\frac{m}{2m - 1}\right\}$

g) $(x + 1)(x + m) = (x - 2m)(x + 2) + n \Leftrightarrow (3m - 1)x = -5m + n$.

Ha $3m - 1 \neq 0$, vagyis $m \neq \frac{1}{3}$, akkor $x = \frac{-5m + n}{3m - 1}$. Ha $m = \frac{1}{3}$, akkor az

egyenlet $0 \cdot x = -\frac{5}{3} + n$ alakúvá válik. Ha $m = \frac{1}{3}$ és $-\frac{5}{3} + n = 0$, vagyis $n = \frac{5}{3}$,

akkor a megoldáshalmaz az $\mathbb{R}$, míg ha $m = \frac{1}{3}$ és $n \neq \frac{5}{3}$, akkor az egyenletnek nincs

megoldása. Ezeket az eseteket a következő táblázatba lehet szemléltetni:

m	n	A megoldáshalmaz
$m \neq \frac{1}{3}$	$n \in \mathbb{R}$	$M = \left\{\frac{-5m + n}{3m - 1}\right\}$
$m = \frac{1}{3}$	$n = \frac{5}{3}$	$\mathbb{R}$
	$n \neq \frac{5}{3}$	$\emptyset$

h) A törtek értelmezési tartománya $D = \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, -3\}$.

$$\begin{aligned} & \frac{(x+1)-x}{x(x+1)} + \frac{(x+2)-(x+1)}{(x+1)(x+2)} + \frac{(x+3)-(x+2)}{(x+2)(x+3)} = \frac{3}{mx} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} = \frac{3}{mx} \Leftrightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{x+3} = \frac{3}{mx} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \frac{3}{x(x+3)} = \frac{3}{mx} \Leftrightarrow mx = x^2 + 3x \Leftrightarrow x(x+3-m) = 0. \end{aligned}$$

Ez utóbbi alapján $x = 0$ vagy $x + 3 - m = 0$. De az $x = 0$ érték nincs benne az értelmezési tartományban, így csak az $x + 3 - m = 0$ eset lehetséges, tehát $x = m - 3$. Ha $m \in \{1, 2, 3\}$ akkor x rendre $-2, -1, 0$, ezek az értékek viszont nincsenek benne az értelmezési tartományban, tehát az egyenletnek ezekben az esetekben nincs megoldása. Minden más esetben egyetlen gyök létezik, az $x = m - 3$.

m	A megoldáshalmaz
$m \in \{1, 2, 3\}$	$\emptyset$
$m \in \mathbb{R}^* \setminus \{1, 2, 3\}$	$M = \{m - 3\}$

5. Mi a feltétele annak, hogy az $y = a_1x + b_1$ és $y = a_2x + b_2$ egyenesek párhuzamosak legyenek?

Megoldás. Két egyenes akkor párhuzamos, ha nem metszik egymást. Tehát annak feltétele, hogy az $y = a_1x + b_1$ és $y = a_2x + b_2$ egyenesek párhuzamosak legyenek, az, hogy az $a_1x + b_1 = a_2x + b_2$ ($= y$) egyenletnek ne legyen megoldása. Az egyenletet átalakítva, kapjuk, hogy $(a_1 - a_2)x = b_2 - b_1$. Amennyiben az a_1 és a_2 számok különbözőek lennének, az egyenletnek mindig lenne megoldása $\left(x = \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2}\right)$. Tehát a párhuzamosság egyik szükséges feltétele az, hogy $a_1 = a_2$

legyen. Azonban ez még nem elégséges, ugyanis ebben az esetben az egyenlet $0 \cdot x = b_2 - b_1$ alakú, amelynek $b_1 = b_2$ esetben minden valós szám megoldása (ez egyben azt is jelenti, hogy a két egyenes pontosan akkor egybeeső, ha $a_1 = a_2$ és $b_1 = b_2$). Tehát még az is szükséges, hogy b_1 és b_2 különbözzenek. A két egyenes párhuzamosságának feltétele tehát $a_1 = a_2$ és $b_1 \neq b_2$.

6. Egy olyan $M(x, y)$ síkbeli pontot, amelyre $x, y \in \mathbb{Z}$ rácspontnak nevezünk.

Bizonyítsd be, hogy ha egy egyenesen van két rácspont, akkor végtelen sok rácspont található rajta.

Bizonyítás. Legyen az egyenes egyenlete $y = ax + b$, a rajta fekvő két rácspont pedig (x_1, y_1) és (x_2, y_2) . Felírható tehát az $y_1 = ax_1 + b$ és $y_2 = ax_2 + b$ egyenlőség. Ha k tetszőleges egész szám, az első egyenletet $(k+1)$ -el, a másodikat pedig k -val szorozzuk, majd egymásból kivonjuk a kapott egyenlőségeket, akkor a $(k+1)y_1 - ky_2 = a \cdot [(k+1)x_1 - kx_2] + b$ egyenlőséghez jutunk. Tehát a

$((k+1)x_1 - kx_2, (k+1)y_1 - ky_2)$ pont is az egyenesen helyezkedik el. A továbbiakban igazoljuk, hogy különböző k értékekhez különböző pontok tartoznak. Ha $M((m+1)x_1 - mx_2, (m+1)y_1 - my_2)$ és $N((n+1)x_1 - nx_2, (n+1)y_1 - ny_2)$ két ilyen pont, ahol $m, n \in \mathbb{Z}$, akkor

$$M = N \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)x_1 - mx_2 = (n+1)x_1 - nx_2 \\ (m+1)y_1 - my_2 = (n+1)y_1 - ny_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-n)(x_1 - x_2) = 0 \\ (m-n)(y_1 - y_2) = 0 \end{cases}$$

Ha $m \neq n$, akkor $x_1 = x_2$ és $y_1 = y_2$, ami azt jelentené, hogy az egyenesen fekvő két rácspontra egybeesik, ami ellentmondana a feltételnek. Következik tehát, hogy $m \neq n$ esetén M és N különböző pontok. Mivel végtelen sok egész szám létezik és a különböző számokhoz tartozó pontok különbözőek, az egyenesen végtelen sok rácspontra helyezkedik el.

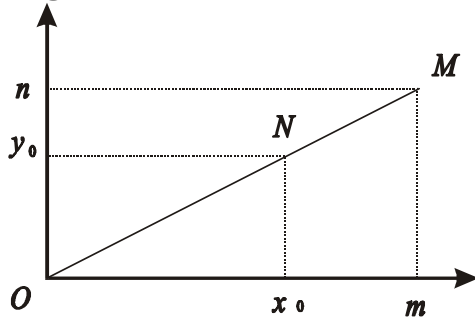
7. Van-e olyan egyenes, amely csak egy rácspontra halad át?

Megoldás. Igen, sőt végtelen sok olyan egyenes van, amely pontosan egy rácspontra halad át. Tetszőleges q irracionális szám és r egész szám esetén vegyük a $d: y = qx + r$ egyenest. A d egyenes nyilván átmegy az $O(0, r)$ ponton. Ha d tartalmaz még egy $M(x_0, y_0)$ rácspontra, akkor $y_0 = qx_0 + r$, $q = \frac{y_0 - r}{x_0}$, ami

ellentmond q irracionálisának. Tehát az $y = qx + r$, $q \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $r \in \mathbb{Z}$ egyenletű egyenesek pontosan egy rácspontra tartalmaznak.

8. Hány rácspontra van az OM szakaszon, ha $O(0,0)$, $M(m,n)$ és $(m,n)=1$? Hát akkor ha $(m,n)=d$ ($m,n,d \in \mathbb{N}^*$).

Megoldás



Nézzük előbb azt az esetet, amikor m, n relatív prímek. Igazoljuk, hogy az OM szakaszon két rácspontra található, a szakasz végpontjai. Legyen (x_0, y_0) egy rácspontra az szakaszon. Thálész tétele alapján

$$\frac{x_0}{m} = \frac{ON}{OM} = \frac{y_0}{n},$$

vagyis $x_0 n = y_0 m$. Eszerint n osztója $y_0 m$ -nek, s mivel $(n, m) = 1$, következik, hogy y_0 többszöröse n -nek. De $0 \leq y_0 \leq n$, így y_0 csak a 0 és n értékeket veheti fel. Ha $y_0 = 0$, akkor $x_0 = 0$ kell legyen (ekkor N egybeesik az origóval), ha pedig $y_0 = n$, akkor $x_0 = m$, ekkor $N = M$. Tehát két rácspontra van az OM szakaszon, ezek az O, M pontok.

Ha $(n, m) = d$, akkor léteznek az n_0, m_0 számok úgy, hogy $(n_0, m_0) = 1$, $n = dn_0$, $m = dm_0$. Ekkor az $x_0 n = y_0 m$ egyenlőség $x_0 n_0 = y_0 m_0$ alakban írható.

Tehát $n_0 | y_0 m_0 \Rightarrow n_0 | y_0 \Rightarrow y_0 = kn_0, k \in \mathbb{N} \Rightarrow x_0 = km_0$. Másrészt az N pont az OM szakaszon van, tehát $\begin{cases} 0 \leq x_0 \leq m \\ 0 \leq y_0 \leq n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq km_0 \leq dm_0 \\ 0 \leq kn_0 \leq dn_0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq k \leq d$. Tehát az

OM szakaszon $d + 1$ rácspont van, ezek a következők: $\left(k \frac{n}{d}, k \frac{m}{d}\right)$, ahol $k = \overline{0, d}$.

9. a) Ábrázold az $ax + by = c$ egyenlőséget teljesítő (x, y) koordinátájú pontokat.

b) Mi a feltétele annak, hogy az előbbi pontok közt rácspont is legyen, ha $a, b, c \in \mathbb{N}$?

c) Ha az előbbi feltételek teljesülnek és a pontok közt vannak rácspontok, mennyi a rácspontok közt fellépő minimális távolság?

Megoldás. a) Ha $a \neq 0, b \neq 0$, akkor az egyenlet $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ alakban írható,

ami a $\left(0, \frac{c}{b}\right)$ és $\left(\frac{c}{a}, 0\right)$ pontokon átmenő egyenes egyenlete (ha $c = 0$, az egyenes:

$y = -\frac{a}{b}x$). Ha $a = 0, b \neq 0$, akkor $y = \frac{c}{b}$, ami a $\left(0, \frac{c}{b}\right)$ ponton átmenő, az Ox

tengellyel párhuzamos egyenes egyenlete. Ha $b = 0, a \neq 0$, akkor $x = \frac{c}{a}$, a $\left(\frac{c}{a}, 0\right)$ -n

átmenő, Oy -nal párhuzamos egyenes. Ha $a = 0, b = 0$ és $c = 0$, akkor az xOy sík bármely pontja kielégíti az egyenletet. Ha $a = 0, b = 0$ és $c \neq 0$, akkor egyetlen pont koordinátáira sem teljesül az egyenlőség.

b) Igazoljuk, hogy az $ax + by = c, a, b, c \in \mathbb{N}$ egyenletet teljesítő (x, y) pontok között pontosan akkor van rácspont, ha $(a, b) | c$. Előbb igazoljuk, hogy a feltétel elégséges. Ha $a = b = 0$, akkor csak abban az esetben van rácspont az egyenletet teljesítő pontok között, ha $c = 0$. Feltételezve, hogy $a \neq 0$ vagy $b \neq 0$, létezik $d = (a, b)$ és az $u, v \in \mathbb{Z}$ számok úgy, hogy $au + bv = d$. Ha $d | c$, akkor $x = \frac{uc}{d}$ és

$y = \frac{vc}{d}$ esetén az (x, y) koordinátájú pont rácspont, és koordinátái teljesítik az egyenletet. A feltétel szükségességét egyszerű belátni, hisz ha létezik $x, y \in \mathbb{Z}$ és $ax + by = c$, akkor, mivel $d | a, d | b$, d osztja c -t is.

c) Ha $a \cdot b = 0$, akkor a legkisebb távolság 1, mivel az egyenes párhuzamos valamelyik tengellyel. Ha $a \cdot b \neq 0$, és $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ két rácspont, akkor a köztük

levő távolság a Pithagorasz-tétel alapján $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. Az $ax_1 + by_1 = c$ és $ax_2 + by_2 = c$ egyenlőségeket egymásból kivonva kapjuk, hogy

$$a(x_1 - x_2) = -b(y_1 - y_2).$$

Ha $(a, b) = d$, akkor $a = da_1$, $b = db_1$, $(a_1, b_1) = 1$, továbbá $a_1(x_1 - x_2) = -b_1(y_1 - y_2)$. Következik, hogy $(x_1 - x_2) : b_1$ és $(y_1 - y_2) : a_1$, ahonnan $(x_1 - x_2)^2 = ub_1^2$ és $(y_1 - y_2)^2 = va_1^2$, ahol $u, v \in \mathbb{N}$. Innen

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{ub_1^2 + va_1^2} \geq \sqrt{a_1^2 + b_1^2},$$

tehát a legkisebb távolság nem kisebb, mint $d_{\min} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{d}$. Másrészt ha (x, y) egy

rácspont, amelyre $ax + by = c$, és $u = x + \frac{b}{d}$, $v = y - \frac{a}{d}$, akkor $u, v \in \mathbb{Z}$, és

$$au + bv = a\left(x + \frac{b}{d}\right) + b\left(y - \frac{a}{d}\right) = ax + by = c, \text{ tehát } (u, v) \text{ rácspont távolsága az}$$

$$(x, y) \text{ ponttól } d = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2} = \sqrt{\left(\frac{b}{d}\right)^2 + \left(\frac{a}{d}\right)^2} = d_{\min}. \text{ Tehát az egyenes}$$

két rácspontja közti legkisebb távolság $d_{\min} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{d}$.

10. Az A -ból a B felé induló személyvonat sebessége 60 km/h . A vonatot a később induló 120 km/h sebességű gyorsvonatnak B -ben kell utolérnie. Útjának $\frac{2}{3}$ részét megtéve a személyvonat eredeti sebességének felével folytatja útját és így a gyorsvonat 80 km -rel B előtt éri utol. Milyen messze van A -tól B ?

Megoldás. Legyen az A és B közti távolság $x \text{ km}$. Ezt a távot a személyvonat $\frac{x}{60}$, a gyorsvonat $\frac{x}{120}$ óra alatt teszi

meg (a $t = \frac{d}{v}$ képlet alapján).



Jelöljük t_1 -gyel a két vonat indulása közti időt. Mivel egyszerre érnek B -be, írhatjuk, hogy $t_1 = \frac{x}{60} - \frac{x}{120}$. Jelöljük a B várostól 80 km -re levő helyet E -vel. Ha a

személyvonat az AD távolságot 60 km/h sebességgel, a DE -t pedig 30 km/h -val teszi meg, a személyvonat indulásától az E pontba érkezéséig eltelt idő $\frac{AD}{60} + \frac{DE}{30} = \frac{1}{60} \cdot \frac{2}{3}x + \frac{1}{30} \cdot \left(\frac{x}{3} - 80\right)$. A gyorsvonat ugyanezt a távot

$\frac{AE}{120} = \frac{x - 80}{120}$ óra alatt teszi meg. Mivel a gyorsvonat a személyvonat után t_1 órával

indul, és egyszerre érkeznek E -be, írhatjuk, hogy

$$\frac{x}{90} + \frac{x}{90} - \frac{8}{3} = \frac{x}{120} + \frac{x - 80}{120} \Leftrightarrow 2x \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 20 \Leftrightarrow x = 360. \text{ Tehát az } A \text{ és } B$$

városok közti távolság $AB = 360 \text{ km}$.

11. Egy országnak export rendelése van egy műszer I. típusából 1500 darabra és a II. típusából 800 darabra. A műszert az A és B üzemekben gyártják: az A üzem naponta 30 darabot készít az I. típusból vagy 20 darabot a II. típusból, a B üzem pedig naponta 50 darab I. típusú vagy 40 darab II. típusú műszert gyárt. Hogyan kell elosztani a gyártást a két üzem között ahhoz, hogy a lehető legrövidebb idő alatt elkészüljenek a rendelt darabok? (egy üzem egy nap nem gyárthat mind a kétféle műszerből)

Megoldás. Ha az A üzemben x napig gyártják az I. típust és u napig a II. típust, a B üzemben pedig y napig az I. típust, v napig a II. típust, akkor felírhatjuk a

következő egyenleteket:
$$\begin{cases} 30x + 50y = 1500 \\ 20u + 40v = 800 \end{cases}$$
 A megrendelt termékek legyártása

akkor veszi fel a legrövidebb időt, ha mindkét üzem folyamatosan dolgozik, vagyis

$$x + u = y + v \quad (\text{jelöljük a közös értéket } s\text{-sel}). \text{ Megoldva az } \begin{cases} s = x + u = y + v \\ 30x + 50y = 1500 \\ 20u + 40v = 800 \end{cases}$$

egyenletrendszer (s -t paraméternek tekintve) kapjuk, hogy

$$x = 500 - 15s, \quad u = 16s - 500, \quad y = 9s - 270, \quad v = 270 - 8s.$$

A megoldások mind természetes számok kell legyenek, tehát $500 - 15s \geq 0$, $16s - 500 \geq 0$, $9s - 270 \geq 0$, $270 - 8s \geq 0$, ahonnan $s \in \{32, 33\}$. Mivel a lehető legkisebb s értéket keressük, tehát $s = 32$, innen pedig

$$x = 20, \quad u = 12, \quad y = 18, \quad v = 14.$$

12. Legalább mekkora és legfeljebb mekkora a $\frac{3x + 5,03}{4} = \frac{2x - 3}{1,75}$ egyenlet gyöke, ha figyelembe vesszük, hogy az előforduló tizedes számok kerekítéssel jöttek létre?

Megoldás. $\frac{3x + 5,03}{4} = \frac{2x - 3}{1,75} \Leftrightarrow 12 + 5,03 \cdot 1,75 = (8 - 3 \cdot 1,75)x \Leftrightarrow$

$$x = \frac{12 + 5,03 \cdot 1,75}{8 - 3 \cdot 1,75} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{12 + 5,03 \cdot 1,75}{8 - 3 \cdot 1,75} = \frac{20,8025}{2,75} = 7,56(45) \\ x < \frac{12 + 5,04 \cdot 1,76}{8 - 3 \cdot 1,76} = \frac{20,8704}{2,72} = \frac{3261}{425} \end{cases}$$

13. Két cég összesen 8200 számítógépet szerelt össze. Az ellenőrzés az egyik cég gépeinek 2%-át, míg a másik cég gépeinek 3%-át hibásnak találta, összesen 216 darabot. Hány jól működő gépet szereltek össze a cégek külön-külön?

Megoldás. Jelöljük x -szel az első cég által összeszerelt számítógépek számát, ekkor a másik cég $8200 - x$ gépet szerelt össze. A hibás gépek száma $\frac{2}{100}x$, illetve

$\frac{3}{100} \cdot (8200 - x)$, tehát írhatjuk, hogy $\frac{2}{100}x + \frac{3}{100}(8200 - x) = 216$, innen kapjuk, hogy $x = 3000$. Tehát az első cég 3000, a második pedig 5200 gépet szerelt össze,

ezekből 60, illetve 156 hibás volt, így az összeszerelt működő gépek száma 2940, illetve 5044.

14. Egy gyalogos és egy kerékpáros reggel 8 órakor elindul a 12 km-távolságra levő városba. A kerékpáros 20 percet időzik a városban, azután visszaindul. Hol és mikor találkozik a gyalogossal, ha a kerékpáros sebessége 18 km/h, a gyalogosé pedig 6 km/h.

Megoldás. A kerékpáros $\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$ óra alatt ér be a városba, ott 20 percet ($1/3$ órát időzik), tehát amikor visszaindul, a gyalogos $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$ órája úton van, ezalatt 6 km-t téve meg. Tegyük fel, hogy innen számítva t óra múlva találkoznak. A gyalogos $d_1 = 6t$ km-t, a kerékpáros $d_2 = 18t$ km-t tesz meg ezalatt. Tudjuk, hogy $d_1 + d_2 = 6$ km, innen $6 = 6t + 18t \Rightarrow t = 1/4$. Tehát a gyalogos és a kerékpáros 9 óra 15 perckor találkozik, $d_2 = 4,5$ km-re a várostól.

15. János bácsi elindult Nekeresdfalváról a legközelebbi vonatállomás irányába. Miután az első óra alatt 3 km utat tett meg, kiszámolta, hogy ezzel a sebességgel 40 percet fog késni. Így a maradék távolságot 4 km/h sebességgel tette meg és 45 perccel hamarabb érkezett. Hány kilométerre volt az állomástól az indulás pillanatában?

Megoldás. Jelöljük d -vel Nekeresdfalva és a vonatállomás közti távolságot, valamint t -vel a vonat indulásáig hátralevő időt (órában mérve). János bácsi 3 km/h átlagsebességgel 40 percet ($2/3$ órát) késik, tehát $d = 3(t + 2/3)$. 3 km után $(d - 3)$ km-t kell megtegyen $(t - 1)$ óra alatt, de ekkor 45 perccel ($3/4$ óra) hamarabb érkezik, tehát $d - 3 = 4\left(t - 1 - \frac{3}{4}\right)$. A két egyenlet alapján $t = 6$, $d = 20$, tehát János bácsi 20 km-re volt az indulás pillanatában az állomástól.

16. Két fogaskerék összekapcsolásakor a meghajtó és a meghajtott kerék fordulatszámának aránya 9 : 7. Ha az egyik kerék helyére 3-mal kevesebb, a másik helyére 3-mal több fogú kereket teszünk, az áttétel 1 : 3 vagy 3 : 1. Melyik kereket cseréltük kevesebb fogúra? Hány foga van a 4 kerék mindegyikének?

Megoldás. A kerekek fordulatszámának aránya fordítottan arányos a fogak számának arányával. Ha a meghajtó keréken k_1 , a meghajtott keréken k_2 fog van, akkor $\frac{k_1}{k_2} = \frac{7}{9}$. Ha a meghajtó kereket cseréljük ki egy nála 3-mal kevesebb fogú

fogaskerekre, akkor az arány $\frac{k_1 - 3}{k_2 + 3}$ lesz, ami kisebb, mint $\frac{k_1}{k_2} = \frac{7}{9}$, tehát nem lehet

3:1 (tehát az arány 1:3). A $\frac{k_1}{k_2} = \frac{7}{9}$, $\frac{k_1 - 3}{k_2 + 3} = \frac{1}{3}$ arányokból $k_1 = 7$, $k_2 = 9$, a fogak száma 7, 9, illetve 4 és 12.

Ha a meghajtott kereket cseréljük ki egy nála 3-mal kevesebb fogú fogaskerekre, akkor az arány $\frac{k_1 + 3}{k_2 - 3}$. A $\frac{k_1}{k_2} = \frac{7}{9}$, $\frac{k_1 + 3}{k_2 - 3} = 3$ egyenletrendszerből $k_1 = \frac{21}{5}$, ami nem egész szám, tehát ez az eset nem állhat fenn.

17. Egy tehergépkocsinak mind a négy kerekére új gumibroncsot szereltek. Egy abroncsot akkor tekintenek teljesen elkopottnak, ha hátsó keréken 15000 km-t futott, vagy ha első keréken 25000 km-t. Mennyit futhat a kocsi a négy abroncs teljes elkopásáig, ha az első abroncsokat felcserélhetik a hátsókkal?

Megoldás. Tegyük fel, hogy az egyik abroncs d_1 km-t futott valamelyik első keréken, d_2 -t hátul, egy másik abroncs pedig $(d_2 - t)$ elöl és d_1 km-t hátsó keréken (d_1 km után az abroncsokat felcserélték). Bevezethetjük a következő "kopási állandókat": a hátsó kerekére $c_1 = \frac{1}{15000}$, az elsőké $c_2 = \frac{1}{25000}$. $(d_1 + d_2)$ km után

mind a négy abroncs teljesen elkopott, tehát
$$\begin{cases} c_1 d_1 + c_2 d_2 = 1 \\ c_1 d_2 + c_2 d_1 = 1 \end{cases}$$
 összeadva $(d_1 + d_2)(c_1 + c_2) = 2$, ahonnan $d_1 + d_2 = \frac{2}{c_1 + c_2} = \frac{2}{\frac{1}{15000} + \frac{1}{25000}} = 18750$ km.

18. Két egyenlő hosszú gyertyát egyszerre gyújtottak meg. Az egyik 3, a másik 5 óra alatt égett el egészen. Egy fényképen a két gyertya hosszának aránya $\frac{1}{2}$, egy másikon $\frac{1}{3}$, egy harmadikon $\frac{1}{4}$. Mikor készültek a fényképek, ha a gyertyák egyenletesen égnek?

Megoldás. Legyen x a gyertyák hossza. Ekkor az első gyertya égési sebességének számértéke $\frac{x}{3}$, a másike $\frac{x}{5}$, tehát t idő alatt az elsőből $t \frac{x}{3}$, a másodikból pedig $t \frac{x}{5}$ hosszúság ég el. A meggyújtás után t idővel a két gyertya hosszának aránya

$$\frac{x - t \frac{x}{3}}{x - t \frac{x}{5}} = \frac{1 - \frac{t}{3}}{1 - \frac{t}{5}} = \frac{3 - t}{5 - t} \cdot \frac{5}{3}.$$

Ha $\frac{3 - t}{5 - t} \cdot \frac{5}{3} = \frac{1}{2}$, akkor $30 - 10t = 15 - 3t \Rightarrow t = \frac{15}{7}$. Ha $\frac{3 - t}{5 - t} \cdot \frac{5}{3} = \frac{1}{3}$, akkor

$15 - 5t = 5 - t \Rightarrow t = \frac{5}{2}$. Ha $\frac{3 - t}{5 - t} \cdot \frac{5}{3} = \frac{1}{4}$, akkor $60 - 20t = 15 - 3t \Rightarrow t = \frac{45}{17}$.

Tehát a fényképek a gyertyák meggyújtása után $\frac{15}{7}$ órával, $2,5$ órával illetve $\frac{45}{17}$ órával készültek.

19. Oldd meg és tárgyald az $\frac{x - a}{x - 2} + \frac{x - b}{x - 3} = 2$ egyenletet!

Megoldás. Az értelmezési tartomány $D = \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$.

$$\begin{aligned} \frac{x-a}{x-2} + \frac{x-b}{x-3} = 2 &\Leftrightarrow \frac{x-2+2-a}{x-2} + \frac{x-3+3-b}{x-3} = 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 + \frac{2-a}{x-2} + 1 + \frac{3-b}{x-3} = 2 \Leftrightarrow \frac{2-a}{x-2} + \frac{3-b}{x-3} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (2-a)x - 6 + 3a + (3-b)x - 6 + 2b = 0 \Leftrightarrow (5-a-b)x = 12 - 3a - 2b \end{aligned}$$

Ha $a+b \neq 5$, akkor az egyenletnek egyetlen megoldása van, az $x = \frac{12-3a-2b}{5-a-b}$.

Ez a kifejezés pontosan akkor 2, ha $a=2$ és pontosan akkor 3, amikor $b=3$, tehát ha $a=2$ és $b \neq 3$ vagy $b=3$ és $a \neq 2$, akkor az egyenletnek nincs megoldása. Ha $a+b=5$, akkor az egyenlet $0 \cdot x = 12-3a-2b$ alakban írható, tehát ha a $(12-3a-2b)$ értéke 0, akkor a D halmaz minden eleme megoldása az egyenletnek, különben nincs megoldása az egyenletnek. Ha $b=5-a$ és $12-3a-2b=0$, akkor $a=2$ és $b=3$, tehát a következő táblázatban foglalhatjuk össze az eseteket:

a	b	A megoldáshalmaz
2	3	$\mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$
	$\mathbb{R} \setminus \{3\}$	$\emptyset$
$\mathbb{R} \setminus \{2\}$	3	$\emptyset$
	$\mathbb{R} \setminus \{3\}$ és $a+b=5$	$\emptyset$
	$\mathbb{R} \setminus \{3\}$ és $a+b \neq 5$	$M = \left\{ \frac{12-3a-2b}{5-a-b} \right\}$

20. Micimackó órájának számlapjáról lekoptak a számok. Egy reggeli alkalmából Malacka megkérdezte Micimackót, hogy mennyi az idő. Erre Micimackó azt válaszolta, hogy a kis és a nagy mutató merőleges egymásra és, hogy az elmúlt egy órában ilyen állás csak egyszer fordult elő. Meg tudja-e állapítani Malacka, hogy mennyi az idő, ha tudja, hogy déli 12 óra előtt reggeliznek?

Megoldás. Egy óra kismutatója 12 óra alatt tesz meg 360 fokot, tehát egy óra alatt 30 fokot mozdul, egy perc alatt pedig $\frac{360}{12 \cdot 60} = \frac{1}{2}$ fokot. A nagymutató egy perc alatt

$\frac{360}{60} = 6$ fokot mozdul. Ha Malacka x óra y perckor kérdezte meg az időt, ebben az időpontban a kismutató $o = 30x + 12y$ fokos szöget zár be a 12 órához tartozó sugárral, míg a nagymutató $p = 6y$ fokos szöget. Mivel a két mutató merőleges egymásra, az $(o-p)$ egész szám osztható 90-nel, továbbá tudjuk, hogy $x \in \{0, 1, 2, \dots, 11\}$ és $y \in \{0, 1, 2, \dots, 59\}$.

$$\begin{aligned} (o-p):90 &\Rightarrow \left(30x - \frac{11}{2}y\right):90 \Rightarrow y = 2y_1, (30x - 11y_1):90 \Rightarrow (30x - 11y_1):30 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 11y_1:30 \Rightarrow y_1:30 \Rightarrow y = 2y_1:60 \Rightarrow y = 0. \end{aligned}$$

Visszahelyettesítve $30x:90 \Rightarrow x \in \{0, 3, 6, 9\}$.

Pontosan 6 órakor a két mutató 180° -os szöget zár be, tehát ez az eset nem állhat fenn, s mivel 12 előtt reggeliznek, csak az $x = 9$ eset lehetséges. Tehát Malacka pontban 9 órakor kérdezte meg az időt.

21. Egy órán a három mutató 12 órakor találkozik. Hány perc múlva felezi a másodpercmutató az óra- és percmutató által bezárt szöget?

Megoldás. x óra y perc és z másodperc múlva a másodpercmutató a 12-eshez tartozó sugárral $z \cdot 6^\circ$ -os szöget zár be, a percmutató $y \cdot 6^\circ$ -os szöget (mert a percmutató csak percenként mozdul el) és a kismutató $x \cdot 30^\circ + \left\lfloor \frac{y}{12} \right\rfloor \cdot 6^\circ$ -os szöget (mert az óramutató 12 percenként mozdul egyet). A másodpercmutató pontosan akkor felezi a percmutató és az óramutató által bezárt szöget, ha

$$2 \cdot z \cdot 6^\circ = x \cdot 30^\circ + \left\lfloor \frac{y}{12} \right\rfloor \cdot 6^\circ + y \cdot 6^\circ \text{ vagy}$$

$$2 \cdot z \cdot 6^\circ + 360^\circ = x \cdot 30^\circ + \left\lfloor \frac{y}{12} \right\rfloor \cdot 6^\circ + y \cdot 6^\circ.$$

Így a $2z = 5x + y + \left\lfloor \frac{y}{12} \right\rfloor$ vagy $2z + 60 = 5x + y + \left\lfloor \frac{y}{12} \right\rfloor$ egyenlethez jutunk. Ennek a legkisebb megoldása $x = 0$, $y = 2$ és $z = 1$.

22. Határozd meg az összes olyan időpontot, amikor a percmutató állása felcserélhető az óramutató állásával.

Megoldás. A feladat megfogalmazásából nem derül ki, hogy milyen óráról van szó (a mutatók folytonosan járnak, vagy beosztásról beosztásra ugranak) és, hogy mit értünk felcserélhetőségen. Világos, hogy ha a felcserélés után is ugyanazt az órát kell mutatniuk, akkor a két mutató egymást kell fedje. Ilyen állás a folytonos mozgású mutatók esetében 11-szer van 0 óra 0 perctől 11 óra 59 percig (egy körbejárás alatt), minden órában egy, az utolsó kivételével. A találkozásoknak megfelelő

ívhosszak a (12-től számítva a mutatók járása mentén) $\frac{60m}{11}$ alakú, ahol $m \in \{0, 1, 2, \dots, 10\}$. Nem folytonos járású mutatók esetén a helyzet bonyolultabb,

mert x óra y perc után a mutatók $x \cdot 30^\circ + \left\lfloor \frac{y}{12} \right\rfloor \cdot 6^\circ$ -os, illetve $y \cdot 6^\circ$ -os szöget

zárnak be a 12-eshez húzott sugárral. Így az $x \cdot 30^\circ + \left\lfloor \frac{y}{12} \right\rfloor \cdot 6^\circ = y \cdot 6^\circ$ egyenlethez

jutunk. Mivel $\left\lfloor \frac{y}{12} \right\rfloor \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, a következő esetek tárgyalása szükséges:

1. eset. Ha $\left\lfloor \frac{y}{12} \right\rfloor = 0$, akkor $y = 5x$, tehát a $(0, 0)$, $(1, 5)$, $(2, 10)$ megoldásokhoz jutunk (12 óra, 1 óra 5 perc és 2 óra 10 perc).

2. eset. Ha $\left\lfloor \frac{y}{12} \right\rfloor = 1$, akkor $y = 5x + 1$, tehát a $(3, 16)$, $(4, 21)$ megoldásokhoz jutunk (3 óra 16 perc és 4 óra 21 perc).

3. eset. Ha $\left\lfloor \frac{y}{12} \right\rfloor = 2$, akkor $y = 5x + 2$, tehát az $(5, 27)$, $(6, 32)$ megoldásokhoz jutunk (5 óra 27 perc és 6 óra 32 perc).

4. eset. Ha $\left\lfloor \frac{y}{12} \right\rfloor = 3$, akkor $y = 5x + 3$, tehát a $(7, 38)$, $(8, 43)$ megoldásokhoz jutunk (7 óra 38 perc és 8 óra 43 perc).

5. eset. Ha $\left\lfloor \frac{y}{12} \right\rfloor = 4$, akkor $y = 5x + 4$, tehát a $(9, 49)$, $(10, 54)$ és $(11, 59)$ megoldásokhoz jutunk (9 óra 49 perc, 10 óra 54 perc és 11 óra 59 perc).

Másrészt a felcserélhetőség azt is jelentheti, hogy a felcserélt pozíció is egy valós állást jelentsen (a mutatók egymáshoz viszonyított helyzete nem lehet tetszőleges például 3 óra 0 perckor ha megcseréljük a mutatók állását, egy nem lehetséges pozíciót kapunk). Ebben az esetben is más a helyzet folytonosan mozgó mutatók és ugráló mutatók esetében. Az első esetben ha x és y a kis és nagymutató által bejárt ív

hossza a 12^{00} -hoz viszonyítva, akkor $\left(\frac{x}{5} - \frac{y}{60}\right) \in \mathbb{Z}$. Ebből következik, hogy

$$x = \frac{60(12m + n)}{143} \quad \text{és} \quad y = \frac{60(12n + m)}{143}. \quad \text{Ha a mutatók beosztásról beosztásra}$$

$$\text{ugranak, akkor az } y = \left\lfloor \frac{5x + \left\lfloor \frac{y}{12} \right\rfloor}{12} \right\rfloor \quad \text{vagy} \quad y = 30 + \left\lfloor \frac{5x + \left\lfloor \frac{y}{12} \right\rfloor}{12} \right\rfloor \quad \text{egyenlethez jutunk,}$$

ahol a felcserélhető állás x óra y perc. Az első egyenletnek csak $y \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ esetén van megoldása és a másodiknak csak $y \in \{30, 31, 32, 33, 34\}$ esetén. A megoldások felsorolását az olvasóra bízunk.

23. Oldd meg az $\frac{x+a+b}{x+a} = \frac{x+a-b}{x-a} - \frac{a^2+b^2}{x^2-a^2}$ **egyenletet a valós számok halmazán** ($a, b \in \mathbb{R}$).

Megoldás. Az értelmezési tartomány: $D = \mathbb{R} \setminus \{-a, a\}$.

$$\frac{x+a+b}{x+a} = \frac{x+a-b}{x-a} - \frac{a^2+b^2}{x^2-a^2} \Leftrightarrow \frac{b}{x+a} = \frac{2a-b}{x-a} - \frac{a^2+b^2}{x^2-a^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow bx - ab = (2a-b)x + 2a^2 - ab - a^2 - b^2 \Leftrightarrow (a-b)(2x+a+b) = 0.$$

Ha $a = b$, akkor minden $\pm a$ -tól különböző valós szám megoldás.

Ha $a \neq b$, akkor $x = -\frac{a+b}{2}$. Le kell ellenőrizni, hogy a kapott érték benne van-e az értelmezési tartományban.

$-\frac{a+b}{2} = -a \Leftrightarrow a+b = 2a \Leftrightarrow a = b$, ez ellentmondás, hiszen az $a \neq b$ esetben vagyunk.

$$-\frac{a+b}{2} = a \Leftrightarrow a+b = -2a \Leftrightarrow b = -3a.$$

Összefoglalva, ha $a = b$, akkor a megoldáshalmaz $M = \mathbb{R} \setminus \{-a, a\}$, ha $a \neq b, b \neq -3a$, akkor egyetlen megoldás van, ha pedig $a \neq b, b = -3a$, akkor nincs megoldás.

24. Egy hatjegyű számnak első számjegye 1, a második 4. Ha e két számjegyet egyenként letöröljük és a szám végére írjuk, akkor az eredeti szám kétszeresét kapjuk. Melyik ez a szám?

Megoldás. Legyen a keresett szám $\overline{14abcd}$. A feltétel szerint felírhatjuk az $\overline{abcd14} = 2 \cdot \overline{14abcd}$ egyenlőséget. Kifejtve, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + d \cdot 10^2 + 10 + 4 &= \\ &= 2 \cdot 10^5 + 8 \cdot 10^4 + 2a \cdot 10^3 + 2b \cdot 10^2 + 2c \cdot 10 + 2d \end{aligned}$$

vagyis

$$(a-2)10^5 + (b-8)10^4 + (c-2a)10^3 + (d-2b)10^2 + (1-2c)10 + 4-2d = 0.$$

A bal oldal első öt tagja osztható 10-zel, tehát $(4-2d)$ is többszöröse kell legyen tíznek. Következik, hogy d kettő vagy hét.

Ha $d = 2$, akkor mindkét oldalt elosztva 10-zel, kapjuk, hogy $(a-2)10^4 + (b-8)10^3 + (c-2a)10^2 + (d-2b)10 + (1-2c) = 0$, ami nem lehetséges, mert a bal oldalon egy páratlan szám áll, így nem lehet zéró. Tehát $d = 7$. Ebben az esetben

$$(a-2)10^4 + (b-8)10^3 + (c-2a)10^2 + (7-2b)10 - 2c = 0,$$

tehát $c = 5$ és $(a-2)10^3 + (b-8)10^2 + (5-2a)10 + 6 - 2b = 0$. Innen kapjuk, hogy $b = 8$ és $(a-2)10^2 + 4 - 2a = 0$, vagyis $a = 2$. A keresett szám tehát az 142857.

25. Oldd meg a valós számok halmazán az $\frac{x}{ab} + \frac{x}{bc} + \frac{x}{ac} - 1 = abc - (a+b+c)x$, $(a, b, c \in \mathbb{R})$ egyenletet.

Megoldás. A következő ekvivalens átalakításokat végezzük:

$$\begin{aligned} \frac{x}{ab} + \frac{x}{bc} + \frac{x}{ca} - 1 &= abc - (a+b+c)x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{a+b+c}{abc}x + (a+b+c)x &= abc + 1 \Leftrightarrow (a+b+c)(1+abc)x = abc(abc+1). \end{aligned}$$

Ha $abc = -1$, akkor a megoldáshalmaz a valós számok halmaza.

Ha $abc \neq -1$, akkor az egyenlet így írható: $(a+b+c)x = abc$. Ebben az esetben, ha $a+b+c \neq 0$, akkor az egyenlet egyetlen megoldása az $x = \frac{abc}{a+b+c}$.

Ha $a + b + c = 0$ és $abc = 0$, vagyis ha az a, b, c számok közül valamelyik nulla, a másik kettő összege nulla, akkor minden valós szám megoldás. Ha $a + b + c = 0$, de $abc \neq 0$, akkor az egyenletnek nincs megoldása.

26. Hiero király koronájának súlya 20 font. Vízben a korona $1\frac{1}{4}$ fontot veszít a súlyából. Hány font aranyat és hány font ezüstöt tartalmaz a korona (más anyagot nem tartalmaz), ha az arany fajsúlya $19\frac{1}{2}$, az ezüsté pedig $10\frac{1}{2}$?

Megoldás. Jelöljük V_1 -gyel és V_2 -vel a koronában levő arany, illetve ezüst térfogatát. Mivel a víz fajsúlya 1 és Arkhimédész törvénye szerint a súlyvesztés a kiszorított víz súlyával egyenlő, írhatjuk, hogy $V_1 + V_2 = \frac{5}{4}$. Másrészt a korona súlya

$V_1 \cdot \frac{39}{2} + V_2 \cdot \frac{21}{2} = 20$, tehát $V_1 = \frac{55}{72}$ és $V_2 = \frac{35}{72}$, és így a korona $V_1 \cdot \frac{39}{2} = \frac{55}{72} \cdot \frac{39}{2} = \frac{715}{48} \approx 14,9$ font aranyat és $V_2 \cdot \frac{21}{2} = \frac{35}{72} \cdot \frac{21}{2} = \frac{245}{48} \approx 5,10$ font ezüstöt tartalmaz.

II.2.1. Gyakorlatok és feladatok (42. oldal)

1. Oldd meg a valós számok körében a következő egyenlőtlenségeket:

a) $2x - 1 < \frac{x+1}{3}$; **b)** $\frac{x+1}{2} + \frac{x-1}{2} + \frac{x}{6} < 0$; **c)** $(x+1)(x-1) - x^2 < x$;

d) $\sqrt{2}x + \sqrt{3} < \sqrt{6}$; **e)** $0, (6)x + 0,25 < \frac{x}{3} + 0,25(3)$; **f)** $\frac{x+1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} < \sqrt{3} + \sqrt{2}$.

Megoldás. **a)** $2x - 1 < \frac{x+1}{3} \Leftrightarrow 6x - 3 < x + 1 \Leftrightarrow 5x < 4 \Leftrightarrow x < \frac{4}{5}$;

b) $\frac{x+1}{2} + \frac{x-1}{2} + \frac{x}{6} < 0 \Leftrightarrow \frac{3x+3+3x-3+x}{6} < 0 \Leftrightarrow 7x < 0 \Leftrightarrow x < 0$;

c) $(x+1)(x-1) - x^2 < x \Leftrightarrow x^2 - 1 - x^2 < x \Leftrightarrow -1 < x$;

d) $\sqrt{2}x + \sqrt{3} < \sqrt{6} \Leftrightarrow \sqrt{2}x < \sqrt{6} - \sqrt{3} \Leftrightarrow x < \frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x < \sqrt{3} - \frac{\sqrt{6}}{2}$;

e) $0, (6)x + 0,25 < \frac{x}{3} + 0,25(3) \Leftrightarrow \frac{6}{9}x + \frac{1}{4} < \frac{x}{3} + \frac{253-25}{900} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \frac{2x}{3} - \frac{x}{3} < \frac{19}{75} - \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{x}{3} < \frac{1}{300} \Leftrightarrow x < \frac{1}{100}$;

f) $\frac{x+1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} < \sqrt{3} + \sqrt{2} \Leftrightarrow x+1 > (\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3}) \Leftrightarrow x > -2$.

2. Oldd meg és tárgyald a következő egyenlőtlenségeket, ha $m \in \mathbb{R}$:

a) $mx + 1 \leq m$; **b)** $m + x \geq (m - 1)(x + 1)$; **c)** $\frac{1}{x(x+1)} < \frac{1}{(x+1)(x+2)}$;
d) $2mx < m^2 + 1$; **e)** $\frac{1}{x-2} > \frac{2}{x-m}$; **f)** $\frac{m-x}{x} < \frac{m+x}{1-x}$.

Megoldás. **a)** $mx + 1 \leq m \Leftrightarrow mx \leq m - 1$. Ha $m > 0$, akkor $x \leq \frac{m-1}{m}$. Ha $m < 0$, akkor $x \geq \frac{m-1}{m}$. Ha $m = 0$, akkor nincs megoldása az egyenlőtlenségnek.

b) $m + x \geq (m - 1)(x + 1) \Leftrightarrow m + x \geq (m - 1)x + m - 1 \Leftrightarrow (m - 2)x \leq 1$

Ha $m - 2 > 0$, vagyis $m > 2$, akkor $x \leq \frac{1}{m-2}$.

Ha $m - 2 < 0$, vagyis $m < 2$, akkor $x \geq \frac{1}{m-2}$.

Ha $m = 2$, akkor minden valós szám kielégíti az egyenlőtlenséget.

c) $M = (-\infty, -2) \cup (-1, 0)$;

d) Ha $m > 0$, akkor a megoldáshalmaz $\left(-\infty, \frac{m^2+1}{2m}\right)$.

Ha $m < 0$, akkor $x \in \left[\frac{m^2+1}{2m}, \infty\right)$.

Ha $m = 0$, akkor minden $x \in \mathbb{R}$ megoldás.

e) Az $\frac{1}{x-2} > \frac{2}{x-m}$ egyenlőtlenség megoldásait csak az $\mathbb{R} \setminus \{2, m\}$ halmazban kereshetjük.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-2} > \frac{2}{x-m} &\Leftrightarrow \frac{1}{x-2} - \frac{2}{x-m} > 0 \Leftrightarrow \frac{x-m-2x+4}{(x-2)(x-m)} > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{x+m-4}{(x-2)(x-m)} < 0 \Leftrightarrow (x+m-4)(x-2)(x-m) < 0. \end{aligned}$$

Három szám szorzata csak úgy lehet negatív, ha vagy mindhárom szám negatív, vagy az egyik negatív és a másik kettő pozitív. Így a következő eseteket kell megvizsgálni:

$$\text{I. } \begin{cases} x+m-4 < 0 \\ x-2 < 0 \\ x-m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 4-m \\ x < 2 \\ x < m \end{cases} \Leftrightarrow x < \min\{4-m, 2, m\}$$

Könnyű ellenőrizni, hogy

$$\min\{4-m, 2, m\} = m, \text{ ha } m \leq 2 \text{ és } \min\{4-m, 2, m\} = 4-m, \text{ ha } m > 2.$$

$$\text{II. } \begin{cases} x + m - 4 < 0 \\ x - 2 > 0 \\ x - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 4 - m \\ x > 2 \\ x > m \end{cases} . \text{ Az első két egyenlőtlenség alapján}$$

$2 < x < 4 - m \Rightarrow 2 < 4 - m \Rightarrow m < 2$. Tehát az $m \geq 2$ esetben nincs megoldás, ha pedig $m < 2$, akkor $x \in (2, 4 - m)$.

$$\text{III. } \begin{cases} x + m - 4 > 0 \\ x - 2 < 0 \\ x - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 - m \\ x < 2 \\ x > m \end{cases} . \text{ A második és a harmadik egyenlőtlenség alapján}$$

$m < x < 2 \Rightarrow m < 2$ kell legyen. Következik, hogy ha $m \geq 2$, akkor az egyenlőtlenségnek nincs megoldása, ha pedig $m < 2$, akkor $4 - m > 2$, tehát $x \in (m, 2)$.

$$\text{IV. } \begin{cases} x + m - 4 > 0 \\ x - 2 > 0 \\ x - m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 - m \\ x > 2 \\ x < m \end{cases} . \text{ Az első és harmadik egyenlőtlenség szerint}$$

$4 - m < x < m \Rightarrow 4 - m < m \Rightarrow 2 < m$. Ha tehát $m \leq 2$, akkor nincs megoldás. Ha $m > 2$, akkor $4 - m < 2$, így $x \in (2, m)$.

Összesítve az eddigi részeredményeket (egyesítve a halmazokat), írhatjuk, hogy ha $m < 2$, akkor $x \in (-\infty, m) \cup (2, 4 - m) \cup (m, 2) = (-\infty, 4 - m) \setminus \{2, m\}$, ha $m = 2$, akkor $x \in (-\infty, m) \Rightarrow x \in (-\infty, 2)$, ha $m > 2$, akkor $x \in (-\infty, 4 - m) \cup (2, m)$.

f) Az $\frac{m-x}{x}, \frac{m+x}{1-x}$ törték nevezői közül egyik sem lehet 0, így $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

$$\frac{m-x}{x} < \frac{m+x}{1-x} \Leftrightarrow \frac{m}{x} - 1 < \frac{m+1}{1-x} - 1 \Leftrightarrow \frac{m}{x} < \frac{m+1}{1-x} .$$

Az egyenlőtlenséget az előző alponthoz hasonlóan oldjuk meg.

3. Oldd meg a valós számok halmazában a következő egyenlőtlenségeket:

a) $(x-1)(x+1) < 0$; **b)** $(2x-3)(x+7) \geq 0$; **c)** $(3x-4)(x-2) < 0$;

d) $(2x-1)(x+3) \geq 0$; **e)** $(3x+1)(2x+3) < 0$; **f)** $(3-2x)(1+x) \leq 0$;

g) $(1+2x)(3-x) < 0$; **h)** $(x-1)(x-2)(x-3) < 0$;

i) $(x+1)(x-2)(3x-1) > 0$; **j)** $(x-1)(2x+1)(3x-1)(5x+2) \leq 0$;

k) $\frac{x+1}{x-2} < 0$; **l)** $\frac{5x-3}{3x+1} \geq 0$; **m)** $\frac{2-5x}{(1+x)(2x-4)} \geq 0$.

Megoldás. a)

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x-1$	-----0+++++			
$x+1$	-----0+++++			
$(x-1)(x+1)$	+++++	0-----	0+++++	+++++

A megoldás tehát $x \in (-1, 1)$.

b) $x \in (-\infty, -7) \cup (3/2, \infty)$; **c)** $x \in \left(\frac{4}{3}, 2\right)$; **d)** $x \in (-\infty, -3) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$;

e) $x \in \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}\right)$; **f)** $x \in \left[-1, \frac{3}{2}\right]$; **g)** $x \in \left(-\frac{1}{2}, 3\right)$;

h)

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$x-1$	-----0+++++				
$x-2$	-----0+++++				
$x-3$	-----0+++++				
$(x-1)(x-2)(x-3)$	-----	0++++	0-----	0+++++	+++++

A megoldás: $x \in (-\infty, 1) \cup (2, 3)$.

i) $x \in \left(-1, \frac{1}{3}\right) \cup (2, \infty)$; **j)** $x \in \left[-\frac{1}{2}, -\frac{2}{5}\right] \cup \left[\frac{1}{3}, 1\right]$; **k)** $x \in (-1, 2)$;

l) $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup [3/5, \infty)$;

m)

x	$-\infty$	-1	$2/5$	2	$+\infty$
$2-5x$	+++++	+++++	0-----	-----	-----
$1+x$	-----	0+++++	+++++	+++++	+++++
$2x-4$	-----	-----	-----	0+++++	+++++
$\frac{2-5x}{(1+x)(2x-4)}$	+++++	+++++	0+++++	+++++	-----

A megoldás $x \in (-\infty, -1) \cup \left[\frac{2}{5}, 2\right)$.

4. A tényezőkre bontás segítségével oldd meg a következő egyenlőtlenségeket:

a) $x^2 - 3x + 2 \geq 0$; **b)** $6x^2 + 5x + 1 \leq 0$; **c)** $x^3 - 2x^2 - x + 2 > 0$;

d) $(x^2 - 3x + 2)(x + 1) \geq 0$; **e)** $3x^2 + x - 2 < 0$; **f)** $\frac{x^2 - 1}{x + 3} > 0$;

$$\text{g)} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 4x + 4} \geq 0.$$

Megoldás. a) $x^2 - 3x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1] \cup [2, \infty);$

$$\text{b)} 6x^2 + 5x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow (2x+1)(3x+1) \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right];$$

$$\text{c)} x^3 - 2x^2 - x + 2 > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)(x+1) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 1) \cup (2, \infty);$$

$$\text{d)} (x^2 - 3x + 2)(x+1) \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)(x+1) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1, 1] \cup [2, \infty];$$

$$\text{e)} 3x^2 + x - 2 < 0 \Leftrightarrow (3x-2)(x+1) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-1, \frac{2}{3}\right);$$

$$\text{f)} \frac{x^2 - 1}{x + 3} > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x+3) > 0 \Leftrightarrow x \in (-3, -1) \cup (1, \infty);$$

$$\text{g)} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 4x + 4} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+2)(x+3)}{(x-2)^2} \geq 0 \Leftrightarrow (x+2)(x+3) \geq 0, x \neq 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3] \cup [-2, 2) \cup (2, \infty);$$

5. Oldd meg és tárgyald a következő egyenlőtlenségeket, ha $m, n, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$:

$$\text{a)} (mx-1)(1+x) < 0; \text{b)} (mx-n)(nx+m) < 0; \text{c)} (x-x_1)(x-x_2) < 0;$$

$$\text{d)} (m-x)(m+x) > 0; \text{e)} (m+1-mx)(1+mx) \geq 0;$$

$$\text{f)} (x-x_1)(x-x_2) \geq 0; \text{g)} -(x-x_1)(x-x_2) \leq 0; \text{h)} -(x-x_1)(x-x_2) < 0.$$

Megoldás. a)

$$\text{I. eset: } m \in (0, \infty) \Rightarrow x \in \left(-1, \frac{1}{m}\right);$$

$$\text{II. eset: } m = 0 \Rightarrow x \in (-1, \infty);$$

$$\text{III. eset: } m \in (-1, 0) \Rightarrow x \in \left(-\infty, \frac{1}{m}\right) \cup (-1, \infty);$$

$$\text{IV. eset: } m = -1 \Rightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\};$$

$$\text{V. eset: } m \in (-\infty, -1) \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{m}, \infty\right).$$

$$\text{b)} \text{ I. eset: } m = n = 0 \Rightarrow M_1 = \emptyset;$$

$$\text{II. eset: } m = 0, n \neq 0 \Rightarrow -n^2x < 0 \Rightarrow x \in (0, \infty);$$

$$\text{III. eset: } m \neq 0, n = 0 \Rightarrow m^2x < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0);$$

$$\text{IV. eset: } mn > 0 \Rightarrow mn \left(x - \frac{n}{m}\right) \left(x + \frac{m}{n}\right) < 0 \Rightarrow x \in \left(-\frac{m}{n}, \frac{n}{m}\right);$$

$$\text{V. eset: } mn < 0 \Rightarrow \left(x - \frac{n}{m}\right) \left(x + \frac{m}{n}\right) > 0 \Rightarrow x \in \left(-\infty, \frac{n}{m}\right) \cup \left(-\frac{m}{n}, \infty\right).$$

$$\text{c)} \text{ I. eset: } m = 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \text{ megoldás;}$$

II. eset: $m \neq 0 \Rightarrow \left(x - 1 - \frac{1}{m}\right)\left(x + \frac{1}{m}\right) \leq 0 \Rightarrow x \in \left[-\frac{1}{m}, 1 + \frac{1}{m}\right]$, ha

$m \in (-\infty, -2] \cup (0, \infty)$, illetve $x \in \left[1 + \frac{1}{m}, -\frac{1}{m}\right]$, ha $m \in (-2, 0)$.

d) $m = 0$ esetben nincs megoldás, ha $m \neq 0$, akkor $x \in (-|m|, |m|)$.

e) Ha $x_1 = x_2$, nincs megoldás, ha $x_1 \neq x_2$, akkor $x \in (\min\{x_1, x_2\}, \max\{x_1, x_2\})$.

f) Ha $x_1 = x_2$, akkor $M = \mathbb{R}$, ha pedig $x_1 \neq x_2$, akkor

$$x \in (-\infty, \min\{x_1, x_2\}] \cup [\max\{x_1, x_2\}, \infty).$$

g) Az egyenlőtlenség ekvivalens az előző pontbeli egyenlőtlenséggel, így a megoldás is azonos.

h) Ha $x_1 = x_2$, akkor $M = \mathbb{R} \setminus \{x_1\}$, ha $x_1 \neq x_2$, akkor

$$x \in (-\infty, \min\{x_1, x_2\}) \cup (\max\{x_1, x_2\}, \infty).$$

6. Oldd meg a $\frac{3}{x-1} + \frac{1}{2} < 2 - \frac{2}{x-1}$ egyenlőtlenséget.

Megoldás

$$\begin{aligned} \frac{3}{x-1} + \frac{1}{2} < 2 - \frac{2}{x-1} &\Leftrightarrow \frac{5}{x-1} - \frac{3}{2} < 0 \Leftrightarrow \frac{10-3x+3}{2(x-1)} < 0 \Leftrightarrow \frac{13-3x}{x-1} < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup \left(\frac{13}{3}, \infty\right). \end{aligned}$$

7. Oldd meg a valós számok halmazában a következő egyenlőtlenségeket:

a) $\frac{x-1}{x+2} < \frac{x+1}{x-2}$; **b)** $\frac{x-2}{x+1} < \frac{x+2}{x-1}$; **c)** $\frac{x+1}{x-5} > \frac{x-2}{x+3}$; **d)** $\frac{x-2}{x+3} < \frac{x+1}{x-4}$.

Megoldás. a)

$$\frac{x-1}{x+2} < \frac{x+1}{x-2} \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+2} - \frac{x+1}{x-2} < 0 \Leftrightarrow \frac{x}{(x-2)(x+2)} > 0 \Leftrightarrow x \in (-2, 0) \cup (2, \infty);$$

$$\textbf{b)} \quad \frac{x-2}{x+1} < \frac{x+2}{x-1} \Leftrightarrow \frac{x+1-3}{x+1} < \frac{x-1+3}{x-1} \Leftrightarrow 1 - \frac{3}{x+1} < 1 + \frac{3}{x-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow 0 < \frac{2x}{(x-1)(x+1)} \Leftrightarrow x \in (-1, 0) \cup (1, \infty);$$

$$\textbf{c)} \quad \frac{x+1}{x-5} > \frac{x-2}{x+3} \Leftrightarrow 1 + \frac{6}{x-5} > 1 - \frac{5}{x+3} \Leftrightarrow \frac{6}{x-5} + \frac{5}{x+3} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{6x+18+5x-25}{(x-5)(x+3)} > 0 \Leftrightarrow (11x-7)(x-5)(x+3) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-3, \frac{7}{11}\right) \cup (5, \infty);$$

$$\textbf{d)} \quad \frac{x-2}{x+3} < \frac{x+1}{x-4} \Leftrightarrow 1 - \frac{5}{x+3} < 1 + \frac{5}{x-4} \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{x-4} + \frac{1}{x+3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{2x-1}{(x-4)(x+3)} \Leftrightarrow x \in (-3, 1/2) \cup (4, \infty).$$

8. Egy sakk körversenyen (minden mérkőzésen 1 pontot kap a nyertes, 0 pontot a vesztes illetve döntetlen esetén 0,5 – 0,5 pontot kap mindkettő) csak nagymesterek és mesterek vettek részt. Az utóbbiak száma 3-szor annyi volt, mint a nagymestereké, elért pontjaik együttes száma pedig 1,2-szerese a nagymesterek pontszámai összegének. Hányan vettek részt a versenyen? Mit mondhatunk az első három helyezetttről?

Megoldás. Ha x a nagymesterek száma, akkor $3x$ a mestereké és $4x$ az összes résztvevők száma. A versenyen mindenki mindenkivel kétszer játszik (egyszer fekete és egyszer fehér bábukkal), tehát összesen $4x(4x - 1)$ a megszerzett pontok száma.

Ebből a mesterek $\frac{6}{11}$ -ed részt szereztek, a többi pontot a nagymesterek szerezték.

Másrészt a mesterek által összegyűjtött pontok száma legalább annyi, mint azoknak a játszmáknak a száma, amelyekben csak mesterek játszottak. Így

$\frac{6}{11}4x(4x - 1) \geq 3x(3x - 1)$, tehát $x \leq 3$. Az $x = 1$ és $x = 2$ esetek nem

lehetségesek, mert a $\frac{6}{11}4x(4x - 1)$ szám ezekre az értékekre nem $\frac{k}{2}$, $k \in \mathbb{N}$ alakú.

Tehát az egyetlen lehetséges megoldás az $x = 3$. Ez azt jelenti, hogy 3 nagymester és 9 mester vett részt a versenyen. $x = 3$ esetén a vizsgált egyenlőtlenségben egyenlőség áll, tehát egyetlen mester sem szerzett pontot nagymester elleni játszmából, és így az első három helyezett a három nagymester.

9. Az A és B városok közti P helyről kétféle módon juthatunk B -be: gyalog bejárva a PB útvonalat vagy gyalog megyünk A -ba és onnan vonattal B -be. Mely pontokból előnyösebb az első, és melyekből a második módot választani, ha a legrövidebb idő alatt szeretnénk eljutni B -be, ha gyalog 5 km/h sebességgel megyünk, a vonat sebessége 50 km/h , és az AB távolság 20 km ?

Megoldás. Jelöljük az B és P városok közti távolságot x -szel. Meg kell határozni, x mely értékeire melyik utazási módot érdemes választani.

Gyalog megtéve a PB útvonalat, az utazáshoz szükséges idő $t_1 = \frac{PB}{5} = \frac{x}{5}$ óra, a

második módot választva pedig $t_2 = \frac{AP}{5} + \frac{AB}{50} = \frac{20 - x}{5} + \frac{20}{50}$ órába telik eljutni

P -ből B -be. Akkor rövidebb gyalogosan megtenni a PB távot, ha $t_1 \leq t_2$, vagyis ha $x \leq 11 \text{ km}$.

10. Egy egyfordulós körmérkőzéses pingpongbajnokság győzteséről tudjuk, hogy mérkőzéseinek több, mint 68 és kevesebb, mint 69 százalékát nyerte meg. Legalább hányan indultak a bajnokságon?

Megoldás. Ha mindenki n mérkőzést játszott és az első helyezett k mérkőzést nyert, akkor $0,68n < k < 0,69n$. Ez alapján $0,31n < n - k < 0,32n$, tehát

$$0,62n < 2(n - k) < 0,64n < 0,68n < k < 0,69n.$$

A $2(n-k)$ és a k különböző egész számok, tehát $0,69n - 0,62n > 1$ és így $n \geq 15$. Ha $n = 15$, akkor $0,68n$ és $0,69n$ közt nincs egész szám, tehát $n \geq 16$. $n = 16$ esetén $k = 11$. Igazolni kell, hogy ez lehetséges is. Jelöljük G -vel a győztest és a többi 16 résztvevőt osszuk két 5-ös (A, B) és egy 6-os (C) csoportba. Ha G legyőzte az A és C tagjait és kikapott a B csoport tagjaitól, akkor 11 győzelme és 5 veresége van. Ha a C csoport tagjai legyőzték a B csoport tagjait, kikaptak az A csoport tagjaitól és a B csoport tagjai legyőzték az A csoport tagjait, akkor G -nek van a legtöbb pontja. Tehát legalább 17 résztvevő volt a bajnokságon.

11. Húsvétkor egy olyan családhoz, ahol 4 lány nevelkedik, a fiúk egyforma, teli üveg kölnivízzel érkeztek. Mindegyik fiú a neki legjobban tetsző lányra a kölnivíz felét a többi háromra 5-5 cseppet, a maradékot pedig a mamára locsolta. Legalább hány csepp kölnivíz volt egy-egy üvegben, ha egy lányra sem jutott 3 üveg kölninél több, de a mamára igen?

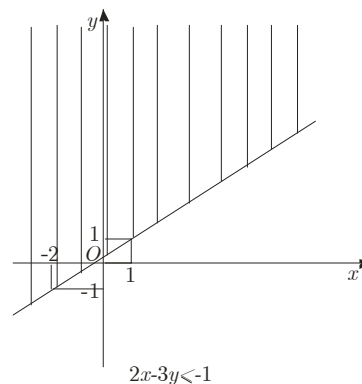
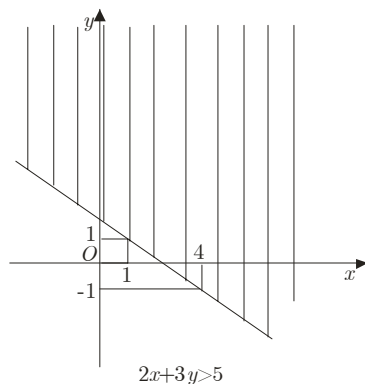
Megoldás. Ha n csepp van egy üvegben és k fiú járt locsolni, akkor a mamára $k\left(\frac{n}{2} - 15\right)$ csepp jutott és a négy lányra összesen $k\left(\frac{n}{2} + 15\right)$ csepp. Így a $k\left(\frac{n}{2} - 15\right) > 3n > \frac{k}{4}\left(\frac{n}{2} + 15\right)$ egyenlőtlenségekhez jutunk. Ebből következik, hogy az üvegekben legalább $n = 52$ csepp kölni volt (és $n = 52$ esetén $k = 15$ locsoló járt a háznál).

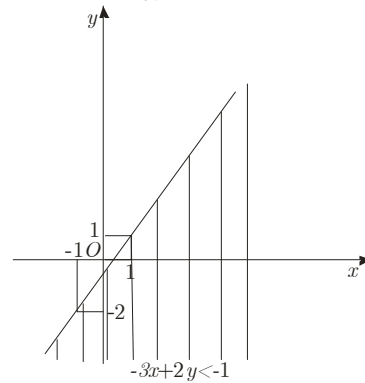
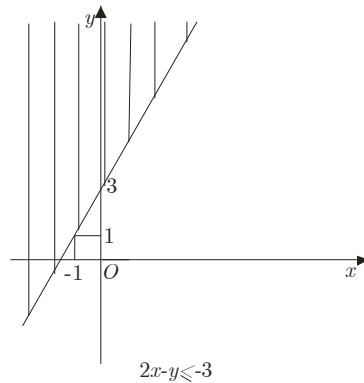
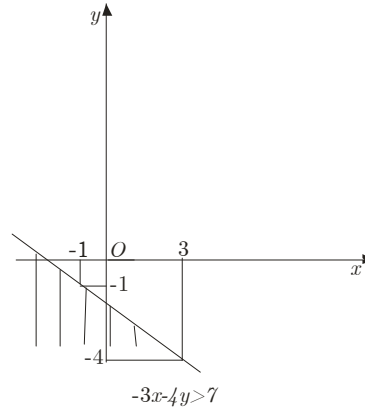
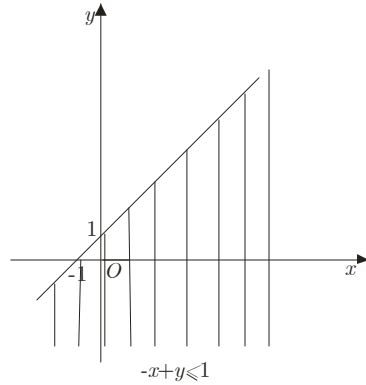
2.2.5. Gyakorlat (44. oldal)

Ábrázold a koordinátarendszerben az alábbi ponthalmazokat:

- a)** $H_1 = \{(x, y) \mid 2x + 3y > 5\}$; **b)** $H_2 = \{(x, y) \mid 2x - 3y \leq -1\}$;
c) $H_3 = \{(x, y) \mid -x + y \leq 1\}$; **d)** $H_4 = \{(x, y) \mid -3x - 4y > 7\}$;
e) $H_5 = \{(x, y) \mid 2x - y \leq -3\}$; **f)** $H_6 = \{(x, y) \mid -3x + 2y < -1\}$.

Megoldás. A halmazok geometriai ábrázolása a mellékelt ábrákon látható.





II.3.4. Gyakorlatok és feladatok (52. oldal)

1. Oldd meg a következő másodfokú egyenleteket és írd fel a másodfokú kifejezés felbontását:

- a)** $3x^2 + 5x - 2 = 0$; **b)** $2x^2 - 5x - 3 = 0$; **c)** $8x^2 - 6x - 9 = 0$;
d) $x^2 - 9 = 0$; **e)** $x^2 + 7x = 0$; **f)** $x^2 - 5 = 0$;
g) $28x^2 - 5x - 3 = 0$; **h)** $10x^2 - x - 3 = 0$; **i)** $x^2 - 3\sqrt{2}x + 4 = 0$;
j) $2x^2 + 5x + 2 = 0$; **k)** $x^2 - 6x + 9 = 0$; **l)** $x^2 + 10x + 24 = 0$.

Megoldás. a) A 3.1.3. következményt használjuk.

$$\Delta = 25 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 49 \Rightarrow x_1 = \frac{-5 + 7}{6} = \frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{-5 - 7}{6} = -2$$

$$3x^2 + 5x - 2 = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x + 2) = (3x - 1)(x + 2);$$

b) $x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = -3, \quad 2x^2 - 5x - 3 = (2x - 1)(x + 3);$

c) $x_1 = \frac{3}{2}, \quad x_2 = -\frac{3}{4}, \quad 8x^2 - 6x + 9 = (2x - 3)(4x + 3);$

d) $x_1 = -3, \quad x_2 = 3, \quad x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3);$

- e)** $x_1 = 0, x_2 = -7, x^2 + 7x = x(x + 7);$
f) $x_1 = \sqrt{5}, x_2 = -\sqrt{5}, x^2 - 5 = (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5});$
g) $x_1 = -\frac{1}{4}, x_2 = \frac{3}{7}, 28x^2 - 5x - 3 = (4x + 1)(7x - 3);$
h) $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = \frac{3}{5}, 10x^2 - x - 3 = (2x + 1)(5x - 3);$
i) $x_1 = \sqrt{2}, x_2 = 2\sqrt{2}, x^2 - 3\sqrt{2}x + 4 = (x - \sqrt{2})(x - 2\sqrt{2});$
j) $x_1 = -2, x_2 = -\frac{1}{2}, 2x^2 + 5x + 2 = (x + 2)(2x + 1);$
k) $x_1 = 3, x_2 = 3, x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2;$
l) $x_1 = -4, x_2 = -6, x^2 + 10x + 24 = (x + 4)(x + 6).$

2. Milyen $m \in \mathbb{R}$ esetén van az alábbi egyenleteknek pontosan egy valós gyöke?

- a)** $mx^2 - (m + 2)x + 2 = 0;$ **b)** $mx^2 + (m - 1)x - 2 = 0;$ **c)** $x^2 - mx + 1 = 0;$
d) $(m + 1)x^2 - mx + 1 = 0;$ **e)** $x^2 - (m + 1)x + m = 0;$ **f)** $mx^2 + x + 1 = 0.$

Megoldás. Egy valós együtthatójú másodfokú egyenletnek pontosan akkor van egy valós gyöke, ha a diszkriminánsa 0. Így a következő értékekhez jutunk:

- a)** $0 = \Delta = (m + 2)^2 - 4 \cdot m \cdot 2 \Leftrightarrow (m - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow m = 2;$
b) $m_1 = 3 + 2\sqrt{2}, m_2 = 3 - 2\sqrt{2};$ **c)** $m_1 = -2, m_2 = 2;$
d) $m_1 = 2 + 2\sqrt{2}, m_2 = 2 - 2\sqrt{2};$ **e)** $m_1 = 1, m_2 = 1;$ **f)** $m = \frac{1}{4}.$

3. Milyen $m \in \mathbb{R}$ esetén van az előbbi egyenleteknek pontosan két valós gyöke?

Megoldás. Egy másodfokú egyenletnek pontosan akkor van két valós gyöke, ha a diszkriminánsa szigorúan pozitív. Így a következő eredményekhez jutunk:

- a)** $m \neq 2;$ **b)** $m \in (-\infty, 3 - 2\sqrt{2}) \cup (3 + 2\sqrt{2}, \infty);$ **c)** $m \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty);$
d) $m \in (-\infty, 2 - 2\sqrt{2}) \cup (2 + 2\sqrt{2}, \infty);$ **e)** $m \neq 1;$ **f)** $m \leq \frac{1}{4}.$

4. Írjuk fel azt a másodfokú egyenletet, amelynek gyökei:

- a)** $x_1 = 1; x_2 = 2;$ **b)** $x_1 = 7; x_2 = -7;$ **c)** $x_1 = 0; x_2 = -5;$
d) $x_1 = \frac{5}{3}; x_2 = \frac{3}{5};$ **e)** $x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = \frac{5}{7};$ **f)** $x_1 = -1; x_2 = -\frac{1}{2};$
g) $x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = \frac{1}{6};$ **h)** $x_1 = \frac{1}{3}; x_2 = \frac{1}{4};$ **i)** $x_1 = 3 + \sqrt{2}; x_2 = 3 - \sqrt{2};$
k) $x_1 = \sqrt{6}; x_2 = 2;$ **l)** $x_1 = \frac{1 + \sqrt{2}}{3}; x_2 = \frac{1 - \sqrt{2}}{3};$
m) $x_1 = a + b; x_2 = a - b,$ ahol $a, b \in \mathbb{R}.$

Megoldás. A 3.1.3. következmény vagy a Viéte-féle összefüggéseket használjuk.

- a)** $x^2 - 3x + 2 = 0;$ **b)** $x^2 - 49 = 0;$ **c)** $x^2 + 5x = 0;$

- d)** $15x^2 - 34x + 15 = 0$; **e)** $14x^2 - 17x + 5 = 0$; **f)** $2x^2 - 3x + 1 = 0$;
g) $12x^2 - 8x + 1 = 0$; **h)** $12x^2 - 7x + 1 = 0$; **i)** $x^2 - 6x + 1 = 0$;
k) $x^2 - (2 + \sqrt{6})x + 2\sqrt{6} = 0$; **l)** $9x^2 - 6x - 1 = 0$; **m)** $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$.

5. Ha az $x^2 - mx + 1 = 0$ egyenlet gyökei x_1 és x_2 , írd fel egy olyan másodfokú egyenletet, amelynek a gyökei:

- a)** $y_1 = x_1 + 1; y_2 = x_2 + 1$; **b)** $y_1 = \frac{1}{x_1}; y_2 = \frac{1}{x_2}$, ha $x_{1,2} \neq 0$;
c) $y_1 = x_1 + \frac{1}{x_2}; y_2 = x_2 + \frac{1}{x_1}$, ha $x_{1,2} \neq 0$; **d)** $y_1 = x_1 + x_2; y_2 = x_1 x_2$;
e) $y_1 = \frac{x_1 + x_2}{x_1}; y_2 = \frac{x_1 + x_2}{x_2}$, ha $x_{1,2} \neq 0$; **f)** $y_1 = \frac{x_1}{x_2}; y_2 = \frac{x_2}{x_1}$, $x_{1,2} \neq 0$;
g) $y_1 = x_1^2; y_2 = x_2^2$; **h)** $y_1 = x_1^3; y_2 = x_2^3$; **i)** $y_1 = x_1^{-2}; y_2 = x_2^{-2}$, ha $x_{1,2} \neq 0$;
j) $y_1 = x_1^{-3}; y_2 = x_2^{-3}$, ha $x_{1,2} \neq 0$; **l)** $y_1 = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}; y_2 = \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}$, $x_1^2 + x_2^2 \neq 0$.

Megoldás. A Viète-féle összefüggések alapján $x_1 + x_2 = m$, $x_1 x_2 = 1$. Ezekből kiszámítjuk a keresett egyenlet gyökeinek összegét és szorzatát, majd ismét a Viète összefüggések alapján felírjuk ezt az egyenletet.

a) $y_1 + y_2 = x_1 + 1 + x_2 + 1 = x_1 + x_2 + 2 = m + 2$,

$$y_1 y_2 = (x_1 + 1)(x_2 + 1) = x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1 = 1 + m + 1 = m + 2,$$

tehát az egyenlet $y^2 - (m + 2)y + (m + 2) = 0$.

b) $y^2 - my + 1 = 0$; **c)** $y^2 - 2my + 4 = 0$; **d)** $y^2 - (m + 1)y + m = 0$;

e) $y^2 - m^2 y + m^2 = 0$; **f)** $y^2 - (m^2 - 2)y + 1 = 0$; **g)** $y^2 - (m^2 - 2)y + 1 = 0$;

h) $y^2 - m(m^2 - 3)y + 1 = 0$; **i)** $y^2 - (m^2 - 2)y + 1 = 0$;

j) $y^2 - m(m^2 - 3)y + 1 = 0$; **l)** $(m^2 - 2)^2 y^2 - m(m^2 - 2)y + 1 = 0$.

Megjegyzés. Néha a változó transzformálását is lehet használni (például az a), b), g), h), i) és j) alpontok esetében). A b) alpont esetében az $y = \frac{1}{x}$ transzformációval az

egyenlet $\left(\frac{1}{y}\right)^2 - m \frac{1}{y} + 1 = 0$ alakban írható, tehát $y^2 \neq 0$ -val való beszorzás után az

$y^2 - my + 1 = 0$ egyenlethez jutunk.

6. Tárgyald a gyökök természetét és előjelét a következő egyenletek esetében:

a) $mx^2 - (m + 3)x + 3 = 0$; **b)** $mx^2 - (m^2 - 1)x - m = 0$;

c) $x^2 - mx - 6m^2 = 0$; **d)** $x^2 - x - m^2 - m = 0$.

Megoldás. **a)** $\Delta = (m - 3)^2$, $S = \frac{m + 3}{m}$, $P = \frac{3}{m}$.

m	Δ	S	P	x_1, x_2
$(-\infty, -3)$	+	+	–	$x_1 < 0, x_2 > 0, x_1 < x_2$
-3	+	0	–	$x_1 = -1, x_2 = 1$
$(-3, 0)$	+	–	–	$x_1 < 0, x_2 > 0, x_1 > x_2$
0				$x = 1$
$(0, \infty) \setminus \{3\}$	+	+	+	$x_1 > 0, x_2 > 0$
3	0	+	+	$x_1 = x_2 = 1$

b) $\Delta = (m^2 + 1)^2, S = \frac{m^2 - 1}{m}, P = -1.$

m	Δ	S	P	x_1, x_2
$(-\infty, -1)$	+	–	–	$x_1 < 0, x_2 > 0, x_1 > x_2$
-1	+	0	–	$x_1 = -1, x_2 = 1$
$(-1, 0)$	+	+	–	$x_1 < 0, x_2 > 0, x_1 < x_2$
0	+			$x = 0$
$(0, 1)$	+	–	–	$x_1 < 0, x_2 > 0, x_1 > x_2$
1	+	0	–	$x_1 = -1, x_2 = 1$
$(1, \infty)$	+	+	–	$x_1 < 0, x_2 > 0, x_1 < x_2$

c) $\Delta = 25m^2, S = m, P = -6m^2$

m	Δ	S	P	x_1, x_2
$(-\infty, 0)$	+	–	–	$x_1 < 0, x_2 > 0, x_1 > x_2$
0	0	0	0	$x = 0$
$(0, \infty)$	+	+	–	$x_1 < 0, x_2 > 0, x_1 < x_2$

d) $\Delta = (2m + 1)^2, S = 1, P = -m^2 - m$

m	Δ	S	P	x_1, x_2
$(-\infty, -1)$	+	+	–	$x_1 < 0, x_2 > 0, x_1 < x_2$
-1	+	+	0	$x_1 = 0, x_2 = 1$
$(-1, -1/2)$	+	+	+	$x_1 > 0, x_2 > 0$
$-1/2$	0	+	+	$x_{1,2} = -1/2$
$(-1/2, 0)$	+	+	+	$x_1 > 0, x_2 > 0$
0	+	+	0	$x_1 = 0, x_2 = 1$
$(0, \infty)$	+	+	–	$x_1 < 0, x_2 > 0, x_1 < x_2$

7. Az $x^2 - 7x + 2 = 0$ egyenlet gyökeire számítsd ki az alábbi kifejezések értékét:

a) $x_1 + x_2$; **b)** $x_1 x_2$; **c)** $x_1^2 + x_2^2$; **d)** $x_1^3 + x_2^3$; **e)** $x_1^4 + x_2^4$;

f) $x_1^5 + x_2^5$; **g)** $x_1^{-1} + x_2^{-1}$; **h)** $x_1^{-2} + x_2^{-2}$; **i)** $x_1^{-3} + x_2^{-3}$; **j)** $x_1 - x_2$;

k) $x_1^2 - x_2^2$ (ha $x_1 > x_2$); **l)** $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$, (ha $x_{1,2} \geq 0$);

m) $\sqrt[4]{x_1} + \sqrt[4]{x_2}$, (ha $x_{1,2} \geq 0$); **n)** $\frac{1}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_2}}$, (ha $x_{1,2} > 0$);

o) $\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}$, (ha $x_1 > x_2 \geq 0$); **p)** $\frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2} + \frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2}$;

r) $\frac{x_1 + 1}{x_2 - 2} + \frac{x_2 + 1}{x_1 - 2}$; **s)** $\frac{x_1^3 + 3x_1^2 - x_1 + 1}{x_2^2 + x_2 + 1} + \frac{x_2^3 + 3x_2^2 - x_2 + 1}{x_1^2 + x_1 + 1}$.

Megoldás. **a)** 7; **b)** 2; **c)** 45; **d)** 301; **e)** 2017; **f)** 13517; **g)** 7/2; **h)** 45/4; **i)** 301/8; **j)** $\sqrt{41}$ (ha $x_1 > x_2$); **k)** $7\sqrt{41}$;

l) $(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})^2 = x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1 x_2} = 7 + 2\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{7 + 2\sqrt{2}}$;

m) $\sqrt{\sqrt{7 + 2\sqrt{2}}} + 2\sqrt[4]{2}$; **n)** $\sqrt{\frac{7}{2}} + \sqrt{2}$; **o)** $\sqrt{7 - \sqrt{2}}$; **p)** $\frac{48\sqrt{41}}{287}$; **r)** -10; **s)** $\frac{8066}{73}$.

8. Határozd meg az $m \in \mathbb{R}$ paraméter értékét úgy, hogy az $x^2 - mx + 2 = 0$ egyenlet x_1 és x_2 gyökeire teljesüljön az alábbi összefüggések közül legalább egy:

a) $x_1^2 + x_2^2 = 5$; **b)** $x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 4$; **c)** $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 4$;

d) $x_1 = 2x_2$; **e)** $x_1 + 2x_2 = 4$; **f)** $x_1 + x_2 = x_1^2 + x_2^2$.

Megoldás. Ha a kifejezés szimmetrikus, akkor a Viéte-féle összefüggések alapján kiszámítjuk a bal oldalt m függvényében, és így egy egyenlethez jutunk m -ben. Ezt az a), b), c) és f) alpontoknál használhatjuk. Ha az összefüggés nem szimmetrikus, akkor a Viéte-féle összefüggések és az adott egyenlőség alapján a gyököket küszöböljük ki (vagy határozzuk meg). Például az e) alpont esetében $x_1 x_2 = 2$ és $x_1 + 2x_2 = 4$ összefüggésekből alkotott egyenletrendszer alapján $(x_1, x_2) = (2, 1)$, tehát $m = 3$. A következő eredményekhez jutunk:

a) $m = \pm 3$; **b)** $m = 2$; **c)** $m = 8$; **d)** $m = \pm 3$; **e)** $m = 3$; **f)** $\emptyset$.

Tehát $m \in \{-3, 0, 2, 3, 8\}$ teljesül az összefüggések közül legalább egy.

9. Határozzuk meg az $m \in \mathbb{R}$ paraméter értékét úgy, hogy az alábbi egyenletek gyökei között fennálljanak a mellette levő összefüggések:

a) $(m+1)x^2 + 2mx + 5 = 0$; $x_1 - x_2 = 2$;

b) $(m-2)x^2 + (3m-5)x + 3 = 0$; $x_1 = x_2$;

c) $(m+3)x^2 + mx + m + 1 = 0$; $x_1 = 3x_2$;

d) $3x^2 + (m-3)x + m + 5 = 0$; $x_1^2 + x_2^2 = \frac{8}{3}$;

e) $(m+5)x^2 - (m+7)x - m + 3 = 0$; $x_1 x_2 = x_1 + x_2$;

f) $mx^2 - (m-1)x - m + 1 = 0$; $x_1^3 + x_2^3 = 4$;

g) $mx^2 + (m^2 - 2)x + 2(m+1) = 0$; $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 2$;

h) $(m+2)x^2 + (m-3)x + m = 0$; $x_1 + x_2 + 2x_1x_2 = \frac{3}{2}$;

i) $x^2 + mx + 2m + 8 = 0$; $x_1 = 2x_2$;

j) $x^2 + 2(3m+2)x + 3(2m+1) = 0$; $x_1^2 + x_2^2 = \frac{10m}{3}x_1x_2$;

k) $x^2 - (m+1)x + m = 0$; $|x_1 - x_2| = 1$.

Megoldás. a) A Viéte-féle összefüggések alapján $x_1 + x_2 = -\frac{2m}{m+1}$, tehát az

adott egyenlőségéből következik, hogy $x_1 = \frac{1}{m+1}$. Ha ezt visszahelyettesítjük az

egyenletbe, az $(m+1) \cdot \frac{1}{(m+1)^2} + 2m \cdot \frac{1}{m+1} + 5 = 0$ egyenlethez jutunk. Így

$$\frac{2m+1}{m+1} + 5 = 0, \text{ tehát } m = -\frac{6}{7}.$$

b) $x_1 = x_2 \Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow 9m^2 - 30m + 25 - 12m + 24 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{7}{3}$.

c) $x_1 = 3x_2$, $x_1 + x_2 = -\frac{m}{m+3} \Rightarrow x_2 = -\frac{m}{4 \cdot (m+3)}$. Ha ezt visszahelyettesítjük

az egyenletbe, az $\frac{m^2}{16(m+3)} - \frac{m^2}{4(m+3)} + m + 1 = 0 \Leftrightarrow -\frac{3m^2}{16(m+3)} + m + 1 = 0$

egyenlőséghez jutunk, tehát $m_1 = -4$, $m_2 = -\frac{12}{13}$.

d) $x_1^2 + x_2^2 = \frac{8}{3} \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \frac{8}{3} \Leftrightarrow \frac{(m-3)^2}{9} - 2 \cdot \frac{m+5}{3} = \frac{8}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m^2 - 6m + 9 - 6m - 30 = 24 \Leftrightarrow m^2 - 12m - 45 = 0 \Leftrightarrow m_1 = 15, m_2 = -3$;

e) $x_1x_2 = x_1 + x_2 \Leftrightarrow \frac{m+7}{m+5} = \frac{-m+3}{m+5} \Leftrightarrow m = -2$;

f) $x_1^3 + x_2^3 = 4 \Leftrightarrow \frac{m-1}{m} \cdot \left[\left(\frac{m-1}{m} \right)^2 - 3 \cdot \frac{-m+1}{m} \right] = 4 \Leftrightarrow m_1 = \frac{1}{4}, m_2 = \frac{3}{8}$;

g) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 2x_1x_2 \Leftrightarrow -\frac{m^2-2}{m} = 2 \cdot \frac{2(m+1)}{m} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m_1 = -2 + \sqrt{2}, m_2 = -2 - \sqrt{2}$;

h) $x_1 + x_2 + 2x_1x_2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow -\frac{m-3}{m+2} + 2 \cdot \frac{m}{m+2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow m = 0$;

i) $m_1 = 12, m_2 = -3$; **j)** $m_1 = -1, m_2 = -\frac{5}{8}$;

k) $|x_1 - x_2| = 1 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 1 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 1 \Leftrightarrow m = 1$.

10. Határozd meg az $m \in \mathbb{R}$ paraméter értékét úgy, hogy az $x^2 + 3x - m = 0$ egyenlet x_1 és x_2 gyökeire teljesüljenek az alábbi egyenlőtlenségek:

a) $x_1^2 + x_2^2 < 0$; **b)** $x_1^3 + x_2^3 > x_1^2 + x_2^2$;
c) $\frac{1}{2+x_1} + \frac{1}{2+x_2} \leq 1$; **d)** $\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 + x_2} > 1 + x_1x_2$.

Megoldás. A Viète-féle összefüggés alapján $x_1 + x_2 = -3$, $x_1x_2 = -m$.

a) $x_1^2 + x_2^2 < 0 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 < 2x_1x_2 \Leftrightarrow 9 < 2(-m) \Leftrightarrow m < -\frac{9}{2}$;

b) $x_1^3 + x_2^3 > x_1^2 + x_2^2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2] > (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (-3)(9 + 3m) > 9 + 2m \Leftrightarrow -27 - 9m > 9 + 2m \Leftrightarrow -36 > 11m \Leftrightarrow m < -\frac{36}{11}$;

Más megoldás. $x_i^2 + 3x_i - m = 0 \Rightarrow x_i^2 = -3x_i + m \Rightarrow x_i^3 = -3x_i^2 + mx_i =$
 $= -3(-3x_i + m) + mx_i = (m + 9)x_i - 3m, i \in \{1, 2\}$

$x_1^3 + x_2^3 > x_1^2 + x_2^2 \Leftrightarrow (m + 9)(x_1 + x_2) - 6m > -3(x_1 + x_2) + 2m \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -9m - 27 > 9 + 2m \Leftrightarrow -36 > 11m \Leftrightarrow m < -\frac{36}{11}$;

c) $\frac{1}{2+x_1} + \frac{1}{2+x_2} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{4+x_1+x_2}{4+2(x_1+x_2)+x_1x_2} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{4-3}{4+2(-3)-m} \leq 1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{2+m} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{m+3}{m+2} \geq 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty, -3] \cup (-2, \infty)$;

d) $\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 + x_2} > 1 + x_1x_2 \Leftrightarrow \frac{9+2m}{-3} > 1 - m \Leftrightarrow 3 + \frac{2m}{3} < m - 1 \Leftrightarrow 12 < m$.

11. Határozz meg egy m -től független összefüggést az alábbi egyenletek gyökei közt:

a) $x^2 + (m-1)x + m^2 = 0$; **b)** $mx^2 - (m+1)x + 2m = 0$;

c) $x^2 + mx + 1 = 0$; **d)** $mx^2 + (m^2 - 1)x + m^2 = 0$;

e) $(m+1)x^2 - (m-1)x + 3m = 0$.

Megoldás. **a)** $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 - m \\ x_1x_2 = m^2 \end{cases} \Rightarrow m^2 = x_1x_2 = (x_1 + x_2 - 1)^2$; **b)** $x_1x_2 = 2$;

c) $x_1x_2 = 1$; **d)** $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{m^2 - 1}{m} \\ x_1x_2 = m \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{(x_1x_2)^2 - 1}{x_1x_2}$;

$$\text{e)} \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{m-1}{m+1} \\ x_1 x_2 = \frac{3m}{m+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 1 = \frac{-2}{m+1} \\ x_1 x_2 - 3 = \frac{-3}{m+1} \end{cases} \Rightarrow \frac{x_1 + x_2 - 1}{x_1 x_2 - 3} = \frac{2}{3}.$$

12. Bizonyítsd be, hogy az alábbi egyenleteknek van m -től, illetve n -től független gyökük:

- a)** $m x^2 - (m+1)x + 1 = 0$; **b)** $(2m-1)x^2 - (m-1)x - 3m + 2 = 0$;
c) $m x^2 - (m+n)x + n = 0$; **d)** $(m^2-1)x^2 + mx + 4 - 4m^2 - 2m = 0$;
e) $m^2 x^2 - (3m^2 + m - 4)x + 2m^2 + 2m - 8 = 0$;
f) $x^2 - (m+2)x + \sqrt{3}m + 2\sqrt{3} - 3 = 0$.

Megoldás. a) Ha az egyenletnek van m -től független gyöke, legyen ez x_0 , az azt jelenti, hogy m -nek bármilyen sajátos értéket adunk, az így kapott egyenletnek x_0 gyöke. Ha $m = 0$, akkor az egyenlet: $-x + 1 = 0$, tehát az m -től független gyök csak az 1 lehet. Másrészt $x = 1$ minden m esetén gyök, mert $m - (m+1) + 1 = 0$.

Más megoldás. Ha m szerint rendezzük az egyenletet, az $(x^2 - x)m - x + 1 = 0$ egyenlőséghez jutunk. Ha az m együtthatója nem nulla, akkor ez egy elsőfokú egyenlet m -ben, tehát minden m esetén nem teljesülhetne az egyenlőség (mert egy elsőfokú egyenletnek csak egy gyöke lehet). Tehát ha az x_0 megoldás nem függ m -től, akkor $x_0^2 - x_0 = 0$ és így $-x_0 + 1 = 0$. Ez csak akkor lehetséges, ha $x_0 = 1$, ami valóban m -től független gyök.

Hasonló gondolatmenet következtében kapjuk a következő értékeket:

- b)** $x = -1$; **c)** $x = 1$; **d)** $x = 2$; **e)** $x = 2$; **f)** $x = \sqrt{3}$.

13. Az $m \in \mathbb{R}$ milyen értékeire lesz pontosan egy közös gyöke a következő egyenlet-pároknak?

- a)** $(m-1)x^2 + 2mx + 4 = 0$ és $x^2 + (m-1)x - 2 = 0$;
b) $m x^2 + (m-2)x + 1 = 0$ és $(m+2)x^2 + 5x - (m+3) = 0$;
c) $x^2 + 2mx + m^2 = 0$ és $2x^2 + 3mx + m = 0$.

Megoldás. a) Ha x_0 egy közös gyöke a két egyenletnek, akkor $(m-1)x_0^2 + 2mx_0 + 4 = 0$, és $x_0^2 + (m-1)x_0 - 2 = 0$. A második egyenlet kétszereséhez hozzáadva az első, kapjuk, hogy $(m+1)x_0^2 + (4m-2)x_0 = 0$, ahonnan, felhasználva, hogy $x_0 \neq 0$ (0 nem gyöke egyik egyenletnek sem), következik, hogy $x = -\frac{4m-2}{m+1}$ ($m = -1$ esetén nem lenne egyetlen közös gyök sem).

Ha ezt visszahelyettesítjük a második egyenletbe, következik, hogy

$$\frac{(4m-2)^2}{(m+1)^2} - (m-1)\frac{4m-2}{m+1} - 2 = 0, \text{ tehát } m(m-2)^2 = 0.$$

$m = 0$ esetén $x_0 = 2$, $m = 2$ esetén pedig $x_0 = -2$ a közös gyök.

b) Ha egy közös gyök, akkor $\begin{cases} mx_0^2 + (m-2)x_0 + 1 = 0 \\ (m+2)x_0^2 + 5x_0 - (m+3) = 0 \end{cases}$. Ha kiküszöböljük a

négyzetes tagokat (az első egyenletet szorozzuk $(m+2)$ -vel a másodikat m -mel és kivonjuk a két összefüggés megfelelő oldalait egymásból), akkor az $(m^2 - 5m - 4)x_0 = -(m^2 + 4m + 2)$ egyenlőséghez jutunk. Másrészt ha kiküszöböljük az x_0 -t tartalmazó tagot (az első egyenletet szorozzuk 5-tel a másodikat $(m-2)$ -vel), akkor az $(m^2 - 5m - 4)x_0^2 = m^2 + m - 1$ egyenlőséghez jutunk. Az eredeti két egyenlet különbségéből $2x_0^2 + (7-m)x_0 - (m+4) = 0$, tehát

$$2(m^2 - 5m - 4)x_0^2 + (7-m)(m^2 - 5m - 4)x_0 - (m+4)(m^2 - 5m - 4) = 0 \Rightarrow \\ 2(m^2 + m - 1) - (7-m)(m^2 + 4m + 2) - (m+4)(m^2 - 5m - 4) = 0 \Rightarrow m = 0.$$

Ebben az esetben a két egyenlet $-2x + 1 = 0$ és $2x^2 + 5x - 3 = 0$, tehát az egyetlen közös gyökük az $x_0 = \frac{1}{2}$.

c) $m = 1$, $x_0 = -1$.

14. Bizonyítsd be, hogy az

$$x^2 + (b+c)x - a(a+b+c) = 0, \quad x^2 + (c+a)x - b(a+b+c) = 0 \quad \text{és} \\ x^2 + (a+b)x - c(a+b+c) = 0$$

egyenleteknek legalább egy közös gyökük van.

Bizonyítás. A három egyenlet rendre írható az $(x-a)(x+a+b+c) = 0$, $(x-b)(x+a+b+c) = 0$ és $(x-c)(x+a+b+c) = 0$ alakban, tehát $x_1 = -(a+b+c)$ közös gyöke a három egyenletnek. Ha $a = b = c$, akkor $x = a$ is közös megoldás.

15. Határozd meg az alábbi halmazok elemeit:

- a)** $\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 6x - 7 = 0\}$; **b)** $\{x \in \mathbb{N} \mid 2x^2 - 5x + 2 = 0\}$;
c) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - x - 2 = 0\}$; **d)** $\{x \in \mathbb{Z} \mid 3x^2 + 2x - 1 = 0\}$;
e) $\{x \in \mathbb{Q} \mid 6x^2 - 5x + 1 = 0\}$; **f)** $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - (1 + \sqrt{2})x + 2 = 0\}$.

Megoldás. **a)** $M = \{7\}$; **b)** $M = \{2\}$; **c)** $M = \{-1, 2\}$;

d) $M = \{-1\}$; **e)** $M = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right\}$; **f)** $M = \emptyset$.

16. Határozd meg a $p, q \in \mathbb{R}$ *valós számokat úgy, hogy teljesüljön az* $A \cup B = \{-1, -2, 1, 3\}$ *egyenlőség, ha* $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - px - 6 = 0\}$ *és* $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - qx + q - 1 = 0\}$.

Megoldás. Mivel egyik halmaz sem tartalmazhat több, mint két elemet és az egyesítés négy elemet tartalmaz, mindkét halmaz pontosan két elemet kell

tartalmazzon. Ha A elemei a és b , akkor $a, b \in \{-2, -1, 1, 3\}$. a és b gyökei az $x^2 - px - 6 = 0$ egyenletnek, így a Viéte-összefüggések alapján $a \cdot b = -6$. De a $\{-2, -1, 1, 3\}$ halmazban csak a -2 és a 3 szorzatából kaphatunk -6 -t, ezért $p = 1$ és $q = 0$.

17. Bizonyítsd be, hogy az

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2mx - m - 1 = 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2(m+1)x + m = 0\}$$

halmaznak minden $m \in \mathbb{R}$ esetén négy eleme van.

Megoldás. $x^2 - 2mx - m - 1 = 0 \Rightarrow \Delta_1 = 4m^2 + 4m + 4 = (2m+1)^2 + 3 > 0$, tehát az első halmaznak két eleme van bármely m esetén.

$x^2 - 2(m+1)x + m = 0 \Rightarrow \Delta_2 = 4m^2 + 4m + 4 = (2m+1)^2 + 3$, tehát a második halmaznak is mindig két eleme van.

Még ki kell mutatni, hogy a két halmaznak nincs közös eleme, vagyis a két egyenletnek nincs közös gyöke. Tegyük fel, hogy létezik olyan x_0 valós szám, amelyre $x_0^2 - 2mx_0 - m - 1 = 0$ és $x_0^2 - 2(m+1)x_0 + m = 0$. Kivonva az első egyenletből a másodikat, kapjuk, hogy $2x_0 - 2m - 1 = 0 \Rightarrow x_0 = m + 1/2$.

Ezt visszahelyettesítve az első egyenletbe következik, hogy

$$m^2 + m + \frac{1}{4} - 2m^2 - m - m - 1 = 0 \Rightarrow m^2 + m + \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = 0.$$

Ez ellentmondás, tehát a két halmaz elemei különbözőek és így az egyesítés négy elemet tartalmaz.

18. Oldd meg a következő egyenleteket, ha S , P és Δ az illető egyenlet gyökeinek összege, szorzata illetve az egyenlet diszkriminánsa:

a) $x^2 - \Delta x + S = 0$; **b)** $\Delta x^2 + Px + S = 0$; **c)** $x^2 + Px + S - 1 = 0$;

d) $Px^2 + 2x + S + 3 = 0$.

Megoldás. a) A Viéte-összefüggések, illetve a diszkrimináns képlete alapján az

$$\begin{cases} S = \Delta \\ P = S \\ \Delta = \Delta^2 - 4S \end{cases}$$

egyenletrendszert kapjuk. Így $P = S = \Delta = 0$ vagy $P = S = \Delta = 5$. Ha $P = S = \Delta = 0$, akkor $x_{1,2} = 0$. Ha $P = S = \Delta = 5$, akkor

$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}.$$

b) $x_{1,2} = 0$; **c)** $x_1 = 1, x_2 = -\frac{1}{2}$; **d)** $x_{1,2} = -1$ vagy $x_1 = -1, x_2 = 2$.

19. Bizonyítsd be, hogy az alábbi egyenletek mindegyikének valós gyökei vannak, ha $a, b, c \in \mathbb{R}$:

a) $x^2 - (a+b)x + ab = 0$; **b)** $x^2 - (a+b)x - c(a+b+c) = 0$;

c) $x^2 - (a + b + c)x + bc + ca = 0$; **d)** $3x^2 - 2(a + b + c)x + ab + ac + bc = 0$.

Megoldás. Egy valós együtthatójú másodfokú egyenletnek pontosan akkor vannak valós gyökei, ha a diszkriminánsa nem negatív.

a) $\Delta = (a + b)^2 - 4ab = (a - b)^2 \geq 0$;

b) $\Delta = (a + b)^2 + 4c(a + b + c) = (a + b + 2c)^2 \geq 0$;

c) $\Delta = (a + b + c)^2 - 4bc - 4ca = (a + b - c)^2 \geq 0$;

d) $\Delta = 4(a + b + c)^2 - 12(ab + bc + ca) = 2[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2] \geq 0$

20. Ha x_1 és x_2 az $x^2 + mx + n = 0$ valamint x_1' és x_2' az $x^2 + px + q = 0$ egyenlet gyökei ($m, n, p, q \in \mathbb{R}$), számítsd ki a következő szorzatokat:

a) $(x_1 - x_1')(x_2 - x_2')(x_1 - x_2')(x_2 - x_1')$;

b) $(x_1 + x_1')(x_2 + x_2')(x_1 + x_2')(x_2 + x_1')$.

Megoldás. a) $x_1 + x_2 = -m, x_1x_2 = n, x_1' + x_2' = -p, x_1'x_2' = q$

$$\begin{aligned} & (x_1 - x_1')(x_2 - x_2')(x_1 - x_2')(x_2 - x_1') = \\ &= (n + q - x_1x_2' - x_2x_1')(n + q - x_1x_1' - x_2x_2') = \\ &= (n + q)^2 - (n + q)(x_1 + x_2)(x_1' + x_2') + (x_1x_1' + x_2x_2')(x_1x_2' + x_2x_1') = \\ &= (n + q)^2 - (n + q)(x_1 + x_2)(x_1' + x_2') + (x_1^2q + x_1'^2n + x_2'^2n + x_2^2q) = \\ &= (n + q)^2 - (n + q)mp + q(m^2 - 2n) + n(p^2 - 2q); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textbf{b)} \quad & (x_1 + x_1')(x_2 + x_2')(x_1 + x_2')(x_2 + x_1') = \\ &= (n + q + x_1x_2' + x_2x_1')(n + q + x_1x_1' + x_2x_2') = \\ &= (n + q)^2 + (n + q)(x_1 + x_2)(x_1' + x_2') + (x_1x_1' + x_2x_2')(x_1x_2' + x_2x_1') = \\ &= (n + q)^2 + (n + q)(x_1 + x_2)(x_1' + x_2') + (x_1^2q + x_1'^2n + x_2'^2n + x_2^2q) = \\ &= (n + q)^2 + (n + q)mp + q(m^2 - 2n) + n(p^2 - 2q). \end{aligned}$$

Más megoldás. Mivel x_1 és x_2 az $x^2 + mx + n = 0$ egyenlet gyökei írhatjuk, hogy $x^2 + mx + n = (x - x_1)(x - x_2)$, tehát

$$\begin{aligned} & (x_1 - x_1')(x_2 - x_2')(x_1 - x_2')(x_2 - x_1') = \left((x_1')^2 + mx_1' + n\right)\left((x_2')^2 + mx_2' + n\right) = \\ &= (x_1'x_2')^2 + mx_1'x_2'(x_1' + x_2') + n\left((x_1')^2 + (x_2')^2\right) + m^2x_1'x_2' + mn(x_1' + x_2') + n^2 = \\ &= (n - q)^2 - mp(n + q) + np^2 + qm^2. \end{aligned}$$

Ellenőrizhető, hogy ez ugyanaz, mint az első módszerrel kapott eredmény.

21. Határozd meg azokat az $m \in \mathbb{R}$ értékeket, amelyekre az $x^2 + y^2 - 4x - 4y + m > 0$ egyenlőtlenség teljesül, minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén.

(Felvételi feladat, 1996)

Megoldás. Az egyenlőtlenségnek minden x, y valós szám esetén teljesülnie kell, így $x = y = 2$ esetben is fenn kell állnia. Következik, hogy $4 + 4 - 8 - 8 + m > 0$, innen $m > 8$. Igazoljuk, hogy ezek az értékek megfelelnek a feltételnek. $x^2 + y^2 - 4x - 4y + m = (x - 2)^2 + (y - 2)^2 + m - 8 \geq m - 8 > 0$, tehát a keresett értékek: $m \in (8, +\infty)$.

Más megoldás. A vizsgálandó kifejezés az x változóban másodfokú polinom, ahol y, m paraméterek $x^2 - 4x + y^2 - 4y + m$. Mivel az x^2 együtthatója 1, annak szükséges és elégséges feltétele, hogy a polinom minden $x \in \mathbb{R}$ esetén pozitív értéket vegyen fel, az, hogy a diszkriminánsa szigorúan negatív legyen, minden $y \in \mathbb{R}$ esetén. Következik, hogy $\Delta_x = 16 - 4(y^2 - 4y + m) < 0$, $\forall y \in \mathbb{R}$, tehát $y^2 - 4y + m - 4 > 0$, $\forall y \in \mathbb{R}$. Ebből következik, hogy $\Delta_y = 16 - 4(m - 4) < 0$, tehát $m \in (8, +\infty)$.

22. Határozd meg az $m \in \mathbb{R}$ paraméter azon értékeit, amelyekre fennáll az $mx^2 + 4(m - 1)x + m > 1$ egyenlőtlenség, minden $x \in (0, +\infty)$ esetén.

(Felvételi feladat, 1996)

Megoldás. Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy minden $x \in (0, +\infty)$ esetén fennálljon az $mx^2 + 4(m - 1)x + m - 1 > 0$ egyenlőtlenség az, hogy $m > 0$ és az $mx^2 + 4(m - 1)x + m - 1 = 0$ egyenlet mindkét gyöke a $(-\infty, 0]$ intervallumban helyezkedjen el, vagy pedig $m > 0$ és az egyenletnek ne legyen valós gyöke. Az $m = 0$ esetet külön kell megvizsgálni, mert ebben az esetben nem másodfokú a vizsgálandó egyenlőtlenség.

Az első esetben a következő egyenlőtlenségekhez jutunk:

$$\begin{cases} m > 0 \\ x_1 + x_2 \leq 0 \\ x_1 x_2 \geq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ -\frac{4(m-1)}{m} \leq 0 \\ \frac{m-1}{m} \geq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m \geq 1 \\ m \geq 1 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}, m \geq 1.$$

A második eset azt jelenti, hogy $[4(m - 1)]^2 - 4m^2 + 4m < 0$, $(m - 1)(3m - 4) < 0$, $m \in \left(1, \frac{4}{3}\right)$. $m = 0$ esetén az egyenlőtlenség nem teljesül, egyetlen pozitív x értékre sem. Összesítve a két esetet, ha $m \in [1, +\infty)$, akkor az egyenlőtlenség fennáll minden szigorúan pozitív szám esetén.

23. Mi a feltétele annak, hogy az $ax^2 + bx + c \leq \frac{a+b+c}{3}(x^2 + x + 1)$ egyenlőtlenség teljesüljön, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén?

Megoldás. Az $ax^2 + bx + c \leq \frac{a+b+c}{3}(x^2 + x + 1)$ egyenlőtlenség egyenértékű a $(-2a + b + c)x^2 + (a - 2b + c)x + (a + b - 2c) \geq 0$ egyenlőtlenséggel. Annak feltétele, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén teljesüljön az, hogy $-2a + b + c \geq 0$ és $\Delta \leq 0$. Mivel $\Delta = (a - 2b + c)^2 - 4(-2a + b + c)(a + b - 2c) = 9(a - c)^2$, ez csak úgy lehet, ha $a = c$ és $b \geq a$.

24. Bizonyítsd be, hogy ha $a, b, c \in \mathbb{R}$, akkor az $ax^2 + bx + c = 0$, $bx^2 + cx + a = 0$ és $cx^2 + ax + b = 0$ egyenleteknek pontosan akkor van egy közös valós gyöke, ha $a + b + c = 0$.

Megoldás. Ha $a + b + c = 0$, akkor $x = 1$ mindhárom egyenletnek gyöke. Fordítva, ha x_0 közös gyöke a három egyenletnek, akkor $ax_0^2 + bx_0 + c = 0$, $bx_0^2 + cx_0 + a = 0$, $cx_0^2 + ax_0 + b = 0$. Összeadva a három egyenlőséget, kapjuk, hogy $(a + b + c)x_0^2 + (a + b + c)x_0 + (a + b + c) = 0$, $(a + b + c)(x_0^2 + x_0 + 1) = 0$. Az $x_0^2 + x_0 + 1$ egyetlen valós szám esetén sem lehet zéró ($\Delta = 1 - 4 < 0$), így következik, hogy $a + b + c = 0$.

25. Bizonyítsd be, hogy ha $a, b, c \in \mathbb{R}$, akkor az $x^2 - 2ax + bc = 0$, $x^2 - 2bx + ac = 0$ és $x^2 - 2cx + ab = 0$ egyenletek közül legalább az egyiknek van valós gyöke.

Megoldás. Ha egyik egyenletnek sincs valós gyöke, akkor mindhárom egyenlet diszkriminánsa negatív, azaz $4a^2 < 4bc$, $4b^2 < 4ac$, $4c^2 < 4ab$. Összeadva a megfelelő oldalakat, átrendezéssel kapjuk, hogy

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca < 0 \Leftrightarrow (a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2 < 0,$$

így ellentmondáshoz jutottunk, tehát legalább az egyik egyenletnek van valós gyöke.

26. Bizonyítsd be, hogy ha $a, b, c \in \mathbb{Z}$ és az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenletnek két különböző gyöke van a $(0,1)$ intervallumban, akkor $|a| \geq 5$.

Megoldás. A feltételek alapján $a + b + c > 0$, $c > 0$, $-\frac{b}{2a} \in (0,1)$ és

$b^2 - 4ac > 0$. Mivel $a, b, c \in \mathbb{Z}$ írhatjuk, hogy $a + b + c \geq 1$, $c \geq 1$, $-\frac{b}{2a} \in (0,1)$ és

$b^2 - 4ac \geq 1$. Feltételezhetjük, hogy $a > 0$ (ellenkező esetben elosztjuk -1 -gyel az egyenletet). Így $0 < -b < 2a$, tehát $2 \leq -b + 1 \leq 2a$. De $-b \leq 2a - 1$ alapján $b^2 \leq 4a^2 - 4a + 1$ és így a $4ac + 1 \leq b^2$ egyenlőtlenségből következik, hogy $a \geq 1 + c \geq 2$. Ha $a = 2$, akkor $c = 1$ és így a $-b \leq 3$ és $9 \leq b^2$ egyenlőtlenségek alapján $b = -3$. Ezekre az értékekre $a + b + c = 0$, tehát a nem lehet 2. Ha $a = 3$, akkor a $b + c \geq -2$, $b^2 \geq 12c$ és $-b \leq 5$ egyenlőtlenségek ellentmondáshoz

vezetnek. $a = 4$ esetén $b^2 \geq 1 + 16c$ és $b + c \geq -3$, tehát $b^2 + 16b + 47 \geq 0$. Másrészt $0 < -b \leq 7$, tehát $b \geq -4$. Ez ismét nem lehetséges, mert $b^2 \geq 1 + 16c \geq 1 + 16 > 16$. Tehát $a \geq 5$.

27. Az $x^2 + p_1x + q_1 = 0$ és $x^2 + p_2x + q_2 = 0$ másodfokú egyenletek együtthatói egész számok. Bizonyítsd be, hogy ha a két egyenletnek van egy közös irracionális gyöke, akkor $p_1 = p_2$ és $q_1 = q_2$.

Megoldás. Ha x_0 a két egyenlet közös gyöke, akkor $x_0^2 + p_1x_0 + q_1 = 0$ és $x_0^2 + p_2x_0 + q_2 = 0$. Ha kivonjuk egymásból a két egyenlet megfelelő oldalait a, $(p_1 - p_2)x_0 = q_2 - q_1$ egyenlőséghez jutunk. Ha $p_1 \neq p_2$, akkor $x_0 = \frac{q_2 - q_1}{p_1 - p_2} \in \mathbb{Q}$.

Mivel ez ellentmond a feltételeknek, $p_1 = p_2$ és így $q_1 = q_2$.

28. Bizonyítsd be, hogy az $x(x+1) = 25y + 7$ egyenletet nem teljesítheti egyetlen (x, y) egész számpár sem.

Megoldás. A $k(k+1)$, $k \in \{1, 2, 3, \dots, 24\}$ szorzatok közül egynek sem 7 a 25-tel való osztási maradéka, tehát az $x(x+1)$ szám 25-tel való osztási maradéka nem lehet 7 egyetlen $x \in \mathbb{N}$ esetén sem.

29. Bizonyítsd be, hogy az $A = \left\{x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \mid x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}\right\}$ halmazban egyetlen racionális szám sincs.

Megoldás. Ha $x + \frac{1}{x} = n \in \mathbb{Z}$, akkor $x^2 - nx + 1 = 0$, tehát $x \in \left\{\frac{n \pm \sqrt{n^2 - 4}}{2}\right\}$.

Ha x racionális szám, akkor $\sqrt{n^2 - 4}$ is racionális, tehát létezik olyan $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ szám

$(a, b \in \mathbb{Z}^*, (a, b) = 1)$, amelyre $n^2 - 4 = \frac{a^2}{b^2}$. Ebben az összefüggésben a jobb oldal

nem lehet valódi tört, tehát $b^2 = 1$ és így $n^2 - a^2 = 4$. Ez csak akkor teljesülhet ha $(n - a)$ és $(n + a)$ a 4 osztója és szorzatuk 4, vagyis ha $a = 0$ és $n \in \{-2, 2\}$. Ebben az esetben $x = 1$ vagy $x = -1$, tehát az A halmaz nem tartalmaz egyetlen racionális számot sem.

II.5. Gyakorlatok és feladatok (66. oldal)

Oldd meg a következő egyenleteket, paraméter esetén tárgyald is a megoldást:

1. a) $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x}$; b) $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = \frac{2}{x}$; c) $\frac{2}{3x-1} + \frac{3}{2x+1} = 2$;
 d) $\frac{1}{x-m} + \frac{1}{x+m} = \frac{m}{x}$; e) $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} = \frac{3}{x}$;
 f) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{x} = \frac{1}{a+b+x}$; g) $\frac{m}{x-m} - \frac{x}{x+m} = \frac{1}{3}$;

$$\text{h)} \frac{1}{x-2m} + \frac{1}{x-m} + \frac{1}{x} = 0.$$

Megoldás. a) A törtek értelmezési tartománya: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$. Ilyen feltételek mellett

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 - x - x^2 - x = x^2 - 1 \Leftrightarrow x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

Mindkét érték eleme az értelmezési tartománynak, tehát $M = \{-1 + \sqrt{2}, -1 - \sqrt{2}\}$.

$$\text{b)} M = \emptyset; \text{c)} M = \left\{-\frac{1}{12}, 1\right\};$$

d) Az értelmezési tartomány $D = \mathbb{R} \setminus \{-m, m, 0\}$.

$$\frac{1}{x-m} + \frac{1}{x+m} = \frac{m}{x} \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2 - m^2} = \frac{m}{x} \Leftrightarrow m^3 = (m-2)x^2.$$

Ha $m = 2$, akkor nincs megoldás (az egyenlet jobb oldala zéró, bal oldala pedig különbözik zérótól). Ha $m \neq 2$, akkor $x^2 = \frac{m^3}{m-2}$. Ha $\frac{m^3}{m-2} < 0$, azaz $m \in (0, 2)$, az egyenletnek nincs megoldása. Tehát gyök csak akkor létezhet, ha $m \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$, ekkor $x_{1,2} = \pm m \sqrt{\frac{m}{m-2}}$. Meg kell vizsgálni, hogy az így kapott gyökök benne vannak-e az értelmezési tartományban.

$$\pm m \sqrt{\frac{m}{m-2}} = 0 \Leftrightarrow m = 0 \qquad \pm m \sqrt{\frac{m}{m-2}} = \pm m \Leftrightarrow m = 0,$$

Összesítve, $m \in [0, 2]$ esetben az egyenletnek nincs megoldása, ha pedig $m \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$, akkor két, különböző gyök van.

e) Értelmezési tartomány: $\mathbb{R} \setminus \{-1, -2, -3, 0\}$.

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} = \frac{3}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{x(x+1)} + \frac{2}{x(x+2)} + \frac{3}{x(x+3)} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 7x + 5 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1, x_2 = -\frac{5}{2}$$

E két érték közül csak a $-\frac{5}{2}$ eleme az értelmezési tartománynak, tehát $M = \left\{-\frac{5}{2}\right\}$.

f) Értelmezési tartomány: $\mathbb{R} \setminus \{-(a+b), 0\}$, $a, b \neq 0$.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{x} = \frac{1}{a+b+x} \Leftrightarrow (a+b)(x+a)(x+b) = 0.$$

Ha $a = -b$, akkor minden nemnulla valós szám megoldás, ellenkező esetben két (esetleg egybeeső) megoldás létezik: $x_1 = -a$, $x_2 = -b$.

g) Ha $m = 0$, nincs megoldás, ha pedig $m \neq 0$, akkor $x_1 = 2m$, $x_2 = -\frac{m}{2}$.

h) Ha $m = 0$, nincs megoldás, ha pedig $m \neq 0$, akkor

$$x_1 = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)m, \quad x_2 = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)m.$$

2. **a)** $|x-1| = -2$; **b)** $|x^2 - 3x + 1| = 0$; **c)** $|x^2 - 3x + 2| = 1$;
d) $|x^2 + 1| - 3 = 1$; **e)** $|x-1| - 1 = 0$; **f)** $||x-1| - 1| - 1 = 0$;
g) $\underbrace{|\dots|}_{n} |x-1| - 1 = 0$; **h)** $|x-1| + |x+5| = x$;
i) $|x-2| + |2x+1| = 1 - 2x$; **j)** $|2x+3| + |3-2x| = 4x+6$;
k) $|3-4x| + |2+5x| = 20$; **l)** $|x-1| + |2-x| + |3x-1| = 7$;
m) $|x^2+1| + |x^2-1| = 2$; **n)** $|x+7| - |2x+1| = |x+3|$;
o) $|x^2-4| - |x^2+x-2| = -x-2$; **p)** $|x-3| - 2|x+1| = |2x+1| - 5$;
q) $2|x-1| - 3|x+2| = |x-3| - |2x-1|$; **r)** $|x-2| \leq 3$;
s) $|x-1| + |x+2| \leq 1$; **t)** $2|x-3| - 3|x+1| \geq 1$;
u) $|3x-1| + 2|x+2| \leq |x+3|$; **v)** $\left| \frac{x^2-1}{x^2-3x+2} \right| \geq 1$;
w) $\left| \frac{x+1}{x^2-3x+2} \right| < 1$; **x)** $\frac{|x-1| + |x+3|}{|x^2-4|} < 2$;
y) $|x^2-4| + 2|x^2-9| \leq x^2+16$.

Megoldás. **a)** $M = \emptyset$; **b)** $M = \left\{ \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right\}$; **c)** $M = \left\{ \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right\}$;

d) $M = \{-1, 1, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$; **e)** $M = \{0, 2\}$; **f)** $M = \{-1, 1, 3\}$;

g) $M = \{-n+2, -n+4, -n+6, \dots, n-2, n\}$;

h) A bal oldalon pozitív kifejezések állnak, így $x \geq 0$. Ekkor az egyenlet így alakul:
 $|x-1| + x+5 = x \Rightarrow |x-1| = -5$, tehát az egyenletnek nincs megoldása.

i) $|x-2| + |2x+1| \geq 0 \Rightarrow 1-2x \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow x-2 < 0$

$$2-x+|2x+1| = 1-2x \Leftrightarrow |2x+1| = -x-1 \Rightarrow -1 \geq x, (2x+1)^2 = (x+1)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(3x+2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \geq -1, x_2 = -\frac{2}{3} \geq -1, \text{ tehát nincs megoldás.}$$

$$\mathbf{j)} \quad |2x+3| = \begin{cases} 2x+3, & \text{ha } x \geq -\frac{3}{2} \\ -2x-3, & \text{ha } x < -\frac{3}{2} \end{cases} \quad |3-2x| = \begin{cases} 3-2x, & \text{ha } x \leq \frac{3}{2} \\ 2x-3, & \text{ha } x > \frac{3}{2} \end{cases},$$

tehát a következő eseteket kell tárgyalni:

I. Ha $x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$, akkor

$$-2x - 3 + 3 - 2x = 4x + 6 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{4} \notin \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right).$$

II. Ha $x \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$, akkor $2x + 3 + 3 - 2x = 4x + 6 \Leftrightarrow x = 0 \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

III. Ha $x \in \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$, akkor $2x + 3 + 2x - 3 = 4x + 6 \Leftrightarrow 0 = 6$, hamis.

Tehát az egyetlen megoldás $x = 0$.

k) $M = \left\{-\frac{19}{9}, \frac{7}{3}\right\}$; **l)** $M = \left\{-\frac{3}{5}, \frac{11}{5}\right\}$; **m)** $M = [-1, 1]$; **n)** $M = \left\{-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right\}$;

o) $M = (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$; **p)** $M = \left\{-\frac{11}{3}, 1\right\}$; **q)** $M = \{-1\}$; **r)** $M = [-1, 5]$;

s) $M = [1, 2]$; **t)** $M = \left[-\infty, \frac{2}{5}\right]$; **u)** $M = \mathbb{R}$;

v) Értelmezési tartomány: $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$

$$\left| \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} \right| \geq 1 \Leftrightarrow |x - 1| \cdot |x + 1| \geq |x - 1| \cdot |x - 2| \stackrel{x \neq 1}{\Leftrightarrow} |x + 1| \geq |x - 2| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)^2 \geq (x - 2)^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 \geq x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow 6x \geq 3 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$$

$$M = \left[\frac{1}{2}, \infty\right) \setminus \{1, 2\}.$$

w) $M = (-\infty, 2 - \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{2}, \infty)$;

x) $M = (-\infty, -\sqrt{6}) \cup \left(-\sqrt{2}, \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{1 + \sqrt{21}}{2}, \infty\right)$;

y) I. Ha $x \in (-\infty, -3] \cup [3, \infty)$, a modulusokat kifejtve az egyenlőtlenség így alakul:

$$x^2 - 4 + 2(x^2 - 9) \leq x^2 + 16 \Leftrightarrow x^2 \leq 19 \Leftrightarrow x \in [-\sqrt{19}, \sqrt{19}].$$

Tehát $M_1 = [-\sqrt{19}, -3] \cup [3, \sqrt{19}]$.

II. $x \in (-3, -2) \cup (2, 3)$

$$x^2 - 4 + 2(9 - x^2) \leq x^2 + 16 \Leftrightarrow -1 \leq x^2, \text{ tehát } M_2 = (-3, -2) \cup (2, 3).$$

III. $x \in [-2, 2]$

$$4 - x^2 + 2(9 - x^2) \leq x^2 + 16 \Leftrightarrow 3 \leq 2x^2 \Leftrightarrow x \in \left[-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{3}{2}}, \infty\right)$$

Tehát $M_3 = \left[-2, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{3}{2}}, 2\right]$. Összesítve a részeredményeket, a megoldások halmaza $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3 = \left[-\sqrt{19}, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{19}\right]$.

3. a) $|x - a| + |x - b| = m$, $a < b$; **b)** $|x + 3| - |x| = m$;

c) $|x - 1| + |x - 2| + |x - 3| = m$.

Megoldás. a) Ha $m < 0$, az egyenlet bal oldala pozitív, a jobb oldala pedig negatív, így nincs megoldás. Tehát gyököt csak abban az esetben kell keresni, ha $m \geq 0$.

I. Ha $x \leq a$, az egyenlet $a - x + b - x = m$, vagyis $x = \frac{a + b - m}{2}$.

$\frac{a + b - m}{2} \leq a \Leftrightarrow b - a \leq m$, így ha $m < b - a$, akkor a $(-\infty, a]$ intervallumban nincs gyök, ha pedig $m \geq b - a$, akkor $x = \frac{a + b - m}{2}$.

II. Ha $a < x < b$, az egyenlet $x - a + b - x = m \Leftrightarrow b - a = m$.

Ha $m = b - a$, akkor minden $x \in (a, b)$ megoldás, ellenkező esetben nincs gyök az (a, b) intervallumban.

III. Ha $x \geq b$, az egyenlet $x - a + x - b = m$, azaz $x = \frac{a + b + m}{2}$.

$\frac{a + b + m}{2} \geq b \Leftrightarrow m \geq b - a$, így ha $m < b - a$, akkor a $[b, \infty)$ intervallumban nincs gyök, ha pedig $m \geq b - a$, akkor $x = \frac{a + b + m}{2}$.

Összevetve a kapott eredményeket, kapjuk, hogy ha $m < b - a$, akkor nincs megoldás, ha $m \geq b - a$, akkor $x_1 = \frac{a + b - m}{2}$ és $x_2 = \frac{a + b + m}{2}$ megoldások, és ha $m = b - a$, akkor $\forall x \in (a, b)$ is megoldás.

b) Gyökök csak akkor létezhetnek, ha $m \geq 0$, így csak ezt az esetet kell vizsgálni.

I. Ha $x \geq -3$, az egyenlet így alakul: $3 = m$.

Tehát ha $m = 3$, akkor minden $[-3, \infty)$ -beli szám megoldás, ellenkező esetben nincs gyök ebben az intervallumban.

II. Ha $x < -3$, akkor $|-3 - 2x| = m \Leftrightarrow 3 + 2x = \pm m \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm m}{2}$.

$\frac{-3 + m}{2} < -3 \Leftrightarrow m < -3$ nem lehetséges ($m \geq 0$) $\frac{-3 - m}{2} < -3 \Leftrightarrow 3 < m$.

Összesítve az eredményeket, írhatjuk, hogy ha $m \in (-\infty, -3)$, nincs egyetlen gyök sem, ha $m = 3$, akkor minden $[-3, \infty)$ -beli valós szám gyök, ha pedig $m > 3$, akkor $x = -\frac{m+3}{2}$ az egyetlen megoldás.

c) I. $x \in (-\infty, 1]$ esetén $1 - x + 2 - x + 3 - x = m \Leftrightarrow 6 - 3x = m \Leftrightarrow x = 2 - \frac{m}{3}$.

$$2 - \frac{m}{3} \leq 1 \Leftrightarrow 3 \leq m.$$

II. $x \in (1, 2]$ esetén $x - 1 + 2 - x + 3 - x = m \Leftrightarrow x = 4 - m$.

$$4 - m \in (1, 2] \Leftrightarrow m \in [2, 3).$$

III. Ha $x \in (2, 3]$, akkor $x - 1 + x - 2 + 3 - x = m \Leftrightarrow x = m$.

IV. Ha $x \in (3, \infty)$, akkor

$$x - 1 + x - 2 + x - 3 = m \Leftrightarrow 3x - 6 = m \Leftrightarrow x = \frac{m}{3} + 2.$$

$$\frac{m}{3} + 2 \in (3, \infty) \Leftrightarrow m \in (3, \infty).$$

Összesítve, írhatjuk, hogy ha $m \in (-\infty, 2)$, akkor nincs megoldás, ha $m = 2$, akkor $x = 2$ az egyetlen megoldás, ha $m \in (2, 3]$, akkor $x_1 = 4 - m$, $x_2 = m$, ha $m \in (3, \infty)$, akkor $x_1 = 2 - \frac{m}{3}$, $x_2 = 2 + \frac{m}{3}$.

4. a) $\left\lfloor \frac{3x-1}{2} \right\rfloor = -3;$

b) $[x+3] = \{x\};$

c) $[2x+1] = [x];$

d) $\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = x+3;$

e) $\left\lfloor \frac{3x-1}{2} \right\rfloor = x+1;$

f) $\left\lfloor \frac{2x+1}{3} \right\rfloor = \frac{x-1}{2};$

g) $[x] + [2x] = 4;$

h) $\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x-3}{3} \right\rfloor;$

i) $\left\lfloor \frac{x-3}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x-2}{3} \right\rfloor;$

j) $\left\lfloor \frac{2x-3}{3} \right\rfloor = [3-2x];$

k) $2[x] + 4 = 3a;$

l) $\left\lfloor \frac{4x+1}{5x+3} \right\rfloor = \frac{x}{x+8};$

m) $[x^2 - x + 1] = 2x - 1;$ **n)** $5[x^2] - 5[x] + 1 = 0;$ **o)** $3[x^2] - 10[x] + 3 = 0;$

p) $x^2 - [x] = 3;$

q) $x^2 = 1 + [x];$

r) $x^3 = 2 + [x].$

Megoldás. a) $\left\lfloor \frac{3x-1}{2} \right\rfloor = -3 \Leftrightarrow \frac{3x-1}{2} \in [-3, -2) \Leftrightarrow x \in \left[\frac{-5}{3}, -1 \right);$

b) $[x+3] = \{x\} \Rightarrow \{x\} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \{x\} = 0 \Rightarrow x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x+3 = 0 \Rightarrow x = -3;$

c) $[2x+1] = [x] \Leftrightarrow [2x] + 1 = [x] \Leftrightarrow [x] + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor + 1 = [x] \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = -1 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2} \right) \in [-1, 0) \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right);$$

d) $\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = x+3 \Leftrightarrow x+3 \in \mathbb{Z}, x+3 \leq \frac{x+1}{2} < x+4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}, -7 < x \leq -5 \Leftrightarrow x \in \{-6, -5\};$$

e) $x \in \{3, 4\};$

f) Jelöljük $\left\lfloor \frac{2x+1}{3} \right\rfloor$ és $\frac{x-1}{2}$ közös értékét t -vel. Így $t \in \mathbb{Z}$ és $x = 2t + 1$. Ezt visszahelyettesítve az egyenletbe, kapjuk, hogy

$$\left\lfloor \frac{4t+3}{2} \right\rfloor = t \Leftrightarrow 2t+1 = t \Leftrightarrow t = -1 \Leftrightarrow x = -1.$$

g) Felhasználva, hogy $x = [x] + \{x\}$, az egyenlet így írható:

$$[x] + [2[x] + 2\{x\}] = 4 \Leftrightarrow 3[x] + [2\{x\}] = 4 \Leftrightarrow [x] = 1, [2\{x\}] = 1 \Leftrightarrow$$

$$x \in [1, 2), \{x\} \in [0.5, 1) \Leftrightarrow x = 1 + \alpha, \alpha \in [0.5, 1)$$

h) Ha $y \in \mathbb{Z}$ az $\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor$ és $\left\lfloor \frac{x-3}{3} \right\rfloor$ közös értéke, akkor

$$\begin{cases} y \leq \frac{x+1}{2} < y+1 \\ y \leq \frac{x-3}{3} < y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y-1 \leq x < 2y+1 \\ 3y+3 \leq x < 3y+6 \end{cases} \quad (*) \Rightarrow \begin{cases} 2y-1 < 3y+6 \\ 3y+3 < 2y+1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -7 < y \\ y < -2 \end{cases} \Leftrightarrow y \in \{-6, -5, -4, -3\}$$

A kapott y értékeket rendre visszahelyettesítve a $(*)$ egyenlőtlenség-rendszerbe (amely ekvivalens az eredeti egyenlettel), a következőket kapjuk:

$$y = -6: \begin{cases} -13 \leq x < -10 \\ -15 \leq x < -12 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-13, -12)$$

$$y = -5: \begin{cases} -11 \leq x < -8 \\ -12 \leq x < -9 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-11, -9)$$

$$y = -4: \begin{cases} -9 \leq x < -6 \\ -9 \leq x < -6 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-9, -6)$$

$$y = -3: \begin{cases} -7 \leq x < -4 \\ -6 \leq x < -3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-6, -4)$$

Tehát a megoldás $x \in [-13, -12) \cup [-11, -9) \cup [-9, -6) \cup [-6, -4)$.

i) $x \in [1, 2) \cup [3, 7) \cup [8, 9);$ **j)** Nincs megoldás.

k) A bal oldalon álló kifejezés egy páros egész szám, tehát csak akkor van megoldás, ha $3a$ is páros egész szám, vagyis $a = \frac{2k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$. Ebben az esetben az egyenlet

$$[x] + 2 = k \Leftrightarrow [x] = k - 2, \text{ tehát a megoldás } x \in [k-2, k-1).$$

l) $\frac{x}{x+8} = t \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{8t}{1-t}.$

$\left\lfloor \frac{31t+1}{37t+3} \right\rfloor = t \Leftrightarrow t \leq \frac{31t+1}{37t+3} < t+1.$ Ennek az egyenlőtlenség-sorozatnak nincs

megoldása az egész számok halmazán, tehát az eredeti egyenletnek sincs megoldása.

m) $x \in \{2, 2.5\};$

n) $5([x^2] - [x]) = -1 \Leftrightarrow [x^2] - [x] = -\frac{1}{5},$ tehát az egyenletnek nincs megoldása.

o) $M = \emptyset;$

p) Az $[x] \leq x, [x] > x-1$ egyenlőtlenségek alapján $3 = x^2 - [x] < x^2 - x + 1,$

$3 = x^2 - [x] \geq x^2 - x,$ így a következő egyenletrendszert kapjuk (ez nem egyenértékű az eredeti egyenlettel):

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 > 0 \\ x^2 - x - 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1-\sqrt{13}}{2}, -1 \right) \cup \left(1, \frac{1+\sqrt{13}}{2} \right] \Rightarrow [x] \in \{-2, 2\}$$

Ha $[x] = -2 \Rightarrow x^2 + 2 = 3 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1,$ nem megoldás ($[x] \neq -2$)

Ha $[x] = 2 \Rightarrow x^2 - 2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5}, [\sqrt{5}] = 2,$ tehát az egyetlen megoldás $x = \sqrt{5}.$

q) $M = \{\sqrt{2}\};$ r) $M = \{\sqrt[3]{3}\}.$

5. a) $\sqrt{x+9} + x + 8 = 0;$ b) $\sqrt{24-10x} = 3-4x;$ c) $1 - \sqrt{13+3x^2} = 2x;$

d) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+6} = 5;$ e) $\sqrt{x+2} - \sqrt{2-x} = 2;$ f) $\sqrt{3x+7} - \sqrt{x+1} = 2;$

g) $\sqrt{x-2} + \sqrt{x^2-4} = 0;$ h) $\sqrt{x+3} - \sqrt{7x+2} = -1;$

i) $\sqrt{x-6} + \sqrt{x-13} = \sqrt{11+\sqrt{72}};$ j) $\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3} = \sqrt{6x+1};$

k) $\sqrt{x-8} + \sqrt{x+4} = \sqrt{3x};$ l) $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-3} = \sqrt{x-6} + \sqrt{x+9};$

m) $\sqrt{2x+1} + \sqrt{3x+7} = \sqrt{x+5} + \sqrt{4x+3};$

n) $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2} = \sqrt{4x-6+2\sqrt{5}};$ o) $\sqrt{x+9} + \sqrt{x+1} = \sqrt{4x+16};$

p) $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} = \sqrt{4x-9+4\sqrt{6}};$ q) $\sqrt{x^2-5} - \sqrt{x^2-8} = 1;$

r) $\sqrt{x^2-3x+2} + \sqrt{x^2-1} = \sqrt{x^2-5x+6};$

s) $\sqrt{2x^2-4x} = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1};$

t) $\sqrt{x^2-6x+5} + \sqrt{x^2-4x+3} - \sqrt{x^2-8x+7} = 0;$

u) $\frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+7}}{\sqrt{x+2} + 3\sqrt{x+7}} = \frac{5}{11};$ v) $\frac{2\sqrt{x+9} - \sqrt{5x+4}}{4\sqrt{5x+4} - \sqrt{x+9}} = \frac{4}{5};$

w) $\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2}}{\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x-2}} = \frac{1}{4};$ x) $\frac{2\sqrt{x-3} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-3}} = x;$

y) $\frac{\sqrt{x+6} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+6} - \sqrt{x+1}} = 2x-1;$ z) $\frac{\sqrt{x^2+16} - \sqrt{x^2-8}}{\sqrt{x^2+16} + \sqrt{x^2-8}} = \frac{1}{3}.$

Megoldás. a) $M = \left\{ -\frac{15 + \sqrt{5}}{2} \right\}$; **b)** $M = \left\{ -\frac{5}{8} \right\}$; **c)** $M = \{-2\}$; **d)** $M[\{3\}$;

e) $M = \{2\}$; **f)** $M = \{-1, 3\}$; **g)** $M = \{2\}$; **h)** $M = \{1\}$; **i)** $M = \{15\}$;

j) $M = \{19 + 2\sqrt{91}\}$; **k)** $M = \{12\}$; **l)** $M = \{7\}$; **m)** $M = \{3\}$; **n)** $M = \{3\}$;

o) $M = \{0\}$; **p)** $M = \{5\}$; **q)** $M = \{-3, 3\}$; **r)** $x_1 = 1$; **s)** $M = \left\{ -\sqrt{2 + \sqrt{5}} \right\}$;

t) Az értelmezési tartomány $D = (-\infty, 1] \cup [7, \infty)$. Az egyenlet így írható:

$$\sqrt{(x-1)(x-5)} + \sqrt{(x-1)(x-3)} - \sqrt{(x-1)(x-7)} = 0$$

Ha $x \geq 7$, akkor $\sqrt{x-1}$ -gyel végigosztva

$$\sqrt{x-5} + \sqrt{x-3} - \sqrt{x-7} = 0 \Leftrightarrow 2x - 8 + 2\sqrt{(x-5)(x-3)} = x - 7,$$

tehát nincs megoldása a $[7, \infty)$ intervallumban.

Ha $x \leq 1$, akkor $x_1 = 1$ megoldás. Ha $x < 1$, akkor

$$\begin{aligned} \sqrt{5-x} + \sqrt{3-x} = \sqrt{7-x} &\Leftrightarrow 8 - 2x + 2\sqrt{(5-x)(3-x)} = 7 - x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0 < 2\sqrt{(5-x)(3-x)} = x - 1 < 0. \end{aligned}$$

Mivel ez lehetetlen az egyenlet egyetlen valós gyöke $x = 1$.

u) $M = \{2\}$; **v)** $M = \{0\}$; **w)** $M = \{3\}$;

x) Értelmezési tartomány: $[3, \infty)$.

$$\begin{aligned} \frac{2\sqrt{x-3} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-3}} = x &\Rightarrow \frac{(2\sqrt{x-3} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-3})}{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-3})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-3})} = x \Rightarrow \\ &\Rightarrow 3\sqrt{(x+1)(x-3)} = x + 5 \Rightarrow 2x^2 - 7x - 13 = 0 \Rightarrow x = \frac{7 \pm 3\sqrt{17}}{4} \end{aligned}$$

Tehát az egyetlen valós megoldás az $x = \frac{7 + 3\sqrt{17}}{4}$.

y) $M = \{3\}$; **z)** $M = \{-4, 4\}$.

6. a) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$;

b) $\sqrt{x+2+4\sqrt{x-2}} + \sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}} = 5$;

c) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} + \sqrt{x-\sqrt{2x-1}} = \sqrt{2}$;

d) $\sqrt{x+\sqrt{6x-9}} - \sqrt{x-\sqrt{6x-9}} = x$;

e) $\sqrt{x} + \sqrt{x-\sqrt{1-x}} = 1$; **f)** $\sqrt{9+x\sqrt{x^2-48}} = x-3$.

Megoldás. a)

$$\begin{aligned} \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} &= 1 \Leftrightarrow \\ \sqrt{(\sqrt{x-1}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-3)^2} &= 1 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow |\sqrt{x-1}-2| + |\sqrt{x-1}-3| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} \in [2, 3] \Leftrightarrow x \in [5, 10]$$

b) $M = \{3\}$;

c) $\sqrt{x + \sqrt{2x-1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x-1}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}, 2x + 2\sqrt{x^2 - 2x + 1} = 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}, |x-1| = 1-x \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}, x-1 \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

d) $M = \emptyset$; **e)** $M = \left\{\frac{16}{25}\right\}$ **f)** $M = \{7\}$.

7. a) $\sqrt[3]{x-2} + \sqrt{x+1} = 3$; **b)** $\sqrt[3]{1-x} + \sqrt{x+2} = 1$;

c) $\sqrt{x+1} + \sqrt[4]{7x-5} = 4$; **d)** $\sqrt{x+1} + \sqrt[4]{5x+1} = 4$;

e) $\sqrt[3]{5x-3} - \sqrt[3]{3x-10} = 1$; **f)** $\sqrt[3]{2x+1} + \sqrt[3]{x} = 1$;

g) $\sqrt[4]{8x-7} - \sqrt[3]{x-1} = 1$; **h)** $\sqrt[4]{3x+1} - \sqrt[3]{7x-8} = -1$.

Megoldás. a) Az értelmezési tartomány $D = [-1, \infty)$. A $\sqrt[3]{x-2} = a$, $\sqrt{x+1} = b$ jelölésekkel a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ x = a^3 + 2 = b^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 - a \\ b^2 - a^3 - 3 = 0 \end{cases}$$

ebből $9 - 6a + a^2 - a^3 - 3 = 0 \Leftrightarrow (a-1)(a^2 + 6) = 0 \Leftrightarrow a = 1 \Leftrightarrow x = 3$.

b) $M = \{2\}$;

c) Az értelmezési tartomány $D = \left[\frac{5}{7}, \infty\right)$. Ha $a = \sqrt{x+1}$, $b = \sqrt[4]{7x-5}$, akkor

$$a + b = 4, x = a^2 - 1 = \frac{b^4 + 5}{7}, a, b \geq 0, \text{ tehát } b^4 - 7(4-b)^2 + 12 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (b-2)(b^3 + 2b^2 - 3b + 50) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (b-2)\left[b^3 + b^2 + \left(b - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{191}{4}\right] = 0 \stackrel{b \geq 0}{\Leftrightarrow} b = 2.$$

Ebből következik, hogy $b = 2$, és így $x = 3$.

d) Mivel a $\sqrt{x+1}$ és $\sqrt[4]{5x+1}$ kifejezésekkel értelmezhető függvények a $[-1/5, \infty)$ értelmezési tartományon belül szigorúan növekvők, az egyenletnek legfeljebb egy gyöke lehet. Észrevehető, hogy $x = 3$ megoldás, tehát a megoldáshalmaz $M = \{3\}$.

e) $M = \left\{6, \frac{445 + 21\sqrt{177}}{64}, \frac{445 - 21\sqrt{177}}{64}\right\}$;

f) $M = \{-2 - \sqrt{5}, 0, -2 + \sqrt{5}\}$; **g)** $M = \{1\}$; **h)** $M = \{5\}$.

8. a) $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{4x-1} = \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{4x-3}$;

b) $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{4x-1} = \sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{3x+1}$.

Megoldás. a) $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{4x-1} = \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{4x-3} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 5x-2 + 3\sqrt[3]{(x-1)(4x-1)}(\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{4x-1}) =$$

$$= 5x-2 + 3\sqrt[3]{(x+1)(4x-3)}(\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{4x-3}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(x-1)(4x-1)}(\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{4x-1}) = \sqrt[3]{(x+1)(4x-3)}(\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{4x-3}).$$

Ha $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{4x-1} \neq 0$, akkor $(x-1)(4x-1) = (x+1)(4x-3) \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$.

Ha $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{4x-1} = 0$, akkor $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{4x-1} = \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{4x-3} = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x-1} = -\sqrt[3]{4x-1} \\ \sqrt[3]{x+1} = -\sqrt[3]{4x-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = -4x+1 \\ x+1 = -4x+3 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{2}{5}. \text{ Tehát } M = \left\{\frac{2}{3}, \frac{2}{5}\right\}.$$

b) $M = \{0, 2\}$.

9. a) $\sqrt{x+1} + \sqrt{1-x^2} = \sqrt[3]{x^2+7} - 2$; b) $\sqrt{1-\sqrt{x^4-x}} = x-1$;

c) $x^3 + x + \sqrt[3]{x^3+x-2} = 12$;

d) $\sqrt{x+m} + \sqrt{x} = m$;

e) $\sqrt{m-\sqrt{m+x}} = x$;

f) $\frac{\sqrt{m-x}}{x} - \frac{\sqrt{m-x}}{m} = \sqrt{mx}$;

g) $\sqrt{x^2-m} = x-1$; h) $x + \sqrt{x + \frac{1}{2}} + \sqrt{x + \frac{1}{4}} = m$; i) $x^2 - \sqrt{m-x} = m$;

j) $\sqrt{x+2x-1} + m\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 2$; k) $\frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}} = \frac{a}{x}$;

l) $\sqrt{x^2-a} + 2\sqrt{x^2-1} = x$; m) $\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b} = \sqrt{4x+c}$;

n) $\sqrt{x+8a} + \sqrt{x} = \sqrt{4x+8a+4}$; o) $\sqrt{x+a} - \sqrt{x+b} = c$;

p) $\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}} = a\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}$.

Megoldás. a) A négyzetgyökök létezési feltételeiből $x \in [-1, 1]$, a bal oldali kifejezés pozitív voltából következik, hogy $\sqrt[3]{x^2+7}-2 \geq 0$, vagyis $x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$, így $x \in \{-1, 1\}$. Ezek közül csak az $x = -1$ teljesíti az adott egyenlőséget, tehát $M = \{-1\}$.

b) Az egyenlet alapján $x \geq 1$, $1 \geq x^4 - x$. Négyzetre emelve az egyenlet mindkét oldalát, $1 - \sqrt{x^4 - x} = (x-1)^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^4 - x} = 2x - x^2$, ahonnan újboli négyzetre emeléssel kapjuk, hogy $3x^4 - 4x^3 + 4x^2 + x = 0 \Leftrightarrow 2x^4 + (x^2 - 2x)^2 + x = 0$. Mivel ennek az egyenletnek nincs gyöke az $[1, \infty)$ intervallumban, az eredeti egyenletnek sincs valós megoldása.

c) A $\sqrt[3]{x^3 + x - 2} = y$ jelölés bevezetésével írhatjuk, hogy $y^3 + y - 10 = 0$, ahonnan $y = 2$. Következik, hogy $x^3 + x - 2 = 8$, tehát $x = 2$.

d) Ha $m < 0$, nincs megoldás, ha $m = 0$, akkor $x = 0$.

Ha $0 < m$, az értelmezési tartomány $[0, \infty)$. Az egyenlet mindkét oldalát beszorozva $\sqrt{x+m} - \sqrt{x}$ -szel, kapjuk, hogy $x+m-x = m(\sqrt{x+m} - \sqrt{x})$, vagyis $\sqrt{x+m} - \sqrt{x} = 1$. Ebből és az eredeti egyenletből következik, hogy $\sqrt{x} = \frac{m-1}{2}$.

Tehát $m \in (0,1)$ esetén nincs megoldás, ha pedig $m \geq 1$, akkor $x = \left(\frac{m-1}{2}\right)^2$ az egyetlen gyök.

e) Ha $\sqrt{m-\sqrt{m+x}} = x$, akkor $x \geq 0$ és $m \geq 0$. Az egyenlőséget a következőképpen alakíthatjuk:

$$m - \sqrt{m+x} = x^2 \Rightarrow m - x^2 = \sqrt{m+x} \Rightarrow x^4 - 2mx^2 - x + m^2 - m = 0.$$

Ezt az egyenletet m hatványai szerint rendezzük és kiszámítjuk a diszkriminánst:

$$m^2 - m(2x^2 + 1) + x^4 - x = 0 \Rightarrow \Delta = (2x+1)^2.$$

Az előbbieket alapján az egyenlet $(x^2 + x + 1 - m)(x^2 - x - m) = 0$ alakban írható.

Az $x = 0$ érték csak $m = 0$ vagy $m = 1$ esetén megoldás, tehát feltételezhetjük, hogy $x > 0$. Ha $x_0 > 0$ megoldás, akkor $x_0^2 - m = -\sqrt{m+x} < 0$ és így $x_0^2 - x_0 - m < 0$. Tehát csak az $x^2 + x + 1 - m = 0$ egyenlet megoldásaiból származhatnak a eredeti egyenlet gyökei. Ennek az egyenletnek a pozitív gyökei teljesítik az $x^2 - m < 0$ feltételt, tehát elégséges megvizsgálni a pozitív gyökök létezését. $\Delta = 4m - 3$, tehát $m < \frac{3}{4}$ esetén nincs valós megoldás. Ha $m \geq \frac{3}{4}$, akkor

$x_1 + x_2 = -1$ és $x_1 x_2 = 1 - m$ alapján $1 - m < 0$ szükséges, tehát $m > 1$ esetén az $x = \frac{-1 + \sqrt{4m-3}}{2}$ megoldáshoz jutunk. Eredményeinket a következő táblázatba foglalhatjuk össze

m	Megoldáshalmaz
$(-\infty, 0) \cup (0, 1)$	$M = \emptyset$
$m = 0$	$M = \{0\}$
$m \geq 1$	$M = \left\{ \frac{-1 + \sqrt{4m-3}}{2} \right\}$

f) A törtek és törtek létezéséhez szükséges, hogy $m \neq 0$, $x \neq 0$, $m - x \geq 0$, és $mx > 0$. Ha ezek a feltételek mind teljesülnek az egyenlet $\sqrt{\frac{m-x}{mx}} \cdot \frac{m-x}{mx} = 1$

alakba írható, ahonnan $\frac{m-x}{mx} = 1$, vagyis $m = (m+1)x$. Ha $m = -1$, nincs gyök, ellenkező esetben $x = \frac{m}{m+1}$. Ellenőrizzük, hogy ez benne van-e az értelmezési tartományban:

$$m - \frac{m}{m+1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{m+1} \geq 0 \Leftrightarrow m > -1$$

$$m \frac{m}{m+1} > 0 \Leftrightarrow m \neq 0, m > -1$$

Összesítve, ha $m \leq -1$, nincs megoldás, ha pedig $m > -1$ és $m \neq 0$, akkor $x = \frac{m}{m+1}$.

g) Ha $m < 1$, nincs gyök, ha pedig $m \geq 1$, akkor $x = \frac{m+1}{2}$ az egyetlen megoldás.

h) Az egyenlet értelmezési tartománya $D = \left[-\frac{1}{4}, \infty\right)$.

$$x + \sqrt{x + \frac{1}{2}} + \sqrt{x + \frac{1}{4}} = m \Leftrightarrow x + \sqrt{\left(\sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}\right)^2} = m \Leftrightarrow$$

$$x + \sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} = m \Leftrightarrow \left(\sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}\right)^2 = m$$

Ha $m < \frac{1}{4}$, nincs megoldás, ha $m \geq \frac{1}{4}$, akkor $x = m - \sqrt{m}$.

$$\textbf{i)} \quad x^2 - \sqrt{m-x} = m \Rightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} = m - x + \sqrt{m-x} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{m-x} + \frac{1}{2}\right)^2.$$

$$\textbf{I.} \quad x - \frac{1}{2} = \sqrt{m-x} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\sqrt{m-x} + \frac{1}{2}\right)^2 = m - \frac{3}{4}.$$

Megoldás csak akkor létezik, ha $m \geq 1$ és ekkor $x = \frac{1}{4} + \sqrt{m - \frac{3}{4}}$.

$$\textbf{II.} \quad x - \frac{1}{2} = -\sqrt{m-x} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\sqrt{m-x} \Leftrightarrow m + \frac{1}{4} = \left(\sqrt{m-x} - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Ha $m < -\frac{1}{4}$, nincs megoldás, ha $m \geq -\frac{1}{4}$, akkor $x = -\frac{1}{2} - \sqrt{m + \frac{1}{4}}$.

$$\textbf{j)} \quad \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + m\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 2 \Leftrightarrow |\sqrt{x-1}+1| + m|\sqrt{x-1}-1| = 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sqrt{x-1} + m|\sqrt{x-1}-1| = 1.$$

I. Ha $x \geq 2$, akkor $\sqrt{x-1} + m\sqrt{x-1} - m = 1 \Rightarrow (m+1)\sqrt{x-1} = m+1$. Ha m különbözik -1-től, akkor $x = 2$, ellenkező esetben bármely $x \in [2, \infty)$ megoldás.

II. Ha $x \in [1, 2]$, akkor $\sqrt{x-1} + m - m\sqrt{x-1} = 1 \Rightarrow (1-m)\sqrt{x-1} = 1-m$. Ha $m \neq 1$, akkor $x = 2$, $m = 1$ esetben minden $x \in [1, 2)$ megoldás.

k) $a = 0$ esetben nincs megoldás, ha $a \neq 0$, akkor $M = \{-a, a\}$.

l) A $\sqrt{x^2 - a} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x$ egyenlőtlenségből következik, hogy $x \geq 0$ és $x \geq \sqrt{x^2 - a}$, tehát $a \geq 0$. Ebben az esetben az értelmezési tartomány $[\max\{1, \sqrt{a}\}, \infty)$ és $2\sqrt{x^2 - 1} = x - \sqrt{x^2 - a}$, ahonnan

$2x^2 + a - 4 = -2x\sqrt{x^2 - a}$. Ez csak akkor lehetséges, ha $x^2 \leq \frac{4-a}{2}$ és így

$x^2 = \frac{1}{8} \frac{(a-4)^2}{2-a}$. Ha $2-a \leq 0$, akkor az egyenletnek nincs megoldása (mert

$x^2 \geq 0$), míg $a \in [0, 2)$ esetén megvizsgáljuk az $\frac{1}{8} \frac{(a-4)^2}{2-a} \leq \frac{4-a}{2}$. A vizsgált

intervallumon ez ekvivalens az $a \leq \frac{4}{3}$ egyenlőtlenséggel, tehát a következő táblázatba foglalhatjuk az eredményeket:

a	Megoldáshalmaz
$a \in (-\infty, 0] \cup \left(\frac{4}{3}, \infty\right)$	$M = \emptyset$
$a \in \left[0, \frac{4}{3}\right]$	$M = \left\{\pm \frac{4-a}{2\sqrt{2-a}}\right\}$

m) Az értelmezési tartomány $D = \left[\max\left\{-a, -b, -\frac{c}{4}\right\}, \infty\right)$.

$$\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b} = \sqrt{4x+c} \Leftrightarrow 2x+a+b+2\sqrt{(x+a)(x+b)} = 4x+c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x+a)(x+b)} = 2x+c-a-b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 4(a+b)x + 4ab = 4x^2 + 4(c-a-b)x + (c-a-b)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4(2a+2b-c)x = (c-a-b)^2 - 4ab$$

$$A \begin{cases} 2a+2b-c=0 \\ (c-a-b)^2-4ab=0 \end{cases} \text{ esetben a megoldás } x \in \left[\max\left\{-a, -b, -\frac{c}{4}\right\}, \infty\right).$$

A $\begin{cases} 2a + 2b - c = 0 \\ (c - a - b)^2 - 4ab \neq 0 \end{cases}$ esetben nincs megoldás. Ha $2a + 2b - c \neq 0$, akkor

$x = \frac{(c - a - b)^2 - 4ab}{2a + 2b - c}$, ha ez benne van az értelmezési tartományban, akkor

megoldás, ha nem eleme, akkor nincs gyöke az egyenletnek.

n) Ha $a \leq \frac{1}{2}$, nincs megoldás, ha $a > \frac{1}{2}$, akkor $x = \frac{1}{2a - 1}$.

o) Feltételezhetjük, hogy $a \geq b$ (az $a < b$ esetben hasonlóan járunk el). Ekkor az értelmezési tartomány $[-b, \infty)$, $c \geq 0$ kell legyen és beszorozva a bal oldal konjugáltjával, $a - b = c(\sqrt{x + a} + \sqrt{x + b})$.

A $c = 0$ esetben ha $a \neq b$, nincs megoldás, ha pedig $a = b$, akkor minden megengedett valós szám megoldás, tehát $M_1 = [-b, \infty)$.

Ha $c \neq 0$, akkor

$$\sqrt{x + a} + \sqrt{x + b} = \frac{a - b}{c} \Rightarrow 2\sqrt{x + a} - c = \frac{a - b}{c} \Rightarrow x = \frac{1}{4} \left(c + \frac{a - b}{c} \right)^2 - a,$$

ami eleme az értelmezési tartománynak.

$$\frac{1}{4} \left(c + \frac{a - b}{c} \right)^2 - a \geq b \Leftrightarrow c^2 - 2(a - b) + \left(\frac{a - b}{c} \right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \left(c - \frac{a - b}{c} \right)^2 \geq 0.$$

p) Az értelmezési tartomány $D = [1, \infty)$. $\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}} = a \sqrt{\frac{x}{x + \sqrt{x}}} \Rightarrow$

$$\Leftrightarrow x + \sqrt{x} - \sqrt{x^2 - x} = a\sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x} + 1 - \sqrt{x - 1} = a \Leftrightarrow \sqrt{x} - \sqrt{x - 1} = a - 1.$$

$$\text{Innen } a > 1 \text{ és } x = x - 1 + 2(a - 1)\sqrt{x - 1} + (a - 1)^2 \Rightarrow \frac{1 - (a - 1)^2}{2(a - 1)} = \sqrt{x - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-a^2 + 4a - 2}{2(a - 1)}; \quad \frac{-a^2 + 4a - 2}{2(a - 1)} \geq 1 \Leftrightarrow a \leq 2.$$

Tehát $a \in (-\infty, 1] \cup (2, \infty)$ esetén nincs megoldás, ha pedig $a \in (1, 2]$, akkor

$$x = \frac{-a^2 + 4a - 2}{2(a - 1)}.$$

10. a) $\sqrt{x - 2} > x + 3$; **b)** $\sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 3} > 2$; **c)** $\sqrt{x + \sqrt{x + 1}} < \sqrt{x}$;

d) $\sqrt{x^2 + 3x + 2} > x - 2$; **e)** $\sqrt{a^2 x^2 + 1} > ax$; **f)** $\sqrt{x - a} < \sqrt{x + a}$.

Megoldás. a) Az értelmezési tartomány $D = [2, \infty)$. Ha $x \in D$, akkor mindkét oldal pozitív, így mindkét oldalt négyzetre lehet emelni.

$$x - 2 > (x + 3)^2 \Leftrightarrow 0 > x^2 + 5x + 11 \Leftrightarrow 0 > \left(x + \frac{5}{2} \right)^2 + \frac{19}{4},$$

tehát az egyenlőtlenségnek nincs megoldása.

b) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-3} > 2 \Leftrightarrow x \geq 3, \sqrt{x+1} > 2 - \sqrt{x-3}$

Minden olyan x -re, amelyre $x \geq 3$, $2 - \sqrt{x-3} < 0$, fennáll az egyenlőtlenség, tehát

$M_1 = (7, \infty)$. Ha $x \in [3, 7]$, akkor négyzetre emeléssel

$$x+1 > x+1 - 4\sqrt{x-3} \Leftrightarrow x > 3 \Rightarrow M_2 = (3, 7].$$

A megoldáshalmaz $M = (3, \infty)$.

c) $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} < \sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x+1} < 0$, tehát az egyenlőtlenségnek nincs megoldása.

d) Az értelmezési tartomány $D = (-\infty, -2] \cup [-1, \infty)$.

I. Ha $x < 2$, akkor a bal oldali kifejezés pozitív, a jobb oldali pedig negatív, tehát

$$M_1 = (-\infty, -2] \cup [-1, 2).$$

II. Ha $x \geq 2$, akkor

$$\sqrt{x^2 + 3x + 2} > x - 2 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 > x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow x > \frac{2}{7},$$

tehát $M_2 = [2, \infty)$. Így az egyenlőtlenség az egész értelmezési tartományon fennáll.

e) Az egyenlőtlenségben szereplő gyökkifejezés a teljes $\mathbb{R}$ halmazon értelmezett.

$\sqrt{a^2 x^2 + 1} > \sqrt{a^2 x^2} = |ax| \geq ax$, tehát az egyenlőtlenség az a paramétertől függetlenül igaz bármely x valós szám esetén.

f) Értelmezési tartomány: $[|a|, \infty)$. $\sqrt{x-a} < \sqrt{x+a} \Leftrightarrow x-a < x+a \Leftrightarrow 0 < a$

Tehát $a \leq 0$ esetén nincs megoldás, ha pedig $a > 0$, akkor $M = [a, \infty)$.

III. Egyenletrendszerek

III.1.1.2. Gyakorlatok és feladatok (72. oldal)

1. Oldd meg a következő egyenletrendszereket:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = 1 \\ 4x - \frac{1}{2}y = 1 \end{cases}; \quad \text{b) } \begin{cases} \sqrt{2}x + \sqrt{3}y = 5 \\ \sqrt{3}x + \sqrt{2}y = 2\sqrt{6} \end{cases}; \quad \text{c) } \begin{cases} 0,25x + y = 2 \\ 0,5x - y = \frac{3}{22} \end{cases}.$$

Megoldás. a) A második egyenletet szorozzuk 2-vel és összeadjuk az egyenletek megfelelő oldalait. Így a $9x = 3$ egyenlőséghez jutunk, tehát $x = \frac{1}{3}$ és

$$y = 1 - x = \frac{2}{3}. \quad M = \left\{ \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right) \right\}.$$

b) Ha a második egyenletet szorozzuk $\sqrt{3}$ -mal, az első $\sqrt{2}$ -vel és kivonjuk a két egyenlőség megfelelő oldalait, az $x = \sqrt{2}$ egyenlőséghez jutunk. Ebből következik, hogy $y = \frac{5 - \sqrt{2} \cdot x}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$. $M = \{(\sqrt{2}, \sqrt{3})\}$.

c) Ha összeadjuk az egyenletek megfelelő oldalait, a $\frac{3}{4}x = \frac{47}{22}$ egyenlőséghez jutunk, tehát $x = \frac{94}{33}$. Ebből következik, hogy $y = \frac{95}{66}$. $M = \left\{ \left(\frac{94}{33}, \frac{95}{66} \right) \right\}$.

2. Oldd meg és tárgyald a következő rendszereket:

$$\text{a) } \begin{cases} mx + y = 1 \\ x - my = 1 \end{cases}, \quad m \in \mathbb{R}; \quad \text{b) } \begin{cases} mx + ny = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}, \quad m, n \in \mathbb{R}; \quad \text{c) } \begin{cases} x - my = 2 \\ x + my = 1 \end{cases}, \quad m \in \mathbb{R}.$$

Megoldás. a) Ha az első egyenlet mindkét oldalát szorozzuk m -mel és összeadjuk a két egyenlőséget, akkor az $(m^2 + 1)x = m + 1$ egyenlőséghez jutunk. Mivel $m \in \mathbb{R}$ írhatjuk, hogy $x = \frac{m + 1}{m^2 + 1}$. Hasonló módon következik, hogy $y = \frac{1 - m}{m^2 + 1}$, tehát

$$M = \left\{ \left(\frac{m + 1}{m^2 + 1}, \frac{1 - m}{m^2 + 1} \right) \right\}.$$

b) Ha a második egyenlet alapján kiküszöböljük y -t, az $(m + n)x = 1 + n$ összefüggéshez jutunk. A tárgyalás a következő táblázatban látható:

m	n	Megoldáshalmaz
$m = 1$	$n = -1$	$M = \{(\alpha, \alpha - 1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$
$m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$	$m + n = 0$	$M = \emptyset$
	$m + n \neq 0$	$M = \left\{\left(\frac{1+n}{m+n}, \frac{1-m}{m+n}\right)\right\}$

c) Ha összeadjuk a két egyenletet következik, hogy $x = \frac{3}{2}$ és így $m \cdot y = \frac{1}{2}$. Ha $m = 0$, akkor nincs megoldás, míg $m \neq 0$ esetén $M = \left\{\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2m}\right)\right\}$.

3. Oldd meg és tárgyald a következő rendszereket:

$$\mathbf{a)} \begin{cases} x - y = 2 \\ 3x + y = 14, \quad m \in \mathbb{R}; \\ x + my = 1 \end{cases} \quad \mathbf{b)} \begin{cases} mx + y = 1 \\ x + my = 1, \quad m \in \mathbb{R}. \\ x + y = m \end{cases}$$

Megoldás. a) Az első és második egyenletből $x = 4$ és $y = 2$. Tehát ha $4 + 2m = 1$, akkor a $(4, 2)$ számpár megoldása a rendszernek, míg ha $m \neq -\frac{3}{2}$, akkor a rendszer összeférhetetlen.

b) Az 1.1.11. tétel alapján az összeférhetőség szükséges és elégséges feltétele az, hogy

$$\mathbf{a} \Delta = \begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & m & -1 \\ 1 & 1 & -m \end{vmatrix} = 0 \quad \text{és} \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{illetve} \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & m \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

determinánsok közül legalább az egyik különbözzön 0-tól.

$$\Delta = -(m^3 - 3m + 2) = -(m - 1)^2(m + 2).$$

Ha $m = 1$, akkor a rendszer három egyenlete egymással ekvivalens, így $M = \{(\alpha, 1 - \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. Ha $m = -2$, akkor $x = y = -1$, tehát $M = \{(-1, -1)\}$.

Az 1.1.11. tétel alapján $m \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$ esetén $M = \emptyset$.

Megjegyzés. A tárgyalás elvégezhető az 1.1.11. tételre való hivatkozás nélkül is. Az utolsó egyenletből $x = m - y$, tehát a második egyenlet alapján $y(m - 1) = 1 - m$. Ha $m = 1$, akkor ezt az egyenlőséget bármely $y \in \mathbb{R}$ teljesíti, míg $m \neq 1$ esetén $y = -1$. Ez alapján $m = 1$ esetén az $M = \{(\alpha, 1 - \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ megoldáshalmazt kapjuk és $m \neq 1$ esetén az $x = m + 1$ és $y = -1$ értékeket visszahelyettesítjük az első egyenletbe. Így az $m^2 + m - 2 = 0$ egyenlőséghez jutunk, ahonnan $m = -2$.

4. Mi a feltétele annak, hogy az

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \\ \dots\dots\dots \\ a_nx + b_ny + c_n = 0 \end{cases}$$

egyenletrendszernek pontosan egy megoldása létezzen?

Értelmezd geometriailag a kapott feltételt.

Megoldás. Pontosán akkor létezik egyetlen megoldás, ha az n egyenlet közül létezik 2, amelyek egy határozott rendszert alkotnak és a többi egyenlőség ebből a kettőből megkapható. Pontosabban ha létezik $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ úgy, hogy $\begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{vmatrix} \neq 0$ és

bármely $k \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i, j\}$ esetén $\begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i \\ a_j & b_j & c_j \\ a_k & b_k & c_k \end{vmatrix} = 0$. Ez azt is jelenti, hogy

$\forall k \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i, j\}$ esetén létezik $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $a_k = \alpha_k \cdot a_i + \beta_k \cdot a_j$, $b_k = \alpha_k \cdot b_i + \beta_k \cdot b_j$ és $c_k = \alpha_k \cdot c_i + \beta_k \cdot c_j$.

Geometriailag ez a feltétel azt mutatja, hogy az $a_ix + b_iy + c_i = 0$ és $a_jx + b_jy + c_j = 0$ metsző egyenesek által meghatározott sugársor egyenlete

$$\alpha \cdot (a_ix + b_iy + c_i) + \beta \cdot (a_jx + b_jy + c_j) = 0.$$

5. Bizonyítsd be, hogy az

$$(m+1)x - (2m+1)y = 1, \quad m = \overline{1, n}, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$$

egyenletrendszer megoldható. Mi a rendszer megoldása? Értelmezd geometriailag a feladatot!

Bizonyítás. Az $x = 2$ és $y = 1$ értékek teljesítik a rendszer minden egyenletét, tehát a rendszer megoldható. Ha (x_0, y_0) egy tetszőleges megoldás, akkor az

$$m(x_0 - 2y_0) + x_0 - y_0 = 1, \quad m = \overline{1, n}$$

egyenlőségből következik, hogy $x_0 - 2y_0 = 0$ és $x_0 - y_0 = 1$ (ellenkező esetben csak egy m értékre teljesülne az egyenlőség). Így $x_0 = 2$ és $y_0 = 1$, tehát a rendszernek nincs más megoldása.

Geometriailag azt jelenti, hogy az $(m+1)x - (2m+1)y = 1, m = \overline{1, n}$ egyenesek összefutnak a $(2, 1)$ pontban.

6. Melyek azok a c_m ($m = \overline{1, n}$) számok amelyekre az

$$(m-1)x - (3m+1)y + c_m = 0, \quad m = \overline{1, n}, n \geq 2$$

rendszernek egyértelmű megoldása van? Mi a feladat geometriai jelentése?

Megoldás. Ha (x_0, y_0) az egyértelmű megoldás, akkor

$$(m-1)x_0 - (3m+1)y_0 + c_m = 0,$$

tehát

$$c_m = (3m+1)y_0 - (m-1)x_0, \quad m = \overline{1, n}.$$

Így az egyenletrendszer $(m-1)(x-x_0) = (3m+1)(y-y_0)$, $m = \overline{1, n}$ alakban írható

és mivel a $\frac{3m+1}{m-1}$ kifejezés különböző m -ek esetén különböző értékeket vesz fel, a rendszer megoldása egyértelmű.

Megjegyzés. Ha azt szeretnénk, hogy a c_m számok m -től függetlenek legyenek, akkor átrendezzük az egyenlőséget:

$$c_m = m \cdot (3y_0 - x_0) + y_0 + x_0.$$

Ez csakis akkor független m -től, ha $3y_0 = x_0$ és ebben az esetben $c_m = 4y_0$. Mivel

minden $c \in \mathbb{R}$ szám felírható $c = 4 \cdot \left(\frac{c}{4}\right)$ alakban, az $(m-1)x - (3m+1)y + c = 0$,

$m = \overline{1, n}, n \geq 2$ egyenletrendszerek egyértelműen megoldhatók.

A rendszer geometriai jelentése az, hogy az $(m-1)x - (3m+1)y + c = 0$, $m = \overline{1, n}$

egyenletű egyenesek összefutnak a $\left(\frac{3c}{4}, \frac{c}{4}\right)$ pontban.

7. Mi a geometriai jelentése annak, hogy az $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$ rendszer összeférhetetlen?

Megoldás. Az, hogy a $d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ és $d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$ egyenletű egyenesek nem metszik egymást, tehát párhuzamosak.

8. Számítsd ki az $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ és $a_3x + b_3y + c_3 = 0$ egyenletű egyenesek által meghatározott háromszög területét!

Megoldás. A páronkénti metszéspontok koordinátái

$$A \left(-\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \right), \quad B \left(-\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_3 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}}, -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}} \right), \quad C \left(-\frac{\begin{vmatrix} c_2 & b_2 \\ c_3 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}}, -\frac{\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}} \right).$$

Tehát, ha

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A \\ 1 & x_B & y_B \\ 1 & x_C & y_C \end{vmatrix} = \frac{1}{2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}} \cdot \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_3 & b_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} c_2 & b_2 \\ c_3 & b_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} \end{vmatrix},$$

akkor $T = |\Delta|$.

9. Az A városból egy biciklis a B város irányába indul. Vele egyszerre B -ből egy motoros indul A -ba. B -től 70 kilométerre találkoznak, majd miután mindkettő elérte a célt és visszafordult, az első találkozás után 5 órával megint találkoznak. Mennyi a motoros sebessége?

Megoldás. Jelöljük d -vel a két város közti távolságot, az első találkozásig eltelt időt t_1 -gyel, a biciklis sebességét v_b -vel és a motoros sebességét v_m -mel. Így a második találkozásig eltelt idő $t_1 + 5$.

$$\begin{aligned} 70 &= T_1 B = v_m t_1 & (1) \\ d - 70 &= T_1 A = v_b t_1 & (2) \end{aligned} \quad \begin{array}{c} A \qquad \qquad T \qquad \qquad T \qquad \qquad B \\ | \qquad \qquad \times^1 \qquad \qquad \times^2 \qquad \qquad | \end{array}$$

A második találkozásig (T_2) a motoros megteszi az $A T_1 + A T_2$ utat és a biciklis a $T_1 B + T_2 B$ utat. Így

$$d - 70 + x = v_m \cdot 5 \quad \text{és}$$

$$70 + d - x = v_b \cdot 5,$$

tehát

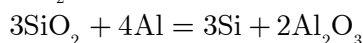
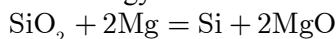
$$2d = (v_b + v_m) \cdot 5.$$

Másrészt
$$d = 70 + v_b \cdot t_1 = 70 + v_b \cdot \frac{70}{v_m} = 70 \cdot \frac{v_b + v_m}{v_m}$$

és így
$$v_m = \frac{140}{5} = 28 \text{ km/h}.$$

10. A szilíciumot szilícium-dioxid magnéziummal vagy alumíniummal való reakciójával állítják elő. A magnézium ára 70 000 lej/kg és az alumíniumé 140 000 lej/kg. Ha 1 820 000 lej áll rendelkezésünkre, mennyi magnéziumot és mennyi alumíniumot kell vásárolnunk ahhoz, hogy az egész 10 kg szilícium-dioxidot redukálhassuk?

Megoldás. A megfelelő reakciók egyenletei



Tehát ha x kg szilícium-dioxidot magnéziummal és y kg szilícium-dioxidot alumíniummal redukálunk, akkor $2 \cdot \frac{x}{28 + 2 \cdot 16} \cdot 24$ kg magnézium és $\frac{4y}{3 \cdot (28 + 2 \cdot 16)} \cdot 27$ kg tömegű alumínium szükséges. Ez alapján az

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ \frac{4x}{5} \cdot 70\,000 + \frac{3y}{5} \cdot 140\,000 = 1\,820\,000 \end{cases}$$

egyenletrendszerhez jutunk. (A második egyenlet lehetne egyenlőtlenség is.)

Az egyenletrendszer megoldása $y = 45$ és $x = -35$, de ez nem felel meg, mert $x, y \geq 0$. Ezért nem ragaszkodunk a teljes összeg elköltéséhez, tehát az

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 4x + 6y \leq 130 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

rendszert oldjuk meg. Látható, hogy ennek tetszőleges (x, y) számpár megfelel, ha $x, y \geq 0$ és $x + y = 10$. Így érdemes csak alumíniummal redukálni a szilícium-dioxidot.

11. Egy szigeten a barna és b zöld kaméleon él. Ha két barna találkozik egy zöld kaméleonnal, akkor a zöld barnára változik. Ha két zöld találkozik három barnával, akkor a barnák változnak zöldre. Elérhető-e, hogy a_1 barna és b_1 zöld kaméleon legyen a szigeten? ($a, a_1, b, b_1 \in \mathbb{N}^*$)

Megoldás. A végeredmény független a találkozások sorrendjétől. Az első típusú találkozások alkalmával az $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ számpárból az $\begin{pmatrix} a+1 \\ b-1 \end{pmatrix}$ számpárt kapjuk míg a második típusú találkozások során $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ -ből $\begin{pmatrix} u-2 \\ v+2 \end{pmatrix}$. Így x darab első típusú és y darab második típusú találkozás után $\begin{pmatrix} a+x \\ b-x \end{pmatrix}$ illetve $\begin{pmatrix} a+x-2y \\ b-x+2y \end{pmatrix}$ számpárral írható le a kaméleonok eloszlása. Tehát az

$$\begin{cases} x - 2y = a_1 - a \\ -x + 2y = b_1 - b \end{cases}$$

egyenletrendszer megoldhatóságát kell tanulmányozni. A megoldhatóság feltétele $a_1 - a = b - b_1$ vagyis, hogy a kaméleonok száma ne változzon. Belátható, hogy tetszőleges a_1, b_1 esetén $(a_1 + b_1 = a + b)$ megszervezhető a találkozások úgy, hogy elérjük a kívánt állapotot.

III.1.2.1 Gyakorlatok és feladatok (75. oldal)

1. Oldd meg a következő rendszereket:

$$\text{a) } \begin{cases} x - y + z = 4 \\ 2x + 3y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 3 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 3x + 2y + z = 2 \\ x + 3y + z = -2 \\ -2x + y - 3z = -13 \end{cases}.$$

Megoldás. a) Az első két egyenletből $3x + 2y = 4$. Ha a második egyenletet szorozzuk 3-mal és hozzáadjuk a harmadik egyenlet megfelelő oldalait, akkor a $7x + 11y = 3$ egyenlőséghez jutunk. Így $y = -1$ és $x = 2$, tehát $z = 4 + y - x = 1$.

b) Ha az első két egyenlet megfelelő oldalait egymásból kivonjuk, a $2x - y = 4$ egyenletet kapjuk. Ha a második egyenlőséget szorozzuk 3-mal és hozzáadjuk az utolsóhoz, akkor az $x + 10y = -19$ egyenlőséghez jutunk. Ebből következik, hogy $x = 1$, $y = -2$ és így $z = 2 - 3x - 2y = 3$.

2. Oldd meg és tárgyald a következő egyenletrendszereket:

$$\text{a) } \begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1, \quad a \in \mathbb{R}; \\ x + y + az = 1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} ax - y + z = 2 \\ x + ay - z = 1 \\ -x + y + az = -13 \end{cases}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Megoldás. a) Ha összeadjuk az egyenletek megfelelő oldalait, az

$$(a+2)(x+y+z) = 3$$

egyenlőséghez jutunk. Ha $a = -2$, a rendszernek nincs megoldása, mert az előbbi egyenlőség nem lehetséges. Ha $a \neq -2$, akkor $x+y+z = \frac{3}{a+2}$, tehát a rendszer egyenleteiből rendre következnek az

$$(a-1)x = (a-1)y = (a-1)z = 1 - \frac{3}{a+2}$$

egyenlőségek. Ha $a = 1$, ezekből az egyenlőségekből további információkat nem nyerünk, de az eredeti egyenletek ekvivalensek, tehát a megoldáshalmaz

$M = \{\alpha, \beta, 1 - \alpha - \beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. $a \neq 1$ esetén az $x = y = z = \frac{1}{a+2}$ egyenlőség-

hez jutunk, tehát a tárgyalást a következő táblázatba foglalhatjuk össze:

a	A megoldáshalmaz
$a = -2$	$M = \emptyset$
$a = 1$	$M = \{(\alpha, \beta, 1 - \alpha - \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$
$a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$	$M = \left\{ \left(\frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+2} \right) \right\}$

b) Ha összeadjuk a megfelelő oldalakat az $a(x + y + z) = 3$ egyenlőséghez jutunk, tehát $a = 0$ esetén nincs megoldás és $a \neq 0$ esetén $x + y + z = \frac{3}{a}$. Így a

$$\begin{cases} 4z - (a+1)^2 y = \frac{3}{a} - a \\ (a+1)z + 2y = \frac{3}{a} \end{cases}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Ha kiküszöböljük z -t, akkor a

$$[8 + (a+1)^3]y = \frac{9}{a} + a^2 + a - 3$$

egyenlőséget kapjuk. Innen

$$y = \frac{(a+3)(a^2 - 2a + 3)}{a(a+3)(7+4a+a^2)} = \frac{a^2 - 2a + 3}{a(a^2 + 4a + 7)}.$$

Hasonló gondolatmenet alapján $z = \frac{a+3}{a(a^2 + 4a + 7)}$ és így $x = \frac{2a^2 + 13a + 15}{a(a^2 + 4a + 7)}$.

Ha $a = -3$, akkor az eredeti rendszerből $x = y = -\frac{1}{2}$ és $z = 0$.

3. Oldd meg az

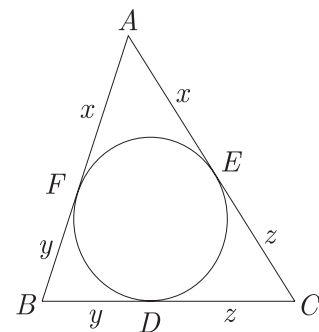
$$\begin{cases} x + [y] + \{z\} = 1,1 \\ y + [z] + \{x\} = 2,2 \\ z + [x] + \{y\} = 3,3 \end{cases}$$

egyenletrendszert, ahol $[a]$ az a valós szám egészrészét, míg $\{a\}$ a törtrészét jelöli.

Megoldás. Ha összeadjuk az egyenletek megfelelő oldalait az $x + y + z = 3,3$ egyenlőséghez jutunk. De $x + y + z = x + [y] + \{y\} + [z] + \{z\}$, tehát az első egyenlet alapján $[z] + \{y\} = 2,2$, a második egyenletből következik, hogy $[x] + \{z\} = 1,1$ és $[y] + \{x\} = 0$. Ezek az egyenlőségek csak akkor lehetségesek, ha $[z] = 2$, $\{y\} = 0,2$, $[x] = 1$, $\{z\} = 0,1$, $[y] = 0$ és $\{x\} = 0$, tehát a megoldások $x = 1$, $y = 0,2$ és $z = 2,1$.

4. Az ABC háromszögbe írt kör a BC , AC és AB oldalakat a D , E illetve F pontokban érinti. Számítsd ki az oldalakon meghatározott szakaszok hosszát az oldalak hosszának a függvényében.

Megoldás. Mivel külső pontból a körhöz húzott két érintő hossza egyenlő, az ábrán látható jelölések alapján az



$$\begin{cases} x + y = c \\ y + z = a \\ x + z = b \end{cases}$$

rendszerhez jutunk. Ebből következik, hogy

$$x = \frac{-a + b + c}{2} = p - a, \quad y = \frac{a - b + c}{2} = p - b \quad \text{és} \quad z = \frac{a + b - c}{2} = p - c.$$

5. Egy szigeten 13 szürke, 15 barna és 17 zöld kaméleon él. Ha két különböző színű kaméleon találkozik, mindketten a harmadik színre változtatják bőrük színét. Lehetséges-e, hogy egy idő múlva minden kaméleon azonos színű legyen? Hát akkor, ha 19 szürke, 13 barna és 20 zöld kaméleon van?

Megoldás. Az (x, y, z) számhármast jelölje azt az állapotot, amikor x darab szürke y darab barna és z darab zöld kaméleon van. Ha a különböző típusú találkozások száma: a (szürkére változnak), b (barnára változnak) és c (zöldre változnak), akkor a találkozások sorrendjétől függetlenül a végén

$$13 + 2a - b - c \text{ szürke}$$

$$15 - a + 2b - c \text{ barna}$$

és

$$17 - a - b + 2c \text{ zöld}$$

színű kaméleon lesz. Ha minden kaméleon azonos színű, akkor az előbbi számok közül kettő 0 és a harmadik 45. Másrészt az előbbi számok közül bármely kettő különbségének 3-mal való osztási maradéka különbözik 0-tól, így nem lehetséges, hogy a kaméleonok azonos színűek legyenek.

$$\text{A} \quad \begin{cases} 19 + 2a - b - c = 0 \\ 13 - a + 2b - c = 0 \\ 20 - a - b + 2c = 52 \end{cases}$$

egyenletrendszernek a megoldásai $a = b - 2$, $c = b + 15$, $b \in \mathbb{R}$ alakúak, tehát $a = 0$, $b = 2$ és $c = 17$ esetén elérjük a kívánt állapotot. Látható, hogy ezek a találkozások lehetségesek is, tehát ebben az esetben elérhető, hogy csak egyszínű kaméleonok éljenek a szigeten.

III.2.1. Gyakorlatok (76. oldal)

1. Oldd meg a következő egyenletrendszereket:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x^2 - xy + y^2 = 7 \end{cases}; \quad \text{b) } \begin{cases} x + 2y = 3 \\ y = x^2 + 3x + 4 \end{cases}; \quad \text{c) } \begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}.$$

Megoldás. a) Az első egyenletből $y = 2x - 1$, tehát a második egyenlet alapján

$$7 = x^2 - xy + y^2 = x^2 - x(2x - 1) + (2x - 1)^2 = 3x^2 - 3x + 1$$

tehát $x \in \{-1, 2\}$. Ha $x = -1$, akkor $y = -3$ és ha $x = 2$, akkor $y = 3$, tehát

$$M = \{(-1, -3), (2, 3)\}.$$

$$\mathbf{b)} \quad M = \left\{(-1, 2), \left(-\frac{5}{2}, \frac{11}{4}\right)\right\}.$$

$$\mathbf{c)} \quad M = \left\{(-1, -1), \left(\frac{31}{25}, \frac{17}{25}\right)\right\}.$$

2. Oldd meg és tárgyald a következő egyenletrendszereket:

$$\mathbf{a)} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y = a \end{cases}, \quad a \in \mathbb{R};$$

$$\mathbf{b)} \quad \begin{cases} y = x^2 - 3x + 2 \\ y = mx + n \end{cases}, \quad m, n \in \mathbb{R};$$

$$\mathbf{c)} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 = r^2 \end{cases}, \quad r \in \mathbb{R};$$

Megoldás. a) $y = a - x$, tehát $a^2 - 2ax + x^2 + x^2 = 1$. $\Delta = 8 - 4a^2$.

Ha $8 - 4a^2 > 0$, vagyis $a \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, akkor két megoldás létezik és ezek

$$(a + \sqrt{2 - a^2}, -\sqrt{2 - a^2}) \text{ illetve } (a - \sqrt{2 - a^2}, \sqrt{2 - a^2}).$$

Ha $a \in \{\pm\sqrt{2}\}$, akkor egy megoldás van és ez az $(a, 0)$, míg ha $a \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$, akkor a rendszernek nincs megoldása.

b) Ha kiküszöböljük az y -t az $x^2 - (3 + m)x + 2 - n = 0$ egyenlethez jutunk.

$\Delta = m^2 + 12m + 4 + 1$, tehát ha $\Delta > 0$, akkor két megoldás létezik, ha $\Delta = 0$, akkor egyetlen megoldás és ha $\Delta < 0$, akkor egy sem.

Az első esetben a megoldások:

$$\left(\frac{3 + m + \sqrt{m^2 + 12m + 4n + 1}}{2}, \frac{3m + m^2 + 2n + m\sqrt{m^2 + 12m + 4n + 1}}{2} \right),$$

$$\left(\frac{3 + m - \sqrt{m^2 + 12m + 4n + 1}}{2}, \frac{3m + m^2 + 2n - m\sqrt{m^2 + 12m + 4n + 1}}{2} \right).$$

A második esetben a megoldás: $\left(\frac{3 + m}{2}, \frac{3m + m^2 + 2n}{2} \right)$.

Megjegyzés. A $\Delta > 0$ megoldásait a síkban ábrázolhatjuk.

$$\mathbf{c)} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y = r^2 - 2 \end{cases}.$$

Tehát $2x + 2y = 3 - r^2$ és így a $\left(\frac{3 - r^2}{2} - y \right)^2 + y^2 = 1$ egyenlethez jutunk.

$\Delta = 8 - (3 - r^2)^2$, tehát ha $\sqrt{2} - 1 \leq r \leq \sqrt{2} + 1$, akkor van megoldása a rendszernek, ellenkező esetben nincs. $r \in \{\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + 1\}$ esetén a rendszernek egyetlen megoldása van, míg $r \in (\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + 1)$ esetén kettő.

Az első esetben a megoldás: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ vagy $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

míg a második esetben: $\left(\frac{3 - r^2 \mp \sqrt{8 - (3 - r^2)^2}}{4}, \frac{3 - r^2 \pm \sqrt{8 - (3 - r^2)^2}}{4}\right)$.

Megjegyzés. Az a) alpontnál egy kör és egy egyenes metszéspontját határoztuk meg, a második esetben egy parabola és egy egyenes és a harmadik esetben két kör metszéspontját.

3. Oldd meg a következő egyenletrendszereket:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x - 2y + z = 6 \\ x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + xz = 2 \end{cases} ; \text{ b) } \begin{cases} -x + y + 3z = 1 \\ 2x - 3y + z = 5 \\ x^2 + xz - y^2 = 6 \end{cases} ; \text{ c) } \begin{cases} x + y - z = -6 \\ 2x + 3y + 4z = 4 \\ x^2 + y^2 - z^2 = -4 \end{cases} .$$

Megoldás. Az első két összefüggés alapján kiküszöbölünk két változót.

a) Az első egyenletből következik, hogy $y = 1 - x - z$ és így a második egyenlet alapján $z = \frac{8 - 5x}{3}$. Ebből következik, hogy $y = \frac{2x - 5}{3}$ és így a $19x^2 - 50x + 31 = 0$

egyenlethez jutunk. Ha $x = 1$, akkor $y = -1$ és $z = 1$, míg ha $x = \frac{31}{19}$, akkor

$y = -\frac{11}{19}$ és $z = -\frac{1}{19}$. Tehát a megoldáshalmaz $M = \left\{(1, -1, 1), \left(\frac{31}{19}, -\frac{11}{19}, -\frac{1}{19}\right)\right\}$.

b) $z = \frac{35 \pm 2\sqrt{310}}{61}$, $x = 10z - 8$ és $y = 7z - 7$.

c) $M = \left\{(-1, -2, 3), \left(-\frac{4}{3}, -\frac{12}{7}, \frac{62}{21}\right)\right\}$.

4. Határozd meg az $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$ egyenletű körhöz az origóból húzott érintők egyenletét.

Megoldás. Az egyenes egyenlete $y = cx$, tehát az $(x - 1)^2 + (cx - 2)^2 = 1$ egyenletnek egy megoldása kell legyen. Az egyenlet

$$(c^2 + 1)x^2 - 2(2c + 1)x + 4 = 0$$

alakban írható, tehát a $\Delta = 0$ feltételből $c_1 = 0$ és $c_2 = -\frac{4}{3}$.

Az érintők egyenlete: $x = 0$ és $y = -\frac{4}{3}x$.

5. Létezik-e olyan egyenes, amely érinti az $y = x^2 - 3x + 2$ és $y = -x^2 + 5x - 6$ egyenletű görbéket?

Megoldás. Az egyenes egyenlete $y = ax + b$, tehát az

$$\begin{cases} y = ax + b \\ y = x^2 - 3x + 2 \end{cases} \quad \text{és} \quad \begin{cases} y = ax + b \\ y = -x^2 + 5x - 6 \end{cases}$$

rendszereknek egyértelmű megoldása kell legyen. Ennek szükséges és elégséges feltétele, hogy $(3 + a)^2 = 4(2 - b)$ és $(5 - a)^2 = 4(6 + b)$.

Ha az előbbi két összefüggés megfelelő oldalait összeadjuk, a

$$(3 + a)^2 + (5 - a)^2 = 32$$

egyenlethez jutunk, tehát $a = 1$ és így $b = -2$. A $d: y = x - 2$ egyenes érinti mindkét görbét.

III.3.1. Gyakorlatok (77. oldal)

1. Oldd meg a következő rendszereket:

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases}; \quad \text{b) } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 7 \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{y^2} = 37 \end{cases}.$$

Megoldás. a) Az első egyenlet alapján $x + y = xy$ és a második egyenlőségből következik, hogy $(x + y)^2 - 2xy = 8$. A $t^2 - 2t - 8 = 0$ egyenlet megoldásai $t_1 = 4$ és $t_2 = -2$, tehát a megoldáshalmaz

$$M = \{(2, 2), (-1 + \sqrt{3}, -1 - \sqrt{3}), (-1 - \sqrt{3}, -1 + \sqrt{3})\}.$$

b) Az $\frac{1}{x} = u$ és $\frac{1}{y} = v$ jelöléssel az $\begin{cases} u + v = 7 \\ u^2 + uv + v^2 = 37 \end{cases}$ rendszert kell megoldanunk.

$(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$, tehát $uv = 12$ és így $(u, v) \in \{(3, 4), (4, 3)\}$. Ebből

következik, hogy $M = \left\{\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)\right\}$.

2. Oldd meg a következő rendszereket:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}; \quad \text{b) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^3 + y^3 = 26 \end{cases}; \quad \text{c) } \begin{cases} xy(x + y) = -12 \\ x^3 + y^3 = 37 \end{cases}; \quad \text{d) } \begin{cases} x^4 + y^4 = 2 \\ x^2 y^2 (x^2 + y^2) = 2 \end{cases}.$$

Megoldás. a) $xy = \frac{1}{2}((x + y)^2 - (x^2 + y^2)) = -6$, tehát $M = \{(3, -2), (-2, 3)\}$.

b) Az $x + y = s$ és $xy = p$ jelölésekkel a rendszer $\begin{cases} s^2 - 2p = 10 \\ s(10 - p) = 26 \end{cases}$ alakban írható.

Ha kiküszöböljük p -t, az $s^3 - 30s + 52 = 0$ egyenlethez jutunk. Az egyenlet gyökei $s_1 = 2$, $s_2 = -1 + 3\sqrt{3}$ és $s_3 = -1 - 3\sqrt{3}$.

Ha $s_1 = 2$, akkor $p_1 = -3$, tehát az $u^2 - 2u - 3 = 0$ egyenletet kell megoldanunk. Ebben az esetben $(x, y) \in \{(3, -1), (-1, 3)\}$.

Ha $s_2 = -1 + 3\sqrt{3}$, akkor $p_2 = 9 - 3\sqrt{3}$ és $(x, y) \in$

$$\in \left\{ \left(\frac{3\sqrt{3} - 1 + \sqrt{6\sqrt{3} - 8}}{2}, \frac{3\sqrt{3} - 1 - \sqrt{6\sqrt{3} - 8}}{2} \right), \left(\frac{3\sqrt{3} - 1 - \sqrt{6\sqrt{3} - 8}}{2}, \frac{3\sqrt{3} - 1 + \sqrt{6\sqrt{3} - 8}}{2} \right) \right\}.$$

Ha $s_3 = -1 - 3\sqrt{3}$, akkor $p_3 = 9 + 3\sqrt{3}$. Így x és y a $t^2 + (1 + 3\sqrt{3})t + 9 + 3\sqrt{3} = 0$ egyenlet gyökei. $\Delta = -6\sqrt{3} - 8 < 0$, tehát nincs valós gyök.

c) Az $x + y = s$ és $xy = p$ jelöléssel a rendszer $\begin{cases} s \cdot p = -12 \\ s \cdot (s^2 - 3p) = 37 \end{cases}$ alakban írható,

tehát $s = 1$ és $p = -12$. Ebből következik, hogy $M = \{(4, -3), (-3, 4)\}$.

d) Az $x^2 = u$, $y^2 = v$, majd $u + v = s$ és $u \cdot v = p$ jelöléssel a rendszer

$$\begin{cases} s^2 - 2p = 2 \\ s \cdot p = 2 \end{cases} \text{ alakban írható.}$$

Így $s^3 - 2sp = 2s$, tehát $s = 2$ és $p = 1$. Ebből következik, hogy $(u, v) \in \{(1, 1)\}$, tehát $M = \{(1, 1), (-1, 1), (-1, -1), (1, -1)\}$.

3. Oldd meg a következő rendszereket:

$$\text{a) } \begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1 \\ x^2 + 6xy + y^2 = 17 \end{cases}; \quad \text{b) } \begin{cases} x(x + y) = 10 \\ y(x + y) = 15 \end{cases}; \quad \text{c) } \begin{cases} x(x + y + z) = 1 \\ y(x + y + z) = 3 \\ z(x + y + z) = 5 \end{cases}.$$

Megoldás. a) Az $x + y = s$ és $xy = p$ jelöléssel a rendszer

$$\begin{cases} s^2 - 5p = -1 \\ s^2 + 4p = 17 \end{cases}$$

alakban írható, tehát $p = 2$ és $s \in \{\pm 3\}$. Így $M = \{(1, 2), (2, 1), (-1, -2), (-2, -1)\}$.

b) Ha a két egyenlőség megfelelő oldalait összeadjuk, az $(x + y)^2 = 25$ egyenlőséghez jutunk. Így $x + y \in \{\pm 5\}$, tehát $M = \{(2, 3), (-2, -3)\}$.

c) Ha összeadjuk az egyenletek megfelelő oldalait következik, hogy $x + y + z \in \{\pm 3\}$,

tehát $M = \left\{ \left(\frac{1}{3}, 1, \frac{5}{3} \right), \left(-\frac{1}{3}, -1, -\frac{5}{3} \right) \right\}$.

4. Határozd meg az $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \\ x + y + z = 11 \end{cases}$ rendszer megoldásait a természetes számok

halmazában.

Megoldás. Az $x + y = s$ és $xy = p$ jelölésekkel a $p = \frac{s^2 - 11s}{s - 10} = s - 1 - \frac{10}{s - 10}$ egyenlethez jutunk. Mivel $0 < s < 11$, csak az $s - 10 \in \{-1, -2, -5\}$ eseteket kell megvizsgálni, tehát $s \in \{9, 8, 5\}$.

Ha $s = 9$, akkor $p = 18$ és $(x, y) \in \{(3, 6), (6, 3)\}$. Ha $s = 8$, akkor $p = 12$, tehát $(x, y) \in \{(2, 6), (6, 2)\}$, míg ha $s = 5$, akkor $p = 6$ és $(x, y) \in \{(2, 3), (3, 2)\}$.

Tehát $M = \{(2, 3, 6), (2, 6, 3), (3, 2, 6), (3, 6, 2), (6, 2, 3), (6, 3, 2)\}$.

Megjegyzés. Az $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$, $x, y, z \in \mathbb{N}$ egyenlet összes megoldása is meghatározható.

III.4.1. Gyakorlatok (78. oldal)

1. Oldd meg a következő rendszereket:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 11 \\ x^2 - y^2 = -5 \end{cases}; \quad \text{b) } \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ 2x^2 + 3xy - y^2 = 1 \end{cases}; \quad \text{c) } \begin{cases} x^2 - 3xy = 27 \\ y^2 + 3xy = -14 \end{cases}.$$

Megoldás. a) Ha a második egyenletet szorozzuk 3-mal és a két egyenlőség megfelelő oldalait összeadjuk, az $5x^2 = -4$ egyenlőséghez jutunk, tehát a rendszernek nincsenek valós megoldásai.

b) Ha a második egyenlet mindkét oldalát szorozzuk 7-tel és kivonjuk az egyenletek megfelelő oldalait, a $13x^2 + 22xy - 8y^2 = 0$ egyenlőséghez jutunk.

Mivel $y \neq 0$, a $t = \frac{x}{y}$ jelöléssel $13t^2 + 22t - 8 = 0$. $\Delta = 4 \cdot (121 + 13 \cdot 8) = 2^2 \cdot 15^2$,

tehát $t \in \left\{ -2, \frac{4}{13} \right\}$. Ha $t = -2$, akkor $y^2 = 1$ és így $(x, y) \in \{(-2, 1), (2, -1)\}$. Ha

$$t = \frac{4}{13}, \text{ akkor } y^2 = \frac{169}{19}, \text{ tehát } (x, y) \in \left\{ \left(\frac{4}{\sqrt{19}}, \frac{13}{\sqrt{19}} \right), \left(-\frac{4}{\sqrt{19}}, -\frac{13}{\sqrt{19}} \right) \right\}.$$

c) Az első egyenletet szorozzuk 14-gyel és a másodikat 27-tel, majd összeadjuk a két egyenlőség megfelelő oldalait. Így a $14x^2 + 39xy + 27y^2 = 0$ egyenlőséghez jutunk.

Mivel $y \neq 0$, a $t = \frac{x}{y}$ ismeretlenre $14t^2 + 39t + 27 = 0$ és így $\Delta = 39^2 - 4 \cdot 14 \cdot 27 =$
 $= 9 \cdot (13^2 - 12 \cdot 14) = 9$, tehát $t \in \left\{-\frac{3}{2}, -\frac{9}{7}\right\}$.

Ha $t = -\frac{3}{2}$, akkor $(x, y) \in \{(3, -2), (-3, 2)\}$. Ha pedig $t = -\frac{9}{7}$, akkor $y^2 = \frac{49}{10}$,
 tehát $(x, y) \in \left\{\left(-\frac{9}{\sqrt{10}}, \frac{7}{\sqrt{10}}\right), \left(\frac{9}{\sqrt{10}}, -\frac{7}{\sqrt{10}}\right)\right\}$.

III.6. Feladatok (80. oldal)

1. Oldd meg az

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 21 \\ x + \sqrt{xy} + y = 7 \end{cases}$$

egyenletrendszert a valós számok halmazán.

(Felvételi 1999)

Megoldás. Az $x + y = s$ és $xy = p$ jelölésekkel $s^2 - p = 21$ és $s + \sqrt{p} = 7$,
 tehát $s + \sqrt{s^2 - 21} = 7$. Így $s^2 \geq 21$ és , tehát $s = 5$. Ebből következik, hogy $p = 4$
 és így $M = \{(4, 1), (1, 4)\}$.

2. Egy apa életkora 5 évvel több mint három fia életkorának összege. Tíz év múlva kétszer annyi idős lesz mint a legnagyobb fia, húsz év múlva kétszer annyi idős lesz mint a középső fia és harminc év múlva kétszer olyan idős lesz mint a legkisebb fia. Hány éves az apa? Hát a fiai?

Megoldás. Ha a az apa életkora és $f_1 > f_2 > f_3$ a három fiú életkora, akkor

$$\begin{cases} a = f_1 + f_2 + f_3 + 5 \\ a + 10 = 2(f_1 + 10) \\ a + 20 = 2(f_2 + 20) \\ a + 30 = 2(f_3 + 30) \end{cases}$$

Ebből következik, hogy $3a = 2(f_1 + f_2 + f_3) + 60 = 2(a - 5) + 60$, tehát $a = 50$,
 $f_1 = 20$, $f_2 = 15$ és $f_3 = 10$.

3. Egy tutaj az A -ból a B -be indult. 2,4 órával utána elindult egy motorcsónak, amelynek sebessége 20 km/h. A csónak, miután utolérte a tutajt, rögtön visszafordult. Ha 3,6 óra múlva a csónak visszatért A -ba és a tutaj beért B -be, határozd meg a víz sebességét.

Megoldás. Az $AT_1 = x$ távolságot a tutaj $t_1 = \frac{x}{v_v}$

idő alatt teszi meg (v_v - a víz sebessége). Ugyanakkor $t_1 = 2,4 + \frac{x}{20 + v_v}$ mert a motorcsónak T_1 -ben éri



utol a tutajt. A két egyenlőségből $x = \frac{2,4 \cdot v_v(20 + v_v)}{20}$. Másrészt $t_2 = 3,6$ h múlva a

motorcsónak visszaér A -ba, tehát $t_2 = \frac{x}{20 - v_v}$ és így a

$$3,6 = \frac{2,4 \cdot v_v(20 + v_v)}{20(20 - v_v)}$$

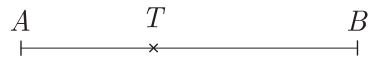
egyenlethez jutunk. Tehát a víz sebessége 10 km/h.

4. Két küldönc egyszerre indul, az egyik A -ból a B -be, a másik B -ből az A -ba. A találkozás után az egyiknek 16 órára, míg a másiknak 9 órára volt szüksége ahhoz, hogy célba érjen. Tudva, hogy mindkettőnek egyenletes a sebessége, határozd meg, hogy hány óra alatt tették meg az egész utat külön-külön!

Megoldás. Jelöljük T -vel a találkozási pontot, v_A és v_B -vel a két küldönc sebességét és t -vel a találkozásig eltelt időt. A feltételek alapján:

$$AT = v_A \cdot t = v_B \cdot 16$$

$$BT = v_B \cdot t = v_A \cdot 9$$



tehát $\frac{v_A}{v_B} = \frac{16}{t} = \frac{t}{9}$ és így $t = 12$. Tehát a két küldöncnek külön-külön 28 és 21 órára

volt szüksége a távolság megtételére.

5. Az A és B pontok között egy autóbusz közlekedik, amely csak A -ban és B -ben áll meg, mindenütt 3 percre. Ismerjük a következőket:

- a) Az autóbusz sebessége állandó.
- b) 9 óra 8 perckor az autóbusz áthaladt a C ponton B felé.
- c) 11 óra 28 perckor indult A -ból.
- d) 13 óra 16 perckor érkezett B -be.
- e) 14 óra 4 perckor áthaladt C -n, megint B felé.
- f) A cukrászmester 58 percen át figyelte az utcát és nem látta elhaladni a buszt.
- g) A pékmester 20 perc alatt kétszer látta az autóbust.

Hogyan helyezkedik el a cukrászda, a C pont és a pékség az AB szakaszon?

Megoldás. Az autóbusznek az út megtevéséhez legalább 30 percre van szüksége, ellenkező esetben lehetetlen volna az f) feltétel. Ugyanakkor a c) és d) feltételek alapján $13 \text{ h } 16' - 11 \text{ h } 28' = 108'$ alatt megtett néhány utat, beleszámítva a 3 perces állásokat is. A d) és e) feltételek alapján $14 \text{ h } 4' - 13 \text{ h } 16' = 48'$ alatt legalább egy utat megtett. Így a $108'$ alatt pontosan három utat tett meg, A -ból B -be, majd B -ből

A -ba és ismét A -ból B -be. Tehát egy út megtételéhez szükséges idő $\frac{108' - 6'}{3} = \frac{102'}{3} = 34'$. Ebből következik, hogy $13 \text{ h } 19' + 34' = 13 \text{ h } 53'$ -kor érkezett ismét A -ba. $13 \text{ h } 56'$ -kor indult B -be és 8 perc múlva áthaladt C -n (e) feltétel). Mivel a sebessége állandó a C pont az AB szakasz $\frac{8}{34} = \frac{4}{17}$ részénél helyezkedik el (A -hoz közelebb). Az ABA vagy BAB útvonal bejárásához $68' + 3' = 71'$ szükséges. Ha a cukrászmester 58 percen át nem látta elhaladni az autóbust, akkor az egyik várostól számított távolsága nem lehet nagyobb mint $\frac{13}{68}$ -ad része az AB távolságnak. Hasonlóan a pékség az egyik várostól nem lehet $\frac{17}{68} AB$ távolságnál messzebb.

6. Találjuk ki azt a számot, amelyhez hozzáadjuk a harmadát, majd ebből levonva az így kapott szám hatodát, az eredmény 100. Döntsük el, hogy jó-e az alábbi próbálgatásos módszer?

1. Tegyük fel, hogy a keresett szám 144. $\frac{144}{3} = 48$, $144 + 48 = 192$, $\frac{192}{6} = 32$,

$192 - 32 = 160$. Mivel nem 100-at kaptunk, a keresett szám nem 144.

2. Tegyük fel, hogy a keresett szám 108. $\frac{108}{3} = 36$, $108 + 36 = 144$, $\frac{144}{6} = 24$,

$144 - 24 = 120$. Most sem 100-at kaptunk, tehát a keresett szám nem is 108.

A két rossz eredményből a következő számolásokat végezzük:

Első tévedés 60, második tévedés 20. A mellékelt ábra szerint a 144×60 és 108×20 szorzatok különbségét elosztjuk a hibák különbségével $\frac{108 \cdot 60 - 144 \cdot 20}{60 - 20} = 90$, a keresett szám 90. Miért?

Megoldás. A „kitalálás” az $x + \frac{x}{3} - \frac{1}{6} \left(x + \frac{x}{3} \right) = 100$ egyenlet megoldását jelenti.

Általában az $ax = b$ egyenlet megoldására használjuk a feladatban leírt találgatásos módszert. Ha x_1 és x_2 a két próbálkozás, akkor a két tévedés $b - ax_1$ és $b - ax_2$, tehát a táblázat

$$\begin{array}{rcl} x_1 & \times & b - ax_1 \\ x_2 & \times & b - ax_2 \end{array}$$

és így $\frac{x_1(b - ax_2) - x_2(b - ax_1)}{b - ax_1 - b + ax_2} = \frac{b(x_1 - x_2)}{a(x_2 - x_1)} = -\frac{b}{a}$, ami éppen az egyenlet megoldása.

7. Kétféle ezüstünk van. Az egyik 11 karátos, a másik 14 karátos. Mennyi kell az egyes típusokból, hogy 1 font 12 karátos ezüstöt lehessen ötvözni?

Jó-e a feladatra a következő megoldás?

Tehát 1 rész 14 karátos és 2 rész 11 karátos ezüst szükséges az ötvözethez.

$$12 \text{ karátos} \begin{cases} 11 & 2 = 14 - 12 \\ 14 & 1 = 12 - 11 \end{cases}$$

Megoldás. Ha a és b karátos ezüsből c karátosat szeretnénk ötvözni, akkor az

$$\frac{a \cdot k_1 + b \cdot k_2}{k_1 + k_2} = c$$

egyenlőség kell teljesüljön, ahol k_1 és k_2 a két mennyiség. Így $(b - c)k_2 = (c - a)k_1$, tehát a $k_1 = (b - c)$ és $k_2 = (c - a)$ megfelelő, tehát a megoldás helyes.

$$6 \begin{cases} 5 & 6 = 12 - 6 \\ 12 & 1 = 6 - 5 \end{cases}$$

8. Egy fűszerüzletben háromféle tea van: ceyloni, amely fontonként 5\$, indiai, amely fontonként 8\$ és kínai, amelyből egy font 12\$. Milyen arányban kell e három teát keverni ahhoz, hogy 1 font keverék 6\$ legyen?

$$6 \begin{cases} 5 & 2 = 8 - 6 \\ 8 & 1 = 6 - 5 \end{cases}$$

Helyes-e okoskodásunk?

Tehát 1 rész kínai, 1 rész indiai és $6 + 2 = 8$ rész ceyloni tea kell.

Megoldás. Ha k_1 , k_2 és k_3 a felhasznált mennyiségek, akkor a keverék ára:

$$\frac{5k_1 + 8k_2 + 12k_3}{k_1 + k_2 + k_3}.$$

Ha ez 6, akkor $5k_1 + 8k_2 + 12k_3 = 6(k_1 + k_2 + k_3)$ vagyis

$$\underbrace{(8-6)}_2 k_2 + \underbrace{(12-6)}_6 k_3 = (6-5)k_1.$$

Így a $k_2 = k_3 = 6 - 5$ és $k_1 = (8 - 6) + (12 - 6)$ megoldás helyes.

9. Ha egy kétjegyű szám kétszereséből 1-et kivonunk, akkor az eredeti szám jegyei fordított sorrendben jelennek meg. Melyik ez a szám?

Megoldás. A feltételek alapján a $2 \cdot \overline{ab} - 1 = \overline{ba}$, tehát $19a = 8b + 1$. Mivel $b \leq 9$, $a < 4$ és a páratlan. Az $a = 1$ nem lehetséges és $a = 3$ esetén $b = 7$. Így az egyetlen megoldás a 37.

10. Egy férfi kétszer annyi idős, mint a felesége volt akkor, amikor a férj annyi idős volt, mint a felesége most. A férj és a feleség éveinek a száma valamint ezek összege is aa alakú. Hány éves a férj és a feleség most?

Megoldás. Ha $f = \overline{aa}$ a férj életkora és $fe = \overline{bb}$ a feleség életkora, akkor

$$\overline{aa} = 2 \cdot (\overline{bb} - (\overline{aa} - \overline{bb})),$$

tehát $3a = 4b$ és mivel $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, csak az $a = 4$ és $b = 3$ vagy

$a = 8$ és $b = 6$ eset lehetséges. A második esetben az $\overline{aa} + \overline{bb}$ összeg nem kétjegyű, tehát a férj 44 éves és a feleség 33.

11. Egy kör kerülete 100 m. Ha e körön két test ugyanabban az irányban mozog, akkor e testek 20 másodpercenként találkoznak. Ha ellenkező irányban mozognak, akkor 4 másodpercenként. Mekkora utat tesz meg mindegyik test egy másodperc alatt?

Megoldás. Ha v_1 és v_2 a két test sebessége, akkor az adott feltételek szerint

$$\begin{cases} 4(v_1 + v_2) = 100 \\ 20(v_1 - v_2) = 100 \end{cases}$$

Tehát $v_1 = 15 \text{ m/s}$ és $v_2 = 10 \text{ m/s}$.

12. Oldd meg és tárgyald az

$$\begin{cases} ax + 4y + 7z = 0 \\ 2x + ay + 7z = 0 \\ x - 2y + az = 0 \end{cases}$$

egyenletrendszert, ha $a \in \mathbb{R}$.

(Felvételi 1995)

Megoldás.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 4 & 7 \\ 2 & a & 7 \\ 1 & -2 & a \end{vmatrix} = a^3 - a.$$

A $(0, 0, 0)$ megoldása a rendszernek tetszőleges $a \in \mathbb{R}$ esetén. Az ettől különböző megoldások létezésének a feltétele $\Delta = 0$, vagyis $a \in \{-1, 0, 1\}$. Ha $a = -1$, akkor

a megoldáshalmaz $M = \left\{ \left(\frac{5}{3}\alpha, \alpha, -\frac{\alpha}{3} \right) \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$. Ha $a = 0$, akkor $M = \left\{ \left(-\frac{7}{2}\alpha, -\frac{7}{4}\alpha, \alpha \right) \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$ és ha $a = 1$, akkor $M = \{(3\alpha, \alpha, -\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

13. Oldd meg az

$$\begin{cases} x^{1995} + y^{1995} = 1 + 2^{1995} \\ x^3 - y^3 = -7 \end{cases}$$

egyenletrendszert a valós számok halmazában.

(Felvételi 1995)

Megoldás. A rendszer írható az

$$\begin{cases} x^{1995} - 1 = 2^{1995} - y^{1995} \\ x^3 - 1 = y^3 - 2^3 \end{cases}$$

alakban is. Másrészt $x^{2k+1} - y^{2k+1}$ és $x - y$ előjele megegyezik, tehát $2 - y$ és $y - 2$ előjele ugyanolyan mint $x - 1$ előjele. Ez csak akkor lehetséges, ha $y = 2$ és így $x = 1$. Tehát $M = \{(1, 2)\}$.

14. Oldd meg a valós számok halmazában az

$$\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 6 \\ \sqrt{x^2 - y^2} = 8 \end{cases}$$

egyenletrendszert.

(Felvételi 1997)

Megoldás. A $\sqrt{x+y} = a$ és $\sqrt{x-y} = b$ jelöléssel a rendszer $\begin{cases} a+b=6 \\ ab=8 \end{cases}$ alakban

írható. Így $(a, b) \in \{(2, 4), (4, 2)\}$. Ha $(a, b) = (2, 4)$, akkor $(x, y) = (10, -6)$ és ha $(a, b) = (4, 2)$, akkor $(x, y) = (10, 6)$. Tehát $M = \{(10, -6), (10, 6)\}$.

15. Oldd meg a

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{5}{2} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{16} \end{cases}$$

egyenletrendszert a valós számok halmazában.

(Felvételi 1997)

Megoldás. Ha elosztjuk a két egyenlőség megfelelő oldalait, az $xy = 64$ egyenlőséghez jutunk és így $x + y = 20$, tehát $(x, y) \in \{(16, 4), (4, 16)\}$.

16. Oldd meg és tárgyald a következő egyenletrendszert: $\begin{cases} mx + y = m^2 \\ x + my = 1 \end{cases}$.

Megoldás. $(m-1)(x-y) = m^2 - 1$. Ha $m = 1$, akkor nem tudunk elosztani $(m-1)$ -gyel, de az eredeti rendszer két egyenlete ekvivalens és így $M = \{(\alpha, 1-\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. Ha $m \neq 1$, akkor $x-y = m+1$, tehát $(m+1)x = m^2 + m + 1$ és $(m+1)y = -m$. $m \neq -1$ esetén a rendszer összeférhető és határozott, a megoldása $\left(\frac{m^2 + m + 1}{m+1}, \frac{-m}{m+1}\right)$, míg $m = -1$ esetén összeférhetetlen.

17. Oldd meg az

$$\begin{cases} \frac{x+y}{xy} + \frac{xy}{x+y} = a + \frac{1}{a} \\ \frac{x-y}{xy} + \frac{xy}{x-y} = b + \frac{1}{b} \end{cases}$$

egyenletrendszert a valós számok halmazában, ha $a, b \in \mathbb{R}^*$.

(Felvételi 1995)

Megoldás. Ha $u + \frac{1}{u} = a + \frac{1}{a}$, akkor $u^2 - \left(a + \frac{1}{a}\right)u + 1 = 0$, tehát $u \in \left\{a, \frac{1}{a}\right\}$.

Ez alapján a következő eseteket kell letárgyalni:

$$1. \begin{cases} \frac{x+y}{xy} = a \\ \frac{x-y}{xy} = b \end{cases}; \quad 2. \begin{cases} \frac{x+y}{xy} = a \\ \frac{x-y}{xy} = \frac{1}{b} \end{cases}; \quad 3. \begin{cases} \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{a} \\ \frac{x-y}{xy} = b \end{cases}; \quad 4. \begin{cases} \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{a} \\ \frac{x-y}{xy} = \frac{1}{b} \end{cases}.$$

Az első esetben $x = \frac{2}{a-b}$ és $y = \frac{2}{a+b}$ ha $a^2 - b^2 \neq 0$.

A második esetben $x = \frac{2b}{ab-1}$ és $y = \frac{2b}{ab+1}$ ha $ab \notin \{\pm 1\}$.

A harmadik esetben $x = \frac{2a}{1-ab}$ és $y = \frac{2a}{ab+1}$ ha $ab \notin \{\pm 1\}$.

A negyedik esetben $x = \frac{2ab}{b-a}$ és $y = \frac{2ab}{a+b}$ ha $a^2 - b^2 \neq 0$.

Tehát a következő táblázatba foglalhatjuk össze a megoldásokat:

	A megoldáshalmaz
$a^2 = b^2, ab \in \{\pm 1\}$ $(a, b) \in \{(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)\}$	$M_1 = \emptyset$
$a^2 = b^2$ de $ab \notin \{\pm 1\}$	$M_2 = \left\{ \left(\frac{2b}{ab-1}, \frac{2b}{ab+1} \right), \left(\frac{2a}{1-ab}, \frac{2a}{ab+1} \right) \right\}$
$a^2 \neq b^2$ de $ab \in \{\pm 1\}$	$M_3 = \left\{ \left(\frac{2}{a-b}, \frac{2}{a+b} \right), \left(\frac{2ab}{b-a}, \frac{2ab}{a+b} \right) \right\}$
$a^2 \neq b^2$ és $ab \notin \{\pm 1\}$	$M_4 = M_2 \cup M_3$

18. Oldd meg az

$$\begin{cases} x + y = 3z \\ x^2 + y^2 = 5z \\ x^3 + y^3 = 9z \end{cases}$$

egyenletrendszert a valós számok halmazában.

(Felvételi 1995)

Megoldás. Az $\begin{cases} x + y = 3z \\ x^2 + y^2 = 5z \end{cases}$ és $\begin{cases} x + y = 3z \\ x^3 + y^3 = 9z \end{cases}$ rendszerekben z -t paraméternek tekintjük. Ha $z = 0$, akkor a második egyenlet alapján $x = y = 0$, tehát feltételez-

hetjük, hogy $z \neq 0$. Így az előbbi két rendszerből $xy = \frac{7z^2 - 5z}{2}$ és $xy = 3z^2 - 1$

adódik, tehát $z \in \left\{ 1, \frac{2}{3} \right\}$. Ha $z = 1$, akkor $x + y = 3$ és $xy = 2$ alapján

$(x, y) \in \{(1, 2), (2, 1)\}$. Ha $z = \frac{2}{3}$, akkor $x + y = 2$ és $xy = \frac{1}{3}$, tehát

$$(x, y) \in \left\{ \left(\frac{3 + \sqrt{6}}{3}, \frac{3 - \sqrt{6}}{3} \right), \left(\frac{3 - \sqrt{6}}{3}, \frac{3 + \sqrt{6}}{3} \right) \right\}.$$

19. Oldd meg a valós számok halmazában a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} u + v = 2 \\ ux + vy = 3 \\ ux^2 + vy^2 = 5 \\ ux^3 + vy^3 = 9 \end{cases}$$

Megoldás. Az $\begin{cases} u + v = 2 \\ ux + vy = 3 \end{cases}$ és $\begin{cases} ux^2 + vy^2 = 5 \\ ux^3 + vy^3 = 9 \end{cases}$ rendszerekben x -et és y -t paraméternek tekintjük. Így az

$$(u, v) = \left(\frac{3 - 2y}{x - y}, \frac{3 - 2x}{y - x} \right) = \left(\frac{9 - 5y}{x^2(x - y)}, \frac{9 - 5x}{y^2(y - x)} \right)$$

egyenlőséghez jutunk. Tehát $\frac{3 - 2y}{x - y} = \frac{9 - 5y}{x^2(x - y)}$ és $\frac{3 - 2x}{y - x} = \frac{9 - 5x}{y^2(y - x)}$. Az $x = y$

eset nem lehetséges mert ellentmondáshoz vezet, akárcsak az $x = 0$ vagy $y = 0$. Az

előbbi egyenlőségek alapján: $\begin{cases} x^2(3 - 2y) = 9 - 5y \\ y^2(3 - 2x) = 9 - 5x \end{cases}$. Ha kivonjuk és összeadjuk a

megfelelő oldalakat, akkor a $\begin{cases} 3(x + y) - 2xy = 5 \\ 3(x^2 + y^2) - 2xy(x + y) = 18 - 5(x + y) \end{cases}$ rendszerhez

jutunk. Ebből következik, hogy $x + y = 3$ és $xy = 2$, tehát $(x, y) \in \{(2, 1), (1, 2)\}$ és így $M = \{(2, 1, 1, 1), (1, 2, 1, 1)\}$ (x, y, u, v a sorrend).

20. Oldd meg az

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 12 \\ xy + yz + zx = 12 \end{cases}$$

egyenletrendszert a valós számok halmazában.

Megoldás. Mivel $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$ következik, hogy $x = y = z$ (lásd 9.1.3. feladatot a 28. oldalon) és így $M = \{(2, 2, 2), (-2, -2, -2)\}$.

21. Oldd meg az

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 = 10 \\ xy + yz + zt + tu + ux = 10 \end{cases}$$

$$a_k = \frac{3a_2 - a_1}{2} + \frac{9(a_1 - a_2)}{2 \cdot 3^k}, \quad k = \overline{1, 2001}.$$

Az $a_{2002} = a_1$ és $a_{2003} = a_2$ feltételek alapján $a_1 = a_2$ és így $a_k = a_1$, $k = \overline{1, 1999}$.

24. Oldd meg az

$$\begin{cases} x + y + z = m \\ x^2 + y^2 + z^2 = m^2 \\ x^3 + y^3 + z^3 = m^3 \end{cases}$$

egyenletrendszert a valós számok halmazában, ha $m \in \mathbb{R}$.

Megoldás. $(u - x)(u - y)(u - z) = u^3 - (x + y + z)u^2 + (xy + yz + zx)u - xyz$.

$$m^2 = x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx),$$

tehát $xy + yz + zx = 0$ és így x , y és z az

$$u^3 - mu^2 - c = 0$$

egyenlet gyökei, ahol $c = xyz$. Ez alapján

$$m^3 = x^3 + y^3 + z^3 = m \cdot (x^2 + y^2 + z^2) + 3c = m^3 + 3c,$$

tehát $c = 0$ és így $M = \{(m, 0, 0), (0, m, 0), (0, 0, m)\}$.

25. Oldd meg az

$$\begin{cases} x^3 y^3 z^4 = 1 \\ x^2 y^4 z^4 = 2 \\ x^2 y^3 z^5 = 3 \end{cases}$$

egyenletrendszert a valós számok halmazában.

Megoldás. Ha az egyenletek megfelelő oldalait páronként elosztjuk, az $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$,

$\frac{y}{z} = \frac{2}{3}$ és $\frac{z}{x} = 3$ összefüggésekhez jutunk. Tehát $y = 2x$ és $z = 3x$. Ez alapján

$$1 = x^3 y^3 z^4 = x^3 \cdot 8x^3 \cdot 81x^4 = 8 \cdot 81 \cdot x^{10},$$

ahonnan $x = \pm \frac{1}{\sqrt[10]{2^3 \cdot 3^4}}$. Tehát a megoldáshalmaz:

$$M = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt[10]{2^3 \cdot 3^4}}, \frac{2}{\sqrt[10]{2^3 \cdot 3^4}}, \frac{3}{\sqrt[10]{2^3 \cdot 3^4}} \right), \left(-\frac{1}{\sqrt[10]{2^3 \cdot 3^4}}, -\frac{2}{\sqrt[10]{2^3 \cdot 3^4}}, -\frac{3}{\sqrt[10]{2^3 \cdot 3^4}} \right) \right\}.$$

26. Mi a feltétele annak, hogy az

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ xy + yz + zx = b \end{cases}$$

egyenletrendszer megoldható legyen?

Megoldás. Az $(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx)$ egyenlőtlenség alapján az $a^2 \geq 3b$ feltétel szükséges. Másrészt ha kiküszöböljük z -t és rendezzük x hatványai szerint, az

$$x^2 + x(y - a) + y^2 - ay + b = 0 \quad (1)$$

egyenlethez jutunk. A rendszernek pontosan akkor létezik megoldása, ha az (1) egyenletben létezik olyan $y \in \mathbb{R}$, amelyre $\Delta = -3y^2 + 2ay + a^2 - 4b \geq 0$. Ez pontosan akkor lehetséges, ha $\Delta_y = 16a^2 - 48b > 0$, tehát az $a^2 \geq 3b$ feltétel elégsége is.

27. Bizonyítsd be, hogy ha $x + y + z = 6$ és $xy + yz + zx = 9$, akkor $x, y, z \in [0, 4]$.

Megoldás. Akárcsak az előbbi feladatban, a z kiküszöbölése után az

$$x^2 + x(y - 6) + y^2 - 6y + 9 = 0$$

egyenlethez jutunk, tehát $\Delta = -3y^2 + 12y \geq 0$ és így $y \in [0, 4]$. Hasonlóan látható be, hogy $x, z \in [0, 4]$ (vagy a szimmetria alapján).

28. Bizonyítsd be, hogy ha $a, b, x, y, z \in \mathbb{R}$, $x + y + z = a$ és $xy + yz + zx = b$, akkor

$$\max\{x, y, z\} - \min\{x, y, z\} \leq 2\sqrt{\frac{a^2 - 3b}{3}}.$$

Megoldás. Ha $x \geq y \geq z$, akkor $\max\{x, y, z\} - \min\{x, y, z\} = x - z$ és

$$(x - z)^2 = x^2 + z^2 - 2xz = (a^2 - 2b - y^2) - 2(b - y(a - y)) = -3y^2 + 2ay + a^2 - 4b.$$

De a $-3y^2 + 2ay + a^2 - 4b$ kifejezés maximuma

$$-\frac{\Delta}{-4 \cdot (-3)} = \frac{16a^2 - 48b}{12} = 4 \cdot \frac{a^2 - 3b}{3}$$

$$\text{és így } (x - z)^2 \leq 4 \cdot \frac{a^2 - 3b}{3}, \text{ vagyis } x - z \leq 2\sqrt{\frac{a^2 - 3b}{3}}.$$

29. Oldd meg az

$$\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt[3]{x-y} = 6 \\ \sqrt[6]{(x+y)^3(x-y)^2} = 8 \end{cases}$$

egyenletrendszert a valós számok halmazában.

Megoldás. Az $\sqrt{x+y} = a$ és $\sqrt[3]{x-y} = b$ jelölésekkel az $\begin{cases} a+b=6 \\ ab=8 \end{cases}$ egyen-

letrendszerhez jutunk, tehát $(a, b) \in \{(2, 4), (4, 2)\}$ és így $M = \{(34, -30), (12, 4)\}$.

30. Oldd meg az

$$\begin{cases} x = \sqrt{y+45} - \sqrt{y+5} \\ y = \sqrt{x+45} - \sqrt{x+5} \end{cases}$$

egyenletrendszert a valós számok halmazában.

Megoldás. Mindkét egyenletet átrendezzük és négyzetre emeljük. Így a

$$\begin{cases} 2x\sqrt{y+5} = 40 - x^2 \\ 2y\sqrt{x+5} = 40 - y^2 \end{cases}$$

rendszerhez jutunk. Ebből

$$\begin{cases} 4x^2(y+5) = 1600 + x^4 - 80x^2 \\ 4y^2(x+5) = 1600 + y^4 - 80y^2 \end{cases},$$

tehát

$$4xy(x-y) + 20(x-y)(x+y) = (x-y)(x+y) - 80(x-y)(x+y).$$

Ha $x \neq y$, akkor a $4xy + 100(x+y) = (x+y)(x^2 + y^2)$ egyenlőséghez jutunk, mert $x = \sqrt{y+45} - \sqrt{y+5} > 0$ és $y > 0$, tehát $100 - x^2 - y^2 > 0$. Ha $x = y$, akkor az $(x-4)(x^3 - 100x - 400) = 0$ egyenlethez jutunk. Mivel az $x^3 - 100x - 400 = 0$ egyenletnek a $[0, 7]$ intervallumban nincs gyöke, a rendszer egyetlen megoldása az $x = y = 4$.

31. Oldd meg az

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = \frac{n}{2} \\ x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 = \frac{n}{8} \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

egyenletrendszert a $[-1, +\infty)$ intervallumban.

Megoldás. A $4x^3 - 3x + 1 = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2(x+1)$ felbontás alapján

$$4x^3 - 3x + 1 \geq 0, \text{ ha } x \geq -1.$$

Tehát

$$0 \leq 4 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^3 - 3 \cdot \sum_{i=1}^n x_i + n = 4 \cdot \frac{n}{8} - 3 \cdot \frac{n}{2} + n = 0.$$

Ez csak akkor lehetséges ha $4x_i^3 - 3x_i + 1 = 0$, $i = \overline{1, n}$, vagyis ha $x_i = \frac{1}{2}$, $i = \overline{1, n}$.

32. Oldd meg az

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a} \\ xy + yz + zx = -2 \end{cases}$$

egyenletrendszert a valós számok halmazában, ha $a \in \mathbb{R}$.

(Felvételi 1999)

Megoldás. A második egyenlet alapján $\frac{xy + yz + zx}{xyz} = \frac{1}{a}$, tehát $xyz = -2a$. Így

x, y és z az $u^3 - au^2 - 2u + 2a = 0$ egyenlet gyökei. Az egyenlet $(u - a)(u^2 - 2) = 0$ alakban írható, tehát $M = \{(a, \sqrt{2}, -\sqrt{2}), (a, -\sqrt{2}, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, a, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, a, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, a), (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, a)\}$.

33. Oldd meg és tárgyald az

$$\begin{cases} mx + y + z = 0 \\ x + my + z = 0 \\ x + y + mz = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \end{cases}$$

egyenletrendszert a valós számok halmazában, ha $m < 0$. (Felvételi 1999)

Megoldás.

$$\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = m^3 + 2 - 3m = (m - 1)^2(m + 2),$$

tehát ha $m \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$, akkor az első három egyenletből alkotott rendszernek egyértelmű megoldása van és az nem teljesíti az utolsó egyenletet. Mivel $m < 0$, csak az $m = -2$ esetet kell megvizsgálni. Ebben az esetben $x = y = z$, tehát a megoldáshalmaz $M = \{(1, 1, 1), (-1, -1, -1)\}$.

34. Oldd meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazában:

$$\begin{cases} x^2 - yz = 1 \\ y^2 - xz = 2 \\ z^2 - xy = -1 \end{cases}$$

Megoldás. Szorozzuk az első egyenletet y -nal, a másodikat z -vel és a harmadikat x -szel. Ha összeadjuk az így kapott egyenletek megfelelő oldalait, az $y + 2z - x = 0$ összefüggéshez jutunk. Ha az első egyenletet z -vel, a másodikat x -szel és a harmadikat y -nal szorozzuk a $z + 2x - y = 0$ egyenlethez jutunk. Ebből a két egyenletből $x = -3z$ és $y = -5z$. Ha ezeket visszahelyettesítjük az első egyenletbe, az $M = \left\{ \left(-\frac{3}{\sqrt{14}}, -\frac{5}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}} \right), \left(\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{5}{\sqrt{14}}, -\frac{1}{\sqrt{14}} \right) \right\}$ megoldáshalmazt kapjuk.

IV. A matematikai logika elemei

IV.1.2. Gyakorlatok és feladatok (87. oldal)

1. Készítsd el az alábbi kijelentések logikai értéktáblázatát:

- a)** $\neg(\neg p)$; **b)** $p \wedge q$; **c)** $p \vee q$; **d)** $p \wedge (p \vee q)$;
e) $p \vee (p \wedge q)$; **f)** $(p \vee q) \vee r$; **g)** $p \vee (q \vee r)$; **h)** $(p \wedge q) \vee r$;
i) $(p \vee q) \wedge r$; **j)** $(p \vee q) \wedge (q \vee r)$; **k)** $(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$.

Megoldás.

a)

p	$\neg p$	$\neg(\neg p)$
0	1	0
1	0	1

Megjegyzés. A táblázatból következik, hogy $\neg(\neg p) \equiv p$.

b)

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

c)

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

d)

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	1	1

e)

p	q	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

f)

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \vee r$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

g)

p	q	r	$q \vee r$	$p \vee (q \vee r)$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

h)

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

i)

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge r$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

j)

p	q	r	$p \vee q$	$q \vee r$	$(p \vee q) \wedge (q \vee r)$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

2. Bizonyítsd be a következő összefüggéseket:

a) $p \wedge q \equiv q \wedge p$; b) $p \vee q \equiv q \vee p$; c) $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$;

d) $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$; e) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$;

f) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

Megoldás.a) Elkészítjük a $p \wedge q$ és $q \wedge p$ kijelentések logikai értéktáblázatát:

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

Az értéktáblázat alapján $p \wedge q$ és $q \wedge p$ egyidőben igaz, tehát $p \wedge q \equiv q \wedge p$.

b) Hasonlóan, az értéktáblázat:

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

Tehát $p \vee q \equiv q \vee p$.

c) Az értéktáblázat:

p	q	r	$q \wedge r$	$p \wedge q$	$p \wedge (q \wedge r)$	$(p \wedge q) \wedge r$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1

Az értéktáblázatban az utolsó két oszlop azonos, tehát $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$.

d) Az 1. feladatban az f) és g) pontokban már elkészítettük a $(p \vee q) \vee r$ és $p \vee (q \vee r)$ logikai kijelentések értéktáblázatát. Ezek alapján $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$.

e)

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Az értéktáblázat kiemelt oszlopai megegyeznek, tehát $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

f)

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

A fenti táblázat alapján $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

3. Bizonyítsd be a következő összefüggéseket:

a) $p \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow p$;

b) $(p \rightarrow q) \rightarrow r \not\equiv p \rightarrow (q \rightarrow r)$;

c) $p \rightarrow q \equiv \neg(p \wedge \neg q)$;

d) $p \rightarrow q \equiv (\neg q) \rightarrow (\neg p)$.

Megoldás. A bizonyításokat értéktáblázatok segítségével végezzük el.

a)

p	q	$p \leftrightarrow q$	$q \leftrightarrow p$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

Tehát $p \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow p$.

b)

p	q	r	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \rightarrow r$	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

A kiemelt oszlopok nem egyeznek meg, tehát $(p \rightarrow q) \rightarrow r \not\equiv p \rightarrow (q \rightarrow r)$.

c)

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg q$	$p \wedge (\neg q)$	$\neg(p \wedge (\neg q))$
0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	0	1

A táblázat alapján $p \rightarrow q \equiv \neg(p \wedge (\neg q))$.

d)

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \rightarrow q$	$(\neg q) \rightarrow (\neg p)$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1

Tehát $p \rightarrow q \equiv (\neg q) \rightarrow (\neg p)$.

4. Bizonyítsd be, hogy az alábbi kijelentések logikai értéke 1, függetlenül az őket alkotó kijelentések logikai értékétől.

a) $p \rightarrow (p \vee q)$;

b) $(p \wedge q) \rightarrow p$;

c) $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$;

d) $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$;

e) $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$;

g) $p \vee (\neg p)$;

h) $\neg(p \wedge (\neg p))$;

Megoldás. A logikai értéktáblázatokat használjuk.

a)

p	q	$p \vee q$	$p \rightarrow (p \vee q)$
0	0	0	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

b)

p	q	$p \wedge q$	$p \rightarrow (p \vee q)$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

tehát $p \rightarrow (p \vee q)$ tautológia.

c)

p	q	$p \rightarrow q$	$p \wedge (p \rightarrow q)$	$(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

d)

p	q	r	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$	$p \rightarrow r$	$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

e)

p	q	r	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow r$	$(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

g)

p	$\neg p$	$p \vee (\neg p)$
0	1	1
1	0	1

h)

p	$\neg p$	$p \wedge (\neg p)$	$\neg(p \wedge (\neg p))$
0	1	0	1
1	0	0	1

5. Hány különböző módon lehet kitölteni az alábbi táblázat harmadik oszlopát, ha minden helyre 0 vagy 1 kerülhet? Bizonyítsd be, hogy a $\neg$, $\vee$, $\wedge$ műveletek segítségével mindegyik oszlop kifejezhető.

p	q	(p, q)
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

Megoldás. Minden egyes kapott oszlopnak feleltessünk meg egy kettes számrendszerbeli számot, a következőképpen:

	(p, q)	
	a	
a	b	oszlopnak, ahol $a, b, c, d \in \{0, 1\}$ feleljen meg az $\overline{abcd}_{(2)}$ szám.
	c	
	d	

A fenti megfeleltetés jól értelmezett ($\overline{abcd}$ valóban egy 2-es számrendszerbeli szám lesz), és egyértelmű, vagyis minden oszlopnak egy és csakis egy szám felel meg.

Továbbá, ha tekintjük a 2-es számrendszerbeli számokat 0000-tól 1111-ig, akkor ezen számok mindegyike megfelel egy oszlopnak, tehát ugyanannyi oszlop van, mint ahány 2-es számrendszerbeli szám 0-tól 1111-ig. Viszont $\overline{1111}_{(2)} = 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 2^4 - 1$, és még nem számoltuk bele a 0-t, tehát összesen 2^4 oszlop létezik.

Igazolnunk kell, hogy minden ilyen oszlop előállítható a p és q oszlopaiból az $\neg$, $\vee$, $\wedge$ műveletek többszöri egymásutáni alkalmazásával. Először igazoljuk, hogy a $0000_{(2)}$,

$0001_{(2)}$, $0010_{(2)}$, $0100_{(2)}$ és $1000_{(2)}$ számoknak megfelelő oszlopok előállíthatók:

p	q	$\neg p$	$(\neg p) \wedge p$	$p \wedge q$	$\neg((\neg p) \vee q)$	$(\neg p) \wedge q$	$(\neg p) \wedge (\neg q)$
0	0	1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	0	1	0
1	0	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0	0

A fenti logikai értéktáblázat alapján a $0000_{(2)}$, $0001_{(2)}$, $0010_{(2)}$, $0100_{(2)}$ és $1000_{(2)}$

számoknak rendre a $(\neg p) \wedge p$, $p \wedge q$, $\neg((\neg p) \vee q)$, $(\neg p) \wedge q$, $(\neg p) \wedge (\neg q)$ oszlopok felelnek meg. Azonnal látható, hogy a fentebb kapott 5 szám valamilyen összegének megfelelő oszlop előállítható úgy, hogy az összegben szereplő számoknak megfelelő oszlopokra alkalmazzuk a „ $\vee$ ” műveletet, vagyis ha ez az öt szám $x_1 = 0000_{(2)}$, ...,

$x_5 = 1000_{(2)}$, akkor például $x_1 + x_3 + x_5 = 1010$ és ez a szám előállítható az

$x_1^o \vee x_3^o \vee x_5^o$ művelettel, ahol x_i^o -val jelöljük az x_i számnak megfelelő oszlopot. Mivel az x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 számok összegével minden $0, 1111_{(2)}$ közötti szám előállítható, következik, hogy minden oszlop előállítható a kért módon (+-ok helyett $\vee$ -okat írunk).

Megjegyzés. Általánosan igaz a következő kijelentés:

A $p_1, p_2, \dots, p_n$ kijelentésekből a $(p_1, \dots, p_n)$ oszlop 2^n féleképpen tölthető ki, és minden kitöltés előállítható az $\neg, \vee, \wedge$ műveletek alkalmazásával.

6. Az előbbi műveletek közül melyek kommutatívak és melyek asszociatívak?

Megoldás. A „ $\neg$ ” művelet unáris, tehát nem beszélhetünk kommutativitásról vagy asszociativitásról. Az „ $\wedge$ ” és „ $\vee$ ” műveletekre már láttuk a 2. feladatnál, hogy teljesülnek a

$$\begin{aligned} p \wedge q &\equiv q \wedge p; & p \vee q &\equiv q \vee p; \\ p \wedge (q \wedge r) &\equiv (p \wedge q) \wedge r; & p \vee (q \vee r) &\equiv (p \vee q) \vee r; \end{aligned}$$

azonosságok, vagyis az „ $\wedge$ ” és „ $\vee$ ” műveletek kommutatívak és asszociatívak is.

7. Valaki 4 kártyát tett ki elének. Mindegyiknek az egyik oldalán egy betű áll, másik oldalán egy szám. Legalább hány kártyát kell megfordítanunk ahhoz, hogy ellenőrizzük a következő kijelentéseket (külön-külön), ha a IV.1. ábrán látható betűket és számokat látjuk:

a) Ha az egyik oldalon nagy betű áll, a másik oldalon páros szám áll.

b) Ha az egyik oldalon páratlan szám áll, akkor a másik oldalon mássalhangzó van.



Megoldás. a) Legalább egy kártyát meg kell fordítanunk, mert a $p =$ „az egyik oldalon nagy betű áll” és $q =$ „a másik oldalon páros szám áll” kifejezések lehetnek igazak is és hamisak is, vagyis az értéktáblázatuk:

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
1	0	0
0	1	1
1	1	1

vagyis $p \rightarrow q$ (ami éppen az a) kijelentés) lehet igaz is és hamis is. Viszont ha egy kártyát megfordítunk, az elég mert ezáltal megkapunk egy (betű, szám) egy párt, és ebből következik, hogy mi van a másik kártyán.

b) Mivel „a” és „A” is magánhangzó, ezért a $q =$ „az oldalon mássalhangzó van” kijelentés kiértékelése mindig 1, tehát a $p \rightarrow q$ kijelentés mindig igaz, vagyis egyetlen kártya megfordítása nélkül megmondhatjuk, hogy a b) kijelentés igaz ($p \rightarrow q$ igaz).

IV.1.3.1. Gyakorlatok (88. oldal)

1. Vizsgáljuk meg az alábbi kijelentések logikai értékét:

a) $\exists n \in \mathbb{N} : 2^n = n^2$; b) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$;

c) $\exists n \in \mathbb{N} : n^2 + n = 1$; d) $\forall x \in \mathbb{Z} \exists y \in \mathbb{N}$ úgy hogy $x + y = 0$;

e) $\forall x \in [1, 2] : x^2 - 3x + 2 \leq 0$.

Megodás. a) Mivel $n = 2$ -re teljesül a $2^n = n^2$ egyenlőség és $2 \in \mathbb{N}$, következik, hogy a „ $\exists n \in \mathbb{N} : 2^n = n^2$ ” kijelentés igaz.

b) Mivel minden $x \in \mathbb{R}$ -re $x^2 \geq 0$, a kijelentés igaz.

c) Az $n^2 + n = 1 \Leftrightarrow n^2 + n - 1 = 0$ egyenlet megoldásai $n_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \notin \mathbb{N} \Rightarrow$ a kijelentés nem igaz.

d) A kijelentés nem igaz, mert például $x = 7 \in \mathbb{Z}$ -re nem létezik $y \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $x + y = 0$, vagyis $7 + y = 0$.

e) Az $x^2 - 3x + 2 = 0$ egyenlet gyökei $x_1 = 1$ és $x_2 = 2$, és az x^2 -es tag együttthatoja pozitív $\Rightarrow$ az $[1, 2]$ intervallumban $x^2 - 3x + 2 \leq 0$, tehát a kijelentés igaz.

2. Írd fel kvantorok segítségével az alábbi mondatokat, próbálj minden mondatot kétféleképpen felírni, egyszer univerzális és egyszer egzisztenciális kvantorral.

a) Nincsen rózsza tövis nélkül.

b) Nem mind arany, ami fénylik.

c) Nem minden papsajt.

Megoldás. a) Univerzális kvantorral: $\forall$ rózsán van tövis.

Egzisztenciális kvantorral: $\nexists$ rózsza úgy, hogy nincs rajta tövis.

b) Univerzális kvantorral: $\forall$ fénylő dolog nem arany.

Egzisztenciális kvantorral: $\exists$ olyan fénylő dolog, ami nem arany.

c) Univerzális kvantorral: $\forall$ dolog nem papsajt.

Egzisztenciális kvantorral: $\exists$ dolog, ami nem papsajt.

3. Tagadd a következő predikátumokat/mondatokat:

a) $\forall x \in [1, \infty] : x > 0$;

b) Bármely erdőlakó tud tüzet rakni.

c) Van olyan diák, aki nem tud puskázni.

d) Minden tanár érti amit tanít, kivéve a rendőrtanárt.

e) Minden diáknak legalább egy tanár szimpatikus.

f) Minden héten legalább egyszer boldog vagyok.

g) Létezik olyan tantárgy, amit nem szívesen tanulok.

h) Létezik olyan tanár, aki minden őt kedvelő diákot kedvel.

Megoldás. a) $\exists x \in [1, \infty] : x \leq 0$;

b) Létezik olyan erdőlakó, amelyik nem tud tüzet rakni.

- c) Minden diák tud puskázni.
- d) Van olyan tanár, aki nem rendőrtanár és nem érti amit tanít.
- e) Létezik olyan diák, akinek minden tanár antipatikus.
- f) Van olyan hét, amelyiken egyszer sem vagyok boldog.
- g) Minden tantárgyat szívesen tanulok.
- h) Nem létezik olyan tanár, aki minden őt kedvelő diákot kedvel.

IV.1.4.1. Gyakorlatok és feladatok (90. oldal)

1. A és B egymástól függetlenül igazmondó vagy lóköető. A azt állítja, hogy „Legalább az egyikük lóköető.”. Lóköető-e vagy sem?

Megoldás. Két eset lehetséges: A vagy lóköető, vagy igazmondó. Ha A igazmondó, akkor állítása igaz, mely alapján B lóköető kell legyen. Ha A lóköető, akkor állítása hamis, vagyis egyikük sem lóköető, ami ellentmondás (A lóköető), tehát A nem lehet lóköető. (lásd red. ad abs. módszer!)

A fentiek alapján A kijelentéséből egyértelműen el tudjuk dönteni, hogy A igazmondó és B lóköető.

2. Meg lehet-e állapítani, hogy lóköető-e, ha A azt mondja, hogy „Lóköető vagyok vagy B igazmondó”?

Megoldás. Ismét két esetet tárgyalunk:

1. Ha A lóköető, akkor állítása hamis. Viszont a $p \vee q$ állítás, mint láttuk, akkor és csak akkor lehet hamis, ha p is és q is hamis (nem kizárolagos vagy), tehát A igazmondó és B lóköető, ami ellentmond a feltételünknek, hogy A lóköető.
2. Ha A igazmondó, akkor állítása igaz. Ez csak oly módon történhet meg $p \vee q$ esetén, ha p is és q is igaz, vagy legalább egyikük igaz. Viszont e feltétel szerint, ha $p =$ „lóköető vagyok” és $q =$ „ B igazmondó”, p hamis, tehát q igaz. Vagyis A és B is igazmondók.

A két eset alapján egyértelműen A is és B is igazmondó.

3. A , B és C egymástól függetlenül igazmondó vagy lóköető és a következőket mondják:

A : Mindnyájan lóköetők vagyunk.

B : Pontosan egy igazmondó van közöttünk.

Meg lehet-e állapítani, hogy ki lóköető és ki nem?

Megoldás. A állítása alapján biztosan lóköető. Ha B lóköető lenne, figyelembe véve, hogy A állítása hamis, egy eset lenne lehetséges: két igazmondó van, ami ellentmondás, mert sem A sem B nem igazmondó. Tehát B igazmondó kell legyen, és így állítása szerint C lóköető. Összegezve a fentiek, egyértelműen el lehet dönteni, hogy A lóköető, B igazmondó és C lóköető.

4. A és B egymástól függetlenül igazmondó, lóköető vagy kiismerhetetlen (ezek néha hazudnak és néha igazat mondanak). Az igazmondókat tartják felsőbb, a kiismerhetetleneket közép és a lóköetőket alsóbb osztálynak. A következő két állítás alapján el lehet-

e dönteni A vagy B osztályát? Hát azt, hogy az állítások közül melyik igaz és melyik hamis?

A : Alacsonyabb osztálybeli vagyok mint B .

B : Ez nem igaz!

Megoldás. A kijelentése alapján nem lehet igazmondó. Ha A lóköttő lenne, akkor kijelentése hamis lenne, és mivel a legalacsonyabb osztály a lóköttőké, B is lóköttő kellene legyen, tehát állítása hamis. Ez azt jelenti, hogy A állítása igaz, ami ellentmondás, tehát A csak kiismerhetetlen lehet. (1)

Ha A állítása igaz lenne, akkor B feltétlenül igazmondó kellene legyen (hisz felsőbb osztályba tartozik), ami ellentmondás, hisz B azt mondja, hogy A állítása nem igaz. Tehát A állítása hamis. (2)

(2)-ből következik, hogy B nem lehet lóköttő (ebben az esetben A állítása igaz kellene legyen, mert B hazudik), tehát B is kiismerhetetlen. (3)

Következik, hogy A és B ugyababba az osztályba tartoznak, és ezért B állítása nem lehet hamis. (4)

(1), (2), (3) és (4) alapján mindkét kérdésre igenlő a válasz.

5. *A IV.2. ábrán látható ládikák egyikében egy korona van. Meg lehet-e állapítani, hogy melyikben van a korona, ha az egyik ládikán sincs egynél több hamis állítás?*

A korona nem ebben van. A korona Szent Istváné volt.	A korona nem az 1. ládikában van. A korona II. Lajos királyé volt.	A korona nem ebben van. A korona a 2. ládikában van.
---	---	---

IV.2. ábra

Megoldás. A feltétel alapján a korona nem lehet a 3-mas ládában. Ha a korona az 1. ládikában lenne, akkor a p = „A korona II. Lajosé volt.” és q = „A korona Szent Istváné volt.” kijelentések egyszerre igazak kéne legyenek. Tehát a korona a 2. ládikában van és ez esetben ha a korona Szent Istváné volt, akkor teljesül a feltétel, hogy egyik ládikán se legyen egynél több hamis állítás.

6. *A és B egymástól függetlenül igazmondó vagy lóköttő. A azt állítja, hogy „Ha én igazmondó vagyok, akkor B is az.” Igazmondókkal vagy lóköttőkkel van dolgunk?*

Megoldás. Vegyük észre, hogy A állítása tulajdonképpen egy implikáció, ami akkor és csak akkor hamis, ha az első része igaz és a második hamis.

Ha A igazmondó, akkor B is az a fentiek alapján. (A állítása igaz kell legyen, és ez csak akkor teljesülhet, ha az állítás második része igaz, vagyis B igazmondó.)

Ha A lóköttő lenne, akkor állítása hamis lenne, tehát állításának első része igaz kell legyen, vagyis A igazmondó – ellentmondás.

Tehát A és B is igazmondó.

7. *Egy szultán, akinek két lánya volt, azt mondta egy vendégségbe érkezett hercegnek: - Mondanod kell egy állítást. Ha igaz, hozzád adom a nagyobbik lányomat, ha nem, akkor nem veheted őt feleségül.*

Kevés gondolkodás után a herceg mondott egy mondatot és a szultán kénytelen volt a kisebbik lányt feleségül adni a herceghez. Mit mondhatott a herceg?

Megoldás. A herceg a következő kijelentést tehetette: „Egyik lányod sem lesz a feleségem”.

8. Mit mondhatott a herceg, ha a szultán mindkét lányát hozzá kellett adja feleségül?

Megoldás. A válasz a következő lehetett: „Ha a nagyobbik lányod a feleségem lesz, akkor a kisebb is.”

IV.2.1.1. Gyakorlatok és feladatok (91. oldal)

1. Bizonyítsd be, hogy minden természetes szám 1-nél nagyobb egész kitevőjű hatványának kettős számrendszerbeli alakjában előfordul zérus számjegy.

Bizonyítás. A kettes számrendszerben felírt egész számok közül csak azokban nem fordul elő zérus számjegy, amelyekben minden jegy 1-es, tehát amelyek 1-gyel kisebbek 2-nek valamely (pozitív egész kitevős) hatványánál, azaz $2^s - 1$ alakúak, ahol $s = 2, 3, \dots$ (az 1-es jegyek száma, az $s = 1$ esetet azonban kizárjuk). Eszerint a bizonyítandó állítást így is kimondhatjuk: semilyen $a(>1)$ egész számnak $n(>1, \text{ egész})$ kitevőjű hatványa nem lehet egyenlő $2^s - 1$ -gyel.

Az $a^n = 2^s - 1$ egyenlőséget csak páratlan a -kra kell megcáfelnunk, hiszen a jobb oldal páratlan, páros szám vizsgálándó hatványai viszont maguk is párosak.

$\alpha)$ Páratlan n esetén az egyenlőség így alakítható:

$$2^s = a^n + 1^n = (a + 1)(a^{n-1} - a^{n-2} + \dots + a^2 - a + 1).$$

Itt a jobb oldali második zárójelben n tag áll, mindegyikük páratlan, tehát a zárójelben páratlan szám áll, és az az egyenlőség szerint osztója 2^s -nek. 2^s -nek viszont nincs más páratlan osztója mint az 1, csak az lehetne tehát az n tagú zárójel értéke. Ámde a zárójelbeli kifejezés így írható:

$$(a^{n-1} - a^{n-2}) + (a^{n-3} - a^{n-4}) + \dots + (a^2 - a) + 1 > 1,$$

hiszen a kéttagúak száma legalább 1 és mindegyik kéttagú pozitív. Ellentmondásra jutottunk a föltevésből.

$\beta)$ Páros n esetén $n = 2m$ jelöléssel

$$a^n + 1 = (2b + 1)^n + 1 = [(2b + 1)^2]^m - 1^m + 2 = \{(2b + 1)^2 - 1\}A + 2 = 4B + 2,$$

ahol A az egyenlő kitevőjű hatványok különbségére ismert azonosság alapján egész szám, és $B = (b^2 + b)A$ ugyancsak egész. Eszerint a bal oldal már 4-gyel sem osztható maradék nélkül.

Mindezek szerint $a^n = 2^s - 1$ a tett föltevések mellett lehetetlen, az állítás helyes.

2. Képzeld meg el leírva valamilyen sorrendben egymás után a természetes számokat. Karikázzuk be azokat, amelyek legalább akkorák, mint ahányadik helyen állnak a sorban. Bizonyítsuk be, hogy így végtelen sok számot kell bekarikázni.

Bizonyítás. Feltételezzük, hogy csak véges sok számot lehet bekarikázni. Ha az utolsó bekarikázott szám a_k , $M = \max\{a_i \mid i = \overline{1, k}\}$, akkor

$$a_i \leq M, \text{ ha } i = \overline{1, k} \text{ és}$$

$$a_j \leq M, \text{ ha } j = \overline{k + 1, M + 1}$$

(mivel az $a_j = \overline{k+1, M+1}$ számokat nem karikáztuk be). Így találtunk $M+1$ darab nullától és egymástól különböző természetes számot, amelyek M -nél nem nagyobbak. Ez ellentmondás, tehát végtelen sok számot lehet bekarikázni.

3. Bizonyítsd be, hogy az $\left(n\sqrt{2} - \frac{1}{3n}, n\sqrt{2} + \frac{1}{3n}\right)$ intervallum egyetlen $n \in \mathbb{N}$ esetén sem tartalmaz egész számot.

Bizonyítás. Ha az intervallum tartalmazza a k egész számot, akkor

$$n\sqrt{2} - \frac{1}{3n} < k < n\sqrt{2} + \frac{1}{3n},$$

ahonnan következik, hogy

$$2n^2 + \frac{1}{9n^2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} < k^2 < 2n^2 + \frac{1}{9n^2} + \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Mivel $2\sqrt{2} < 3$, az előbbi egyenlőtlenségek alapján

$$2n^2 - 1 < k^2 < 2n^2 + 1.$$

De a $(2n^2 - 1, 2n^2 + 1)$ intervallum egyetlen egész számot tartalmaz a $2n^2$ -et és így $k^2 = 2n^2$. Ez viszont ellentmondás, mert $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, és így a vizsgált intervallum nem tartalmaz egész számot.

4. Bizonyítsd be, hogy a $\frac{21n+4}{14n+3}$ tört egyetlen $n \in \mathbb{N}$ esetén sem egyszerűsíthető.

Bizonyítás. Ha $d \in \mathbb{N}$ osztja a tört számlálóját és nevezőjét, akkor

$$d \mid 3(14n+3) - 2(21n+4),$$

vagyis $d \mid 1$. Ez csak akkor lehetséges, ha $d = 1$, tehát a tört irreducibilis.

5. Bizonyítsd be, hogy ha hét szám közül bármely négy összege nagyobb a többi három összegénél, akkor a számok pozitívak.

Bizonyítás. Feltételezzük, hogy $a_1 \leq 0$ és tekintjük az

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 > a_5 + a_6 + a_7,$$

$$a_1 + a_5 + a_6 + a_7 > a_2 + a_3 + a_4$$

egyenlőtlenségeket. Ha a megfelelő oldalakat összeadjuk az $a_1 > 0$ egyenlőtlenséghez jutunk, ami ellentmond a feltételezésnek, tehát $a_1 > 0$. Mivel a_1 -et tetszőlegesen választottuk, a számok mind pozitívak.

6. Bizonyítsd be, hogy ha a , b és c páratlan természetes számok, akkor az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenletnek nincs egész gyöke.

Bizonyítás. Ha x páros, akkor $ax^2 + bx + c$ páratlan (mert $ax^2 + bx$ páros és c páratlan) és ha x páratlan, akkor $ax^2 + bx + c$ páratlan mert három páratlan szám összege. Így egyetlen $x \in \mathbb{Z}$ szám sem lehet gyöke az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenletnek.

7. Bizonyítsd be, hogy ha $\frac{m^2}{n^2} \notin \mathbb{Z}$, akkor $\frac{m}{n} \notin \mathbb{Z}$ ($m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$).

Bizonyítás. Ha $\frac{m}{n} \in \mathbb{Z}$, akkor $\frac{m^2}{n^2} \in \mathbb{Z}$, tehát a $[p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p]$ tautológia alapján igaz az állítás.

8. Bizonyítsd be, hogy ha $\frac{m^2}{n^2} \in \mathbb{Z}$, akkor $\frac{m}{n} \in \mathbb{Z}$ ($m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$).

Bizonyítás. Ha $\frac{m}{n} \notin \mathbb{Z}$, akkor létezik $a, b \in \mathbb{Z}$, $(a, b) = 1$ úgy, hogy $\frac{m}{n} = \frac{a}{b}$ és $b \notin \{\pm 1\}$. Tehát $\frac{m^2}{n^2} = \frac{a^2}{b^2}$ és $(a^2, b^2) = 1$, $b^2 \neq 1$, vagyis $\frac{m^2}{n^2} \notin \mathbb{Z}$. A $[p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p]$ tautológia alapján igaz a feladat állítása.

9. Bizonyítsd be, hogy négy egymás utáni nullától különböző természetes szám szorzata nem lehet teljes négyzet.

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} n(n+1)(n+2)(n+3) &= (n^2+3n)(n^2+3n+2) = \\ &= (n^2+3n)^2 + 2 \cdot (n^2+3n) + 1 - 1 = (n^2+3n+1)^2 - 1. \end{aligned}$$

Két teljes négyzet közötti különbség csak akkor 1, ha ezek a számok az 1 és 0, tehát $(n^2+3n+1)^2 - 1$ csak akkor teljes négyzet, ha $(n^2+3n+1)^2 - 1 = 0$. Ez viszont ellentmond annak, hogy a számok különböznek 0-tól.

IV.2.2.2. Gyakorlatok és feladatok (96. oldal)

1. Bizonyítsuk be, hogy

a) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1};$

b) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3};$

c) $(1+2)(1+2^2)(1+2^4)(1+2^8) \cdot \dots \cdot (1+2^{2^n}) = 2^{2^{n+1}} - 1;$

d) $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n};$

e) $1^2 - 2^2 + 3^2 - \dots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2};$

f) $\frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(n+2)}{3(2n+1)(2n+3)}.$

Bizonyítás.

a) Ha $n = 1$, akkor $\frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2}$, tehát $n = 1$ esetén az egyenlőség teljesül.

Ha $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$ valamilyen $n \in \mathbb{N}^*$ esetén, akkor

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} &= 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \\ &= 1 - \frac{1}{n+2}, \end{aligned}$$

tehát az egyenlőség teljesül $(n+1)$ -re is. Így a matematikai indukció elve alapján

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}, \quad \forall n \geq 1$$

b) Ha $n = 1$, akkor $1 \cdot 2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3}$ és ha $n = 2$, akkor $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 8 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{3}$.

Ha $\sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$, akkor

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) &= \sum_{k=1}^n k(k+1) + (n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) = \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}, \quad \forall n \geq 1 \end{aligned}$$

tehát az egyenlőség teljesül $(n+1)$ -re is. Így a matematikai indukció alapján

$$\sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}, \quad \forall n \geq 1.$$

c) $1 + 2 = 2^1 - 1$ és $(1+2)(1+2^2) = 15 = 2^2 - 1$, tehát az egyenlőség teljesül $n = 1$ és $n = 2$ esetén.

Ha $(1+2)(1+2^2)(1+2^4)(1+2^8) \dots (1+2^{2^n}) = 2^{2^{n+1}} - 1$, akkor

$$\begin{aligned} (1+2)(1+2^2)(1+2^4) \dots (1+2^{2^n})(1+2^{2^{n+1}}) &= \\ &= (2^{2^{n+1}} - 1)(2^{2^{n+1}} + 1) = (2^{2^{n+1}})^2 - 1 = 2^{2^{n+2}} - 1. \end{aligned}$$

A matematikai indukció elve alapján

$$(1+2)(1+2^2) \dots (1+2^{2^n}) = 2^{2^{n+1}} - 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

d) $n = 2$ esetén $1 - \frac{1}{4} = \frac{2+1}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4}$.

Ha az egyenlőség teljesül n -re, akkor

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+1}{2n} \cdot \frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2} =$$

$$= \frac{n(n+2)}{2n(n+1)} = \frac{n+2}{2(n+1)}.$$

tehát teljesül $(n+1)$ -re is. Így a matematikai indukció elve alapján

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n} \quad \forall n \geq 2.$$

e) $n = 1$ esetén $1^2 = (-1)^0 \cdot \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$.

Ha $n \in \mathbb{N}$ esetén $1^2 - 2^2 + 3^2 - \dots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}$, akkor

$$\begin{aligned} 1^2 - 2^2 + 3^2 - \dots + (-1)^{n-1} n^2 + (-1)^n (n+1)^2 &= (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2} + (-1)^n (n+1)^2 = \\ &= (-1)^n \cdot \frac{n+1}{2} \cdot [2(n+1) - n] = (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)}{2}, \end{aligned}$$

tehát a bizonyítandó egyenlőség teljesül $(n+1)$ -re is. Így a matematikai indukció elve alapján

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - \dots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}, \quad \forall n \geq 1.$$

f) $n = 1$ esetén az $\frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 5}$ egyenlőség igaz.

Ha az egyenlőség teljesül n -re, akkor

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} = \\ &= \frac{n(n+2)}{3(2n+1)(2n+3)} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} = \\ &= \frac{1}{3(2n+1)(2n+3)} \cdot \left[n(n+2) + \frac{3}{2n+5} \right] = \frac{1}{3(2n+1)(2n+3)} \cdot \frac{(2n+1)(n+1)(n+3)}{(2n+5)} = \\ &= \frac{(n+1)(n+3)}{3(2n+3)(2n+5)}, \end{aligned}$$

tehát teljesül $(n+1)$ -re is. Így a matematikai indukció elve alapján teljesül bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

Megjegyzés. Ha az eredmények nem adóttak, akkor az

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}; \quad k(k+1) = k^2 + k;$$

$$(1 - 2^{2^k})(1 + 2^{2^k}) = 1 - 2^{2^{k+1}}; \quad 1 - \frac{1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2};$$

és
$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} - \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} \right)$$

összefüggéseket használhatjuk a kiszámításukhoz.

2. Számítsd ki az alábbi összegeket, majd bizonyítsd a kapott eredményt a matematikai indukció módszerével:

a) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)(n+2)$;

b) $1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + \dots + n(2n+1)$; **c)** $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \dots + n(3n+1)$;

d) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$; **e)** $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$;

f) $\sum_{k=1}^n \frac{4k}{4k^4 + 1}$; **g)** $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}}$.

Megoldás.

a) $\sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) = \sum_{k=1}^n (k^3 + 3k^2 + 2k) = \sum_{k=1}^n k^3 + 3 \cdot \sum_{k=1}^n k^2 + 2 \cdot \sum_{k=1}^n k =$
 $= \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} \quad \forall n \geq 1.$

Más ötlet:

$$4k(k+1)(k+2) = k(k+1)(k+2)(k+3) - (k-1)k(k+1)(k+2)$$

tehát $4 \cdot \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) = n(n+1)(n+2)(n+3) - 0.$

b) $\sum_{k=1}^n k(2k+1) = \sum_{k=1}^n (2k^2 + k) = 2 \cdot \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k =$
 $= \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{6} (2(2n+1) + 3) = \frac{n(n+1)(4n+5)}{6}.$

c) $\sum_{k=1}^n k(3k+1) = \sum_{k=1}^n (3k^2 + k) = 3 \cdot \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k =$
 $= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)^2.$

d) $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2k+1) - (2k-1)}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right),$

tehát $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{n}{2n+1}.$

e) $\frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3k+1) - (3k-2)}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1} \right),$

tehát $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3n+1} \right) = \frac{n}{3n+1}.$

f) $4k^4 + 1 = 4k^4 + 4k^2 + 1 - 4k^2 = (2k^2 + 1)^2 - (2k)^2 = (2k^2 - 2k + 1)(2k^2 + 2k + 1)$

és $\frac{4k}{4k^4 + 1} = \frac{(2k^2 + 2k + 1) - (2k^2 - 2k + 1)}{(2k^2 + 2k + 1)(2k^2 - 2k + 1)} = \frac{1}{2k^2 - 2k + 1} - \frac{1}{2k^2 + 2k + 1}.$

Másrészt

$$2(k+1)^2 - 2(k+1) + 1 = 2k^2 + 2k + 1,$$

tehát az összeg közbeeső tagjai egyszerűsödnek és így

$$\sum_{k=1}^n \frac{4k}{4k^2 + 1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2n^2 + 2n + 1} = \frac{2n(n+1)}{2n^2 + 2n + 1}.$$

$$\text{g)} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})} = \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}} = \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}},$$

$$\text{tehát } \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Az indukciós bizonyítások az 1. feladathoz hasonlóan elvégezhetők, de a gondolatmenet minden esetben bizonyítássá is alakítható.

3. Számítsd ki a következő összegeket:

a) $1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$;

b) $x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n$;

c) $\frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} + \frac{x^4}{1-x^8} + \dots + \frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}}.$

Megoldás. a) Ha $S_n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$, akkor

$$x \cdot S_n = x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + x^{n+1},$$

$$\text{tehát } S_n - x \cdot S_n = 1 - x^{n+1} \text{ és így } S_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

$$\text{Tehát } 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n = \begin{cases} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, & \text{ha } x \neq 1 \\ n + 1, & \text{ha } x = 1 \end{cases}.$$

b) Ha $S_n = x + 2x^2 + \dots + nx^n$, akkor

$$x \cdot S_n = x^2 + 2x^3 + \dots + (n-1)x^n + nx^{n+1} \text{ és}$$

$$(1-x)S_n = x + x^2 + x^3 + \dots + x^n - nx^{n+1} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} - 1 - nx^{n+1} =$$

$$= \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{1 - x}, \text{ ha } x \neq 1.$$

$$\text{Tehát } S_n = \begin{cases} \frac{n(n+1)}{2}, & \text{ha } x = 1 \\ \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}, & \text{ha } x \neq 1 \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} &= \frac{x(1+x^2)+x^2}{1-x^4} = \frac{x+x^2+x^3}{1-x^4} \\ \frac{x+x^2+x^3}{1-x^4} + \frac{x^4}{1-x^8} &= \frac{(x+x^2+x^3)(1+x^4)+x^4}{1-x^8} = \frac{x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7}{1-x^8} \end{aligned}$$

Az előbbiek alapján az sejthetjük, hogy

$$\begin{aligned} \frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} + \dots + \frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}} &= \frac{x+x^2+x^3+\dots+x^{2^n-1}}{1-x^{2^n}} = \\ &= \frac{\frac{x^{2^n}-1}{x-1}-1}{1-x^{2^n}} = \frac{x^{2^n}-x}{(x-1)(1-x^{2^n})}. \end{aligned}$$

Ezt indukcióval igazolhatjuk. $n \in \{1, 2, 3\}$ esetén az egyenlőség teljesül.

$$\text{Ha } \frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} + \frac{x^4}{1-x^8} + \dots + \frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}} = \frac{x^{2^n}-x}{(x-1)(1-x^{2^n})}, \text{ akkor}$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} + \frac{x^4}{1-x^8} + \dots + \frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}} + \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}} &= \frac{x^{2^n}-x}{(x-1)(1-x^{2^n})} + \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}} = \\ &= \frac{(x^{2^n}-x)(1+x^{2^n})+(x-1) \cdot x^{2^n}}{(x-1)(1-x^{2^{n+1}})} = \frac{x^{2^{n+1}}-x}{(x-1)(1-x^{2^{n+1}})}, \end{aligned}$$

tehát, az egyenlőség $(n+1)$ -re is igaz. A matematikai indukció elve alapján

$$\frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} + \frac{x^4}{1-x^8} + \dots + \frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}} = \frac{x^{2^n}-x}{(x-1)(1-x^{2^n})}, \quad \forall n \geq 1 \text{ és } x \neq 1 \text{ esetén.}$$

4. Bizonyítsd be a következő egyenlőtlenségeket:

$$\text{a) } 2^n \geq n^2, \quad \forall n \geq 4; \quad \text{b) } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \geq 1 + \frac{k}{n}, \quad n, k \in \mathbb{N}^*;$$

$$\text{c) } (1+x)^n \geq 1+nx \text{ (Bernoulli egyenlőtlenség), ha } n \in \mathbb{N}^* \text{ és } x > 0;$$

$$\text{d) } 2(\sqrt{n+1}-1) < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n};$$

$$\text{e) } \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}, \quad \forall n > 1;$$

$$\text{f) } \frac{n+1}{2} \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n-1} < n, \quad \forall n \geq 2;$$

$$\text{g) } 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2; \quad \text{h) } 3^n \geq n^3 \quad \forall n \geq 4;$$

$$\text{i) } 2^n > n^2 + 4n + 5, \quad \forall n \geq 7; \quad \text{j) } \frac{n^2+2n-2}{6} < \sum_{k=2}^n \sqrt[k]{k!} < \frac{n^2+3n-4}{4}.$$

Bizonyítás. a) $n = 4$ esetén $2^4 = 4^2 = 16$, $n = 5$ -re pedig $2^5 = 32 > 25 = 5^2$.

Ha $2^n \geq n^2$, akkor $2^{n+1} \geq 2n^2$ és így a

$$2n^2 \geq (n+1)^2 \Leftrightarrow n^2 - 2n + 1 \geq 2 \Leftrightarrow (n-1)^2 \geq 2$$

egyenlőtlenség alapján $2^{n+1} \geq (n+1)^2$. A matematikai indukció elve alapján így $2^n \geq n^2 \quad \forall n \geq 4$.

b) k szerinti indukciót használunk. $k = 1$ esetén egyenlőség áll fenn. Ha rögzített k

esetén $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \geq 1 + \frac{k}{n}$, akkor

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k+1} \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{k}{n}\right) = 1 + \frac{k}{n} + \frac{1}{n} + \frac{k}{n^2} \geq 1 + \frac{k+1}{n},$$

tehát, az egyenlőtlenség $(k+1)$ -re is igaz. A matematikai indukció elve alapján tehát

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \geq 1 + \frac{k}{n}, \quad \forall n, k \in \mathbb{N}^*.$$

c) Ha $n = 1$, az egyenlőség teljesül.

Ha $(1+x)^n \geq 1+nx$, akkor

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) = 1+nx+x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$$

$\forall x > -1$ és $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

A matematikai indukció elve alapján $(1+x)^n \geq 1+nx$, $\forall n \geq 1$ és $x > -1$.

d) $n = 1$ -re a $2(\sqrt{2}-1) < 1 < 2\sqrt{1}$ egyenlőséget kell megvizsgálni. Ez igaz, mert $2\sqrt{2} < 3$ és $1 < 2$. Ha az egyenlőtlenségek teljesülnek n -re, akkor

$$2(\sqrt{n+1}-1) + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \quad (*)$$

Megvizsgáljuk a

$$2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1} \quad (1)$$

$$\text{és} \quad 2(\sqrt{n+1}-1) + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > 2(\sqrt{n+2}-1) \quad (2)$$

egyenlőtlenségeket.

$$(1) \Leftrightarrow 4n + \frac{1}{n+1} + \frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} < 4n+4 \Leftrightarrow 1 + 4\sqrt{n(n+1)} < 4n+4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16n^2 + 16n < 16n^2 + 24n + 9 \text{ és ez igaz mert } n \in \mathbb{N}^*.$$

$$(2) \Leftrightarrow 2\sqrt{n+1} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > 2\sqrt{n+2} \Leftrightarrow 4n+4 + \frac{1}{n+1} + 4 > 4n+8$$

és ez igaz mert $\frac{1}{n+1} > 0$.

(1), (2) és (*) alapján az egyenlőtlenség igaz $(n+1)$ -re. Így a matematikai indukció alapján az egyenlőtlenség igaz $\forall n \geq 1$ esetén.

e) $n = 2$ esetén $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8} < \frac{1}{\sqrt{7}}$ mivel $9 \cdot 7 = 63 < 64 = 8^2$.

Ha az egyenlőtlenség teljesül n -re, akkor

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2}.$$

Ha igazolni tudjuk, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{3n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+2}} \quad (1)$$

akkor következik, hogy az egyenlőtlenség $(n+1)$ -re is igaz, tehát a matematikai indukció elve alapján bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén is igaz.

$$(1) \Leftrightarrow (3n+2)(2n+1)^2 \leq (3n+1)(2n+2)^2 \Leftrightarrow 0 \leq 8n^2 + 9n + 2.$$

Mivel az utolsó egyenlőtlenség igaz $\forall n \in \mathbb{N}^*$ esetén, a bizonyítás teljes.

f) $n = 2$ esetén a $\frac{3}{2} < 1 + \frac{1}{2} < 2$ egyenlőtlenséghez jutunk és ez igaz.

Ha az egyenlőtlenségek teljesülnek n -re, akkor írhatjuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k}.$$

Ha $2^n \leq k \leq 2^{n+1}$, akkor $\frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^{n+1}-1} \leq \frac{1}{k} \leq \frac{1}{2^n}$, tehát $\frac{2^n}{2^{n+1}} \leq \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} \leq 2^n \cdot \frac{1}{2^n}$,

tehát $\frac{1}{2} \leq \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} \leq 1$ és így $\frac{n+2}{2} \leq \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} \leq n+1$.

A matematikai indukció elve alapján az egyenlőtlenség igaz minden $n \geq 2$ esetén.

g) Az $1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2$ egyenlőtlenséget direkt módon indukcióval nem tudjuk igazolni, ezért szigorítani fogjuk az egyenlőtlenséget. Igazoljuk, hogy

$$1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}, \quad \forall n \geq 1.$$

$n = 1$ esetén az egyenlőtlenség teljesül.

Ha az egyenlőtlenség igaz $n \in \mathbb{N}^*$ -ra, akkor

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2},$$

tehát elégséges igazolni, hogy

$$(1) \quad 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} < 2 - \frac{1}{(n+1)}.$$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{(n+1)} \Leftrightarrow n < n+1$$

Mivel az utolsó egyenlőség igaz, $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$ és így a matematikai indukció elve alapján

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n} < 2, \quad \forall n \geq 1.$$

Megjegyzés. Az $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)}$ egyenlőtlenség alapján

$$1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

h) Ha $n = 4$, akkor $3^4 = 81$ és $4^3 = 64$, tehát $3^4 > 4^3$.

Ha rögzített $n \in \mathbb{N}$ esetén $3^n \geq n^3$, akkor $3^{n+1} \geq 3n^3 > n^3 + 3n^2 + 3n + 1$, mert $n \geq 4$ esetén $n^3 \geq 4n^2 \geq 3n^2 + 4n \geq 3n^2 + 3n + 1$.

A matematikai indukció elve alapján $3^n \geq n^3 \quad \forall n \geq 4$.

i) $n = 7$ esetén $2^7 = 128$ és $n^2 + 4n + 4 = 82$, tehát az egyenlőtlenség teljesül.

Ha $2^n \geq n^2 + 4n + 5$, akkor $2^{n+1} \geq 2n^2 + 8n + 10 > n^2 + 6n + 10$, tehát az egyenlőtlenség $(n+1)$ -re is teljesül.

A matematikai indukció elve alapján $2^n > n^2 + 4n + 5, \quad \forall n \geq 7$.

j) Ha az egyenlőtlenséget teljes indukcióval akarjuk bizonyítani, azt kell ellenőriznünk, teljesül-e az n legkisebb szóba jövő értékére, és azt, hogy az egyes oldalak megváltozása nem változtat-e az egyenlőtlenség irányán, ha $(n-1)$ -ről áttérünk n -re.

Ha $n = 2$, $1 < \sqrt{2} < 1,5$, tehát az egyenlőtlenség teljesül.

Ha $(n-1)$ -ről áttérünk n -re, a bal oldal megváltozása:

$$B_n - B_{n-1} = \frac{n^2 + 2n - 2}{6} - \frac{(n-1)^2 + 2(n-1) - 2}{6} = \frac{2n+1}{6},$$

az egyenlőtlenséglánc középső tagjának a megváltozása:

$$K_n - K_{n-1} = \sqrt[n]{n!},$$

végül a jobb oldal megváltozása:

$$J_n - J_{n-1} = \frac{n^2 + 3n - 4}{4} - \frac{(n-1)^2 + 3(n-1) - 4}{4} = \frac{n+1}{2}.$$

Elég tehát a

$$\frac{2n+1}{6} < \sqrt[n]{n!} < \frac{n+1}{2},$$

vagy a kicsit többet mondó

$$(1) \quad \frac{1}{3} < \frac{\sqrt[n]{n!}}{n+1} < \frac{1}{2}$$

egyenlőtlenséget bizonyítani az $n \geq 3$ egészekre.

Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenségeket az $1, 2, \dots, n$ számokra. Ezeknek a számoknak a mértani közepe

$$M = \sqrt[n]{n!},$$

számtani közepe pedig

$$S = \frac{1 + 2 + \dots + n}{n} = \frac{n + 1}{2}.$$

Az $M < S$ egyenlőtlenségből épp (1) jobb oldalát kapjuk.

Az $n! = n \cdot (n - 1)!$ összefüggés alapján alakítsuk az (1) közepén álló kifejezés n -edik hatványát szorzattá:

$$\frac{n!}{(n + 1)^n} = \frac{n^n}{(n + 1)^n} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{n^n}{(n + 1)^n} \cdot \frac{(n - 1)!}{n^{n-1}} = \dots = \left(\frac{n}{n + 1}\right)^n \cdot \left(\frac{n - 1}{n}\right)^{n-1} \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1.$$

Ez egy n -tényezős szorzat, elég belátnunk, hogy mindegyik tagja nagyobb $\frac{1}{3}$ -nál:

$$(2) \quad \left(\frac{j}{j + 1}\right)^j > \frac{1}{3} \quad (j = 1, 2, \dots).$$

Ismét a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget akarjuk felhasználni:

veszünk j számot, melyek mindegyike $\left(1 + \frac{1}{j}\right)$ -vel egyenlő, és veszünk k egymással

egyenlő pozitív számot, amelyek szorzata $\frac{1}{3}$ -dal egyenlő. Ezek m mértani közepének $(j + k)$ -adik hatványa

$$m^{j+k} = \frac{1}{3} \left(\frac{j + 1}{j}\right)^j,$$

számtani közepe pedig

$$s = \frac{j \left(1 + \frac{1}{j}\right) + k \cdot a}{j + k},$$

ahol $a^k = \frac{1}{3}$. Eszerint készen vagyunk, ha sikerül k -t úgy megválasztani, hogy $s = 1$

legyen, hiszen ekkor $m < 1$, ami ekvivalens a bizonyítandó (2)-vel.

Az $s \leq 1$ egyenlőtlenség feltétele

$$j + 1 + k \cdot a \leq j + k, \text{ azaz } \frac{1}{3} = a^k \leq \left(\frac{k - 1}{k}\right)^k,$$

ami teljesül például $k = 6$ mellett: $\left(\frac{6}{5}\right)^3 = \frac{216}{125} = 1,728 < \sqrt{3}$, tehát $\left(\frac{5}{6}\right)^6 > \frac{1}{3}$.

5. Bizonyítsd be a következő egyenlőtlenségeket:

a) $\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right) \geq \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2$, ha $a_k, b_k \in \mathbb{R}$;

b) $|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$, ha $a_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1, n}$;

c) $2^{n-1}(a^n + b^n) \geq (a + b)^n$, ha $a, b \in \mathbb{R}$ és $a + b > 0$;

d) Ha $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq \frac{1}{2}$ és $x_j \geq 0 \quad \forall j = \overline{1, n}$, akkor

$$(1 - x_1)(1 - x_2) \cdot \dots \cdot (1 - x_n) \geq \frac{1}{2};$$

e) $\frac{n}{(x+1)(x+2n)} \leq \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \dots + \frac{1}{x+2n-1} - \frac{1}{x+2n} <$
 $< \frac{n}{\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + 2n + \frac{1}{2}\right)}, \text{ ha } x > 0, n \in \mathbb{N}.$

f) Ha $k, n \in \mathbb{N}$ és $0 \leq x \leq 1$, akkor $[1 - (1 - x)^n]^k \geq 1 - (1 - x^k)^n$.

Bizonyítás. a) $n = 1$ esetén $a_1^2 b_1^2 \geq (a_1 b_1)^2$ ha $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$, tehát ebben az esetben az egyenlőtlenség teljesül.

Ha $n \in \mathbb{N}^*$ és tetszőleges $(a_i)_{i=\overline{1, n}}, (b_i)_{i=\overline{1, n}}$ valós számokra teljesül a

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right) \geq \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2$$

egyenlőtlenség, akkor írhatjuk, hogy:

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n+1} b_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k b_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 + a_{n+1}^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k^2 + b_{n+1}^2\right) - \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k + a_{n+1} b_{n+1}\right)^2 = \\ & = \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right) + a_{n+1}^2 \sum_{k=1}^n b_k^2 + b_{n+1}^2 \sum_{k=1}^n a_k^2 - \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 - 2a_{n+1} b_{n+1} \sum_{k=1}^n a_k b_k = \\ & = \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 + \sum_{k=1}^n (a_{n+1} b_k - b_{n+1} a_k)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

A matematikai indukció elve alapján

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right) \geq \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall a_k, b_k \in \mathbb{R} \quad k = \overline{1, n}.$$

b) $|a_1 + a_2| \leq |a_1| + |a_2|$. Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha a számok azonos előjelűek.

Ha n -re teljesül az egyenlőtlenség, akkor

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1}| \leq |a_1 + a_2 + \dots + a_n| + |a_{n+1}| \leq \sum_{i=1}^n |a_i| + |a_{n+1}| = \sum_{i=1}^{n+1} |a_i|.$$

c) $n = 1$ esetén egyenlőség van. $n = 2$ -re $2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$, mert $(a - b)^2 \geq 0$.

Ha az egyenlőtlenség teljesül n -re, akkor

$$2^{n-1}(a^n + b^n) \geq (a + b)^n$$

és így

$$2^{n-1}(a^n + b^n)(a + b) \geq (a + b)^{n+1}$$

Vizsgáljuk meg a

$$2^n(a^{n+1} + b^{n+1}) \geq 2^{n-1}(a^n + b^n)(a + b)$$

egyenlőtlenséget. Ez ekvivalens az $(a^n - b^n)(a - b) \geq 0$ egyenlőtlenséggel és ez igaz.

d) Ha $n = 1$, akkor egyenlőség áll fenn. Ha $n = 2$, akkor

$$(1 - x_1)(1 - x_2) = 1 - x_1 - x_2 + x_1x_2 \geq \frac{1}{2} + x_1x_2 \geq \frac{1}{2}.$$

Feltételezzük, hogy létezik olyan n , amelyre tetszőleges $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+$ számok-

ra, ha $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq \frac{1}{2}$, akkor $(1 - x_1)(1 - x_2) \dots (1 - x_n) \geq \frac{1}{2}$.

Ha $y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1} \in \mathbb{R}_+$ és $y_1 + y_2 + \dots + y_n + y_{n+1} \leq \frac{1}{2}$, akkor az

$$(1 - y_1)(1 - y_2) \geq 1 - y_1 - y_2 > 0$$

egyenlőtlenség alapján írhatjuk, hogy

$$(1 - y_1)(1 - y_2) \dots (1 - y_n)(1 - y_{n+1}) \geq (1 - y_1 - y_2)(1 - y_3) \dots (1 - y_{n+1}) \geq \frac{1}{2}$$

mert az $x_1 = y_1 + y_2$, $x_k = y_{k+1}$, $k = \overline{2, n}$ számokra alkalmazzuk az indukciós feltételt. A matematikai indukció elve alapján a tulajdonság bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén igaz.

e) Ha $n = 1$, akkor az $\frac{1}{(x+1)(x+2)} \leq \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \leq \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{5}{2}\right)}$

egyenlőtlenséget kell igazolnunk. Az első egyenlőtlenségben egyenlőség van, míg a második teljesül mert $\frac{5}{4} < 2$. Feltételezzük, hogy n -re teljesül és mindhárom

kifejezéshez hozzáadunk $\left(\frac{1}{x+2n+1} - \frac{1}{x+2n+2}\right)$ -t. Elégséges igazolnunk, hogy

$$\frac{n}{(x+1)(x+2n)} + \frac{1}{x+2n+1} - \frac{1}{x+2n+2} \geq \frac{n+1}{(x+1)(x+2n+2)} \text{ és}$$

$$\frac{n}{\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + 2n + \frac{1}{2}\right)} + \frac{1}{x+2n+1} - \frac{1}{x+2n+2} \leq \frac{n+1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + 2n + 2 + \frac{1}{2}\right)}$$

Az első egyenlőtlenség ekvivalens az $(x+1)(x+2n+2) \geq x(x+2n)$ egyenlőtlenséggel és a második az

$$\left(x + 2n + \frac{1}{2}\right)\left(x + 2n + 2 + \frac{1}{2}\right) \leq (x+2n+1)(x+2n+2)$$

egyenlőtlenséggel. Mivel mindkét egyenlőtlenség igaz, a bizonyítandó egyenlőtlenség $(n+1)$ -re is igaz és így a matematikai indukció alapján igaz minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

f) Két egymásba ágyazott indukciót használunk. Ahhoz, hogy a k szerinti indukció működjön az

$$(1 - x^{k+1})^n + (1 - x^k)^n(1 - x)^n \geq (1 - x)^n + (1 - x^k)^n \quad x \in [0, 1], \quad k, n \in \mathbb{N}^*$$

egyenlőtlenségre volna szükség. Az $x = a$ és $x^k = b$ jelöléssel ez

$$(1 - ab)^n + (1 - a)^n(1 - b)^n \geq (1 - a)^n + (1 - b)^n$$

alakban írható. Ezt az egyenlőtlenséget n szerinti indukcióval igazoljuk.

$$(1 - ab)^n \geq (1 - a)^n + (1 - b)^n - (1 - a)^n(1 - b)^n \quad / \cdot (1 - ab)$$

Elégséges igazolni, hogy

$$(1 - a)^n + (1 - b)^n - (1 - a)^n(1 - b)^n - ab(1 - a)^n - ab(1 - b)^n + ab(1 - a)^n(1 - b)^n \geq \geq (1 + a)^{n+1} + (1 - b)^{n+1} - (1 - a)^{n+1}(1 - b)^{n+1}.$$

Ez ekvivalens az

$$a(1 - a)^n(1 - b)[1 - (1 - b)^n] + b(1 - b)^n[1 - (1 - a)^n] \geq 0$$

egyenlőtlenséggel és ez igaz.

6. Bizonyítsd be a következő oszthatóságokat:

a) $4 \mid (15^n + 3^{n+1})$;

b) $9 \mid (16^n - 6n - 1)$;

c) $7 \mid (5 \cdot 2^{n-1} + 9^{4n-3})$;

d) $17 \mid (3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1})$;

e) $133 \mid (11^{n+2} + 12^{2n+1})$;

f) $23 \mid (2^{7n+3} + 3^{2n+1} \cdot 5^{4n+1})$;

Bizonyítás. a) $n = 1$ esetén $15 + 3^2 = 24 : 4$.

Ha $15^n + 3^{n+1} = 4M$, akkor $15^n \cdot 3 + 3^{n+2} = 4 \cdot 3M$ és így $3^{n+2} = 4 \cdot 3M - 15^n \cdot 3$, tehát $15^{n+1} + 3^{n+2} = 15^{n+1} - 15^n \cdot 3 + 4 \cdot 3M = 15^n \cdot 12 + 12 \cdot M : 4$.

b) $n = 1$ esetén $16^n - 6n - 1$ értéke 9.

Ha $(16^n - 6n - 1) : 9$, akkor $16^n = 9M + 6n + 1$, tehát $16^{n+1} = 16 \cdot 9M + 96n + 16$ és így $16^{n+1} - 6(n+1) - 1 = 16 \cdot 9M + 90n + 9$ és ez osztható 9-cel. A matematikai indukció elve alapján $9 \mid (16^n - 6n - 1)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

c) $n = 1$ esetén $5 \cdot 2^{n-1} + 9^{4n-3}$ értéke 14 és ez osztható 7-tel.

Ha $5 \cdot 2^{n-1} + 9^{4n-3} = 7M$, akkor $5 \cdot 2^n = 14M - 2 \cdot 9^{4n-3}$, vagyis $5 \cdot 2^n + 9^{4n+1} = 14M + 9^{4n-3}(9^4 - 2)$ és ez osztható 7-tel mert $(9^4 - 2) = 81 \cdot 81 - 2 = 6559$ és ez osztható 7-tel.

d) $n = 0$ esetén $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ értéke 17.

Ha $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1} = 17M$, akkor $3 \cdot 5^{2n+3} = 17 \cdot 25M - 25 \cdot 2^{3n+1}$, tehát $3 \cdot 5^{2n+3} + 2^{3n+4} = 17 \cdot 25M - 2^{3n+1} \cdot 17$ és ez osztható 17-tel.

e) $n = 0$ esetén $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ értéke 133.

Ha $11^{n+2} + 12^{2n+1} = 133M$, akkor $11^{n+3} = 11 \cdot 133M - 11 \cdot 12^{2n+1}$ és így

$11^{n+3} + 12^{2n+3} = 11 \cdot 133M + 133 \cdot 12^{2n+1}$. A matematikai indukció elve alapján $133 \mid (11^{n+2} + 12^{2n+1}) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

f) $n = 0$ esetén $2^{7n+3} + 3^{2n+1} \cdot 5^{4n+1}$ értéke 23.

Ha $2^{7n+3} + 3^{2n+1} \cdot 5^{4n+1} = 23M$, akkor $2^{7n+3} = 23M - 3^{2n+1} \cdot 5^{4n+1}$, tehát

$$2^{7n+10} = 2^7 \cdot 23M - 2^7 \cdot 3^{2n+1} \cdot 5^{4n+1}.$$

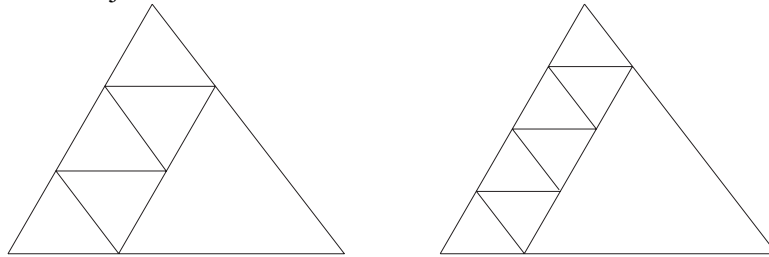
Ebből következik, hogy

$$2^{7n+10} + 3^{2n+3} \cdot 5^{4n+5} = 2^7 \cdot 23M + 3^{2n+1} \cdot 4^{4n+1} \cdot (3^2 \cdot 5^4 - 2^7).$$

Mivel $3^2 \cdot 5^4 - 2^7 = 23 \cdot 239$ következik, hogy $(2^{7n+10} + 3^{2n+3} \cdot 5^{4n+1}) : 23$ és így a matematikai indukció alapján $(2^{7n+3} + 3^{2n+1} \cdot 5^{4n+1}) : 23 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

7. Bizonyítsd be, hogy minden háromszög felbontható n darab hozzá hasonló háromszögre, ha $n \geq 6$.

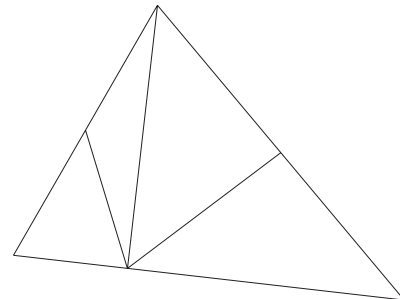
Bizonyítás. Ha egy háromszögben felvesszük az oldalak felezőpontjait és meghúzzuk a középvonalakat, négy darab az eredetivel hasonló háromszög keletkezik. Ez azt jelenti, hogy ha egy háromszöget felbontottunk n darab vele hasonló háromszögre, akkor a felbontás valamelyik háromszögét négy háromszögre bontva, $(n + 3)$ háromszögre is felbonthatjuk.



A mellékelt ábrákon látható egy-egy felbontás 6 illetve 8 háromszögre. Mivel $7 = 4 + 3$, 7 háromszögre is felbonthatjuk és így az első észrevétel és a teljes indukció elve alapján szerkeszthetünk minden $n \geq 6$ esetén olyan felbontást, amely n darab az eredetivel hasonló háromszöget tartalmaz.

8. Feldarabolható-e egy általános háromszög n darab egyenlő szárú háromszögre, ha $n \geq 4$?

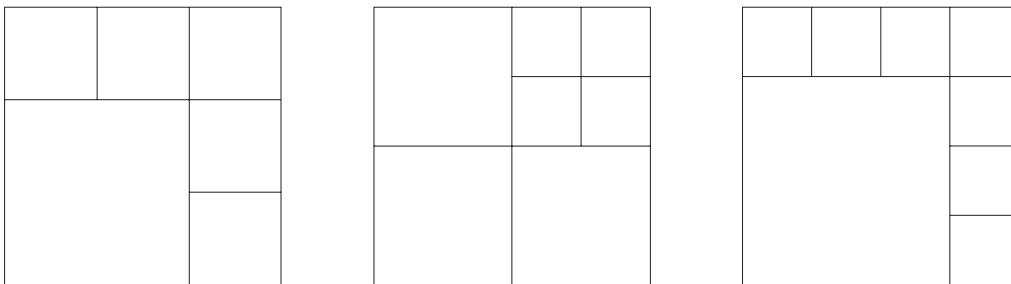
Bizonyítás. Ha egy derékszögű háromszögben meghúzzuk a derékszöghöz tartozó oldalfelezőt, két egyenlő szárú háromszög keletkezik. Mivel minden háromszögnek van legalább egy olyan magassága, amely a háromszög belsejében van, minden háromszög felbontható 4 egyenlő szárú háromszögre. Ez egyben azt is jelenti, hogy ha van felbontás n háromszögre, akkor van $n + 4$ háromszögre is. Ugyanakkor ha előbb levágunk egy vagy két egyenlő szárú háromszöget, akkor kaphatunk 5 illetve 6 háromszöget



tartalmazó felbontást is. Így tetszőleges $n \geq 4$ esetén szerkeszthetünk n darab egyenlő szárú háromszöget tartalmazó felbontást. (Ha ez a háromszög egyenlő szárú, akkor az előbbi feladatot is használhatjuk.)

9. Bizonyítsd be, hogy ha $n \geq 6$, akkor egy tetszőleges négyzet feldarabolható n darab négyzetre.

Bizonyítás. Ha egy négyzetben összekötjük a szembenfekvő oldalak felezőpontjait, négy kisebb négyzetet kapunk, tehát $n = 4$ -re van felbontásunk és ha van n -re, akkor van $(n + 3)$ -ra is. A mellékelt ábrán láthatók $n = 6$, $n = 7$ és $n = 8$ esetén a felbontások.



A matematikai indukció elve alapján tetszőleges $n \geq 6$ esetén felbonthatjuk a négyzetet n darab kisebb négyzetre.

10. Bizonyítsd be, hogy az $(n + 1)(n + 2) \dots (2n)$ szorzatban a 2 kitevője pontosan n .

Bizonyítás. Ha $n = 1$, akkor az $1 \cdot 2$ szorzat prímtényezős felbontásában a 2 kitevője 1. Ha valamilyen n -re az $(n + 1)(n + 2) \dots (2n)$ szorzatban a 2 kitevője n , akkor az

$$(n + 2)(n + 3) \dots (2n)(2n + 1)(2n + 2) = (n + 1)(n + 2) \dots (2n) \frac{(2n + 1)(2n + 2)}{n + 1}$$

szorzatban a 2 kitevője $(n + 1)$, mert $(2n + 1) \nmid 2$. Így a matematikai indukció elve alapján $(n + 1)(n + 2) \dots (2n)$ felbontásában a 2 kitevője n , $\forall n \geq 1$.

11. Bizonyítsd be, hogy minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén 2^n -nek létezik olyan egész számú többszöröse, amely csak az 1 és 2 számjegyekből áll.

Bizonyítás. $n = 1$ és $n = 2$ esetén a 2 és 12 megfelel.

Ha az N szám n számjegyű és minden számjegye 1 vagy 2 és $2^n \mid N$, akkor az $\overline{1N} = 10^n + N$ és $\overline{2N} = 2 \cdot 10^n + N$ számok közül az egyik osztható 2^{n+1} -nel ($5^k + x$ vagy $2 \cdot 5^k + x$ páros, $\forall x \in \mathbb{N}$ esetén), tehát létezik $(n + 1)$ számjegyű 2^{n+1} -nel osztható szám, amelynek minden számjegye 1 vagy 2. Így a matematikai indukció elve alapján a bizonyítás teljes.

12. Bizonyítsd be, hogy $\sqrt{1 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{n}}} < 2$ bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

Bizonyítás. Igazoljuk, hogy

$$\sqrt{k + \sqrt{k + \dots + \sqrt{k + n}}} < k + 1, \forall k \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ha $n = 0$, akkor a $\sqrt{k} < k + 1$ egyenlőtlenséget kell igazolni és ez igaz mert $k^2 + k + 1 > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$.

Ha az egyenlőtlenség minden $k \in \mathbb{N}^*$ esetén igaz egy rögzített n -re, akkor

$$\begin{aligned} \sqrt{k + \sqrt{(k+1) + \dots + \sqrt{k+n+1}}} &= \sqrt{k + \sqrt{(k+1) + \dots + \sqrt{(k+1) + n}}} < \\ &< \sqrt{k + k + 2} < k + 1 \end{aligned}$$

mert $k \geq 1$. Így a matematikai indukció elve alapján az egyenlőtlenség minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén igaz. $k = 1$ -re a kért egyenlőtlenséget kapjuk.

IV.2.3.1. Gyakorlatok és feladatok (99. oldal)

1. Van-e nullától különböző természetes megoldása az $u^2 = 7v^2$ egyenletnek?

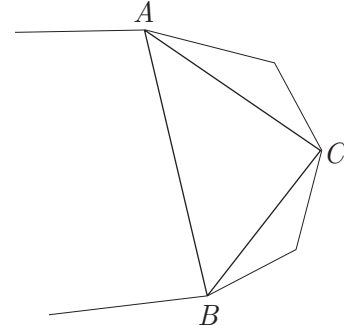
Megoldás. Ha volna $(u_0, v_0) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ megoldás, akkor ezek közt lenne olyan is, amelyre u minimális (de nem 0!). Az $u^2 = 7v^2$ egyenlet alapján $u^2 : 7$, tehát $u : 7$ és így létezik $u_1 \in \mathbb{N}^*$ úgy, hogy $u = 7u_1$, azaz $7u_1^2 = v^2$. Hasonló gondolatmenet alapján $v : 7$, tehát létezik $v_1 \in \mathbb{N}^*$ úgy, hogy $v = 7v_1$. Ha ezt visszahelyettesítjük, az $u_1^2 = 7v_1^2$ egyenlethez jutunk. Mivel $u_1 < u$, szerkesztettünk olyan (u_1, v_1) megoldást, amelyre $u_1 < u$. Ez ellentmond u megválasztásának, tehát az egyenletnek nincs nullától különböző megoldása.

2. Bizonyítsd be, hogy ha $x^2 + y^2 + 1 = xyz$, akkor $z = 3$.

Bizonyítás. Ha $x = y$, akkor $2x^2 + 1 = x^2 \cdot z$, tehát $x \mid 1$ és így $z = 3$, $x = y = 1$. A továbbiakban feltételezzük, hogy $x < y$ (a szimmetria alapján feltételezhetjük) és tekintjük az (x_0, y_0) megoldást, amelyre y_0 a lehető legkisebb. Ha $x_1 = x_0 \cdot z - y_0$ és $y_1 = x_0$, akkor $y_1(x_0 z - y_0) = x_0^2 + 1 > 0$, tehát $x_1 \in \mathbb{N}$ és $x_1^2 + y_1^2 + 1 = x_1 y_1 z$. A végtelen leszállás elve alapján ilyen (x_0, y_0) megoldás nem létezhet, tehát csak az $(1, 1, 3)$ megoldás teljesíti az egyenletet.

3. Határozd meg az összes olyan n természetes számot, amelyre minden n oldalú sokszög felbontható egymás belső pontjait nem metsző átlók segítségével háromszögekre úgy, hogy minden csúcsból páros számú átló induljon ki.

Megoldás. Ha n -re lehetséges akkor $(n+3)$ -ra is lehetséges, a felbontás. A mellékelt ábrának megfelelő toldás segítségével (az AB átlóvá változik). A legkisebb m , amelyre lehetséges a kért felbontás az $n=6$, tehát $n \in \{3k \mid k \geq 2\}$ esetén az n oldalú sokszögek felbonthatók a feltételnek megfelelően.



4. Az $n \in \mathbb{N}$ természetes számból kiindulva a következő lépéseket végezzük:

- a) ha a szám páros, osztjuk 2-vel;
- b) ha a szám páratlan hozzáadunk 1-et.

Bizonyítsd be, hogy mindig eljutunk 1-hez.

Bizonyítás. Ha $n = a_1 a_2 a_3 \dots a_k$ az n szám reprezentánsa a kettes számrendszerben, akkor $a_k = 0$ esetén az n -ből kapott szám, $(a_1 a_2 a_3 \dots a_{k-1})$ eggyel kevesebb számjegyet tartalmaz. Ha $a_k = 1$, akkor az $n+1$ szám vagy k számjegyet tartalmaz és az utolsó számjegye 0, vagy $(k+1)$ számjegyet tartalmaz és az utolsó k számjegye 0. Ezért legtöbb két lépés után csökkentjük a kettes számrendszerbeli számjegyek számát. Így el kell jutnunk az 1-hez is.

5. Négy tetszőleges a, b, c, d természetes számból kiindulva a következő lépéseket ismételjük: a meglevő (a, b, c, d) számnégyest helyettesítjük a $(|a-b|, |b-c|, |c-d|, |d-a|)$ számnégyessel. Bizonyítsuk be, hogy egy idő után csupa 0-t kapunk.

Bizonyítás. A lépések során a számok maximuma nem növekedhet. Ha a számok mind oszthatók d -vel, akkor ez a tulajdonság megőrződik. Másrészt ellenőrizhető, hogy tetszőleges konfiguráció esetén 2-nek egyre nagyobb hatványával oszthatók a számok. Jelöljük 1-gyel a páratlan és 0-val a páros számokat. Például, ha

0 0 0 1-ből indulunk

0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
1	1	1	1
0	0	0	0

Tehát 4 lépés után minden szám osztható 2-vel.

IV.2.4.2. Gyakorlatok és feladatok (101. oldal)

1. Egy tasakban 60 darab cukorka van, 20 áfonyás, 10 almás, 15 narancsos és 15 sárgadinnyés. Egy bekötött szemű gyereknek hány cukorkát kell kiemelni ahhoz, hogy biztosan legyen közöttük:

- a) egy áfonyás;
- b) két áfonyás és két almás;

- c) két narancsos, egy sárgadinnyés és egy almás;
- d) mindegyikből egy-egy;
- e) valamelyikből három egyforma.

Megoldás. a) Legalább 41 darabot kell kivenni, mert előfordulhat, hogy előbb kiveszi az almás, a narancsos és a sárgadinnyés cukorkákat (ez 40 darab) és csak azután vesz ki áfonyásat.

b) 52; c) 51; d) 51; e) 9.

2. Egy zsákban 10 pár azonos férfi- és 5 pár női kesztyű van. Legalább hány kesztyűt kell kivennünk ahhoz, hogy

- a) legyen egy pár a kivett kesztyűk között;
- b) legyen egy pár női kesztyű a kivettek között;
- c) legyen két azonos pár?

Megoldás. a) 16; b) 26; c) 18.

3. Igaz-e, hogy egy 25-ös létszámú osztályban van legalább három diák, aki ugyanabban a hónapban született?

Megoldás. Ha minden hónapban legfeljebb két születésnap volna, akkor ez legfeljebb $12 \cdot 2 = 24$ születésnapot jelentene. Mivel 25 diák van, valamelyik hónapba legalább három születésnap esik.

4. Egy építkezéshez 50 kötömböt kell elszállítani, amelyek tömege 370 kg, 372 kg, 374 kg, ... 466 kg. El lehet-e ezeket szállítani egy maximum 3 tonnát szállító teherautóval 7 út alkalmával?

Megoldás. Ha 50 kötömböt 7 út alkalmával szállítunk, legalább egy alkalommal legalább 8 kötömböt kell szállítani. De

$$370 + 372 + 374 + 376 + 378 + 380 + 382 + 384 = 3016$$

Így ez a szállítmány több volna mint 3 tonna, tehát nem lehetséges.

5. Bizonyítsd be, hogy n darab $2n$ -nél kisebb és n -től különböző természetes szám közül kiválasztható kettő, amelyek összege $2n$.

Bizonyítás. A számokat $(x, 2n - x)$ alakú párokba rendezzük. Mivel $(n + 1)$ ilyen pár létezik, legalább az egyik pár az adott számok között van.

6. Bizonyítsd be, hogy öt, 10-nél nagyobb prímszám közül kiválasztható kettő, melyek különbsége osztható 10-zel!

Bizonyítás. A 10-nél nagyobb prímszámok 10-zel való osztási maradéka 1, 3, 7 vagy 9 lehet, így öt ilyen prímszám közt mindig van kettő, amelyek ugyanazt a maradékot adják 10-zel való osztáskor. A különbségük osztható 10-zel.

7. Bizonyítsd be, hogy 7 egész szám közül kiválasztható kettő, amelyek összege vagy különbsége osztható 11-gyel.

Bizonyítás. A teljes négyzetek 11-gyel való osztási maradékai 0, 1, 4, 9, 5 és 3, tehát hét szám közül van kettő, x és y , amelyekre x^2 és y^2 11-gyel való osztási maradéka egyenlő. Így $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ és mivel 11 prímszám, az összeg vagy a különbség osztható 11-gyel.

8. Bizonyítsd be, hogy 27 darab 100-nál nem nagyobb és 0-tól különböző természetes szám között van kettő, amelyek relatív prímek.

Bizonyítás. Ha felsoroljuk a számok prímosztóit, legalább 27-et kellene kapjunk, ha nincs köztük olyan, amely nem relatív prím. Ez nem lehetséges, mert nincs 27 darab 100-nál kisebb prímszám.

9. Bizonyítsd be, hogy bármely n páratlan számhoz létezik olyan k tetszőleges szám, amelyre $(2^k - 1) : n$.

Bizonyítás. Az $1, 2, 2^2, 2^3, \dots, 2^n$ számok közt van kettő, amelyeknek n -nel való osztási maradéka egyenlő. Így $(2^a - 2^b) : n$, tehát $(2^{a-b} - 1) : n$.

10. Bizonyítsd be, hogy 6 irracionális szám között mindig van három, amelyek közül bármely kettő összege irracionális.

Bizonyítás. Ha x, y, z irracionálisak, akkor nem lehet az $x + y$, $y + z$ és $z + x$ egyaránt racionális mert $x - y = (x + z) - (z + y) \in \mathbb{Q}$ és $x + y \in \mathbb{Q}$ -ből következik, hogy $x, y \in \mathbb{Q}$. Helyezzük el az adott számokat egy szabályos hatszög csúcsaiba és az átlókat illetve oldalakat színezzük kékre, ha a végpontokban levő számok összege racionális illetve pirosra, ha irracionális. Az így kapott ábrán van egyszínű háromszög, mert egy csúcsból kiindul legalább három azonos színű vonal és ha ezek másik végpontjait összekötő szakaszok közt van ezekkel megegyező színű, akkor megvan a háromszög, ellenkező esetben ezek a végpontok határoznak meg ilyen háromszöget. Az egyszínű háromszög az első észrevétel alapján nem lehet kék, tehát van 3 olyan szám, amely teljesíti a feltételt.

11. Egy egységoldalú négyzet belsejében felvettünk 51 pontot. Bizonyítsd be, hogy kiválasztható közülük 3, amelyek által meghatározott háromszög köré írható kör sugara kisebb mint $\frac{1}{7}$.

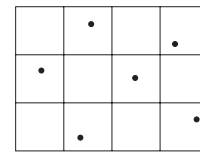
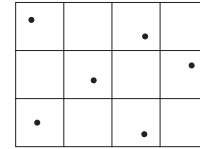
Bizonyítás. A négyzetet osszuk fel 25 darab $\frac{1}{5}$ oldalhosszúságú négyzetre. Így van legalább egy kis négyzetecske, amely 3 pontot tartalmaz. Másrészt az általuk meghatározott háromszög köré írható kör sugara nem nagyobb mint $\frac{\sqrt{2}}{10} < \frac{1}{7}$.

12. Bizonyítsd be, hogy minden 21 oldalú sokszögben van két átló, amelyek által bezárt szög mértéke kisebb mint 1° .

Bizonyítás. A sík egy tetszőleges P pontján át húzzunk párhuzamost minden átlóhoz. Így $\frac{21 \cdot 18}{2} = 189$ egyenest kapunk és 378 szöget. Ha ezek mindegyike 1° -nál nagyobb lenne, akkor a P körül legalább 378° -os szög keletkezne. Ez ellentmondás, mert a P körüli teljes szög 360° , tehát létezik két átló, amelyek 1° -nál kisebb szöget zárnak be.

13. Egy 3×4 -es téglalapban felvettünk 6 pontot. Bizonyítsd be, hogy van közöttük kettő, amelyek távolsága legfeljebb $\sqrt{5}$.

Bizonyítás. Ha két egymásmelletti 1×1 -es négyzetben van pont, akkor ezek távolsága legfeljebb $\sqrt{5}$, tehát az állítás igaz. Ha viszont egymásmelletti 1×1 -es négyzetben nincs pont, akkor valamelyik ábrán látható négyzetekbe kerül pont. Mindkét esetben van olyan 3×3 -as része a táblának, amelyen 5 pont van. Így a négy $\frac{3}{2} \times \frac{3}{2}$ -es négyzet közül legalább egyben két pont van. Ezek távolsága nem több mint $\frac{3}{2} \cdot \sqrt{2}$ és $\frac{3}{2} \cdot \sqrt{2} < \sqrt{5}$, mert $18 < 20$.



14. A sík minden pontját kékre vagy pirosra színezzük. Bizonyítsd be, hogy van két azonos színű pont, amelyek távolsága 1.

Bizonyítás. Tekintsünk egy egységnyi oldalhosszúságú egyenlő oldalú háromszöget. Két csúcsát ugyanazzal a színnel színeztük, tehát létezik két azonos színű pont, amelyek távolsága 1.

15. Egy egységoldalú négyzet belsejébe egy konvex sokszöget írunk, amelynek területe nagyobb mint $\frac{1}{2}$. Bizonyítsd be, hogy van olyan d egyenes, amely párhuzamos a négyzet valamelyik oldalával és a sokszögből $\frac{1}{2}$ -nél hosszab szakaszt metsz ki.

Bizonyítás. A beírt sokszöget az egyik oldallal párhuzamos egyenesek segítségével két háromszögre és néhány trapázra bonthatjuk. Ha minden d egyenes, amely párhuzamos a négyzet valamelyik oldalával $\frac{1}{2}$ -nél nem hosszabb szakaszt metsz ki, akkor egy-egy trapéz területére

$$T_t = \frac{a+b}{2} \cdot h \leq \frac{h}{2}$$

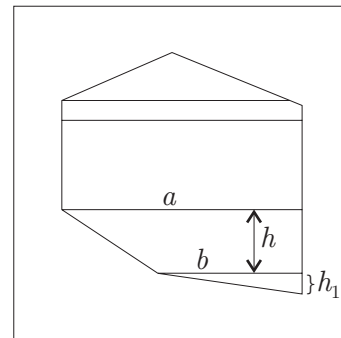
és a háromszögek területére

$$T_h = \frac{b \cdot h_1}{2} < \frac{h_1}{2}.$$

Így a sokszög területe

$$T < \sum \frac{h_i}{2} < \frac{1}{2}.$$

Ez ellentmondás, tehát létezik olyan d egyenes, amely párhuzamos valamelyik oldallal és legalább $\frac{1}{2}$ hosszúságú szakaszt metsz ki a sokszögből.



IV.2.5.1. Gyakorlatok és feladatok (102. oldal)

1. Egy táblára felírtuk a számokat 1-től 2001-ig majd egy alkalommal a táblán levő számok közül néhányat helyettesítünk a számjegyeik összegével. Ezt a lépést addig ismételjük, amíg egy szám marad a táblán. Melyik ez a szám?

Megoldás. Egy lépés során az összeg 9-cel való osztási maradéka nem változik.

$$1 + 2 + \dots + 2001 = \frac{2001 \cdot 2002}{2} = 1001 \cdot 2001$$

és ennek a 9-cel való osztási maradéka 6, tehát a végén a 6-os marad a táblán.

2. Egy táblára az $x^2 + 7x + 8$ kifejezést írtuk és egy-egy alkalommal valamelyik együtthatót eggyel növelhetjük vagy csökkenthetjük. Bizonyítsd be, hogy ha egy idő után az $x^2 - 7x - 8$ kifejezés áll a táblán, akkor volt olyan másodfokú kifejezés a táblán, amelynek van egész gyöke.

Bizonyítás. A táblán levő kifejezés 1-ben számolt behelyettesítési értéke 1-gyel változhat. Mivel ez kezdetben 16 és a végén -14 , van olyan állapot, amikor 0. Tehát volt olyan másodfokú kifejezés, amelynek az 1 gyöke.

3. Egy asztalon 6 pohár áll. Egy-egy alkalommal 5 poharat fordítunk meg. Elérhetjük-e, hogy minden pohár az eredeti helyzetéhez képest fordítva álljon? Hát akkor, ha 5 pohár van és minden lépésben 4-et fordítunk meg?

Megoldás. A k -adik fordításnál a k -adik poharat hagyjuk változatlanul $k = \overline{1, 6}$.

Így hat forgatás után minden pohár fordítva áll. Ha minden lépésben 4 poharat fordítunk meg, akkor összesen $4k$ poharat fordítunk meg k fordítás alatt. Másrészt ha ezután minden pohár fordítva áll, akkor a fordítások száma páratlan. Ez ellentmondás, tehát 5 pohár esetén nem lehet megfordítani a poharakat.

V. Függvények

V.1.1. Gyakorlatok és feladatok (104. oldal)

1. Bizonyítsd be a következő egyenlőségeket:

- | | |
|--|--|
| a) $A \cup A = A$; | b) $A \cap A = A$; |
| c) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$; | d) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; |
| e) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; | f) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; |
| g) $C_E(A \cap B) = (C_E A) \cup (C_E B)$; | h) $C_E(A \cup B) = (C_E A) \cap (C_E B)$; |
| i) $A \Delta A = \emptyset$; | j) $A \Delta B = B \Delta A$; |
| k) $A \Delta \emptyset = \emptyset \Delta A = A$; | l) $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$. |

Bizonyítás. a) $x \in A \cup A \Leftrightarrow x \in A$ vagy $x \in A \Leftrightarrow x \in A$.

b) $x \in A \cap A \Leftrightarrow x \in A$ és $x \in A \Leftrightarrow x \in A$.

c) $x \in A \cap (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A$ és $x \in (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A$ és $(x \in B$ és $x \in C) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x \in A$ és $x \in B$ és $x \in C \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cap C$.

d) $x \in A \cup (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A$ vagy $x \in (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A$ vagy $(x \in B$ vagy
 $x \in C) \Leftrightarrow x \in A$ vagy $x \in B$ vagy $x \in C \Leftrightarrow (x \in A$ vagy $x \in B)$ vagy $x \in C \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x \in (A \cup B)$ vagy $x \in C \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cup C \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cup C$.

e) $A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A$ és $x \in B \cup C \Leftrightarrow x \in A$ és $(x \in B$ vagy $x \in C) \Leftrightarrow$
 $x \notin B) \Leftrightarrow (x \in E \Leftrightarrow (x \in A$ és $x \in B)$ vagy $(x \in A$ és $x \in C) \Leftrightarrow x \in A \cap B$
vagy $x \in B \cap C \Leftrightarrow \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

f) $x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A$ vagy $x \in (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A$ vagy $(x \in B$ és $x \in C) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (x \in A$ vagy $x \in B)$ és $(x \in A$ vagy $x \in C) \Leftrightarrow x \in A \cup B$ és $x \in A \cup C \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

g) M1 $x \in C_E(A \cap B) \Leftrightarrow x \in E$ és $x \notin (A \cap B) \Leftrightarrow x \in E$ és $(x \notin A$ vagy
 $x \notin B) \Leftrightarrow (x \in E$ és $x \notin A)$ vagy $(x \in E$ és $x \notin B) \Leftrightarrow x \in C_E A$ vagy
 $x \in C_E B \Leftrightarrow x \in (C_E A) \cup (C_E B)$.

M2 $C_E(A \cap B) = E \cap \overline{(A \cap B)} = E \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \stackrel{e)}{=}$

$\stackrel{e)}{=} (E \cap \overline{A}) \cup (E \cap \overline{B}) \Leftrightarrow (C_E A) \cup (C_E B)$ (felhasználva, hogy $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$).

h) M1 $x \in C_E(A \cup B) \Leftrightarrow x \in E$ és $x \notin (A \cup B) \Leftrightarrow x \in E$ és $(x \notin A$ és $x \notin B)$
 $\Leftrightarrow x \in E$ és $x \notin A$ és $x \notin B \Leftrightarrow x \in E$ és $x \notin A$ és $x \in E$ és $x \notin B \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x \in C_E A$ és $x \in C_E B \Leftrightarrow x \in (C_E A) \cap (C_E B)$.

$$\mathbf{M2} \quad C_E(A \cup B) = E \cap \overline{(A \cup B)} = E \cap (\overline{A} \cap \overline{B}) \stackrel{\mathbf{b})}{=} (E \cap E) \cap (\overline{A} \cap \overline{B}) \stackrel{\mathbf{c})}{=} (E \cap \overline{A}) \cap \cap (E \cap \overline{B}) = C_E A \cap C_E B.$$

$$\mathbf{i}) \quad A \Delta A = (A \setminus A) \cup (A \setminus A) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset.$$

$$\mathbf{j}) \quad A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (B \setminus A) \cup (A \setminus B) = B \Delta A.$$

$$\mathbf{k}) \quad A \Delta \emptyset \stackrel{\mathbf{j})}{=} \emptyset \Delta A; \quad A \Delta \emptyset = (A \setminus \emptyset) \cup (\emptyset \setminus A) = A \cup \emptyset = A.$$

$$\mathbf{l}) \quad A \Delta (B \Delta C) = [A \cap \overline{(B \Delta C)}] \cup [(B \Delta C) \cap \overline{A}].$$

$$(B \Delta C) \cap \overline{A} = [(B \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{B})] \cap \overline{A} \stackrel{\mathbf{e})}{=} [(B \cap \overline{C}) \cap \overline{A}] \cup [(C \cap \overline{B}) \cap \overline{A}] \stackrel{\mathbf{e})}{=} \stackrel{\mathbf{e})}{=} [(B \cap \overline{A}) \cap \overline{C}] \cup [(\overline{A} \cap B) \cap \overline{C}] \stackrel{\mathbf{e})}{=} [(B \cap \overline{A}) \cup (\overline{A} \cap B)] \cap \overline{C} = (A \Delta B) \cap \overline{C}.$$

$$\begin{aligned} B \Delta C &= (B \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{B}) = [B \cup (C \cap \overline{B})] \cap [\overline{C} \cup (C \cap \overline{B})] = \\ &= [(B \cup C) \cap (\overline{B} \cup B)] \cap [(\overline{C} \cup C) \cap (\overline{C} \cup \overline{B})] = (B \cup C) \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) = (B \cup C) \setminus (B \cap C). \\ \overline{B \Delta C} &= B \cap C. \quad A \cap (B \Delta C) = A \cap (B \cap C) \stackrel{\mathbf{e})}{=} (A \cap B) \cap C = \overline{A \Delta B} \cap C. \end{aligned}$$

$$\text{Tehát } A \Delta (B \Delta C) = [A \cap \overline{(B \Delta C)}] \cup [(B \Delta C) \cap \overline{A}] = [C \cap \overline{(A \Delta B)}] \cup [(A \Delta B) \cap \overline{C}] = (A \Delta B) \Delta C.$$

Megjegyzés. Ha $X, A, B, C \subset E$ és $f_X : E \rightarrow \{0, 1\}$, $f_X(u) = \begin{cases} 1, & \text{ha } u \in X \\ 0, & \text{ha } u \notin X \end{cases}$ az X

karakterisztikus függvénye, akkor az

$$\begin{aligned} f_{A \cap B} &= f_A \cdot f_B; & f_{A \setminus B} &= f_A(1 - f_B); & f_{A \sim B} &= f_A + f_B - f_A f_B; \\ f_{A \Delta B} &= f_A + f_B - 2f_A f_B; & f_{C_E A} &= 1 - f_A \end{aligned}$$

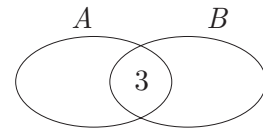
egyenlőségek segítségével adhatók egyszerűbb bizonyítások. (lásd 2.23. paragrafus 3. és 4. feladatát.)

2. Határozd meg az A és B halmazt, ha egyidejűleg teljesülnek a következő tulajdonságok:

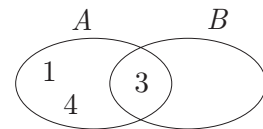
$$\mathbf{a}) \quad A \Delta B = \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}; \quad \mathbf{b}) \quad A \cap B = \{3\}; \quad \mathbf{c}) \quad A \setminus (B \cup \{2\}) = \{1, 4\}.$$

Hány megoldás van?

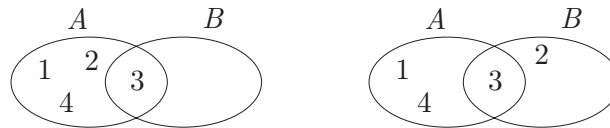
Megoldás. Egy Venn-Euler diagram segítségével próbáljuk meghatározni az A és a B halmazt. $A \cap B = \{3\}$, tehát a 3-ast beírhatjuk a metszetbe.



$A \setminus (B \cup \{2\}) = \{1, 4\}$, tehát az 1 és a 4 az $A \setminus B$ halmazban vannak.



Aszerint, hogy $2 \in B$ vagy $2 \notin B$, két különböző esethez jutunk (az $A \setminus B$ halmazban több elem nem lehet).



Az $A \Delta B = \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$ alapján az 5, 6 és 7 a $B \setminus A$ halmazban van, tehát a következő két megoldás létezik:



Megjegyzés. Külön-külön meghatározhatjuk mindhárom egyenlet általános megoldását is.

Az $A \Delta B = \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$ egyenlet általános megoldása: $A = X_1 \cup C$, $B = X_2 \cup C$, ahol $X_1, X_2 \subset A \Delta B$; $C \cap (A \Delta B) = \emptyset$. X_1, X_2 részhalmazai a szimmetrikus különbségnek és C az A és B halmazok keresztmetszete, amelyre az a kikötésünk, hogy legyen diszjunkt a szimmetrikus különbségre nézve. Tehát mivel a C halmazt végtelen sok féle képpen választhatjuk meg, így végtelen sok megoldás létezik.

Az $A \cap B = \{3\}$ egyenlet általános megoldása: $A = X_1 \cup \{3\}$, $B = X_2 \cup \{3\}$ (ahol $X_1 \cap X_2 = \emptyset$). X_1 és X_2 diszjunkt halmazok, azaz nincs közös elemük. Mivel X_1, X_2 -t tetszőlegesen választhatjuk meg, figyelembe véve a megkötést, így végtelen sok megoldása van az egyenletnek.

Az $A \setminus (B \cup \{2\}) = \{1, 4\}$ egyenlet általános megoldása $A = \{1, 4\} \cup X_1$, $B = X_2$, ahol $X_1 \subset X_2$ és $\{1, 4\} \not\subset X_1$. Az 1, 4-et nem tartalmazhatja az X_1 , és X_1 részhalmaza kell legyen X_2 -nek, hogy kivonáskor tűnjenek el X_1 elemei. A 2 eleme lehet X_1 -nek. Hasonlóan az előző esetekhez, itt is végtelen sok megoldás létezik. Belátható, hogy az általános megoldás három jellemzéséből is eljuthatunk a megoldáshoz.

3. Határozd meg az A , B és C halmazokat, ha

- a)** $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; **b)** $A \setminus (B \cup C) = \{1, 2\}$;
c) $B \setminus A = \{3\}$; **d)** $A \cap B \cap C = \{4, 5\}$;
e) $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\} \subset C$; **f)** $3 \notin C$; **g)** A -nak öt eleme van.

Hány megoldás van?

Megoldás. Az $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ -ből kiindulva tételezzük fel, hogy

$$\begin{aligned} A &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \\ B &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \\ C &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}. \end{aligned}$$

A továbbiakban kihúzzuk azokat az elemeket, amelyek nem tartoznak a halmazba, és aláhúzzuk azokat, amelyek igen.

$A \setminus B = \{3\}$, $A \cap B \cap C = \{4, 5\}$, $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\} \subset C$, $3 \notin C$, $A \setminus (B \cup C) = \{1, 2\}$ feltételeket felhasználva kapjuk, hogy $\{1, 2\} \in A$ és $\{1, 2\} \notin B$, $\{1, 2\} \notin C$.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

$$C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Még nem használtuk fel, hogy $|A| = 5$. A 6, 7, 8, 9 közül bármelyiket választhatjuk.

A B értékei nincsenek pontosan tisztázva, de a $B \setminus A = \{3\}$ alapján tudjuk, hogy ha a 6, 7, 8, 9 közül valamelyik benne van a B -ben, akkor az A -ban is benne kell legyen.

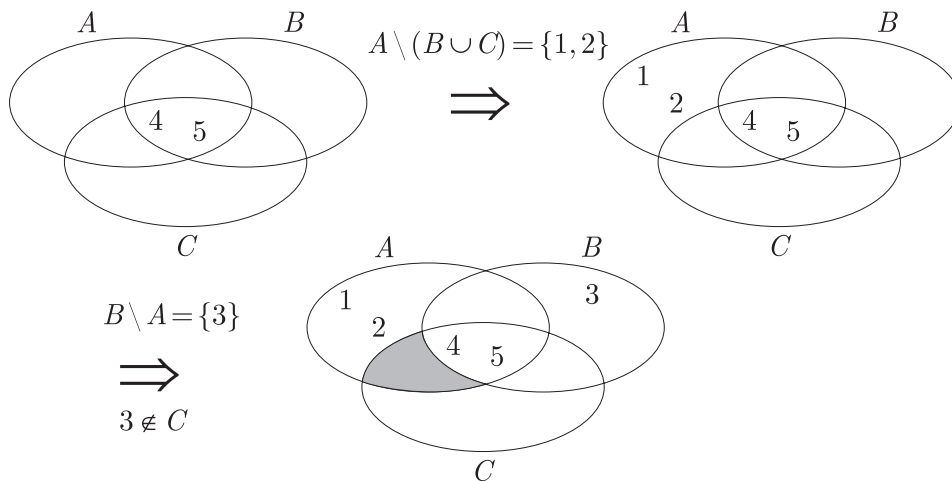
De ha ez az érték benne van mindkét halmazban, tudván hogy $\{6, 7, 8, 9\} \subset C$, mind a három halmazban benne van, ami ellentmond az $A \cap B \cap C = \{4, 5\}$ feltételnek. Tehát

$B = \{3, 4, 5\}$. A végső eredmény tehát:

$$A = \{1, 2, 4, 5\} \cup \{c\}; \quad B = \{3, 4, 5\}; \quad C = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

ahol $c \in \{6, 7, 8, 9\}$. Így a feladatnak négy különböző megoldása van.

Megjegyzés. Ugyanehhez az eredményhez jutunk, ha a Venn-Euler diagram segítségével próbáljuk felépíteni a keresett halmazokat.



Az $|A| = 5$ és $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\} \subset C$ alapján a besatírozott részbe pontosan egy elem kerülhet a $\{6, 7, 8, 9\}$ közül és a $(B \cap C) \setminus (A \cap B \cap C)$ rész üres, tehát a többi három elem a $C \setminus (A \cup B)$ halmazt képezi. Így az előbbi négy megoldáshoz jutunk.

4. Oldd meg a következő egyenleteket, ha A és B adott halmazok:

a) $A \Delta X = B$; b) $A \cap (X \cup B) = A$; c) $(A \setminus B) \cup (X \cap A) = A$.

Megoldás. a) Tételezzük fel, hogy $x \in X$. $A \Delta X = (A \cap \bar{X}) \cup (X \cap \bar{A})$.

Ha $x \in X \Rightarrow x \notin A \cap \bar{X}$;

$$x \in X \text{ és } x \in A \Rightarrow x \notin X \cap \bar{A} \Rightarrow x \notin B;$$

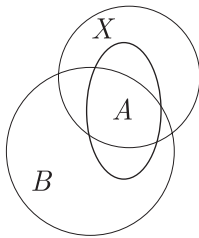
$$x \in X \text{ és } x \notin A \Rightarrow x \in X \cap \bar{A} \Rightarrow x \in B.$$

Tehát $x \in (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})$, azaz $x \in A \Delta B \quad \forall x \in X \Rightarrow X = A \Delta B$.

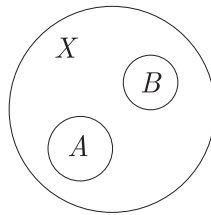
Megjegyzés. Az $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C \quad \forall A, B, C$ halmaz azonosság (1. feladat e) alpontja) alapján $A \Delta X = B \Rightarrow A \Delta (A \Delta X) = A \Delta B \Rightarrow (A \Delta A) \Delta X = A \Delta B \Rightarrow \emptyset \Delta X = A \Delta B \Rightarrow X = A \Delta B$.

b) Ahhoz, hogy $A \cap (X \cup B) = A$ teljesüljön, $A \subset (X \cup B)$. De ez több féleképpen teljesülhet, tehát nagyon sok megoldása van az egyenletnek.

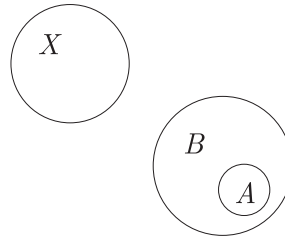
1.



2.



3.



Mind a három eset lehetséges. A megoldások általános alakja $X = (A \cap B) \cup X_1$, ahol X_1 tetszőleges halmaz.

c) Tudjuk, hogy $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$. Innen kapjuk, hogy $A \cap B \subset X \cap A$, ami csak akkor következhet be, ha $(A \cap B) \subset X$. Más megkötés X -re nincs, tehát az általános megoldás alakja $X = (A \cap B) \cup X_1$, ahol X_1 tetszőleges.

5. Lehetséges-e, hogy egy halmaz minden eleme részhalmaza is legyen? Hát az, hogy minden részhalmaza eleme is legyen?

Megoldás. Igen, például $\{\emptyset\}$.

Mivel minden részhalmaza eleme kell legyen, biztos, hogy tartalmazni fogja az $\emptyset$ -t, a halmaz többi elemét már induktívan generáljuk a következő szabályok szerint

$$I_1 = \{\emptyset\}$$

$$I_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$I_3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

$$I_{n+1} = I_n \cup P(I_n), \text{ ahol } P(I_n) \text{ az } I_n \text{ részhalmazainak a halmazát jelöli.}$$

Az így szerkesztett $(I_n)_{n \geq 1}$ halmazokból megszerkeszthető az $I_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ halmaz, amely rendelkezik a kért tulajdonsággal.

6. Bizonyítsd be, hogy ha A , B és C véges halmazok, akkor

a) $|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B|;$

b) $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|;$

c) $|A \cap B \cap C| = |A| + |B| + |C| - |A \cup B| - |B \cup C| - |C \cup A| + |A \cup B \cup C|.$

Bizonyítás. Arra törekszünk, hogy diszjunkt halmazok egyesítésére bontsuk fel az $A \cup B$ halmazt.

a) $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$, ahol $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$, tehát $|A \cup B| = |A| + |B \setminus A|$ (*).

$A \cup B$ halmazt felírhatjuk $B = (B \setminus A) \cup (B \cap A)$ alakban, ahol $(B \setminus A) \cap (B \cap A) = \emptyset$
 $\Rightarrow |B| = |B \setminus A| + |A \cap B| \Rightarrow |B \setminus A| = |B| - |A \cap B|$ (**).

Tehát (*) és (**) alapján $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

b) $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup (C \setminus (A \cup B))$, ahol $(A \cup B) \cap (C \setminus (A \cup B)) = \emptyset$. Tehát

$$|A \cup B \cup C| \stackrel{\text{a)}}{=} |A| + |B| - |A \cap B| + |C \setminus (A \cup B)|; \quad (1)$$

$$C = (C \setminus (A \cup B)) \cup (C \cap A) \cup ((C \cap B) \setminus A) \quad \text{mind diszjunktak} \Rightarrow$$

$$|C| = |C \setminus (A \cup B)| + |C \cap A| + |(C \cap B) \setminus A| \Rightarrow$$

$$|C \setminus (A \cup B)| = |C| - |C \cap A| - |(C \cap B) \setminus A|; \quad (2)$$

$$C \cap B = ((C \cap B) \setminus A) \cup (C \cap B \cap A) \quad \text{diszjunkt halmazok} \Rightarrow$$

$$|C \cap B| = |(C \cap B) \setminus A| + |C \cap B \cap A| \Rightarrow$$

$$|(C \cap B) \setminus A| = |C \cap B| - |C \cap B \cap A|. \quad (3)$$

Az (1), (2), (3) egyenlőségek alapján kapjuk, hogy

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

c) A b) pont alapján

$$\begin{aligned} |A \cap B \cap C| &= |A \cup B \cup C| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| = \\ &= |A \cup B \cup C| - |A| - |B| - |C| + (|A| + |B| - |A \cup B|) + (|A| + |C| - |A \cup C|) + \\ &+ (|B| + |C| - |B \cup C|) = \\ &= |A| + |B| + |C| - |A \cup B| - |A \cup C| - |B \cup C| + |A \cup B \cup C|. \end{aligned}$$

7. Írd fel az $A \times B$ halmaz elemeit, ha

a) $A = \{1, a\}$ és $B = \{2, 5\}$; **b)** $A = \{-2, 3, 8\}$ és $B = \{P, O, E\}$;

c) $A = \{-2, -1, 4, 7\}$ és $B = \{2, 3, 6\}$;

d) $A = \{-2, 3, 8, W\}$ és $B = \{L, i, r, k\}$;

Megoldás. a) $A \times B = \{(1, 2), (1, 5), (a, 2), (a, 5)\}$.

b) $A \times B = \{(-2, P), (-2, O), (-2, E), (3, P), (3, O), (3, E), (8, P), (8, O), (8, E)\}$.

c) $A \times B = \{(-2, 2), (-2, 3), (-2, 6), (-1, 2), (-1, 3), (-1, 6), (4, 2), (4, 3), (4, 6), (7, 2), (7, 3), (7, 6)\}$.

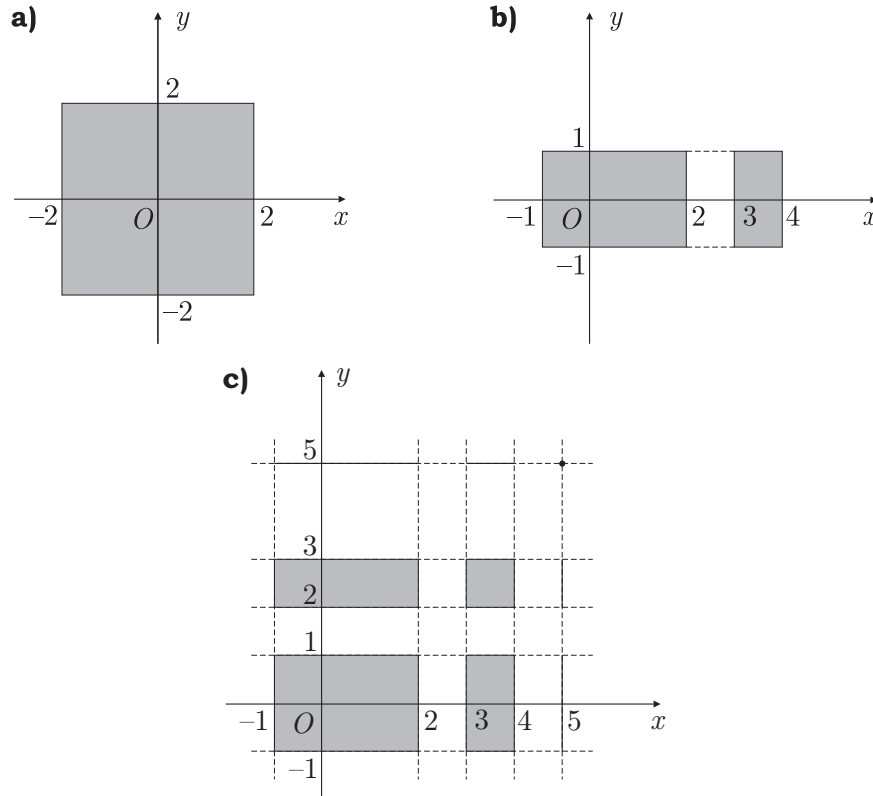
d) $A \times B = \{(-2, L), (-2, i), (-2, r), (-2, k), (3, L), (3, i), (3, r), (3, k), (8, L), (8, i), (8, r), (8, k), (W, L), (W, i), (W, r), (W, k)\}$.

8. Ábrázold az $A \times B$ halmaz geometriai képét a síkban, ha

a) $A = [-2, 2]$ és $B = [-2, 2]$; **b)** $A = [-1, 2] \cup [3, 4]$ és $B = [-1, 1]$;

c) $A = [-1, 2] \cup [3, 4] \cup \{5\}$ és $B = [-1, 1] \cup [2, 3] \cup \{5\}$.

Megoldás



Az a) alpontban ugyanazt kapjuk, a b) és c) alpontokban különböző az $A \times B$ és $B \times A$ geometriai képe.

9. Bizonyítsd be, hogy az $A \times B$ és $B \times A$ halmazok pontosan akkor egyenlők, ha $A = B$.

Bizonyítás. Redukció ad abszurdum módszerével bizonyítjuk. Feltételezzük, hogy $A \neq B$ és $A \times B = B \times A$. Ha $A \neq B$, akkor $\exists x \in A$ úgy, hogy $x \notin B$. Ebben az esetben $(x, b) \in A \times B$ -nek, ahol $b \in B$. De mivel $A \times B = B \times A$, következik, hogy $(x, b) \in B \times A$, azaz $x \in B$ és $b \in A$, de mi feltételeztük, hogy $x \notin B$. Ellentmondáshoz jutottunk, tehát igaz a bebizonyítandó tulajdonság.

10. Bizonyítsd be az alábbi egyenlőségeket:

$$\mathbf{a)} \quad A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C); \quad \mathbf{b)} \quad (A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C).$$

Bizonyítás. **a)** $(x, y) \in A \times (B \setminus C) \Leftrightarrow x \in A \text{ és } y \in (B \setminus C) \Leftrightarrow x \in A \text{ és } y \in B \text{ és } y \notin C \Leftrightarrow x \in A \text{ és } x \in A \text{ és } y \in B \text{ és } y \notin C \Leftrightarrow x \in A \text{ és } y \in B \text{ és } x \in A \text{ és } y \notin C \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \text{ és } (x, y) \notin (A \times C) \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \setminus (A \times C).$

b) $(x, y) \in (A \cap B) \times C \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \text{ és } y \in C \Leftrightarrow x \in A \text{ és } x \in B \text{ és } y \in C \Leftrightarrow x \in A \text{ és } x \in B \text{ és } y \in C \Leftrightarrow x \in A \text{ és } y \in C \text{ és } x \in B \text{ és } y \in C \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times C) \text{ és } (x, y) \in (B \times C) \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times C) \cap (B \times C).$

11. Bizonyítsd be, hogy ha az A halmaznak a eleme van és a B halmaznak b eleme, akkor az $A \times B$ és $B \times A$ halmazoknak $a \cdot b$ elemük van, azaz $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

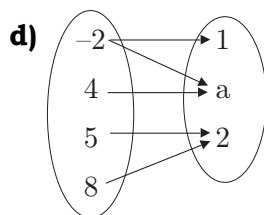
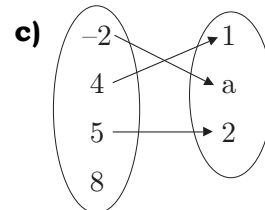
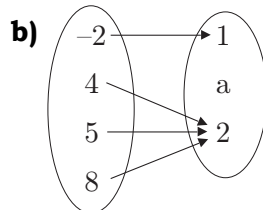
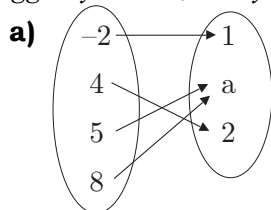
Bizonyítás. Tetszőleges $x \in A$ elem esetén b darab számpárt alakíthatunk ki, amely eleget tesz az $(x, y) \mid y \in B$ feltételnek. A minden egyes elemére ezt elvégezve, kapunk $a \cdot b$ darab számpárt. Ez éppen az $A \times B$ halmaz számossága, mert így felsoroltuk az $A \times B$ minden elemét pontosan egyszer. A $B \times A$ halmaz számosságát hasonlóan igazoljuk.

12. Bizonyítsd be, hogy két halmaz Descartes-szorzatának geometriai képe nem lehet egy egységnyi sugarú kör.

Bizonyítás. Feltételezzük, hogy $A \times B$ Descartes szorzat geometriai képe az egységnyi sugarú, origó középpontú kör. Akkor $1 \in A$ és az $1 \in B$ is, vagyis $(1, 1) \in A \times B$, de az egységnyi sugarú kör nem tartalmazza az $(1, 1)$ pontot. Az előbbi ellentmondás alapján a szorzat geometriai képe nem lehet az origó középpontú egységsugarú kör. A koordináta-tengelyek tetszőlegesen megválaszthatók, tehát a szorzat geometriai képe nem lehet kör.

V.2.2. Gyakorlatok (107. oldal)

1. Válaszd ki az alábbi megfeleltetések közül a függvényeket és indokold meg, miért nem függvények azok, amelyeket nem választottál ki!



e)

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	4	1	0	1	4

f) $f: \{-3, 0, 5, 7, 9\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} - 3}$; g) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2 + x}{x + 2}$.

Megoldás. Függvények: a), b), e), h).

Nem függvény: c) A 8-nak nincs megfeleltetve egy elem sem; d) A 2-nek két érték van megfeleltetve; f) Mivel $\sqrt{-3}$ nem értelmezett, így -3 -nak nem felel meg egy érték sem; g) $x = -2$ esetén nem értelmezett a tört.

2. Határozd meg a következő függvények maximális D értelmezési tartományát:

a) $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x-1}$; b) $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, f(x) = \frac{1}{x-1}$;

c) $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow [1, 2] \cup [3, +\infty), f(x) = \frac{1}{x-1}$;

d) $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$; e) $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$;

f) $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[4]{x^2 - 1}$;

g) $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, 0], f(x) = \sqrt{x^3 - 4x^2 + 3x}$;

h) $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{x}$; i) $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[n]{x}, n \in \mathbb{N}^*$;

j) $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{2}$; k) $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^{\frac{1}{3}}$;

l) $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^{\frac{1}{5}}$;

m) $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{x^2-1}}{x-3}$.

Megoldás. a) $x = 1$ esetén nem értelmezett a tört. Tehát $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

b) Mivel az értékkészlet $\mathbb{R}_+$, a maximális értelmezési tartományt az $\frac{1}{x-1} > 0$ feltétel adja. $\frac{1}{x-1} > 0 \Leftrightarrow x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$. Tehát $D = (1, +\infty)$.

c) $\frac{1}{x-1} \in [1, 2]$ vagy $\frac{1}{x-1} \geq 3$. $\frac{1}{x-1} \in [1, 2] \Leftrightarrow 1 \leq \frac{1}{x-1} \leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \leq 1 \\ 1 \leq 2x-2 \end{cases}$

ha $x-1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$. $\frac{1}{x-1} \geq 3 \Leftrightarrow 1 \geq 3x-3$ ha $x-1 > 0$,

azaz $x > 1 \Leftrightarrow x \leq \frac{4}{3}$ és $x > 1 \Leftrightarrow x \in \left(1, \frac{4}{3}\right]$. Mivel az értékkészlet $\mathbb{R}_+$ -ban van,

a b) alpontot felhasználva kapjuk, hogy $x > 1$. Tehát $D = \left(1, \frac{4}{3}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, 2\right]$.

d) $\sqrt{x}$ értelmezett ha $x \geq 0$. $D = [0, +\infty)$.

e) $x^2 - 3x + 2 \geq 0$. $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1, x_2 = 2 \Rightarrow \Rightarrow D = (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$.

f) $x^2 - 1 \geq 0$. $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1, x_2 = 1 \Rightarrow \Rightarrow D = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

g) $x^3 - 4x^2 + 3x \geq 0$. $x^3 - 4x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$

x	$-\infty$	0	1	3	$+\infty$
x	-	0	+	+	+
$x-1$	-	-	0	+	+
$x-3$	-	-	-	0	+
$x^3 - 4x^2 + 3x$	-	0	+	0	+

$D = [0, 1] \cup [3, +\infty)$.

h) $D = \mathbb{R}$.

i) Ha n páratlan: $D = \mathbb{R}$. Ha n páros: $x > 0 \Rightarrow D = \mathbb{R}_+$.

j) $\sqrt[n]{2} = 2^{\frac{1}{n}}$, $x \neq 0$ és $x \in \mathbb{Q}$, tehát $D = \mathbb{Q}^*$.

k) $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$, így $D = \mathbb{R}$.

l) $x^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{x}$, így $D = \mathbb{R}$.

m) A tört értelmezéséből $x \neq 3$. A gyök értelmezéséből $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x^2-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [1, \infty] \\ x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in [1, +\infty). \text{ Tehát } D = [1, +\infty) \setminus \{3\}.$$

3. Írd át az alábbi függvények értelmezését az összes lehetséges módon (táblázattal, diagrammokkal, képlettel, (A, B, X) halmazhármassal):

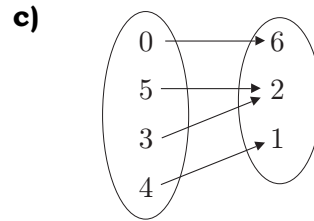
a) $f : \{-1, 0, 1, 2\} \rightarrow \{0, 2, 6\}, f(x) = x^2 + x;$

b) $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \mathbb{R}$

x	1	2	3	4
$f(x)$	1	0,5	0,(3)	0,25

d) $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$

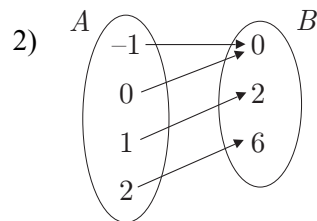
$X = \{(1, 2), (2, 3), (3, 5), (4, 7), (5, 11), (6, 13)\}.$



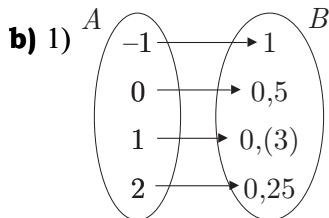
Megoldás

a) 1)

x	-1	0	1	2
$f(x)$	0	0	2	6



3) $A = \{-1, 0, 1, 2\}, B = \{0, 2, 6\}, X = \{(-1, 0), (0, 0), (1, 2), (2, 6)\}.$



2) $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}.$

3) $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \mathbb{R},$

$X = \{(1; 1), (2; 0,5), (3; 0,(3)), (4; 0,25)\}.$

c)

1) $f : \{0, 3, 4, 5\} \rightarrow \{0, 1, 2\}, f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x \text{ páros} \\ 2, & x \text{ páratlan} \end{cases}$

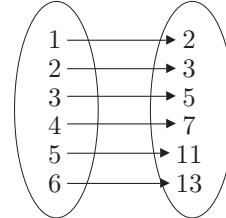
x	0	3	4	5
$f(x)$	0	2	1	2

3) $A = \{0, 3, 4, 5\}, B = \{0, 1, 2\}, X = \{(0, 0), (3, 2), (4, 1), (5, 2)\}.$

d) 1)

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	2	3	5	7	11	13

2)

3) $f: \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$, $f(i) = \text{az } i\text{-edik prímszám}$.

4. Döntsd el, hogy az alábbi függvénpárok egyenlők-e vagy sem:

a) $f: \{-1, 0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$ és $g: \{-1, 0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^3$;b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2}$ és $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = |x|$;c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x-1|^2$ és $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 2x + 1$;d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = [x] + \left[x + \frac{1}{2}\right]$ és $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = [2x]$.**Megoldás. a)** $A = \{-1, 0, 1\}$; $B = \mathbb{R}$. $X_f = \{(-1, -1), (0, 0), (1, 1)\}$, $X_g = \{(-1, -1), (0, 0), (1, 1)\}$. $X_f = X_g \Rightarrow$ a két függvény egyenlő.b) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$. $\sqrt{x^2} = |x|$, tehát a két függvény egyenlő.c) $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = (1-x)^2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = |x-1|^2$, tehát a két függvény egyenlő.d) $x = n + r$, ahol $n = [x]$ és $r \in [0, 1)$.1. eset. $r \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$

$$f(n+r) = n + n \Leftrightarrow f(n+r) = 2n, \text{ mivel } r + \frac{1}{2} < 1;$$

$$g(n+r) = [2n+2r] \Leftrightarrow g(n+r) = 2n, \text{ mivel } 2r < 1.$$

2. eset. $r \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$

$$f(n+r) = n + n + 1 \Leftrightarrow f(n+r) = 2n + 1, \text{ mivel } r + \frac{1}{2} \geq 1;$$

$$g(n+r) = [2n+2r] \Leftrightarrow g(n+r) = 2n + 1, \text{ mivel } 2r \geq 1.$$

Tehát $f(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ a két függvény egyenlő.

V.5. Gyakorlatok (109. oldal)

1. Határozd meg a következő függvények értékeinek a halmazát és keresd meg a minimum illetve maximumpontját (ha létezik):

a) $f: [-3, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1;$ **b)** $f: [-4, -3] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3 - 2x;$

c) $f: [-3, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2;$ **d)** $f: [1, 2] \cup [3, 5] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2x - 5};$

e) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 3x + 2;$ **f)** $f: [-\infty, 3] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 4x + 7;$

g) $f: [-\infty, -2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 3x + 1;$

h) $f: [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2x + 3.$

Megoldás. a) $2x + 1 = y \Rightarrow x_y = \frac{y - 1}{2}$. Mivel az értelmezési tartomány $[-3, 2]$

$$-3 \leq \frac{y - 1}{2} \leq 2 \Rightarrow y \in [-5, 5] \Rightarrow \text{Im } f = [-5, 5].$$

Minimumpont: -3 ; maximumpont: 2 .

b) $3 - 2x = y \Rightarrow x_y = \frac{3 - y}{2}$. Értelmezési tartomány $[-4, -3] \Rightarrow -4 \leq \frac{3 - y}{2} \leq -3$

$$\Rightarrow y \in [9, 11] \Rightarrow \text{Im } f = [9, 11]. \text{ Minimumpont: } -3; \text{ maximumpont: } -4.$$

c) $x^2 = y \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$ ha $y \geq 0 \Rightarrow \text{Im } f = [0, \infty)$.

Minimumpont: 0 ; maximumpont: nincs.

d) $\frac{1}{2x - 5} = y \Leftrightarrow x_y = \frac{5y + 1}{2y}$. Értelmezési tartomány $D = [1, 2] \cup [3, 5]$ tehát $x_y \in D$.

$$x_y \in [1, 2] \Leftrightarrow 1 < \frac{5y + 1}{2y} \leq 2$$

1. eset. $y > 0: 2y \leq 5y + 1 \leq 4y \Rightarrow y \geq -\frac{1}{3}$ és $y \leq -1 \Rightarrow y \in \emptyset$.

2. eset. $y < 0: 2y \leq 5y + 1 \leq 4y \Rightarrow y \in \left[-1, -\frac{1}{3}\right] \subset (-\infty, 0]$.

Ha $x_y \in [3, 5] \Leftrightarrow 3 \leq \frac{5y + 1}{2y} \leq 5$. Hasonlóan tárgyalva mint az előbb, kapjuk,

hogy $y \in \left[\frac{1}{5}, 1\right]$.

Tehát összegezve, $\text{Im } f = \left[-1, -\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{5}, 1\right]$. A függvény minimuma

-1 , tehát minimumpontja 2 . A függvény maximuma 1 , ezt a függvény az $x = 3$ pontban veszi fel.

e) $f(x) = y \Rightarrow x^2 - 3x + 2 - y = 0$. $\Delta_y \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -\frac{1}{4} \Rightarrow \text{Im } f = \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right)$.

A függvény minimuma $y = -\frac{1}{4} \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow x_y = \frac{3}{2}$, tehát a minimumpont $\frac{3}{2}$; maximumpont nincs.

f) $f(x) = y \Rightarrow x^2 - 4x + 7 - y = 0$. $\Delta_y \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 3$, de az értelmezési tartomány $(-\infty, 3]$. $y = 3$ -ra $x_y = 2$ a függvény minimumpontja, ha az értelmezési tartomány $\mathbb{R}$ lenne, de $x_y = 2 \in (-\infty, 3]$ -nak, tehát $x_y = 2$ a kért függvénynek is minimumpontja és az $\text{Im } f = [3, +\infty)$. A függvénynek maximumpontja nem létezik.

g) Hasonlóan járunk el mint az f) alpontban.

$f(x) = y \Rightarrow x^2 - 3x + 1 - y = 0$. $\Delta_y \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -\frac{5}{4}$. Tehát a minimumpont $\frac{3}{2}$, de $\frac{3}{2} \notin (-\infty, -2]$ -nak, ezért a függvény minimumpontja -2 lesz és a függvény értékeinek halmaza $\text{Im } f = [11, +\infty)$, ahol $f(-2) = 11$. Maximumpontja nincs a függvénynek.

h) $f(x) = y \Rightarrow x^2 - 2x + 3 - y = 0$. $\Delta_y \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 2$. A minimumpont 1, de $1 \notin [2, +\infty)$ -nek, tehát a függvény minimumpontja 2. $f(2) = 3 \Rightarrow \text{Im } f = [3, +\infty)$. Maximumpont nincs.

2. Vizsgáld meg az alábbi egyenlőségek és implikációk helyességét, ha $M, N \subseteq A$ és $f: A \rightarrow B$ egy függvény, valamint $f(M) \stackrel{\text{ért}}{=} \{f(x) \mid x \in M\}$.

a) $M \subset N \Rightarrow f(M) \subset f(N)$; **b)** $f(M) \subset f(N) \Rightarrow M \subset N$;

c) $f(M \cap N) = f(M) \cap f(N)$; **d)** $f(M \cup N) = f(M) \cup f(N)$.

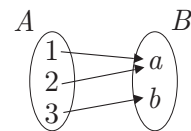
Megoldás. **a)** $f(N) = \{f(x) \mid x \in N\} = \{f(x) \mid x \in (M \cup C_N M)\} = \{f(x) \mid x \in M \text{ és } x \in C_N M\} = \{f(x) \mid x \in M\} \cup \{f(x) \mid x \in C_N M\} = f(M) \cup f(C_N M)$.

Mivel $M \subset N \Rightarrow N = M \cup C_N M$, ahol $M \cap C_N M = \emptyset$. Tehát az implikáció igaz.

b) Nem igaz. Legyen az ábrán látható módon értelmezett függvény.

Legyen $M = \{1\}$, $N = \{2, 3\}$, akkor $f(M) = \{a\}$, $f(N) = \{a, b\}$,

így igaz, hogy $f(M) \subset f(N)$, de $M \not\subset N$.



c) Nem igaz. Példaként legyen az előző alpontban megszerkesztett függvény. $M \cap N = \emptyset \Rightarrow f(M \cap N) = f(\emptyset) = \emptyset$. $f(M) \cap f(N) = \{a\}$.

d) $f(M \cup N) = \{f(x) \mid x \in M \cup N\} = \{f(x) \mid x \in M \text{ vagy } x \in N\} = \{f(x) \mid x \in M\} \cup \{f(x) \mid x \in N\} = f(M) \cup f(N)$.

3. Bizonyítsd be, hogy ha $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ két függvény, amelyre létezik $\max_{x \in [a, b]} f(x)$ illetve $\max_{x \in [a, b]} g(x)$ és $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b]$, akkor $\max_{x \in [a, b]} f(x) \leq \max_{x \in [a, b]} g(x)$.

Bizonyítás. Adott $f(x) \leq g(x) \forall x \in [a, b]$, akkor f maximumára is érvényes $\max_{x \in [a, b]} f(x) = f(x_0) \leq g(x_0) \leq \max_{x \in [a, b]} g(x)$, tehát $\max_{x \in [a, b]} f(x) \leq \max_{x \in [a, b]} g(x)$.

4. Számítsd ki a $\max_{x, y > 0} \left\{ \min \left\{ x, y + \frac{1}{x}, y \right\} \right\}$ kifejezés értékét.

Megoldás. Ha $\min \left\{ x, y + \frac{1}{x}, \frac{1}{y} \right\} = m$, akkor $m \leq x$ és $m \leq \frac{1}{y}$, tehát $(x, y > 0$ alapján) $y \leq \frac{1}{m}$ és $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{m}$. Így $y + \frac{1}{x} \leq \frac{2}{m}$. Másrészt $m \leq y + \frac{1}{x}$, tehát $m \leq \frac{2}{m}$.

Az előbbi egyenlőtlenség alapján $m \leq \sqrt{2}$. Mivel $x = \sqrt{2}, y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ esetén

$\min \left\{ x, y + \frac{1}{x}, \frac{1}{y} \right\} = \sqrt{2}$ és bármely más érték esetén $\min \left\{ x, y + \frac{1}{x}, \frac{1}{y} \right\} \leq \sqrt{2}$,

állíthatjuk, hogy $\max_{x, y > 0} \left\{ \min \left\{ x, y + \frac{1}{x}, \frac{1}{y} \right\} \right\} = \sqrt{2}$.

5. Bizonyítsd be, hogy ha $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ és az alábbi egyenlőtlenségben szereplő maximumok léteznek, akkor az egyenlőtlenség igaz:

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) + g(x)| \leq \max_{x \in [a, b]} |f(x)| + \max_{x \in [a, b]} |g(x)|.$$

Bizonyítás. Legyen x_m az az érték, amelyre $|f(x) + g(x)|$ felveszi a maximumát.

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) + g(x)| = |f(x_m) + g(x_m)| \leq |f(x_m)| + |g(x_m)| \leq \max_{x \in [a, b]} |f(x)| + \max_{x \in [a, b]} |g(x)|.$$

Tehát $\max_{x \in [a, b]} |f(x) + g(x)| \leq \max_{x \in [a, b]} |f(x)| + \max_{x \in [a, b]} |g(x)|$.

V.8. Gyakorlatok és feladatok (113. oldal)

1. Állapítsd meg, hogy a következő rendezett számpár halmazok közül melyik lehet egy függvény grafikonja:

a) $\{(1, 2), (1, 4), (3, 3), (4, 6)\}$;

b) $\{(0, 3), (1, 3), (3, 5), (4, 1), (5, 6)\}$;

c) $\{(0, 0), (2, 1), (3, 2), (0, 4), (4, 1), (5, 4)\}$.

Megoldás. **a)** Nem lehet függvény grafikonja mert az 1-nek két érték felel meg, a 2 és a 4.

b) Lehet függvény grafikonja.

c) Nem lehet függvény grafikonja, a 0-nak két érték felel meg.

2. Határozd meg az alábbi függvények grafikonját, majd ábrázold a függvényeket:

a) $f : \{0, 1, 2\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$, $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = 1$;

b) $f : \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(x) = x^2$, $\forall x \in \{0, 1, 2, 3\}$;

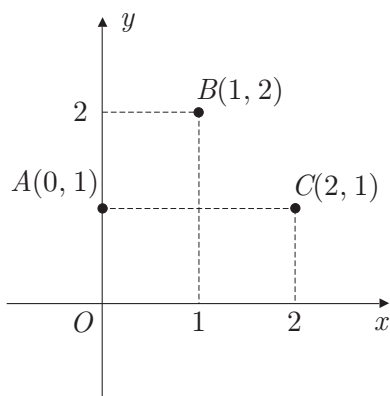
c) $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 3, 5, 6, 7, 8\}$, $f(x) = 9 - x$, $\forall x \in \{1, 2, 3, 4\}$;

d) $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x - 1|$;

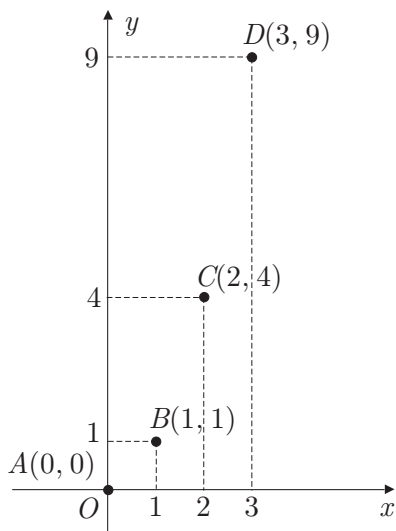
e) $f : \left\{-2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\right\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = [x]$.

Megoldás

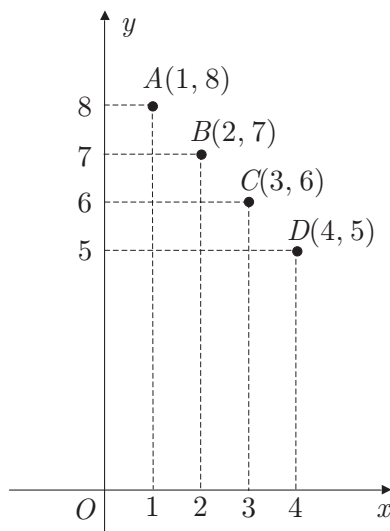
a) $\text{Gr}f = \{(0, 1), (1, 2), (2, 1)\}$.



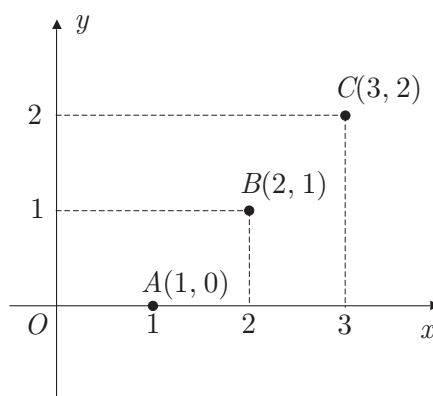
b) $\text{Gr}f = \{(0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9)\}$.



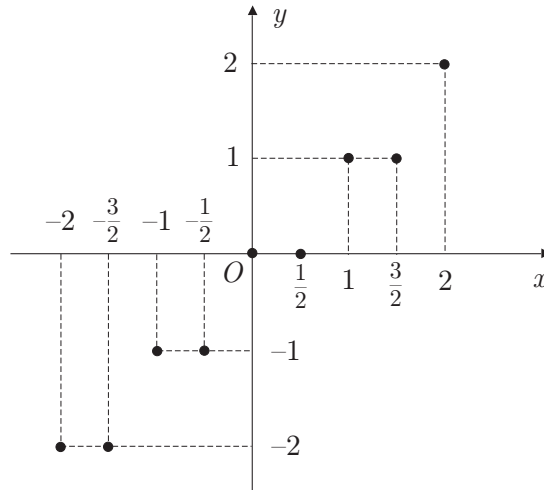
c) $\text{Gr}f = \{(1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5)\}$.



d) $\text{Gr}f = \{(1, 0), (2, 1), (3, 2)\}$.



e) $\text{Gr}f = \left\{ (-2, -2), \left(-\frac{3}{2}, -2\right), (-1, -1), \left(-\frac{1}{2}, -1\right), (0, 0), \left(\frac{1}{2}, 0\right), (1, 1), \left(\frac{3}{2}, 1\right), (2, 2) \right\}.$



3. Vizsgáld meg az alábbi függvények párosságát, páratlanságát illetve periodikusságát:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^{2001};$

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^{2002};$

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^n, n \in \mathbb{N};$

d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = {}^{2n+1}\sqrt{x}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\};$

e) $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2;$

f) $f: [-2, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 + x;$

g) $f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^5 + x^3 + x;$

h) $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^4 + x^2;$

i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x;$

j) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \{\sin x\}.$

Megoldás. a) $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}, f(-x) = (-x)^{2001} = (-1)^{2001} x^{2001} = -x^{2001} = -f(x), \forall x \in \mathbb{R},$ tehát f páratlan függvény.

f periodikus ha $\exists T: f(x+T) = f(x), \forall x \in \mathbb{R},$ azaz $(x+T)^{2001} = x^{2001}, \forall x \in \mathbb{R}.$ Akkor igaz $x=0$ esetén is, ahonnan kapjuk, hogy $T=0.$ Tehát f nem periodikus függvény.

b) $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}, f(-x) = (-x)^{2002} = (-1)^{2002} x^{2002} = x^{2002} = f(x), \forall x \in \mathbb{R},$ tehát f páros függvény.

$f(x+T) = f(x), \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x+T)^{2002} = x^{2002}, \forall x \in \mathbb{R} \stackrel{x=0}{\Leftrightarrow} T=0,$ tehát f nem periodikus.

c) $f(-x) = (-x)^n = (-1)^n x^n = \begin{cases} x^n, & n \text{ páros} \\ -x^n, & n \text{ páratlan} \end{cases}, \forall x \in \mathbb{R},$ azaz f páros függvény,

ha n páros, f páratlan függvény ha n páratlan.

$f(x+T) = f(x), \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x+T)^n = x^n, \forall x \in \mathbb{R} \xrightarrow{x=0} T=0$, tehát f nem periodikus függvény.

d) $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$. $f(-x) = \sqrt[n+1]{-x} = (-x)^{\frac{1}{2n+1}} = -1^{\frac{1}{2n+1}} \cdot x^{\frac{1}{2n+1}} = -x^{\frac{1}{2n+1}} = -\sqrt[n+1]{x} = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$, tehát az f páratlan függvény.

$f(x+T) = f(x), \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \sqrt[n+1]{x+T} = \sqrt[n+1]{x}, \forall x \in \mathbb{R} \xrightarrow{x=0} T=0$, f nem periodikus függvény.

e) $\forall x \in [0, +\infty) \not\Rightarrow -x \in [0, +\infty)$, például $1 \in [0, +\infty)$, de $-1 \notin [0, +\infty)$, f nem páros és nem páratlan függvény.

$f(x+T) = f(x), \forall x \in [0, +\infty) \Leftrightarrow (x+T)^2 = x^2, \forall x \in [0, +\infty) \Leftrightarrow T=0$, f nem periodikus függvény.

f) $\forall x \in [-2, 1] \not\Rightarrow -x \in [-2, 1]$, például $-2 \in [-2, 1]$, de $2 \notin [-2, 1]$, f nem páros és nem páratlan függvény.

$f(x+T) = f(x), \forall x \in [-2, 1] \Leftrightarrow (x+T)^3 + x + T = x^3 + x, \forall x \in [-2, 1]$, és ha $x = 0 \in [-2, 1]$, akkor kapjuk, hogy $T^3 + T = 0$, azaz $T(T^2 + 1) = 0$, melynek az egyedüli valós gyöke a $T = 0$. Tehát f nem periodikus.

g) $\forall x \in [-2, 2] \Rightarrow -x \in [-2, 2]$. $f(-x) = (-x)^5 + (-x)^3 + (-x) = (-1)^5 x^5 + (-1)^3 x^3 - x = -x^5 - x^3 - x = -(x^5 + x^3 + x) = -f(x), \forall x \in [-2, 2]$, tehát f páratlan függvény.

$f(x+T) = f(x), \forall x \in [-2, 2] \Leftrightarrow (x+T)^5 + (x+T)^3 + x + T = x^5 + x^3 + x, \forall x \in [-2, 2]$. Ha $x = 0$, akkor $T^5 + T^3 + T = 0$, azaz $T(T^4 + T^2 + 1) = 0$. Jelöljük $T^2 = z$, kapjuk a $z^2 + z + 1 = 0$ egyenletet, melynek nincs valós gyöke, tehát a T változós egyenlet egyetlen gyöke a $T = 0$, azaz az f nem periodikus.

h) $\forall x \in [-1, 1] \Rightarrow -x \in [-1, 1]$. $f(-x) = (-x)^4 + (-x)^2 = x^4 + x^2 = f(x)$ bármely $x \in [-1, 1]$, tehát f páros függvény.

$$f(x+T) = f(x), \forall x \in [-1, 1] \Leftrightarrow (x+T)^4 + (x+T)^2 = x^4 + x^2, \forall x \in [-1, 1].$$

Legyen $x = 0$, akkor kapjuk a $T^4 + T^2 = 0 \Leftrightarrow T^2(T^2 + 1) = 0$ egyenletet, melynek egyedüli valós gyöke 0. Tehát f nem periodikus.

i) $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$. $f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$, tehát f páratlan függvény.

$f(x+T) = f(x), \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \sin(x+T) = \sin x \Leftrightarrow T = 2k\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$, tehát f periodikus függvény.

$$\text{j) } f(x) = \{\sin x\} = \begin{cases} \sin x, & \sin x \in [0, 1] \\ 1 + \sin x, & \sin x \in [-1, 0] \\ 0, & \sin x = -1 \end{cases}$$

$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R} . f(-x) = \{\sin(-x)\} = \{-\sin x\} \neq \{\sin x\} \Rightarrow f$ nem páros.

$f(-x) = \{\sin(-x)\} = \{-\sin x\} \neq -\{\sin x\} \Rightarrow f$ nem páratlan.

Ha $T = 2\pi \Rightarrow f(x+T) = f(x) \Rightarrow f$ periodikus. $f(x+2\pi) = \{\sin(x+2\pi)\} = \{\sin x\} = f(x)$.

4. Egy $f : [-6, 6] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény változási táblázata a következő:

x	-6	-4	-1	0	1	4	6
$f(x)$		2		4	-1		5

Töltsd ki a táblázatot, ha f páros, majd ha f páratlan.

Megoldás

f páratlan:

x	-6	-4	-1	0	1	4	6
$f(x)$	5	2	-1	4	-1	2	5

f páros:

x	-6	-4	-1	0	1	4	6
$f(x)$	-5	2	1	4	-1	-2	5

5. Melyik igaz és melyik hamis az alábbi kijelentések közül?

- a) $\left. \begin{array}{l} f : A \rightarrow B \text{ páros} \\ g : A \rightarrow B \text{ páros} \end{array} \right\} \Rightarrow f + g : A \rightarrow B \text{ is páros};$
- b) $\left. \begin{array}{l} f : A \rightarrow B \text{ páratlan} \\ g : A \rightarrow B \text{ páratlan} \end{array} \right\} \Rightarrow f + g : A \rightarrow B \text{ is páratlan};$
- c) $\left. \begin{array}{l} f : A \rightarrow B \text{ páros} \\ g : A \rightarrow B \text{ páros} \end{array} \right\} \Rightarrow f \cdot g : A \rightarrow B \text{ is páros};$
- d) $\left. \begin{array}{l} f : A \rightarrow B \text{ páratlan} \\ g : A \rightarrow B \text{ páratlan} \end{array} \right\} \Rightarrow f \cdot g : A \rightarrow B \text{ is páratlan}.$

Megoldás. a) $\forall x \in A \Rightarrow -x \in A$ mivel f és g is páros.

$(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x), \forall x \in A$, azaz $f+g$ páros.

Igaz a kijelentés.

b) $\forall x \in A \Rightarrow -x \in A$ mivel f, g páratlan.

$(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -(f(x) + g(x)) = -(f+g)(x) \Rightarrow$

$f+g$ páratlan. Tehát igaz a kijelentés.

c) $\forall x \in A \Rightarrow -x \in A$ mivel f, g páros.

$$(f \cdot g)(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x), \forall x \in A, \text{ vagyis } f \cdot g \text{ páros.}$$

d) $\forall x \in A \Rightarrow -x \in A$ mert f, g páratlan.

$$(f \cdot g)(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = (-f(x)) \cdot (-g(x)) = f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x), \forall x \in A, \text{ tehát } f \cdot g \text{ páros. Tehát hamis a kijelentés.}$$

e) Igazolni kell, hogy $\exists T : (g \circ f)(x + T) = (g \circ f)(x)$.

$$(g \circ f)(x + T) = g(f(x + T)) = g(f(x)) = (g \circ f)(x). \text{ Tehát } g \circ f \text{ periodikus, következésképpen az } f \text{ periodikusságából. Igaz kijelentés.}$$

6. Van-e függőleges szimmetriatengelye az alábbi függvények grafikus képének?

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0;$

b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b, a \neq 0;$ **c)** $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 + a, a \in \mathbb{R};$

d) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x - 1)^4 + (x + 3)^4;$ **e)** $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^4 + x^3;$

f) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x;$

g) $f : [-3, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x;$

h) $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = a + b - x, a, b \in \mathbb{R}, a < b.$

Megoldás. **a)** $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow 2d - x \in \mathbb{R}$, ahol $d \in \mathbb{R}$. Vizsgálunk kell, hogy létezik-e olyan $d \in \mathbb{R}$ úgy, hogy teljesüljön a $f(x) = f(2d - x), \forall x \in \mathbb{R}$ feltétel.

$$\begin{aligned} f(x) = f(2d - x) &\Leftrightarrow ax^2 + bx + c = a(2d - x)^2 + b(2d - x) + c \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (2da + b)x = 2d^2a + bd \end{aligned}$$

Az egyenlőség fenn kell álljon bármely x -re a valós számok halmazából, ami csak akkor lehetséges ha $2da + b = 0$. Ahonnan kapjuk, hogy $x = -\frac{b}{2a}$ függőleges szimmetriatengelye a megadott függvény grafikus képének.

b) Mivel $\mathbb{R}$ -ben vagyunk, az első feltétel biztos, hogy teljesülni fog.

$$\begin{aligned} f(x) = f(2d - x), \forall x \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow ax + b = a(2d - x) + b, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = d, \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Tehát ellentmondáshoz jutottunk, így az f függvény grafikus képének nincs függőleges szimmetriatengelye.

c) $\mathbb{R}$ -ben vagyunk, tehát teljesül az első feltétel.

$$\begin{aligned} f(x) = f(2d - x), \forall x \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow x^3 + a = (2d - x)^3 + a, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^3 - 3dx^2 + 6d^2x - 4d^3 = 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Az egyenletnek legfeljebb három különböző gyöke van, de nekünk az minden valós szám esetén kellene teljesüljön. Tehát a függvény grafikus képének nincs függőleges szimmetriatengelye.

d) Teljesül az első feltétel.

$$f(x) = f(2d - x), \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x-1)^4 + (x+3)^4 = (2d-1-x)^4 + (2d+3-x)^4 \Leftrightarrow d = -1$$

Tehát teljesül az egyenlőség, így az $x = -1$ egyenletű egyenes a függvény grafikus képének függőleges szimmetriatengelye.

e) $\mathbb{R}$ -ben teljesül a $2d - x \in \mathbb{R} \quad \forall d, x \in \mathbb{R}$ feltétel.

$$f(x) = f(2d - x), \forall x \in D \Leftrightarrow x^4 + x^3 = (2d - x)^4 + (2d - x)^3, \forall x \in \mathbb{R}$$

Megfeleltetjük a szabadtagok együtthatóját.

$$(2d)^4 + (2d)^3 = 0 \Leftrightarrow (2d)^3(2d+1) = 0 \Leftrightarrow d = 0 \text{ vagy } d = -\frac{1}{2}$$

$d = 0$ esetén az $x^4 + x^3 = x^4 - x^3, \forall x \in \mathbb{R}$ egyenlőséget kapjuk, ami nem igaz.

$d = -\frac{1}{2}$ esetén az $x^4 + x^3 = (-1-x)^4 + (-1-x)^3$ egyenlőségnek kellene teljesülnie $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén. Mivel ez sem teljesül, a grafikus kép nem rendelkezik függőleges szimmetriatengellyel.

f) $f(x) = f(2d - x), \forall x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 2d - x \quad \forall x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = d, \quad \forall x \in \mathbb{Z}.$

Nincs függőleges szimmetriatengely.

g) $f(x) = f(2d - x), \forall x \in [-3, 2] \Leftrightarrow x = 2d - x, \forall x \in [-3, 2] \Leftrightarrow x = d,$

$\forall x \in [-3, 2].$ Ez nem lehetséges mert d egy rögzített érték és x a változó, tehát nincs függőleges szimmetriatengely.

h) $f(x) = f(2d - x), \forall x \in [a, b] \Leftrightarrow a + b - x = a + b - 2d + x, \forall x \in [a, b] \Leftrightarrow x = d, \forall x \in [a, b] \Leftrightarrow a = b = d, \text{ de } a < b.$ Nincs függőleges szimmetriatengely.

7. Bizonyítsd be, hogy ha az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény teljesíti az

$$f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)}$$

egyenlőséget, $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén, akkor f periodikus.

Bizonyítás. Ha $f(x) = y$, akkor $f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{y - y^2}.$

Ha x helyett $(x+a)$ -t helyettesítünk, az

$$\begin{aligned} f(x+2a) &= \frac{1}{2} + \sqrt{f(x+a) - f^2(x+a)} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{y - y^2} - \left(\frac{1}{2} + \sqrt{y - y^2}\right)^2} = \\ &= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + y^2 - y} = \frac{1}{2} + \sqrt{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} + y - \frac{1}{2} = y \end{aligned}$$

egyenlőséghez jutunk, tehát $f(x+2a) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$, azaz f periodikus.

8. Bizonyítsd be, hogy ha az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$ függvény teljesíti az $f(x+2) = \frac{1}{1-f(x)}$ egyenlőséget, $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén, akkor f periodikus.

Bizonyítás. Legyen $f(x) = y \Rightarrow f(x+2) = \frac{1}{1-y}$. Ha x helyett $(x+2)$ -t helyettesítünk az

$$f(x+4) = \frac{1}{1 - \frac{1}{1-y}} = -\frac{1-y}{y}$$

egyenlőséghez jutunk, majd az $x+4$ helyettesítés után:

$$f(x+6) = \frac{1}{1 + \frac{1-y}{y}} = y.$$

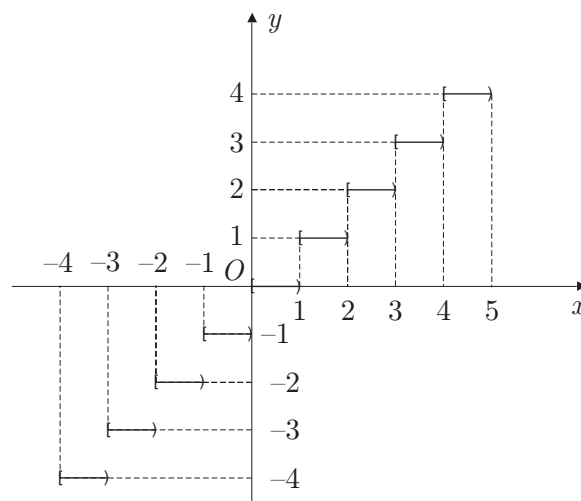
Azaz $f(x) = f(x+6)$, tehát f periodikus.

9. Ábrázold grafikusan a következő függvényeket:

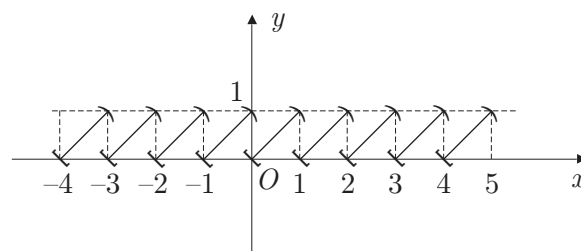
a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = [x]$;

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \{x\}$.

Megoldás. a)



b)



V.9.1. Gyakorlatok és feladatok (116. oldal)

1. Vizsgáld az alábbi $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvények monotonitását.

a) $f(x) = x^2 + 4, I = [0, +\infty);$ **b)** $f(x) = 2x^2 - 6x, I = [-2, 1];$

c) $f(x) = -3x^2 + 2, I = [0, +\infty);$ **d)** $f(x) = \frac{x}{x-2}, I = (2, +\infty).$

Megoldás. **a)** $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{x_1^2 + 4 - x_2^2 - 4}{x_1 - x_2} = x_1 + x_2 > 0, \forall x_1, x_2 \in I$ mivel $x_1 \neq x_2$. Tehát f szigorúan növekvő függvény.

b) $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{2x_1^2 - 6x_1 - 2x_2^2 + 6x_2}{x_1 - x_2} = \frac{2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - 6(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} =$
 $= 2(x_1 + x_2) - 6 < 0, \forall x_1, x_2 \in [-2, 1].$ Tehát f szigorúan csökkenő függvény.

c) $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{-3x_1^2 + 2 + 3x_2^2 - 2}{x_1 - x_2} = -3(x_1 + x_2) < 0, \forall x_1, x_2 \in I$ mivel $x_1 \neq x_2, x_1, x_2$ nem veheti fel egyszerre a 0 értéket. Tehát f szigorúan csökkenő függvény.

d) $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{x_1}{x_1-2} - \frac{x_2}{x_2-2}}{x_1 - x_2} = \frac{-2(x_1 - x_2)}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)(x_1 - x_2)} = \frac{-2}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)} < 0,$
mert $x_1, x_2 \in (2, +\infty) \Rightarrow x_1 - 2 > 0$ és $(x_2 - 2) > 0$. Tehát f szigorúan csökkenő függvény.

2. Legyen $f : I \rightarrow \mathbb{R}, (I \subset \mathbb{R})$ függvény. A tagadási szabályok használásával, írd fel, hogy mit jelent:

a) f nem szigorúan növekvő I -n; **b)** f nem szigorúan csökkenő I -n;

c) f nem szigorúan monoton I -n.

Megoldás. **a)** f csökkenő I -n (vagy f növekvő, f csökkenő, f szigorúan csökkenő, f változtatja a monotonitását az I intervallumon belül).

b) f növekvő I -n (vagy f csökkenő, növekvő, szigorúan növekvő, változtatja a monotonitását I -n).

c) f növekvő vagy csökkenő (vagy f növekvő, csökkenő, változtatja a monotonitását az I intervallumon belül).

3. Vizsgáld az $f : (-\infty, -1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ függvény monotonitását.

Megoldás.
$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{x_1}{1-x_1^2} - \frac{x_2}{1-x_2^2}}{x_1 - x_2} = \frac{(x_1 - x_2) - x_1x_2(x_1 - x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)(x_1 - x_2)} =$$

$$= \frac{1 - x_1x_2}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}, \quad 1+x_1^2 > 0 \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}; \quad 1+x_2^2 > 0 \quad \forall x_2 \in \mathbb{R}.$$

A függvény monotonitását az $1 - x_1x_2$ előjele fogja megadni. Mivel $x_1, x_2 \in I$, ezért vizsgáljuk az $x_1 = x_2$ esetén kapott kifejezés előjelét. Az $I_1 = (-1, 1)$ intervallumon az f függvény csökkenő, míg az $I_2 = \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$ halmazon növekvő.

4. Tanulmányozd az $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 1}$ és $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 1$ függvények monotonitását!

Megoldás.
$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{x_1^2 - 2x_1 + 1}{x_1 + 1} - \frac{x_2^2 - 2x_2 + 1}{x_2 + 1}}{x_1 - x_2} = \frac{x_1x_2 + x_1 + x_2 - 3}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)}.$$

Ha $x_1 = x_2$, az eredeti tört a következő formában írható: $\frac{x_1^2 + 2x_1 - 3}{(x_1 + 1)^2}$. A tört

előjelének vizsgálata megegyezik az $x_1^2 + 2x_1 - 3$ kifejezés előjelével. Ebből következik, hogy az $I_1 = (-3, 1)$ intervallumon f csökkenő, az $I_2 = \mathbb{R} \setminus (-3, 1)$ intervallumon pedig növekvő.

$$\frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{x_1^3 - 3x_1^2 + 4x_1 + 1 - x_2^3 + 3x_2^2 - 4x_2 - 1}{x_1 - x_2} =$$

$$= x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 3x_1 - 3x_2 + 4.$$

Hasonlóan járva el mint az előbb: $x_1 = x_2 \Rightarrow 3x_1^2 - 6x_1 + 4$ előjelét kell vizsgálnunk. $\Delta_{x_1} = -12 < 0 \Rightarrow$ a g függvény szigorúan növekvő az $\mathbb{R}$ -en.

5. Bizonyítsd be, hogy két növekvő függvény összege is növekvő. Ez alapján igazold, hogy ha $a_1, a_2, \dots, a_n$ pozitív számok, akkor az

$f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$
 függvény növekvő. Adjál példát olyan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ alakú függvényre, amely se nem növekvő, se nem csökkenő az $\mathbb{R}_+$ -on.

Megoldás. Legyen f, g két növekvő függvény és igazolni fogjuk, hogy $f + g$ is növekvő.

$$\begin{aligned} \frac{(f+g)(x_1) - (f+g)(x_2)}{x_1 - x_2} &\stackrel{\text{ért}}{=} \frac{f(x_1) + g(x_1) - f(x_2) - g(x_2)}{x_1 - x_2} = \\ &= \frac{f(x_1) - f(x_2) + g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} + \frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \end{aligned}$$

Tehát két növekvő függvény összege növekvő.

Legyen $f_0(x) = a_0 x^n, f_1(x) = a_1 x^{n-1}, \dots, f_{n-1}(x) = a_{n-1} x, f_n(x) = a_n$. Ekkor

$$\frac{f_i(x_1) - f_i(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{a_i x_1^{n-i} - a_i x_2^{n-i}}{x_1 - x_2} = a_i (x_1^{n-i-1} + x_1^{n-i-2} x_2 + \dots + x_2^{n-i-1}) > 0$$

Tehát f_i növekvő $\mathbb{R}_+$ -n $\forall i = \overline{0, n} \Rightarrow f$ növekvő függvény $\mathbb{R}_+$ -n.

6. Az eddigiek alapján dönts el, hogy a következő grafikus képek közül melyek ábrázolnak növekvő függvényeket és melyek csökkenőket! Azoknál a függvényeknél, amelyek nem monotonak az egész $\mathbb{R}$ -en, határozd meg a monotonitási intervallumokat. Vizsgáld meg a szigorú monotonitást is!

Megoldás. Az 1. szigorúan növekvő az $\mathbb{R}$ -n; a 2. csökkenő az $\mathbb{R}$ -n; a 3. növekvő az $\mathbb{R}$ -n; a 4. az $I_1 = (-\infty, -1]$, $I_3 = (3, +\infty)$ intervallumokon szigorúan növekvő, míg az $I_2 = (-1, 3]$ intervallumon szigorúan csökkenő; az 5. az $I_1 = (-\infty, -3]$, $I_3 = (-1, 1]$, $I_5 = (3, +\infty)$ intervallumokon szigorúan növekvő, az $I_2 = (-3, -1]$, $I_4 = (1, 3]$ intervallumokon pedig szigorúan csökkenő; a 6. az $I_1 = (-\infty, -1]$ intervallumon szigorúan növekvő, míg az $I_2 = (-1, +\infty)$ intervallumon szigorúan csökkenő.

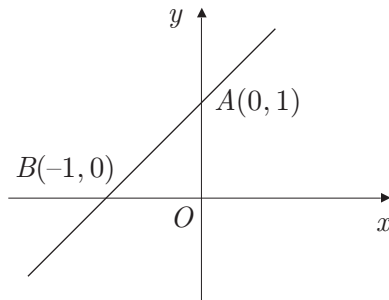
V.13. Gyakorlatok (129. oldal)

1. Ábrázold a következő első és másodfokú függvényeket:

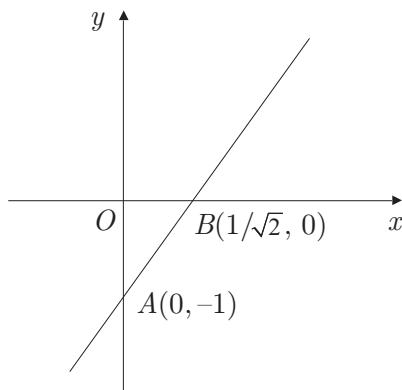
- | | |
|--|---|
| a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 1;$ | b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{2}x - 1;$ |
| c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 7 - 3x;$ | d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{2} - \sqrt{3};$ |
| e) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 4x + 5;$ | f) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2x + 6;$ |
| g) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2\sqrt{2}x + 2;$ | h) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 5x + 6;$ |
| i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 7x + 12;$ | j) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{4};$ |
| k) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + 10x;$ | l) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 16.$ |

Megoldás.

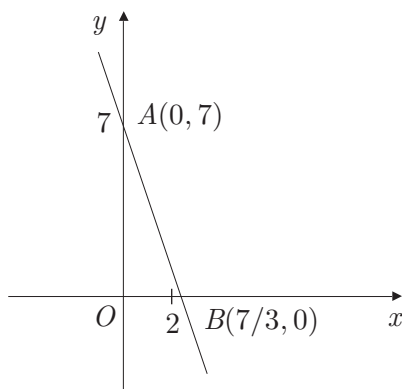
a) $f(0) = 1, f(-1) = 0.$



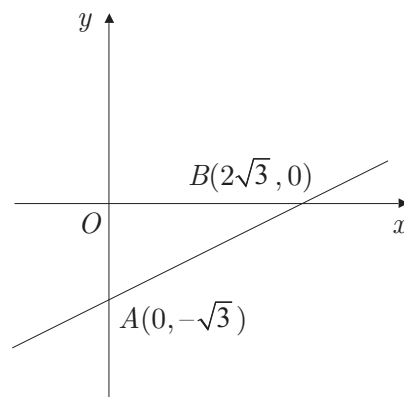
b) $f(0) = -1, f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0.$



c) $f(0) = 7, f\left(\frac{7}{3}\right) = 0.$

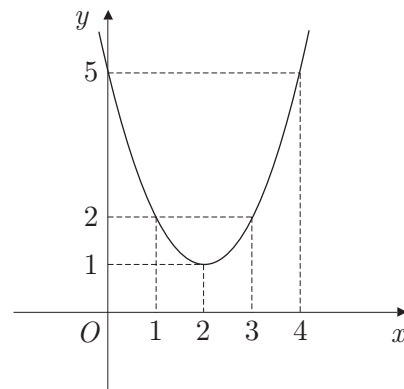


d) $f(0) = -\sqrt{3}, f(2\sqrt{3}) = 0.$



e) $x_v = -\frac{b}{2a}, y_v = -\frac{\Delta}{4a}, x_v = 2, y_v = 1; \Delta < 0 \Rightarrow Gr \cap Ox = \emptyset.$
 $f(0) = 5, f(4) = 5, f(1) = 2, f(3) = 2.$

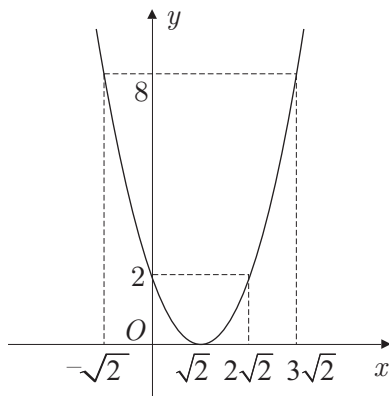
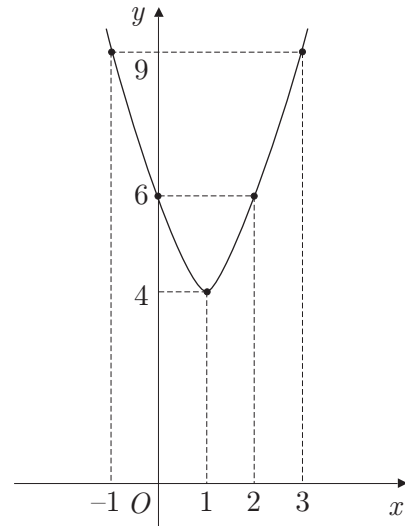
x	0	1	2	3	4
$f(x)$	5	2	1	2	5



f) A csúcspont koordinátái: $x_V = -\frac{b}{2a} = 1$,

$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = 4$. $\Delta < 0$, tehát a grafikus kép nem metszi az Ox tengelyt. $f(0) = 6$; $f(2) = 6$;
 $f(-1) = 9$; $f(3) = 9$.

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	6	4	6	9



g) A csúcspont koordinátái $x_V = -\frac{b}{2a} = \sqrt{2}$,

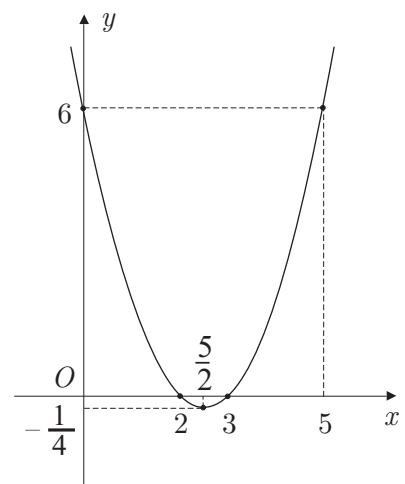
$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = 0$. $\Delta = 0$, a grafikon érinti az Ox tengelyt. $f(0) = 2$; $f(2\sqrt{2}) = 2$;
 $f(-\sqrt{2}) = 8$; $f(3\sqrt{2}) = 8$.

x	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$
$f(x)$	8	2	0	2	8

h) A csúcspont koordinátái: $x_V = -\frac{b}{2a} = \frac{5}{2}$,

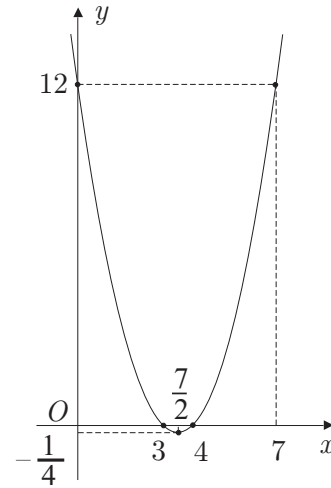
$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{1}{4}$. $\Delta = 1$, a grafikon metszi az Ox tengelyt: $f(2) = 0$, $f(3) = 0$; $f(0) = 6$,
 $f(5) = 6$.

x	0	2	$5/2$	3	5
$f(x)$	6	0	$-1/4$	0	6



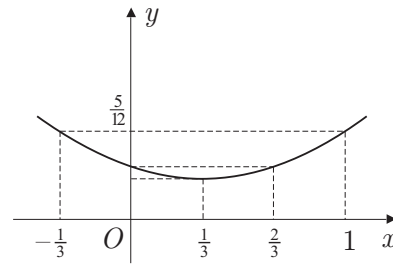
- i)** A csúcspont koordinátái: $x_V = -\frac{b}{2a} = \frac{7}{2}$,
 $y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{1}{4}$. $\Delta = 1 > 0$, a grafikus kép metszi
 az Ox tengelyt. $f(3) = 0$, $f(4) = 0$, $f(0) = 12$,
 $f(7) = 12$.

x	0	3	$7/2$	4	7
$f(x)$	12	0	$-1/4$	0	12



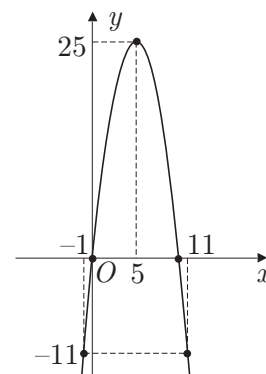
- j)** A csúcspont koordinátái $x_V = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{3}$,
 $y_V = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{7}{36}$. $\Delta < 0$, a grafikus kép nem
 metszi az Ox tengelyt. $f(0) = \frac{1}{4}$, $f(\frac{2}{3}) = \frac{1}{4}$,
 $f(-\frac{1}{3}) = \frac{5}{12}$, $f(1) = \frac{5}{12}$.

x	$-1/3$	0	$1/3$	$2/3$	1
$f(x)$	$5/12$	$1/4$	$7/36$	$1/4$	$5/12$



- k)** A csúcspont koordinátái: $x_V = -\frac{b}{2a} = 5$,
 $y_V = -\frac{\Delta}{4a} = 25$. $\Delta > 0$, a grafikus kép két pontban metszi
 az Ox tengelyt: $f(0) = 0$, $f(10) = 0$; $f(-1) = -11$,
 $f(11) = -11$.

x	-1	0	5	10	11
$f(x)$	-11	0	25	0	-11



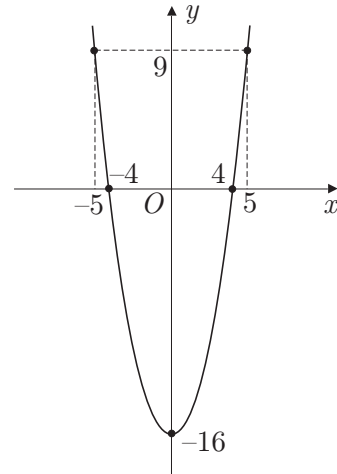
1) A csúcspont koordinátái: $x_V = -\frac{b}{2a} = 0$,

$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -16$. $\Delta > 0$, a grafikus kép két az

Ox tengelyt 2 pontban metszi: $f(-4) = 0$, $f(4) = 0$;

$f(-5) = 9$, $f(5) = 9$.

x	-5	-4	0	4	5
$f(x)$	9	0	-16	0	9



2. Határozd meg a következő függvenypárok grafikus képének metszéspontját:

a) $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 1$, $g(x) = 2x + 3$;

b) $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 5$, $g(x) = 4 - x$;

c) $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -3x + 2$, $g(x) = x^2 - 6x + 4$;

d) $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 7x + 3$, $g(x) = x^2 - 5x + 14$.

Megoldás. a) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 3x - 1 = 2x + 3 \Leftrightarrow x = 4$, $y = f(4) = g(4) = 11$.

Tehát a metszéspont $(4, 11)$.

b) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2x - 5 = 4 - x \Leftrightarrow 3x = 9 \Leftrightarrow x = 3$, $y = f(3) = g(3) = 1$.

Tehát a metszéspont $(3, 1)$.

c) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow -3x + 2 = x^2 - 6x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2$,
 $x_2 = 1$; $y_1 = f(2) = g(2) = -4$, $y_2 = f(1) = g(1) = -1$. A metszéspontok: $(2, -4)$,
 $(1, -1)$.

d) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 7x + 3 = x^2 - 5x + 14 \Leftrightarrow x^2 - 12x + 11 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1$,
 $x_2 = 11$; $y_1 = f(1) = g(1) = 10$, $y_2 = f(11) = g(11) = 80$. Tehát a metszéspontok
 $(1, 10)$, $(11, 80)$.

3. Ábrázold az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x$ függvényt és határozd meg az alábbi halmazokat:

a) $\text{Im } f$; b) $f([0, 2])$; c) $f([-2, 4])$; d) $f([1, 6])$; e) $f([-10, 0])$.

Megoldás. a) $a = 1 > 0 \Rightarrow \text{Im } f = \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$. $-\frac{\Delta}{4a} = -1 \Rightarrow \text{Im } f = [-1, \infty)$.

b) $f(0) = 0, f(2) = 0 \cdot -\frac{b}{2a} = 1, x = 1 \in [0, 2] \Rightarrow f([0, 2]) = [-1, 0]$.

c) $f(-2) = 8, f(4) = 8 \cdot x = 1 \in [-2, 4] \Rightarrow f([-2, 4]) = [-1, 8]$.

d) $f(1) = -1, f(6) = 24 \cdot f([1, 6]) = [-1, 24]$.

e) $f(-10) = 120, f(0) = 0 \cdot x = 1 \notin [-10, 0] \Rightarrow f([-10, 0]) = [0, 120]$.

4. Határozd meg az $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = 2x + 5, f_2(x) = 3x - 4$ és $f_3(x) = -7x + 4$ függvények grafikus képének metszéspontjai által meghatározott háromszög területét.

Megoldás. $f_1(x) = f_2(x) \Rightarrow 2x + 5 = 3x - 4 \Rightarrow x_1 = 9, y_1 = 23; A(9, 23)$.

$$f_2(x) = f_3(x) \Rightarrow 3x - 4 = -7x + 4 \Rightarrow x_2 = \frac{4}{5}, y_2 = -\frac{8}{5}; B\left(\frac{4}{5}, -\frac{8}{5}\right).$$

$$f_1(x) = f_3(x) \Rightarrow 2x + 5 = -7x + 4 \Rightarrow x_3 = -\frac{1}{9}, y_3 = \frac{43}{9}; C\left(-\frac{1}{9}, \frac{43}{9}\right).$$

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \frac{41\sqrt{10}}{5}; BC = \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2} = \frac{41\sqrt{2}}{9};$$

$$CA = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} = \frac{82\sqrt{5}}{9}.$$

A háromszög területét Héron képletével számítjuk ki

$$T = \sqrt{p(p - AB)(p - BC)(p - CA)} \text{ ahol } p = \frac{AB + BC + CA}{2}.$$

$$\text{Tehát } T = \frac{1681}{45}.$$

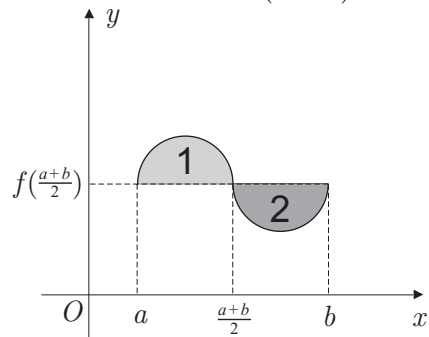
5. Bizonyítsd be, hogy ha az $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ grafikus képe szimmetrikus az $\left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$ pontra nézve, akkor a grafikus kép, az $x = a, x = b$ egyenletű egyenesek és az Ox tengely által meghatározott síkidom területe $(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

Bizonyítás. Ha f szimmetrikus az

$$\left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) \text{ pontra nézve, akkor}$$

$$f(x) = f(a+b-x) = 2f\left(\frac{a+b}{2}\right), \forall x \in [a, b]$$

az értelmezés alapján. Így az 1. és 2. síkidomok egybevágóak, tehát a vizsgált síkidom területe megegyezik az $ABCD$ téglalap területével.



Ez éppen $(b-a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, tehát a kért tulajdonságot igazoltuk.

6. Határozd meg az $m \in \mathbb{R}$ paraméter értékét úgy, hogy az $f_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_m(x) = mx^2 - (2m+1)x + 1$ függvény:

- a) grafikus képének csúcsa a $(4, -2)$ pontban legyen;
- b) grafikus képe érintse az $y = -2$ egyenletű egyenest;
- c) grafikus képe áthaladjon a $(-1, -2)$ ponton.

Megoldás. a)
$$\begin{cases} x_V = -\frac{b}{2a} = 4 \\ y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2m+1}{2m} = 4 \\ -\frac{4m^2+1}{4m} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset.$$

b) A grafikus kép csak a csúcspontban érintheti az $y = -2$ egyenest, azaz

$$-\frac{\Delta}{4a} = -2 \Rightarrow 4m^2 + 1 = 8m \Leftrightarrow 4m^2 - 8m + 1 = 0 \Rightarrow m \in \left\{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}.$$

c) $(-1, 2) \in \text{Gr } f_m \Leftrightarrow f_m(-1) = 2 \Leftrightarrow f_m(-1) = m + 2m + 1 + 1 = 2 \Rightarrow m = 0.$

7. Határozd meg az $m \in \mathbb{R}$ paraméter értékét úgy, hogy az $E(x) = \frac{x^2 + 2mx + 3m - 2}{x^2 + 2x + m}$ tört értelmezve legyen és legyen pozitív minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

Megoldás. Ahhoz, hogy a tört értelmezve legyen $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén, az $x^2 + 2x + m$ nem veheti fel a 0 értéket, azaz $\Delta_2 < 0 \Leftrightarrow m > 1$. Így kapjuk, hogy $x^2 + 2x + m > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén. Tehát $E(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 + 2mx + 3m - 2 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Azaz $\Delta_1 < 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 < 0$, $m_1 = 1$, $m_2 = 2 \Leftrightarrow m \in (1, 2)$. Tehát összegezve kapjuk, hogy $m \in (1, 2)$.

8. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + ax + 1}{x^2 - x + 1}$, $(a \in \mathbb{R})$ függvény. Határozzuk meg az $a \in \mathbb{R}$ paraméter értékét úgy, hogy teljesüljön az $\text{Im } f \subset [-3, 2]$ bennfoglalás.

Megoldás. $\text{Im } f \subset [-3, 2] \Leftrightarrow -3 \leq \frac{x^2 + ax + 1}{x^2 - x + 1} \leq 2$, azaz

$$\begin{cases} -4x^2 + (3-a)x - 4 \leq 0 \\ x^2 - (2+a)x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1 \leq 0 \\ \Delta_2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in [-5, 11] \\ a \in [-4, 0] \end{cases}.$$

Tehát $a \in [-4, 0]$.

9. Határozd meg az $m \in \mathbb{R}$ paraméter értékét úgy, hogy az $f_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_m(x) = (m+1)x^2 - 2mx + m$ függvény

a) grafikus képe érintse az Ox tengelyt;

b) grafikus képének csúcsa az Ox tengely alatt helyezkedjen el;

c) grafikus képe szimmetrikus legyen az $x = 1/2$ egyenletű egyenesre.

Megoldás. **a)** Ahhoz, hogy a grafikus kép az Ox tengelyt érintse $\Delta = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow -4m = 0 \Leftrightarrow m = 0$.

b) A grafikus kép Ox alatt helyezkedik el, ha

$$\begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 < 0 \\ -4m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset.$$

c) A grafikus kép az $x = \frac{1}{2}$ egyenes szimmetrikusa $\Leftrightarrow x_V = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}$, azaz $\frac{m}{m+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow m = 1$.

10. Határozd meg az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ függvény grafikus képéhez az $(x_0, f(x_0))$ pontban húzott érintő egyenletét.

Megoldás. Legyen $y = dx + e$ a keresett érintő. Ebben az esetben az

$$\begin{cases} y = dx + e \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases} \text{ egyenletrendszernek egy megoldása van, ami épp az } (x_0, f(x_0)).$$

Az előbbi egyenletrendszerből következik, hogy az $ax^2 + (b-d)x + c-e = 0$ egyenletnek az egyetlen megoldása az x_0 , tehát $\Delta = 0$ és $\frac{d-b}{2a} = x_0$, azaz

$$\begin{cases} (b-d)^2 - 4ac + 4ae = 0 \\ d-b = 2ax_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2ax_0 + b \\ e = c - ax_0^2 \end{cases}.$$

Tehát $y = (2ax_0 + b)x + c - ax_0^2$ az $(x_0, f(x_0))$ pontban húzott érintő egyenlete.

11. Határozd meg az $f_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_m(x) = mx^2 - (m+1)x + 1$ ($m \in \mathbb{R}$) parabolasalád csúcspontjainak mértani helyét. Bizonyítsd be, hogy az előbbi család minden eleme áthalad egy rögzített ponton (a grafikus képek metszete nem üres halmaz).

Megoldás.
$$\begin{cases} x_V = \frac{m+1}{2m} \\ y_V = -\frac{(m-1)^2}{4m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2x_V - 1} \\ y_V = -\frac{4(1-x_V)^2}{4(2x_V - 1)} \end{cases}.$$

$$\text{Tehát } y_V = -\frac{x_V^2 - 2x_V + 1}{2x_V - 1} = -\frac{1}{2}x_V + \frac{3}{4} - \frac{1}{4(2x_V - 1)}.$$

A fixpont meghatározása: $mx^2 - (m+1)x + 1 = y$. Innen $m(x^2 - x) - x + 1 - y = 0$,

$$\text{ahonnan } \begin{cases} x^2 - x = 0 \\ -x + 1 - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \vee x = 1 \\ y = 1 \vee y = 0 \end{cases}. \text{ Tehát a fixpontok } (0, 1) \text{ és } (1, 0).$$

12. Határozd meg az $m \in \mathbb{R}$ paraméter értékét úgy, hogy az $mx^2 + (2m-1)x + m = 0$ egyenlet gyökeire teljesüljenek az alábbi összefüggések:

a) $x_1 < 1 < x_2 < 2$; **b)** $1 < x_1 < x_2 < 2$; **c)** $x_1 < 1 < x_2$; **d)** $x_1 \leq 1 \leq x_2 \leq 2$.

Megoldás. Az $y = \frac{x-1}{x-2}$ helyettesítést használjuk, azaz $x = \frac{2y-1}{y-1}$.

$$mx^2 + (2m-1)x + m = 0 \Leftrightarrow (9m-2)y^2 - (12m-3)y + 3m-1 = 0.$$

$$\Delta = (6m-1)^2 \Rightarrow y_{1,2} = \frac{12m-3 \pm (6m-1)}{2(9m-2)}. \text{ Tehát } y_1 = \frac{3m-1}{9m-2}, y_2 = 1.$$

$$\text{a) } x_1 < 1 < x_2 < 2 \Leftrightarrow y_1 < 0, y_2 > 0. y_1 = \frac{3m-1}{9m-2} < 0 \Leftrightarrow m \in \left(\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right).$$

$$\text{b) } 1 < x_1 < x_2 < 2 \Leftrightarrow y_1 < 0, y_2 < 0. y_2 = 1 > 0 \Rightarrow M = \emptyset.$$

$$\text{c) } x_1 < 1 < 2 < x_2 \Leftrightarrow y_1 > 0, y_2 > 0. y_1 = \frac{3m-1}{9m-2} > 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R} \setminus \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right].$$

$$\text{d) } x_1 \leq 1 \leq x_2 \leq 2 \Leftrightarrow y_1 \leq 0, y_2 \geq 0. y_1 = \frac{3m-1}{9m-2} \leq 0 \Leftrightarrow m \in \left(\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right].$$

13. Igaz-e az alábbi kijelentés:

Az $x^2 + bx + c = 0$ egyenlet gyökei pontosan akkor vannak a $(-1, 1)$ intervallumban, ha $1 + b + c > 0$, $1 - b + c > 0$ és $|c| < 1$.

Megoldás. Az $y = \frac{x+1}{x-1}$ helyettesítést használva, $x = \frac{y+1}{y-1}$.

$$x^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow (1+b+c)y^2 + 2(1-c)y + 1-b+c = 0.$$

$$x_1, x_2 \in (-1, 1) \Leftrightarrow y_1, y_2 < 0 \Leftrightarrow s < 0 \text{ és } p > 0.$$

$$\begin{cases} s = -\frac{2(1-c)}{1+b+c} < 0 \\ p = \frac{1-b+c}{1+b+c} > 0 \end{cases}. \text{ A megadott feltételek kielégítik az egyenlőtlenség-rendszert.}$$

V.14.1. Gyakorlatok (132. oldal)

1. Számítsd ki a $g \circ f$ és $f \circ g$ függvényeket az alábbi $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények esetén:

a) $f(x) = 3x - 7$, $g(x) = 2 - 5x$; **b)** $f(x) = 7x + 2$, $g(x) = x^2 + x$;

c) $f(x) = x^2 + 2x - 3$, $g(x) = x^2 - 4x + 7$;

d) $f(x) = x^2 - 7x + 4$, $g(x) = x^2 - 3x + 1$;

e) $f(x) = x^3$, $g(x) = 2x^2 - 3x - 1$; **f)** $f(x) = x^5$, $g(x) = ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$);

g) $f(x) = \begin{cases} 2x, & x > 1 \\ x - 2, & x \leq 1 \end{cases}$, $g(x) = \frac{x}{2}$;

h) $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 0 \\ 3x, & x > 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 0 \\ x - 1, & x > 0 \end{cases}$;

i) $f(x) = \begin{cases} 1 - 2x, & x \leq 2 \\ -x^2 + 1, & x > 2 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 0 \\ 3x + 1, & x > 0 \end{cases}$.

Megoldás. a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3g(x) - 7 = 3(2 - 5x) - 7 = -15x - 1$.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2 - 5f(x) = 2 - 5(3x - 7) = -15x + 37.$$

b) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 7g(x) + 2 = 7(x^2 + x) + 2 = 7x^2 + 7x + 2$.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 + f(x) = (7x + 2)^2 + 7x + 2 = 49x^2 + 35x + 6.$$

c) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 + 2g(x) - 3 = (x^2 - 4x + 7)^2 + 2(x^2 - 4x + 7) - 3 =$
 $= x^4 - 8x^3 + 25x^2 - 36x + 60.$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 - 4f(x) + 7 = (x^2 + 2x - 3)^2 - 4(x^2 + 2x - 3) + 7 =$$

 $= x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 20x + 28.$

d) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 - 7g(x) + 4 = (x^2 - 3x + 1)^2 - 7(x^2 - 3x + 1) + 4 =$
 $= x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 15x - 2.$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 - 3f(x) + 1 = (x^2 - 7x + 4)^2 - 3(x^2 - 7x + 4) + 1 =$$

 $= x^4 - 14x^3 + 54x^2 - 35x + 5.$

e) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^3 = (2x^2 - 3x - 1)^3 = 8x^6 - 36x^5 + 42x^4 + 9x^3 -$
 $- 21x^2 - 9x - 1.$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2(f(x))^2 - 3f(x) - 1 = 2x^6 - 3x^3 - 1.$$

f) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^5 = (ax + b)^5 = a^5x^5 + 5a^4bx^4 + 10a^3b^2x^3 +$
 $+ 10a^2b^3x^2 + 5ab^4x + b^5.$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = af(x) + b = ax^5 + b.$$

$$\mathbf{g)} \quad (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} 2g(x), & g(x) > 1 \\ g(x) - 2, & g(x) \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} x, & x > 2 \\ \frac{x}{2} - 2, & x \leq 2 \end{cases}.$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{f(x)}{2} = \begin{cases} x, & x > 1 \\ \frac{x-2}{2}, & x \leq 1 \end{cases}.$$

$$\mathbf{h)} \quad (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} 2g(x), & g(x) \leq 0 \\ 3g(x), & g(x) > 0 \end{cases}.$$

1. eset. $g(x) \leq 0$

$$1.1. \text{ eset. } x \leq 0: x^2 - 1 \leq 0 \Rightarrow x \in [-1, 1] \cap (-\infty, 0] = [-1, 0];$$

$$1.2. \text{ eset. } x > 0: x - 1 \leq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 1] \cap (0, +\infty) = (0, 1];$$

2. eset. $g(x) > 0$

$$2.1. \text{ eset. } x \leq 0: x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x \in (\mathbb{R} \setminus [-1, 1]) \cap (-\infty, 0] = (-\infty, -1);$$

$$2.2. \text{ eset. } x > 0: x - 1 > 0 \Rightarrow x \in (1, +\infty) \cap (0, +\infty) = (1, +\infty).$$

$$\text{Tehát } (f \circ g)(x) = \begin{cases} 3x^2 - 3, & x \in (-\infty, -1) \\ 2x^2 - 2, & x \in [-1, 0] \\ 2x - 2, & x \in (0, 1] \\ 3x - 3, & x \in (1, +\infty) \end{cases}.$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \begin{cases} (f(x))^2 - 1, & x \leq 0 \\ f(x) - 1, & x > 0 \end{cases}.$$

1. eset. $f(x) \leq 0$

$$1.1. \text{ eset. } x \leq 0: 2x \leq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0] \cap (-\infty, 0] \Rightarrow x \in (-\infty, 0];$$

$$1.2. \text{ eset. } x > 0: 3x \leq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0] \cap (0, +\infty) \Rightarrow x \in \emptyset;$$

2. eset. $f(x) > 0$

$$2.1. \text{ eset. } x \leq 0: 2x > 0 \Rightarrow x \in (0, +\infty) \cap (-\infty, 0] \Rightarrow x \in \emptyset;$$

$$2.2. \text{ eset. } x > 0: 3x > 0 \Rightarrow x \in (0, +\infty) \cap (0, +\infty) \Rightarrow x \in (0, +\infty).$$

$$\text{Azaz } (g \circ f)(x) = \begin{cases} 4x^2 - 1, & x \leq 0 \\ 3x - 1, & x > 0 \end{cases}.$$

$$\mathbf{i)} \quad (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} 1 - 2g(x), & g(x) \leq 2 \\ -(g(x))^2 + 1, & g(x) > 2 \end{cases}.$$

1. eset. $g(x) \leq 2$

$$1.1. \text{ eset. } x \leq 0: x^2 + 1 \leq 2 \Rightarrow x \in [-1, 1] \cap (-\infty, 0] \Rightarrow x \in [-1, 0];$$

$$1.2. \text{ eset. } x > 0: 3x + 1 \leq 2 \Rightarrow x \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right] \cap (0, +\infty) \Rightarrow x \in \left(0, \frac{1}{3}\right];$$

2. eset. $g(x) > 2$

$$2.1. \text{ eset. } x \leq 0: x^2 + 1 > 2 \Rightarrow x \in (\mathbb{R} \setminus [-1, 1]) \cap (-\infty, 0] \Rightarrow x \in (-\infty, -1);$$

$$2.2. \text{ eset. } x > 0: 3x + 1 > 2 \Rightarrow x \in \left(\frac{1}{3}, +\infty\right) \cap (0, +\infty) = \left(\frac{1}{3}, +\infty\right).$$

$$\text{Tehát } (f \circ g)(x) = \begin{cases} -x^4 - 2x^2, & x < -1 \\ 2x^2 - 1, & -1 \leq x \leq 0 \\ -6x - 1, & 0 < x \leq \frac{1}{3} \\ 9x^2 - 6x, & x > \frac{1}{3} \end{cases}.$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \begin{cases} (f(x))^2 + 1, & f(x) \leq 0 \\ 3f(x) + 1, & f(x) > 0 \end{cases}.$$

1. eset. $f(x) \leq 0$

$$1.1. \text{ eset. } x \leq 2: 1 - 2x \leq 0 \Rightarrow x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right) \cap (-\infty, 2] \Rightarrow x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right];$$

$$1.2. \text{ eset. } x > 2: -x^2 + 1 \leq 0 \Rightarrow x \in (\mathbb{R} \setminus (-1, 1)) \cap (2, +\infty) \Rightarrow x \in (2, \infty);$$

2. eset. $f(x) > 0$

$$2.1. \text{ eset. } x \leq 2: 1 - 2x > 0 \Rightarrow x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cap (-\infty, 2] \Rightarrow x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right);$$

$$2.2. \text{ eset. } x > 2: -x^2 + 1 > 0 \Rightarrow x \in (-1, 1) \cap (2, +\infty) \Rightarrow x \in \emptyset.$$

$$\text{Azaz } (g \circ f)(x) = \begin{cases} -6x + 4, & x < \frac{1}{2} \\ 4x^2 - 4x + 2, & \frac{1}{2} \leq x \leq 2 \\ x^4 - 2x^2 + 2, & x > 2 \end{cases}.$$

2. Az alábbi $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények mindegyikére határozzunk meg két $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt úgy, hogy $h = f \circ g$ legyen.

a) $h(x) = -(x^2 + x + 1)^2 + 2(x^2 + x + 1) - 4$; **c)** $h(x) = (x^2 - 4x + 3)^5$;

b) $h(x) = -2(x - 2)^2 + 3|x - 2| + 1$; **d)** $h(x) = 2x^4 - 3x^2 + 1$.

Megoldás. a) $f(x) = -x^2 + 2x - 4$, $g(x) = x^2 + x + 1$.

b) $f(x) = -2x^2 + 3|x| + 1$, $g(x) = x - 2$.

c) $f(x) = x^5$, $g(x) = x^2 - 4x + 3$.

d) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, $g(x) = x^2$.

3. Igazoljuk, hogy az alábbi esetekben $g \circ f = f \circ g = 1_{\mathbb{R}}$, $(f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$:

a) $f(x) = 3x - 4$, $g(x) = \frac{x+4}{3}$; **b)** $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = \frac{x+1}{2}$;

Megoldás. a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3g(x) - 4 = 3 \frac{x+4}{3} - 4 = x, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$
 $\Rightarrow f \circ g = 1_{\mathbb{R}}.$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{f(x)+4}{3} = \frac{3x-4+4}{3} = x, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow g \circ f = 1_{\mathbb{R}}.$

Tehát $g \circ f = f \circ g = 1_{\mathbb{R}}.$

b) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2g(x) - 1 = \frac{x+1}{2} - 1 = x, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f \circ g = 1_{\mathbb{R}}.$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{f(x)+1}{2} = \frac{2x-1+1}{2} = x, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow g \circ f = 1_{\mathbb{R}}.$

Tehát $g \circ f = f \circ g = 1_{\mathbb{R}}.$

V.18. Gyakorlatok és feladatok (140. oldal)

1. Tanulmányozd az alábbi függvények injektivitását, szürjektivitását és monotonitását:

a) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(n) = 2n$; **b)** $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(n) = n^3 - n^2$;

c) $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, $f(x) = x^2$; **d)** $f : (-\infty, 0] \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = x^2$;

e) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$; **f)** $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$;

g) $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$; **h)** $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 2 \\ x^2-1, & x > 2 \end{cases}$;

i) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x-a| + |x-b|$, ahol $a < b$;

j) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x < 1 \\ 3x, & x \geq 1 \end{cases}$; **k)** $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax, & x < 0 \\ bx, & x \geq 0 \end{cases}$;

l) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{3x+2}{2}, & x < 0 \\ 3x+1, & x \geq 0 \end{cases}.$

Megoldás. a) f injektivitásának vizsgálása: $f(n) = f(m) \Leftrightarrow 2n = 2m \Leftrightarrow n = m$. Tehát f injektív. f nem szürjektív, mivel a függvény értéke nem veszi fel a páratlan számokat.

$$\frac{f(n) - f(m)}{n - m} = \frac{2(n - m)}{n - m} = 2 > 0 \Rightarrow f \text{ szigorúan növekvő.}$$

$$\text{b) } \frac{f(n) - f(m)}{n - m} = \frac{n^3 - n^2 - m^3 + m^2}{n - m} = n^2 + nm + m^2 - n - m \geq 0, \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Azaz f növekvő.

f nem injektív mivel $f(1) = f(0) = 0$. f nem szürjektív mivel a függvény nem vesz fel negatív értékeket.

$$\text{c) } \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_2 - x_1} = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} = x_1 + x_2 > 0, \forall x_1, x_2 \in [0, \infty) \Rightarrow f \text{ szigorúan növekvő, tehát } f \text{ injektív is.}$$

f szürjektív mivel $\forall y \in [0, +\infty) \exists x = \sqrt{y}$ úgy, hogy $f(x) = y$.

$$\text{d) } \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} = x_1 + x_2 < 0, \forall x_1, x_2 \in (-\infty, 0] \Rightarrow f \text{ szigorúan csökkenő, így } f \text{ injektív is.}$$

f szürjektív mivel $\forall y \in [0, +\infty) \exists x = -\sqrt{y}$ úgy, hogy $f(x) = y$.

$$\text{e) } \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} = x_1 + x_2 \Rightarrow f \text{ nem monoton.}$$

f nem injektív és nem szürjektív mert $f(1) = f(-1) = 1$ és $\nexists x \in \mathbb{R} \ f(x) = -1$.

$$\text{f) } \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{1 - x_1 x_2}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)} \Rightarrow f \text{ nem monoton.}$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_1^2 + 1} = \frac{x_2}{x_2^2 + 1} \Leftrightarrow (x_1 - x_2)(1 - x_1 x_2) = 0 \Rightarrow f \text{ nem injektív.}$$

f szürjektív ha $\forall y \in \mathbb{R} \exists x \in \mathbb{R} \ f(x) = y$. $\frac{x}{x^2 + 1} = y \Rightarrow yx^2 - x - y = 0$. Ha

létezik y úgy, hogy $\Delta < 0$, akkor f nem szürjektív. $\Delta = 1 - 4y^2$, $\Delta < 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y \in \mathbb{R} \setminus \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \Rightarrow f \text{ nem szürjektív.}$$

$$\text{g) } \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{-2}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)} < 0, \forall x_1, x_2 \in (-1, 1) \Rightarrow f \text{ szigorúan csökkenő, tehát } f \text{ injektív is.}$$

f szürjektív ha, $\forall y \in \mathbb{R} \exists x \in (-1, 1) f(x) = y \cdot \frac{x+1}{x-1} = y \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{y-1}$. Ha $y = 2 \Rightarrow x = 3$, de $3 \notin (-1, 1) \Rightarrow f$ nem szürjektív.

h) $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{x_1 + 1 - x_2 - 1}{x_1 - x_2} = 1 > 0 \Rightarrow f$ szigorúan növekvő $(-\infty, 2]$ -n.

$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{x_1^2 - 1 - x_2^2 + 1}{x_1 - x_2} = x_1 + x_2 > 0, \forall x_1, x_2 \in (2, \infty) \Rightarrow f$ szigorúan növekvő az $\mathbb{R}$ -en.

$f(2) = 3, f(2) = 3 \Rightarrow f$ injektív.

f szürjektív mivel $\forall y \leq 3 \exists x = y - 1: f(x) = y$;

$\forall y > 3 \exists x = \sqrt{y+1}: f(x) = y$.

i)

x		a		b	
$x - a$	-	0	+	+	+
$x - b$	-	-	-	0	+

$$f(x) = \begin{cases} -2x + a + b & x \leq a \\ b - a & a < x \leq b \\ 2x - b & x > b \end{cases}$$

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{-2x_1 + a + b + 2x_2 - a - b}{x_1 - x_2} = -2 < 0 \quad \forall x_1, x_2 \in (-\infty, a];$$

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{2x_1 - a - b - 2x_2 + a + b}{x_1 - x_2} = 2 > 0 \quad \forall x_1, x_2 \in (b, +\infty).$$

Tehát f nem monoton.

f nem injektív mert $\forall x \in [a, b] f(x) = b - a$.

f nem szürjektív mivel a függvény $b - a$ -nál kisebb értékeket nem vesz fel:

$-2x + a + b \geq b - a$ ha $x \leq a$; $2x - a - b > b - a$ ha $x > b$.

j) f szigorúan növekvő mind a két intervallumon. $f(1) = 1, f(1) = 3 \Rightarrow f$ szigorúan növekvő az $\mathbb{R}$ -en. Tehát f injektív.

f nem szürjektív mivel a függvény nem veszi fel az $[1, 3]$ értékeket ($2x - 1 < 1$ ha $x < 1$ és $3x \geq 3$ ha $x \geq 1$).

k) 1. eset. $a = b: f(x) = ax$

1.1. eset. $a < 0: f(x) = ax$ szigorúan csökkenő, injektív és szürjektív;

1.2. eset. $a = 0: f(x) = 0$ állandó függvény, nem injektív, nem szürjektív;

1.3. eset. $a > 0: f(x) = ax$ szigorúan növekvő, injektív és szürjektív;

2. eset. $a < b$

2.1. eset. $b < 0: f$ szigorúan csökkenő, injektív, szürjektív

$$\forall y < 0 \quad \exists x = \frac{y}{b} : f(x) = y, \quad \forall y > 0 \quad \exists x = \frac{y}{a} : f(x) = y.$$

2.2. eset. $b = 0$: f csökkenő, nem injektív, nem szürjektív

$$f(1) = f(2) = 0; \quad f(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

2.3. eset. $a < 0 < b$: f nem monoton, nem injektív, nem szürjektív

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow ax_1 = bx_2 \text{ ha } x_1 < 0, \quad x_2 > 0;$$

$$\Leftrightarrow ax_1 - bx_2 = 0 \Rightarrow x_1 = by, \quad x_2 = ay, \text{ ahol } y < 0;$$

$$f(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \text{ tehát negatív értékeket nem vesz fel a függvény képe.}$$

2.4. eset. $a = 0$: f növekvő függvény, nem injektív és nem szürjektív

$$f(-1) = f(-2) = 0; \quad f(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

2.5. eset. $a > 0$: f szigorúan növekvő, injektív, szürjektív

$$\forall y > 0 \quad \exists x = \frac{y}{b} : f(x) = y, \quad \forall y < 0 \quad \exists x = \frac{y}{a} : f(x) = y.$$

Ha $b < a$ hasonlóan tárgyaljuk mint a 2. esetet.

1) f szigorúan növekvő, injektív, szürjektív

$$\forall y < 1 \quad \exists x = \frac{2y-2}{3} : f(x) = y, \quad \forall y \geq 1 \quad \exists x = \frac{y-1}{3} : f(x) = y.$$

2. Ábrázold a következő ponthalmazokat:

a) $H_1 = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1\};$

b) $H_2 = \{(x, y) \mid \max\{|x|, |y|\} \leq 1\}.$

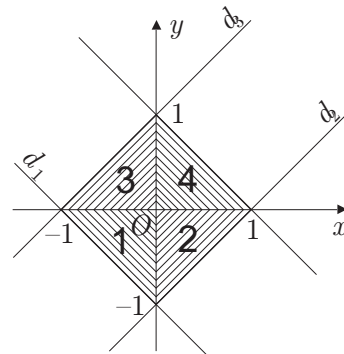
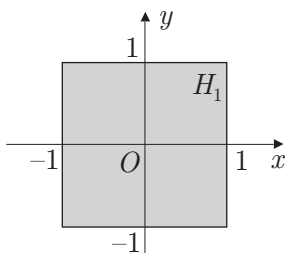
Megoldás. a)

1. eset. $x < 0, y < 0$: $-x - 1 \leq y$;

2. eset. $x > 0, y < 0$: $x - 1 \leq y$;

3. eset. $x < 0, y > 0$: $x + 1 \geq y$;

4. eset. $x > 0, y > 0$: $1 - x \geq y$.



b) 1. eset. $|x| \leq |y| \leq 1 \Rightarrow x, y \in [-1, 1];$

2. eset. $|y| \leq |x| \leq 1 \Rightarrow x, y \in [-1, 1].$

3. Ha E egy halmaz és $A \subset E$, akkor értelmezzük az $f_A : E \rightarrow \{0, 1\}$,

$$f_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases} \text{ függvényt. Ezt a függvényt az } A \text{ halmaz karakterisztikus függvé-}$$

nyének nevezzük. Bizonyítsd be, hogy $\forall A, B, C \subset E$ esetén:

- a) $A = B \Leftrightarrow f_A = f_B$; b) $f_{A \cap B} = f_A \cdot f_B$;
 c) $f_{C_E A} = 1 - f_A$; d) $f_{A \setminus B} = f_A \cdot (1 - f_B)$;
 e) $f_{A \cup B} = f_A + f_B - f_A \cdot f_B$; f) $f_{A \Delta B} = f_A + f_B - 2f_A \cdot f_B$.

Bizonyítás. a) „ $\Rightarrow$ ” nyilvánvaló.

„ $\Leftarrow$ ” $f_A = f_B \Rightarrow f_A(x) = f_B(x), \forall x \in E$.

Ha $f_A(x) = f_B(x) = 1 \Rightarrow x \in A$ és $x \in B$;

$f_A(x) = f_B(x) = 0 \Rightarrow x \notin A$ és $x \notin B$.

b) $f_{A \cap B}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in A \text{ és } x \in B \\ 0, & \text{különben} \end{cases} \cdot (f_A \cdot f_B)(x) = f_A(x) \cdot f_B(x) = 1 \Leftrightarrow f_A(x) = 1$

és $f_B(x) = 1$ azaz $x \in A$ és $x \in B \Leftrightarrow x \in A \cap B$.

c) $f_{C_E A}(x) = \begin{cases} 1, & x \notin A \\ 0, & x \in A \end{cases} \cdot (1 - f_A)(x) = 1 - f_A(x) \Leftrightarrow f_A(x) = 0 \Leftrightarrow x \notin A$.

d) $f_{A \setminus B}(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \text{ és } x \notin B \\ 0, & \text{különben} \end{cases} \cdot (f_A \cdot (1 - f_B))(x) = f_A(x)(1 - f_B(x)) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f_A(x) = 1$ és $(1 - f_B(x)) = 1 \Leftrightarrow f_A(x) = 1$ és $f_B(x) = 0 \Leftrightarrow x \in A$ és $x \notin B$
 $\Leftrightarrow x \in A \setminus B$.

e) $f_{A \cup B}(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \text{ vagy } x \in B \\ 0, & \text{különben} \end{cases} \cdot (f_A + f_B - f_A \cdot f_B)(x) = f_A(x) + f_B(x) - f_A(x)f_B(x) = 1 \Leftrightarrow f_A(x) = 1 \text{ és } f_B(x) = 0,$

vagy $f_B(x) = 1$ és $f_A(x) = 0$, vagy $f_A(x) = 1$ és $f_B(x) = 1 \Leftrightarrow (x \in A \text{ és } x \notin B)$

vagy $(x \in B \text{ és } x \notin A)$ vagy $(x \in A \text{ és } x \in B) \Leftrightarrow x \in A \cup B$.

f) $f_{A \Delta B} = f_{(A \setminus B) \cup (B \setminus A)} \stackrel{\text{e)}}{=} f_{A \setminus B} + f_{B \setminus A} - f_{A \setminus B} f_{B \setminus A} \stackrel{\text{d)}}{=} f_A(1 - f_B) + f_B(1 - f_A) -$
 $- f_A(1 - f_B)f_B(1 - f_A) = f_A - f_B f_A + f_B - f_B f_A = f_A + f_B - 2f_A f_B$ mivel f_A vagy $1 - f_A$
 nulla lesz.

4. Bizonyítsd be, hogy ha $A, B, C \subset E$, akkor

a) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$; b) $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.

Bizonyítás. a) $f_{(A \setminus B) \cup (B \setminus A)} = f_{A \setminus B} + f_{B \setminus A} - f_{A \setminus B} \cdot f_{B \setminus A} = f_A(1 - f_B) + f_B(1 - f_A) -$
 $- f_A(1 - f_B)f_B(1 - f_A) = f_A + f_B - 2f_A f_B$ mert $f_A(1 - f_A) = 0$.

Másrészt $f_{(A \cup B) \setminus (A \cap B)} = f_A - f_A^2 f_B + f_B - f_A f_B^2 - f_A f_B + f_A^2 f_B^2 = f_A + f_B - 2f_A f_B$, mert

$f_A^2 = f_A$ és $f_B^2 = f_B$. Az előbbieket alapján $f_{(A \setminus B) \cup (B \setminus A)} = f_{(A \cup B) \setminus (A \cap B)}$, tehát

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

b) $f_{(A \Delta B) \Delta C} = f_{(A \Delta B)} + f_C - 2f_{A \Delta B} f_C = f_A + f_B + f_C - 2f_A f_B - 2f_A f_C - 2f_B f_C + 4f_A f_B f_C$.

Hasonló módon $f_{A \Delta (B \Delta C)} = f_A + f_{B \Delta C} - 2f_A f_{B \Delta C} = f_A + f_B + f_C - 2f_A f_B - 2f_A f_C - 2f_B f_C + 4f_A f_B f_C$, tehát $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.

5. Az előbbi tulajdonságok alapján az $A_1, A_2, \dots, A_n$ halmazok karakterisztikus függvénye segítségével fejezd ki a következő halmazok karakterisztikus függvényét:

a) $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$; **b)** $A_1 \Delta A_2 \Delta \dots \Delta A_n$.

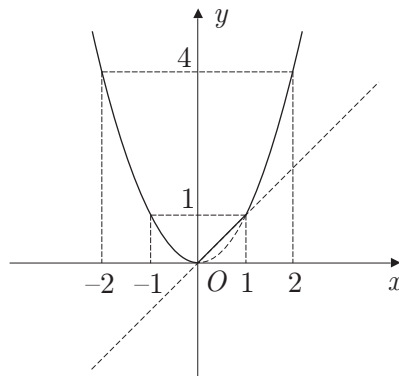
Megoldás. a) $f_{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n} = f_{A_1 \cup (A_2 \cup \dots \cup A_n)} \stackrel{3. e)}{=} f_{A_1} + f_{A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n} - f_{A_1} f_{A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n} =$
 $f_{A_1} + f_{A_2 \cup (A_3 \cup \dots \cup A_n)} - f_{A_1} f_{A_2 \cup (A_3 \cup \dots \cup A_n)} = f_{A_1} + f_{A_2} + f_{A_3 \cup \dots \cup A_n} - f_{A_1} f_{A_3 \cup \dots \cup A_n} - f_{A_1} f_{A_2} + f_{A_1} f_{A_3 \cup \dots \cup A_n} +$
 $+ f_{A_1} f_{A_2} f_{A_3 \cup \dots \cup A_n} = \dots = f_{A_1} + f_{A_2} + \dots + f_{A_n} - \sum_{1 \leq i < j \leq n} f_{A_i} f_{A_j} + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} f_{A_i} f_{A_j} f_{A_k} + \dots +$
 $+ (-1)^{n-1} f_{A_1} f_{A_2} \dots f_{A_n}.$

b) $f_{A_1 \Delta A_2 \Delta \dots \Delta A_n} = f_{A_1 \Delta (A_2 \Delta \dots \Delta A_n)} = f_{A_1} + f_{A_2 \Delta \dots \Delta A_n} - 2f_{A_1} f_{A_2 \Delta \dots \Delta A_n} =$
 $f_{A_1} + f_{A_2 \Delta (A_3 \Delta \dots \Delta A_n)} - 2f_{A_1} f_{A_2 \Delta (A_3 \Delta \dots \Delta A_n)} = f_{A_1} + f_{A_2} - 2f_{A_1} f_{A_3 \Delta \dots \Delta A_n} - 2f_{A_1} f_{A_2} - 2f_{A_1} f_{A_3 \Delta \dots \Delta A_n} +$
 $+ 4f_{A_1} f_{A_2} f_{A_3 \Delta \dots \Delta A_n} = \dots = f_{A_1} + f_{A_2} + \dots + f_{A_n} - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} f_{A_i} f_{A_j} + 4 \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} f_{A_i} f_{A_j} f_{A_k} +$
 $+ \dots + (-2)^{n-1} f_{A_1} f_{A_2} \dots f_{A_n}.$

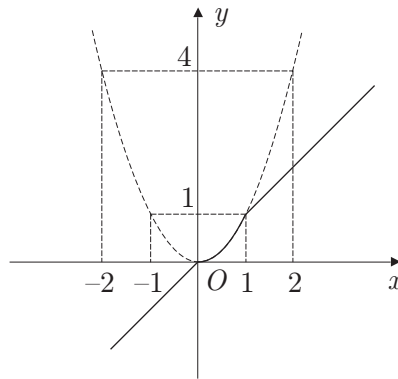
6. Ábrázold a következő függvényeket:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \max\{x, x^2\}$; **b)** $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \min\{x, x^2\}$.

Megoldás. a) Ha $\max\{x, x^2\} = x$, akkor $x \geq x^2 \Leftrightarrow x^2 - x \leq 0 \quad x \in [0, 1]$. Más esetben $\max\{x, x^2\} = x^2$.



b) $x = \min\{x, x^2\}$, ha $x \in \mathbb{R} \setminus [0, 1]$; $x^2 = \min\{x, x^2\}$, ha $x \in [0, 1]$.



7. Az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + 8$ függvényre határozd meg a következő halmazokat:

a) $f([0, 2])$; **b)** $f([4, 5])$; **c)** $f([1, 5])$; **d)** $f([1, +\infty))$; **e)** $f((-\infty, 4])$.

Megoldás. Az f függvény minimumának koordinátái $x = -\frac{b}{2a}$, $y = -\frac{\Delta}{4a}$, $V(3, -1)$.

a) $3 \notin [0, 2]$, $f(0) = 8$, $f(2) = 0 \Rightarrow f([0, 2]) = [0, 8]$.

b) $3 \notin [4, 5]$, $f(4) = 0$, $f(5) = 3 \Rightarrow f([4, 5]) = [0, 3]$.

c) $3 \in [-1, 5] \Rightarrow$ a minimum $f(3)$, $f(1) = 3$, $f(5) = 3 \Rightarrow f([-1, 5]) = [-1, 3]$.

d) $3 \in [1, +\infty) \Rightarrow f(3)$ a minimum. $f(\infty) = \infty$. Tehát $f([1, +\infty)) = [-1, +\infty)$.

e) $3 \in (-\infty, 4) \Rightarrow$ a minimum $f(3) = -1$. $f(-\infty) = \infty \Rightarrow f((-\infty, 4)) = [-1, \infty)$.

8. Határozd meg az $m \in \mathbb{R}$ paraméter értékét úgy, hogy teljesüljön az $x^2 + 4y^2 - 2x - 4y + m > 0$ egyenlőtlenség $\forall x, y \in \mathbb{R}$ esetén.

Megoldás. $4y^2 - 4y + x^2 - 2x + m > 0$, $\Delta_y < 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x - m + 1 < 0 \Leftrightarrow \Delta_x < 0 \Leftrightarrow 2 - m < 0 \Leftrightarrow m > 2$. Tehát ha $m > 2$, akkor fennáll az egyenlőtlenség.

9. Tekintsük az $f_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_m(x) = x^2 + 2mx + m$ függvénycsalád grafikus képeit.

Milyen m értékekre van a parabola csúcsa az első negyedben? Vezess le egy m -től független összefüggést a csúcs két koordinátája között.

Megoldás. A parabola csúcsa az első negyedben van $\Leftrightarrow x_{V_m} > 0$, $y_{V_m} > 0$.

$x_{V_m} = -\frac{b}{2a}$, $y_{V_m} = -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow V_m(-m, -m^2 + m)$ az első negyedben legyen ahhoz

$x_{V_m} \geq 0$ és $y_{V_m} \geq 0$, azaz

$$\begin{cases} -m \geq 0 \\ -m^2 + m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m(1-m) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m \in [0, 1] \end{cases} \Leftrightarrow m = 0.$$

$x_{V_m} = -m \Rightarrow m = -x_{V_m}$. Így $y_{V_m} = -x_{V_m}^2 - x_{V_m}$ egy m -től független összefüggés a csúcs két koordinátája között.

10. Tekintsük az $f_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_m(x) = (m+1)x^2 + 2mx + m$ függvényekhez rendelt parabolacsaládot. ($m \in \mathbb{R}$, $m \neq -1$).

a) Bizonyítsd be, hogy a parabolák csúcsa az $x + y = 0$ egyenletű egyenesen van.

b) Milyen m esetén vannak a csúcsok az Oy tengelytől balra?

Megoldás. a) A csúcsok koordinátái: $x_{V_m} = -\frac{b}{2a}$, $x_{V_m} = -\frac{m}{m+1}$; $y_{V_m} = -\frac{\Delta}{4a}$, $y_{V_m} = \frac{m}{m+1}$. Innen következik, hogy $x_{V_m} + y_{V_m} = 0$. Tehát a parabolák csúcsai az $x + y = 0$ egyenesen vannak.

b) Oy tengelytől balra vannak a parabolák csúcsai, ha $x_{V_m} < 0$, azaz $-\frac{m}{m+1} < 0$.

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$-m$	+	0	-	-
$m+1$	-	-	-	0
$-\frac{m}{m+1}$	-		+	0

Tehát $m \in \mathbb{R} \setminus [-1, 0]$.

11. Bizonyítsd be, hogy az $f_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_m(x) = x^2 - 2mx + m$ parabolák csúcsa egy parabolán van és, hogy $m \in \mathbb{R}$ esetén az előbbi parabolák metszete nem üres (azaz, a parabolacsaládnak van egy fixpontja). Mi a csúcsok mértani helye?

Bizonyítás. A parabolák csúcsainak koordinátái: $x_{V_m} = m$, $y_{V_m} = -m^2 + m$.

$$y_{V_m} = -x_{V_m}^2 + x_{V_m}$$

$-x^2 + x$ egy parabola egyenlete. Tehát a parabolák csúcsai parabolán találhatók.

A csúcsok mértani helye az $f(x) = -x^2 + x$ parabola.

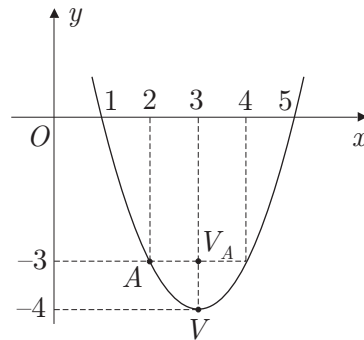
A parabolacsalád fixpontjának kimutatása: $f_m(x) = y \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m = y \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow m(1-2x) + x^2 - y = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1-2x = 0 \\ x^2 - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}. \text{ Tehát } A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \text{ fixpont-}$$

ja a parabolacsaládnak.

12. Legyen S az $y = x^2 - 6x + 5$ egyenletű parabola és az Ox tengely által meghatározott síkrész területe. Bizonyítsd be, hogy $10 < S < 12$.

Bizonyítás. Először meghatározzuk a parabola és az Ox tengely metszéspontjait: $x_1 = 1$, $x_2 = 5$. A parabola csúcspontjának koordinátája $x_V = 3$, $y_V = -4$. $f(2) = -3$, $f(4) = -3$.



$$S > 2(T_{x_1 x_2 A} + T_{x_2 x_2 V_A} + T_{V_A V A}) = 2\left(\frac{3}{2} + 3 + \frac{1}{2}\right) = 10$$

$\Rightarrow S > 10$. Az $[1, 5]$ intervallumot 16 egyenlő részre osztjuk és megszerkesztjük azon téglalapokat, amelyek lefedik az S területét.

$$f\left(\frac{5}{4}\right) = -\frac{15}{64}, \quad f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{7}{4}, \quad f\left(\frac{7}{4}\right) = -\frac{39}{64},$$

$$f\left(\frac{9}{4}\right) = -\frac{55}{64}, \quad f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{15}{4}, \quad f\left(\frac{11}{4}\right) = -\frac{63}{64}.$$

$$S < 2 \cdot \frac{1}{4} \left(f\left(\frac{5}{4}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{7}{4}\right) + f(2) + f\left(\frac{9}{4}\right) + f\left(\frac{5}{2}\right) + f\left(\frac{11}{4}\right) + f(3) \right) < 12.$$

13. Határozd meg az $m \in \mathbb{R}$ paraméter értékét úgy, hogy

a) $(m-1)x^2 + mx + m + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$; **b)** $mx^2 + 2(m+1)x + m < 0, \forall x > 0$;

Megoldás. a) A következő feltételek kell teljesüljenek:

$$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 > 0 \\ -3m^2 + 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m^2 < \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow m \in \left(\frac{4}{3}, +\infty\right).$$

$$\text{b)} \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ 2m+1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m < -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow m \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right).$$

14. Határozd meg az $m \in \mathbb{R}$ paraméter értékét úgy, hogy az

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + mx - 4 = 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x - 2m = 0\}$$

halmaznak pontosan két eleme legyen.

Megoldás. Ahhoz, hogy A -nak 2 eleme legyen, a gyökök mindkét egyenlet esetében meg kell egyezzenek vagy mind a két másodfokú kifejezés teljes négyzet kell legyen.

1. eset. Azonos gyökök.

$$\begin{aligned} x^2 + mx - 4 &= 0 \\ x_{1,2} &= \frac{-m \pm \sqrt{m^2 + 16}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 2m &= 0 \\ x_{3,4} &= -1 \pm \sqrt{2m+1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -m - \sqrt{m^2 + 16} = -2 - 2\sqrt{2m + 1} \\ -m + \sqrt{m^2 + 16} = -2 + 2\sqrt{2m + 1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -m + 2 = \sqrt{m^2 + 16} - 2\sqrt{2m + 1} \\ -m + 2 = -\sqrt{m^2 + 16} + 2\sqrt{2m + 1} \end{cases} \Rightarrow -2m + 4 = 0 \Rightarrow m = 2.$$

2. eset. Teljes négyzetek. $x^2 + mx - 4 = 0$ $\Delta = 0 \Leftrightarrow m^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow m \in \emptyset$.

Tehát az egyedüli megoldás az $m = 2$.

15. Határozd meg az $m \in \mathbb{R}$ paraméter értékét úgy, hogy az

$$\{x \in \mathbb{R} \mid (m-1)x^2 - 2(m+1)x + m = 0\} \cap [-1, 1]$$

halmaznak pontosan egy eleme legyen.

Megoldás. Az egyenlet gyökei: $x_{1,2} = \frac{m+1 \pm \sqrt{3m+1}}{m-1}$.

$$\mathbf{1. \text{ eset. }} \begin{cases} -1 \leq \frac{m+1 - \sqrt{3m+1}}{m-1} \leq 1 \\ \frac{m+1 + \sqrt{3m+1}}{m-1} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 3m - 1 \geq 0 \\ 1 \leq m \\ 1 < m \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \in \mathbb{R} \setminus \left(-\frac{1}{2}, 1\right) \\ 1 < m \end{cases} \Rightarrow m \in (1, +\infty).$$

$$\mathbf{2. \text{ eset. }} \begin{cases} -1 \leq \frac{m+1 + \sqrt{3m+1}}{m-1} \leq 1 \\ \frac{m+1 - \sqrt{3m+1}}{m-1} < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 3m - 1 \leq 0 \\ m \leq 1 \\ 4m^2 - 3m - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right) \\ m \in (-\infty, 1] \end{cases} \Rightarrow m \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right).$$

Tehát $m \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right) \setminus \{1\}$.

16. Határozd meg az $m \in \mathbb{R}$ paraméter értékét úgy, hogy az

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2mx + 4m + 5 = 0\} \cap [5, 7] \text{ halmaz}$$

a) üres halmaz legyen; **b)** ne legyen üres halmaz; **c)** két elemű legyen.

Megoldás. a) 1. eset. $x_{1,2} < 5$: $m + \sqrt{m^2 - 4m - 5} < 5 \Rightarrow m < 5$.

2. eset. $x_1 < 5$, $x_2 > 7$: $m - \sqrt{m^2 - 4m - 5} < 5 \Rightarrow m < 5$;

$$m + \sqrt{m^2 - 4m - 5} > 7 \Rightarrow m > 5,4 \Rightarrow m \in \emptyset.$$

3. eset. $x_{1,2} > 7 : m - \sqrt{m^2 - 4m - 5} > 7 \Rightarrow m > 5,4$. Tehát $m \in \mathbb{R} \setminus [5; 5,4]$.

b) $m \in [5; 5,4]$.

$$\text{c) } \begin{cases} m - \sqrt{m^2 - 4m - 5} > 5 \\ m + \sqrt{m^2 - 4m - 5} < 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 5 \\ m < 5,4 \end{cases} \Rightarrow m \in [5; 5,4].$$

17. Tanulmányozd az $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ n(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}), & n > 0 \end{cases}$ függvényt

injektivitását.

Megoldás. $f(n) = \frac{2n}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}}$ és $f(n+1) = \frac{2(n+1)}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n+1}}$.

Az $f(n+1) > f(n)$ egyenlőtlenség ekvivalens a

$$\frac{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}}{n} > \frac{\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n+1}}{n+1}$$

egyenlőtlenséggel. Másrészt $\frac{\sqrt{2n+1}}{n} > \frac{\sqrt{2n+3}}{n+1}$ és $\frac{\sqrt{2n-1}}{n} > \frac{\sqrt{2n+1}}{n+1}$, tehát $f(n+1) > f(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Mivel f szigorúan növekvő, injektív is.

18. Határozd meg az $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ függvényt, ha $f \circ f = g$ és g értékei az alábbi táblázatban vannak feltüntetve:

x	1	2	3	4	5
$g(x)$	3	1	2	4	5
x	1	2	3	4	5
$f(x)$	2	3	1	4	5

Megoldás. Az f függvény

$1 \rightarrow x_1 \rightarrow 3$; $2 \rightarrow x_2 \rightarrow 1$; $3 \rightarrow x_3 \rightarrow 2$; $4 \rightarrow x_4 \rightarrow 4$; $5 \rightarrow x_5 \rightarrow 5$, ahol $x_i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. (Sorra kipróbáljuk az értékeket.)

19. Létezik-e olyan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény amelyre $(f \circ f)(x) = x^2 - 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$?

Megoldás. Az $x^2 - 2 = x$ egyenlet megoldásai $x_1 = -1$ és $x_2 = 2$.

Az $f \circ f \circ f = (f \circ f) \circ f = f \circ (f \circ f)$ egyenlőségek alapján $f(x^2 - 2) = f^2(x) - 2$, tehát $f(2), f(-1) \in \{-1, 2\}$. Hasonlóképpen az $(x^2 - 2)^2 - 2 = x$ egyenlet gyökei

$$x_1 = -1, x_2 = 2, x_3 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \text{ és } x_4 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \text{ tehát az } f \circ g^2 = g^2 \circ f$$

egyenlőség alapján $f(x_3), f(x_4) \in \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. De $f(x_3), f(x_4) \notin \{-1, 2\}$ (mert $f(x_3) = -1$ esetén az $x_4 = f(f(x_3)) = f(-1) \in \{-1, 2\}$ ellentmondáshoz jutunk), tehát $f(x_3), f(x_4) \in \{x_3, x_4\}$.

Másrészt $f(x_3) \neq x_3$ és $f(x_4) \neq x_4$, tehát $f(x_3) = x_4$ és $f(x_4) = x_3$. Így viszont x_3 és x_4 fixpontjai lennének a $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 2$ függvénynek és ez ismét ellentmondás, tehát nem létezik olyan $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, amelyre $f \circ f = g$.

Megjegyzés. Érvényes a következő általánosabb tulajdonság:

Ha $a, b \in \mathbb{R}$ és $|a - b| > 2$, akkor nem létezik olyan $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, amelyre $f \circ f = g$, ahol $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - (a + b + 1)x + ab \quad \forall x \in \mathbb{R}$. (Ezt a tulajdonságot 1991-ben P. Mironescu tűzte ki az országos olimpián.)

20. Határozd meg az $a, b \in \mathbb{N}$ számokat úgy, hogy az $x^2 + ax + b = 0$ és $x^2 + bx + a = 0$ egyenletek mindegyikének racionális gyökei legyenek.

Megoldás. Ha az egyenleteknek racionális gyökeik vannak, akkor mindkét egyenlet diszkriminánsa teljes négyzet. Ha $a \leq 5$, akkor $a^2 - 4b \in \{0, 1, 4, 9, 16, 25\}$ és így próbálkozások útján a $(0, 0)$ és $(4, 4)$ megoldásokhoz jutunk. A továbbiakban feltételezhetjük, hogy $a > b$, tehát $a^2 - 4b > a^2 - 4a > a^2 - 6a + 9 = (a - 3)^2$. Másrészt $a^2 - 4b < a^2$, tehát $a^2 - 4b \in \{(a - b)^2, (a - 1)^2\}$. Az $a^2 - 4b = (a - 1)^2$ egyenlőség ellentmondáshoz vezet, tehát $a^2 - 4b = (a - 2)^2 = a^2 - 4a + 4$. Így $a = b + 1$ és $b^2 - 4a = (a - 1)^2 - 4a = a^2 - 6a + 1$. De $a^2 - 6a + 9 = (a - 3)^2$ és $a^2 - 6a + 1 < a^2 - 6a + 9$, tehát $a^2 - 6a + 1 \leq (a - 4)^2 \Rightarrow a^2 - 6a + 1 \leq a^2 - 8a + 16 \Rightarrow 2a \leq 15 \Rightarrow a \leq 6$.

Ha $a = 6$ és $b = 5$, akkor $a^2 - 4b = 36 - 20 = 16$ és $b^2 - 4a = 25 - 24 = 1$, tehát mindkét egyenletnek racionális gyökei vannak. Az előbbi esetek összesítéséből következik, hogy a lehetséges számpárok $(0, 0)$, $(4, 4)$, $(6, 5)$ és $(5, 6)$.

21. Létezik-e olyan $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ injektív függvény, amelyre $f(x^2) - f^2(x) \geq \frac{1}{4}$, $\forall x \in \mathbb{R}$?

Megoldás. $x = 0$ esetén $f(0) - f^2(0) \geq \frac{1}{4}$, tehát $\left(f(0) - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0$. Így $f(0) = \frac{1}{2}$.

Hasonló módon $f(1) - f^2(1) \geq \frac{1}{4}$, tehát $f(1) = \frac{1}{2}$. Mivel $f(0) = f(1)$, az f függvény nem lehet injektív.

VI. Analitikus geometria

VI.1.1. Gyakorlatok (146. oldal)

1. Az $M(-2)$ és $N(3)$ pontok esetén határozd meg azoknak a $P \in MN$ pontoknak a koordinátáit, amelyekre:

a) $\frac{MP}{PN} = \frac{2}{3}$; b) $\frac{\overline{MP}}{\overline{PN}} = \frac{2}{3}$; c) $\frac{MP}{PN} = \frac{1}{4}$; d) $\frac{\overline{MP}}{\overline{PN}} = -\frac{1}{2}$; e) $\frac{MP}{PN} = 1$; f) $\frac{\overline{MP}}{\overline{PN}} = \frac{1}{4}$.

Megoldás. a) Ha $P \in (MN)$, akkor az 1.5. tétel alapján $x_P = \frac{x_M + \lambda x_N}{1 + \lambda}$, ahol

$\lambda = \frac{MP}{PN}$. Ebben az esetben $x_P = 0$. Ha $P \in MN$ és $P \notin (MN)$, akkor

$$\lambda = \frac{\overline{MP}}{\overline{PN}} = -\frac{2}{3} \text{ és így } x_P = \frac{-2 - \frac{2}{3} \cdot 3}{1 - \frac{2}{3}} = -12;$$

b) Az előbbi két eset közül csak az első lehetséges, tehát $x_P = 0$;

c) $x_P \in \left\{-1, -\frac{1}{3}\right\}$; d) $x_P = -7$; e) $x_P = \frac{1}{2}$; f) $x_P = 1$.

2. Fejezd ki az MN szakasz harmadoló pontjainak koordinátáit a végpontok koordinátái függvényében.

Megoldás. Az M -hez közelebb eső P_1 harmadolópontra $P_1 \in (MN)$ és $\frac{MP}{P_1N} = \frac{1}{2}$,

tehát $x_{P_1} = \frac{2x_M + x_N}{3}$. Az N -hez közelebb eső P_2 harmadolópontra $x_{P_2} = \frac{x_M + 2x_N}{3}$.

3. Az MN egyenesen vegyünk fel az A , B és C pontokat úgy, hogy $\frac{\overline{MA}}{\overline{AN}} = \alpha$, $\frac{\overline{MB}}{\overline{BN}} = \beta$

és $\frac{\overline{MC}}{\overline{CN}} = \gamma$. Milyen arányban osztja a C pont az AB szakaszt?

Megoldás. Az adott egyenlőségek alapján

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MN}} = \frac{\alpha}{1 + \alpha}, \quad \frac{\overline{MB}}{\overline{MN}} = \frac{\beta}{1 + \beta} \text{ és } \frac{\overline{MC}}{\overline{MN}} = \frac{\gamma}{1 + \gamma}.$$

$$\text{Így } \overline{AC} = \overline{AM} + \overline{MC} = \overline{MN} \cdot \left(\frac{\gamma}{1 + \gamma} - \frac{\alpha}{1 + \alpha} \right) \text{ és } \overline{CB} = \overline{CM} + \overline{MB} =$$

$$= \overline{MN} \cdot \left(\frac{\beta}{1 + \beta} - \frac{\gamma}{1 + \gamma} \right), \text{ tehát } \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \gamma} \cdot \frac{1 + \beta}{1 + \alpha}.$$

4. Bizonyítsd be, hogy ha A, B, C és D négy kollineáris pont, akkor

$$\overline{AD} \cdot \overline{BC} + \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AC} \cdot \overline{DB} = 0.$$

Megoldás. Ha x_a, x_b, x_c és x_d a pontok koordinátái egy tetszőleges O ponthoz viszonyítva, akkor

$$\begin{aligned} \overline{AD} \cdot \overline{BC} + \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AC} \cdot \overline{DB} &= \\ &= (x_d - x_a)(x_c - x_b) + (x_b - x_a)(x_d - x_c) + (x_c - x_a)(x_b - x_d) = 0. \end{aligned}$$

5. Bizonyítsd be, hogy ha az $(A_k)_{k=1, \dots, n}$ pontok egy egyenesen vannak, akkor

$$\overline{A_1 A_2} + \overline{A_2 A_3} + \overline{A_3 A_4} + \dots + \overline{A_n A_1} = 0.$$

Megoldás. $\sum_{k=1}^n \overline{A_k A_{k+1}} = \sum_{k=1}^n (x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=1}^n x_{k+1} - \sum_{k=1}^n x_k = 0$ mert $x_{n+1} = x_1$.

6. Bizonyítsd be, hogy ha A, B, C és D négy kollineáris pont, akkor

$$\overline{DA}^2 \cdot \overline{BC} + \overline{DB}^2 \cdot \overline{CA} + \overline{DC}^2 \cdot \overline{AB} + \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CA} = 0.$$

Megoldás. Az A, B, C és D pontok által meghatározott egyenesen válasszuk D -t viszonyítási pontnak és jelöljük a, b, c -vel az A, B és C koordinátáját.

$$\begin{aligned} \overline{DA}^2 \cdot \overline{BC} + \overline{DB}^2 \cdot \overline{CA} + \overline{DC}^2 \cdot \overline{AB} + \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CA} &= \\ &= a^2(c-b) + b^2(a-c) + c^2(b-a) + (b-a)(c-b)(a-c) = 0. \end{aligned}$$

7. Számítsd ki a következő pontok távolságát:

- a)** $M(-1, 3), N(5, 7)$; **b)** $M(-2, 7), N(-3, 1)$;
c) $M(2, 3), N(-7, -1)$; **d)** $M(-1, -2), N(3, 4)$.

Megoldás. Az 1.9. tétel alapján az $M(x_1, y_1)$ és $N(x_2, y_2)$ pontok távolsága

$$MN = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

a) $MN = 2\sqrt{13}$; **b)** $MN = \sqrt{37}$; **c)** $MN = \sqrt{97}$; **d)** $MN = 2\sqrt{13}$.

8. Számítsd ki a P pont koordinátáit, ha $P \in MN$ és:

- a)** $MP = PN$ és $M(-1, 3), N(5, 7)$;
b) $MP = 3 \cdot PN$ és $M(-2, 7), N(-3, 1)$;
c) $MP = 2 \cdot PN$ és $M(2, 3), N(-7, -1)$;
d) $3 \cdot MP = 2 \cdot PN$ és $M(-1, -2), N(3, 4)$.

Megoldás. Az 1.12. tételt használjuk.

- a)** $P(2, 5)$; **b)** $P\left(-\frac{11}{4}, \frac{10}{4}\right)$ vagy $P\left(-\frac{7}{2}, -2\right)$;

c) $P\left(-\frac{12}{3}, \frac{1}{3}\right)$ vagy $P(-16, -5)$; **d)** $P\left(-\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$ vagy $P(-9, -14)$.

9. Írd fel a P pont koordinátáit, ha $P \in (MN)$, M és N koordinátái (x_M, y_M) , illetve (x_N, y_N) és

a) P az MN felezőpontja; **b)** $\frac{MP}{PN} = \frac{1}{2}$; **c)** $\frac{MP}{PN} = 2$; **d)** $\frac{MP}{PN} = \frac{1}{3}$.

Megoldás. **a)** $x_P = \frac{x_M + x_N}{2}$ és $y_P = \frac{y_M + y_N}{2}$;

b) $x_P = \frac{x_M + 2x_N}{3}$ és $y_P = \frac{y_M + 2y_N}{3}$; **c)** $x_P = \frac{3x_M + x_N}{4}$ és $y_P = \frac{3y_M + y_N}{4}$;

10. Írd fel az ABC háromszög súlypontjának koordinátáit, ha a csúcsok koordinátái $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ és $C(x_C, y_C)$.

Megoldás. Ha D a (BC) felezőpontja és G a súlypont, akkor $G \in (AD)$ és $\frac{AG}{GD} = 2$

tehát $x_G = \frac{x_A + 2x_D}{3}$. Másrészt $x_D = \frac{x_B + x_C}{2}$, tehát $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$. Hasonló

módon következik, hogy $y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$.

11. Bizonyítsd be, hogy az $ABCD$ konvex négyszög pontosan akkor paralelogramma, ha $x_A + x_C = x_B + x_D$ és $y_A + y_C = y_B + y_D$, ahol $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$ és $D(x_D, y_D)$ a csúcsok koordinátái.

Megoldás. Az $ABCD$ konvex négyszög pontosan akkor paralelogramma, ha az átlói felezik egymást, vagyis ha az AC átló M felezőpontja és a BD átló N felezőpontja egybeesik.

Másrészt $x_M = \frac{x_A + x_C}{2}$, $y_M = \frac{y_A + y_C}{2}$, $x_N = \frac{x_B + x_D}{2}$ és

$y_N = \frac{y_B + y_D}{2}$, tehát az $(x_M, y_M) = (x_N, y_N)$ egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha

$x_A + x_C = x_B + x_D$ és $y_A + y_C = y_B + y_D$.

12. Az xOy koordinátarendszerben az $O_1(x_0, y_0)$ ponton át párhuzamosokat húzunk az Ox , illetve Oy tengellyel és jelöljük őket O_1x_1 -gyel, illetve O_1y_1 -gyel. Ha egy M pont koordinátái az első rendszerben (x, y) , írd fel a koordinátáit az $x_1O_1y_1$ rendszerben.

Megoldás. Az M pont koordinátái a $x_1O_1y_1$ rendszerben $x - x_0$ és $y - y_0$.

13. Számítsd ki az $A(1, 2)$, $B(3, -6)$ és $C(-2, -7)$ csúcsokkal megadott háromszög:

- a) oldalainak hosszát;
- b) oldalai felezőpontjainak koordinátáit;
- c) oldalfelezőinek hosszát.

Lehet-e a három oldalfelező hossza egy háromszög oldalainak hossza?

Megoldás. a) $AB = \sqrt{2^2 + 8^2} = 2\sqrt{17}$, $BC = \sqrt{26}$ és $CA = 3\sqrt{10}$.

b) c) A felezőpontok koordinátái $M\left(\frac{1}{2}, -\frac{13}{2}\right) \in (BC)$, $N\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right) \in (AC)$ és

$P(2, -2)$, tehát az oldalfelezők hossza $AM = \frac{1}{2}\sqrt{290}$, $BN = \frac{7\sqrt{2}}{2}$ és $CP = \sqrt{29}$.

Mivel $AM > CN > BN$ elégséges ellenőrizni a $BN + CN > AM$ egyenlőtlenséget.

$$\frac{7\sqrt{2}}{2} + \sqrt{29} > \frac{1}{2}\sqrt{290} \Leftrightarrow 7\sqrt{2 \cdot 29} > 19$$

és ez igaz mert $\sqrt{2 \cdot 29} > 3$ és így $7\sqrt{2 \cdot 29} > 21 > 19$.

Tehát az oldalfelezők hossza lehet egy háromszög oldalainak hossza.

14. Számítsd ki a P pont koordinátáit úgy, hogy

- a) az $OMNP$ négyszög paralelogramma legyen;
- b) az $ONMP$ négyszög paralelogramma legyen,

ha $M(1, 3)$ és $N(3, 1)$.

Megoldás. a) A 11. gyakorlat alapján $OMNP$ pontosan akkor paralelogramma, ha

$$x_P = x_N - x_M = 2 \text{ és } y_P = y_N - y_M = -2.$$

b) Az $ONMP$ négyszög pontosan akkor paralelogramma, ha

$$x_P = x_M - x_N = -2 \text{ és } y_P = y_M - y_N = 2.$$

15. Határozd meg az $A(1, 1)$, $B(-6, 0)$ és $C(2, -6)$ pontok által meghatározott háromszög

- a) súlypontjának koordinátáit;
- b) köré írt kör középpontjának koordinátáit.

Megoldás. a) A 10. gyakorlat alapján a súlypont koordinátái

$$x_G = \frac{1 - 6 + 2}{3} = -1 \text{ és } y_G = \frac{1 + 0 - 6}{3} = -\frac{5}{3}.$$

b) Ha a háromszög köré írt kör középpontja $O(x_0, y_0)$, akkor az $OA = OB = OC$ egyenlőségek alapján írhatjuk, hogy

$$(x_0 - 1)^2 + (y_0 - 1)^2 = (x_0 + 6)^2 + y_0^2 = (x_0 - 2)^2 + (y_0 + 6)^2.$$

Ebből a $\begin{cases} 7x_0 + y_0 = -17 \\ 4x_0 - 3y_0 = 1 \end{cases}$ egyenletrendszerhez jutunk, tehát $x_0 = -2$ és $y_0 = -3$.

VI.1.2. Feladatok (147. oldal)

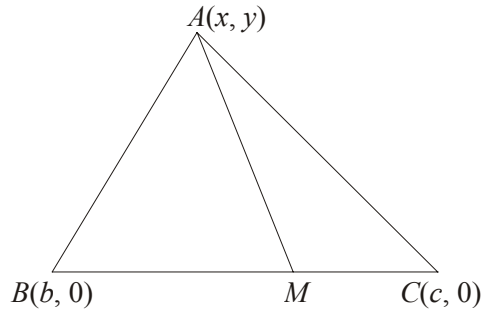
I.

1. Bizonyítsd be, hogy ha M egy tetszőleges pont az ABC háromszög BC oldalán, akkor

$$AB^2 \cdot MC + AC^2 \cdot MB - BC \cdot MA^2 = MC \cdot MB \cdot BC. \quad (\text{Stewart tétel})$$

Bizonyítás. Válasszuk M -et az origónak és BC -t Ox tengelynek. Ha $B(b, 0)$, $C(c, 0)$, $A(x, y)$, akkor

$$\begin{aligned} & AB^2 \cdot MC + AC^2 \cdot MB - AM^2 \cdot BC - \\ & - BM \cdot MC \cdot BC = \\ & = ((x-b)^2 + y^2)c - ((x-c)^2 + y^2)b - \\ & - (x^2 + y^2)(c-b) - c(-b)(c-b) = \\ & = x^2(c-b-c+b) + y^2(c-b-c+b) - \\ & - 2xbc + 2xcb + b^2c - c^2b + bc(c-b) = 0. \end{aligned}$$



2. Bizonyítsd be, hogy ha M az ABC háromszög BC oldalának felezőpontja, akkor

$$AM^2 = \frac{2(AC^2 + AB^2) - BC^2}{4}.$$

Bizonyítás. Ha az előbbi egyenlőségben $BM = MC = \frac{BC}{2}$, akkor az

$$\begin{aligned} AM^2 &= \frac{AB^2 \cdot MC + AC^2 \cdot MB - MC \cdot MB \cdot BC}{BC} = \\ &= \frac{\left(AB^2 \cdot \frac{1}{2} + AC^2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4} BC^2 \right) BC}{BC} = \frac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{4} \end{aligned}$$

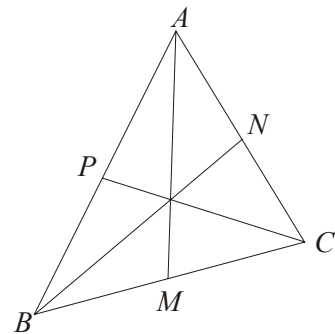
egyenlőséghez jutunk.

3. Bizonyítsd be, hogy egy háromszög oldalfelezőivel szerkeszthető háromszög. Mikor lesz a háromszög derékszögű?

1. megoldás. Ha $BC \leq AC \leq AB$, akkor a 2. feladat alapján $AM^2 > BN^2 > PC^2$, tehát elégséges ellenőrizni a $BN + PC > AM$ egyenlőtlenséget. Használjuk a $BA = a$, $CA = b$ és $AB = c$ jelölést. A

$$\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2} + \sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2} > \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$$

egyenlőtlenség ekvivalens a

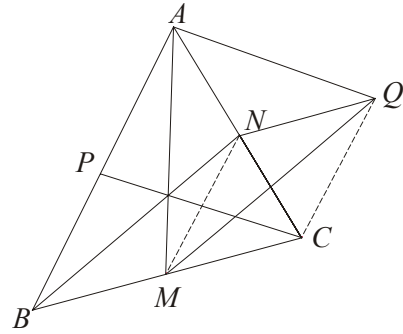


$$2\sqrt{[2(a^2 + b^2) - c^2][2(a^2 + c^2) - b^2]} > b^2 + c^2 - 5a^2$$

egyenlőtlenséggel. Ha $b^2 + c^2 - 5a^2 < 0$, akkor az egyenlőtlenség teljesül. Ellenkező esetben ismét négyzetre emeljük és így az $a^4 + b^4 + c^4 < 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$ egyenlőtlenséghez jutunk. Ez igaz mert

$$\begin{aligned} & 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - a^4 - b^4 - c^4 = \\ & = (a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c) > 0. \end{aligned}$$

2. megoldás. M -en át húzzunk párhuzamost BN -hez és szerkesszük meg a $BMQN$ paralelogrammát. Így $NQ \parallel BM$ és $NQ = BM$, tehát $NQ \parallel MC$ és $NQ = MC$. Ebből következik, hogy $NQCM$ is paralelogramma, tehát $QC \parallel MN$ és $QC = MN$. Mivel MN középvonal, írhatjuk, hogy $QC \parallel AP$ és $QC = AP$, tehát $APCQ$ is paralelogramma. Így $AQ = PC$, tehát az AMQ háromszög oldalai éppen az ABC háromszög oldalfelezői.



Az $AM^2 = BN^2 + CP^2$ egyenlőség ekvivalens a $b^2 + c^2 = 5a^2$ egyenlőséggel, tehát az oldalfelezők által alkotott háromszög pontosan akkor derékszögű, ha az eredeti háromszög legnagyobb oldalának a négyzete a másik két oldal négyzetösszegének az ötöde.

4. Bizonyítsd be, hogy ha $A_1B_1C_1D_1$ és $A_2B_2C_2D_2$ paralelogrammák és A_3, B_3, C_3 illetve D_3 az A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 és D_1D_2 szakaszokat λ arányban osztó belső pontok, akkor $A_3B_3C_3D_3$ is paralelogramma.

Bizonyítás. Ha az A_i, B_i, C_i és D_i pontok koordinátái rendre $(x_i^a, y_i^a), (x_i^b, y_i^b), (x_i^c, y_i^c)$ és $(x_i^d, y_i^d), i = \overline{1, 3}$, akkor

$$x_3^a = \frac{x_1^a + \lambda x_2^a}{1 + \lambda}, \quad x_3^d = \frac{x_1^d + \lambda x_2^d}{1 + \lambda}, \quad x_3^b = \frac{x_1^b + \lambda x_2^b}{1 + \lambda} \quad \text{és} \quad x_3^c = \frac{x_1^c + \lambda x_2^c}{1 + \lambda}.$$

A 11. gyakorlat alapján az $A_3B_3C_3D_3$ négyszög pontosan akkor paralelogramma, ha

$$x_3^a + x_3^c = x_3^b + x_3^d \quad \text{és} \quad y_3^a + y_3^c = y_3^b + y_3^d.$$

$$\text{Másképpen} \quad x_3^a + x_3^c = \frac{x_1^a + x_1^c + \lambda(x_2^a + x_2^c)}{1 + \lambda} = \frac{x_1^c + x_1^b + \lambda(x_2^c + x_2^d)}{1 + \lambda} = x_3^b + x_3^d,$$

Mert $A_1B_1C_1D_1$ és $A_2B_2C_2D_2$ paralelogrammák. Hasonló módon kapjuk az $y_3^a + y_3^c = y_3^b + y_3^d$ egyenlőséget is, tehát $A_3B_3C_3D_3$ paralelogramma.

5. Bizonyítsd be, hogy ha O az ABC háromszög köré írt kör középpontja és G a súlypontja, akkor $OG^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}$, ahol a , b és c az oldalak hosszai.

Bizonyítás. Az AOM háromszögben ($M \in (BC)$ és $BM = MC$) alkalmazzuk a Steuart-tételt a G pontra. Így az

$$OA^2 \cdot GM + OM^2 \cdot AG - OG^2 \cdot AM = AG \cdot GM \cdot AM$$

egyenlőséghez jutunk. Mivel $OA = R$, $\frac{GM}{AM} = \frac{1}{3}$ és $\frac{AG}{AM} = \frac{2}{3}$ írhatjuk, hogy

$$\frac{1}{3}R^2 + \frac{2}{3} \cdot OM^2 - OG^2 = \frac{2}{9} \cdot AM^2.$$

Az ABC és OBC háromszögekben az AM és OM oldalfelezőre

$$AM^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} \quad \text{és} \quad OM^2 = \frac{2(R^2 + R^2) - a^2}{4},$$

tehát

$$OG^2 = \frac{1}{3}R^2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{4R^2 - a^2}{4} - \frac{2}{9} \cdot \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}.$$

II.

1. Bizonyítsd be, hogy ha x_1, x_2, y_1, y_2 valós számok, akkor

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \geq \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2}.$$

Bizonyítás. Ha $A(x_1, y_1)$ és $B(x_2, y_2)$ két pont a

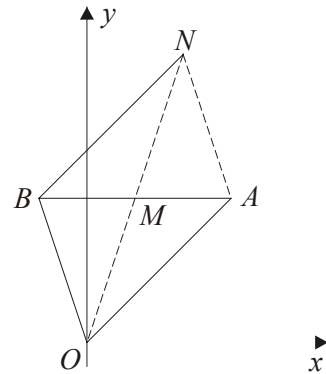
síkban és $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ az AB felezőpontja,

akkor az O pont M szerinti szimmetrikusának koordinátái $x_1 + x_2$ és $y_1 + y_2$.

Másrészt az $OA + OB = OA + AN \geq ON$ egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha az O , A és B pontok egy egyenesen vannak, vagyis ha létezik $\lambda \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $x_1 = \lambda x_2$ és $y_1 = \lambda y_2$. De $OA = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$,

$OB = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$ és $ON = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2}$, tehát a kért egyenlőtlenséget igazoltuk.

Megjegyzés. Négyzetre emelés és átrendezés után előbb az $(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) \geq (x_1x_2 + y_1y_2)^2$, majd az $(x_1y_2 - x_2y_1)^2 \geq 0$ egyenlőtlenséghez jutunk.



2. Bizonyítsd be, hogy ha $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ valós számok, akkor

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} + \dots + \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \geq \sqrt{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 + (y_1 + y_2 + \dots + y_n)^2}.$$

Bizonyítás. A matematikai indukció módszerét használjuk. $n = 2$ esetén az 1. feladatban igazoltuk az egyenlőtlenséget. Ha az egyenlőtlenség teljesül $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ esetén, akkor

$$\begin{aligned} & \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \dots + \sqrt{x_n^2 + y_n^2} + \sqrt{x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2} \geq \\ & \geq \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \dots + \sqrt{x_{n-1}^2 + y_{n-1}^2} + \sqrt{(x_n + x_{n+1})^2 + (y_n + y_{n+1})^2} \geq \\ & \geq \sqrt{(x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1})^2 + (y_1 + y_2 + \dots + y_n + y_{n+1})^2}. \end{aligned}$$

Tehát a matematikai indukció elve alapján az egyenlőtlenség minden $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ és $x_i, y_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}$ esetén igaz.

3. Milyen értékeket vehet fel az $E(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}$ kifejezés, ha $x \in \mathbb{R}$?

Megoldás. Tekintjük az $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ és $B\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, valamint $M\left(x, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ pontokat.

$$MB - MA = \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} - \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = E(x).$$

Másrészt $-AB < MB - MA < AB$, tehát $-1 < E(x) < 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ha x elég nagy (vagy elég kicsi), akkor $E(x)$ jól megközelíti az 1-et (-1 -et), így $E(x)$ minden értéket felvehet a $(-1, 1)$ intervallumból.

Megjegyzések.

1. Alkalmazhatjuk az 1. feladatot az $x_1 = x + \frac{1}{2}, y_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, x_2 = 1, y_2 = 0$,

illetve $x_1 = x - \frac{1}{2}, y_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ és $x_2 = 1, y_2 = 0$ számokra.

2. Algebrai uton a megoldás a következő:

Az $\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} = y$ egyenletből

$\sqrt{x^2 + x + 1} = y + \sqrt{x^2 - x + 1}$, tehát ha a jobb oldal pozitív, akkor a

$2x = y^2 + 2y\sqrt{x^2 - x + 1}$ egyenlethez jutunk.

Ha $2x - y^2$ és y azonos előjelű, akkor $4x^2 - 4xy^2 + y^4 = 4y^2(x^2 - x + 1)$,

vagyis $4x^2(1 - y^2) = 4y^2 - y^4$, ahonnan $x^2 = \frac{y^2(4 - y^2)}{4(1 - y^2)}$.

Mivel $E(-x) = -E(x)$, feltételezhetjük, hogy $y > 0$ és így a $\frac{4-y^2}{1-y^2} \geq 0$ és

$2x - y^2 \geq 0$ feltételek kell teljesüljenek. Ebből következik, hogy csak $y \in (-1, 1)$ esetén van megoldás és ebben az esetben

$$x = \frac{y}{2} \sqrt{\frac{4-y^2}{1-y^2}}.$$

4. Bizonyítsd be, hogy ha az x_1, x_2, y_1, y_2 valós számokra $x_1^2 + y_1^2 = 2y_1$ és $x_2^2 + y_2^2 = 2y_2$, akkor $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \leq 4$.

Bizonyítás. Az adott összefüggések alapján $x_1^2 + (y_1 - 1)^2 = 1$ és $x_2^2 + (y_2 - 1)^2 = 1$, tehát az 1. feladat alapján

$$\begin{aligned} \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + ((y_1 - 1) - (y_2 - 1))^2} \leq \\ &\leq \sqrt{x_1^2 + (y_1 - 1)^2} + \sqrt{x_2^2 + (y_2 - 1)^2} = 2. \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \leq 4$.

5. Bizonyítsd be, hogy ha az $A_1B_1C_1$ és $A_2B_2C_2$ háromszögek súlypontja G_1 , illetve G_2 , akkor $|G_1G_2| \leq |A_1A_2| + |B_1B_2| + |C_1C_2|$.

Bizonyítás. Ha (x_i^a, y_i^a) az A_i $i = \overline{1, 2}$ pont koordinátája és hasonlóak a jelölések a többi pont esetén is, akkor

$$\begin{aligned} x_1^g &= \frac{x_1^a + x_1^b + x_1^c}{3}, & y_1^g &= \frac{y_1^a + y_1^b + y_1^c}{3} \text{ és} \\ x_2^g &= \frac{x_2^a + x_2^b + x_2^c}{3}, & y_2^g &= \frac{y_2^a + y_2^b + y_2^c}{3}. \end{aligned}$$

Tehát

$$\begin{aligned} 3|G_1G_2| &= \sqrt{[(x_2^a - x_1^a) + (x_2^b - x_1^b) + (x_2^c - x_1^c)]^2 + [(y_2^a - y_1^a) + (y_2^b - y_1^b) + (y_2^c - y_1^c)]^2} \leq \\ &\leq \sqrt{(x_2^a - x_1^a)^2 + (y_2^a - y_1^a)^2} + \sqrt{(x_2^b - x_1^b)^2 + (y_2^b - y_1^b)^2} + \sqrt{(x_2^c - x_1^c)^2 + (y_2^c - y_1^c)^2} = \\ &= |A_1A_2| + |B_1B_2| + |C_1C_2|. \end{aligned}$$

(Alkalmaztuk a 2. feladatot $n = 3$ esetén.)

VI.2.7. Gyakorlatok (154. oldal)

1. Döntsd el, hogy az alábbi egyenesek tartalmazzák-e a megadott pontokat:

a) $2x - y + 3 = 0$ $A(0, 0)$ és $B(-1, -1)$; b) $2x + 3y - 5 = 0$ $A(1, 1)$ és $B\left(0, \frac{5}{3}\right)$;

c) $\sqrt{2}x - \sqrt{3}y + \sqrt{6} = 0$ $A\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ és $B(r_1, r_2)$, ahol $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$.

Megoldás. a) $0 + 3 \neq 0$, tehát $A \notin d$; $2 \cdot (-1) - (-1) + 3 = 0$, tehát $B \in d$;

b) $A \in d, B \in d$;

c) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{6} > \sqrt{3}$, tehát $A \notin d$;

Ha $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ és $\sqrt{2}r_1 - \sqrt{3}r_2 + \sqrt{6} = 0$, akkor $2r_1^2 + 6 + 4r_1\sqrt{3} = 3r_2^2$ és így

$\sqrt{3} = \frac{3r_2^2 - 2r_1^2 - 6}{4r_1} \in \mathbb{Q}$ vagy $r_1 = 0$. Ha $r_1 = 0$, akkor $r_2 = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Tehát

mindkét esetben ellentmondáshoz jutunk és így $B \notin d$.

2. Határozd meg az m és n valós számok értékét úgy, hogy az alábbi egyenesek tartalmazzák a megadott pontokat:

a) $x + y - 4 = 0$ $A(-m, m^2)$ és $B(m, n)$;

b) $\sqrt{2}x + \sqrt{3}y - \sqrt{6} = 0$ $A(m^2 - 2, m)$ és $B(n, n^2 - 3)$;

c) $2x + 3y - 7 = 0$ $A(m + 2n, m - n)$ és $B(m - n, m + 2n)$.

Megoldás. a) $A \begin{cases} -m + m^2 = 4 \\ m + n = 4 \end{cases}$ egyenletrendszer megoldásai $m_1 = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$,

$n_1 = \frac{7 - \sqrt{17}}{2}$ és $m_2 = \frac{1 - \sqrt{17}}{2}$, $n_2 = \frac{7 + \sqrt{17}}{2}$.

b) Ha $A \in d$ és $B \in d$, akkor a

$$\sqrt{2}m^2 + \sqrt{3}m - \sqrt{6} - 2\sqrt{2} = 0 \text{ és}$$

$$\sqrt{3}n^2 + \sqrt{2}n - \sqrt{6} - 3\sqrt{3} = 0$$

egyenletekhez jutunk. Így $m \in \{\sqrt{2}, -(2 + \sqrt{3})\}$ és $n \in \{\sqrt{3}, -(3 + \sqrt{2})\}$, tehát

$(m, n) \in A \times B$, ahol $A = \{\sqrt{2}, -(2 + \sqrt{3})\}$ és $B = \{\sqrt{3}, -(3 + \sqrt{2})\}$.

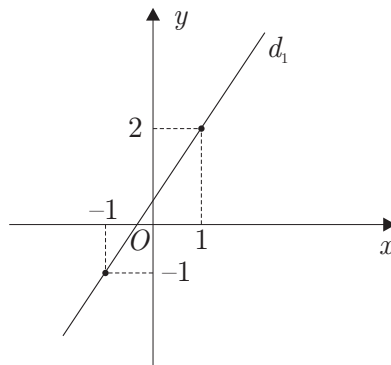
c) Ha $A \in d$ és $B \in d$, akkor az $\begin{cases} 5m + n = 7 \\ 5m + 4n = 7 \end{cases}$ egyenletrendszerhez jutunk.

Tehát $M = \left\{\left(\frac{7}{5}, 0\right)\right\}$.

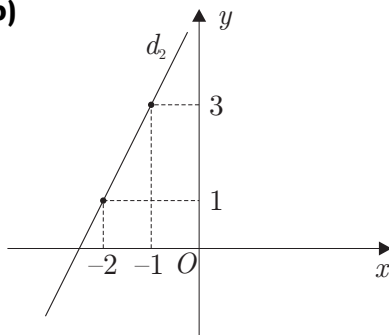
3. Ábrázold az alábbi egyenletekkel megadott egyeneseket:

$$d_1 : 3x - 2y + 1 = 0, \quad d_2 : -2x + y - 5 = 0, \quad d_3 : x - y = 0.$$

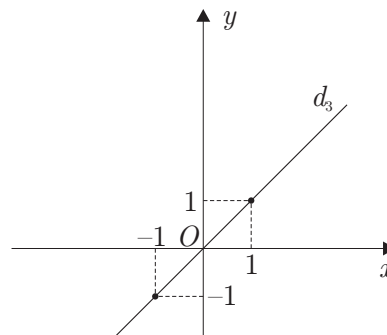
Megoldás. a) Ha $y = -1$, akkor $x = -1$, tehát $(-1, -1) \in d_1$. Ha $y = 2$, akkor $x = 1$, tehát $(1, 2) \in d_1$. Így a d_1 egyenes a $(-1, -1)$ és $(1, 2)$ pontok által meghatározott egyenes.



b)



c)



4. Határozd meg az alábbi egyenespárok metszéspontjának koordinátáit:

a)
$$\begin{cases} 2x - 3y + 7 = 0 \\ x + 4y - 5 = 0 \end{cases};$$

b)
$$\begin{cases} \sqrt{2}x\sqrt{3}y - 2\sqrt{6} = 0 \\ 2\sqrt{2}x - \sqrt{3}y - \sqrt{6} = 0 \end{cases}.$$

Megoldás. a) Az egyenletrendszer megoldása $\left(-\frac{13}{11}, \frac{17}{11}\right)$, tehát a két egyenes metszéspontja az $M\left(-\frac{13}{11}, \frac{17}{11}\right)$ pont.

b) A metszéspont $M(\sqrt{3}, \sqrt{2})$.

5. Adott a következő három egyenes:

$$d_1 : 3y - x - 2 = 0, \quad d_2 : y - 4x + 3 = 0, \quad d_3 : 3x + 2y - 16 = 0.$$

a) Határozd meg az egyenesek páronkénti metszéspontjait.

- b)** Írd fel az így kapott háromszögben az oldalak felezőpontjainak koordinátáit.
c) Írd fel az oldalfelezők egyenletét.
d) Írd fel a magasságok egyenletét.
e) Bizonyítsd be, hogy az oldalfelezők összefutnak.
f) Határozd meg a súlypont koordinátáit.
g) Bizonyítsd be, hogy a magasságok összefutnak.
h) Írd fel az ortocentrum koordinátáit.
i) Határozd meg a háromszög köré írt kör középpontjának koordinátáit és a kör sugarát.

Megoldás. **a)** A metszéspontok koordinátáit a $\begin{cases} 3y - x = 2 \\ y - 4x = -3 \end{cases}$ és $\begin{cases} 3y - x = 2 \\ 3x + 2y = 16 \end{cases}$

$\begin{cases} y - 4x = -3 \\ 3x + 3y = 16 \end{cases}$ egyenletrendszerek megoldásai származtatják. Tehát a metszéspontok $A(1, 1)$, $B(4, 2)$ és $C(2, 5)$.

b) A felezőpontok koordinátái $M\left(3, \frac{7}{2}\right) \in BC$, $N\left(\frac{3}{2}, 3\right) \in AC$ és $P\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right) \in AB$.

c) Az AM egyenes egyenlete $\frac{y-1}{x-1} = \frac{5}{4}$ vagyis $4y - 5x = -1$. A BN egyenes egyenlete $5y + 2x = 18$ és a CP egyenes egyenlete $y + 7x = 19$.

d) Az AB egyenlete $y = \frac{1}{3}(x + 2)$ tehát a C -n átmenő és AB -re merőleges egyenes egyenlete $\frac{y-5}{x-2} = -3$ vagyis $y + 3x = 11$. Az A -hoz tartozó magasság egyenlete $\frac{y-1}{x-1} = \frac{2}{3}$ vagyis $3y - 2x = 1$ és a B -hez tartozó magasság egyenlete $4y + x = 12$.

e) f) Az $\begin{cases} 4y - 5x = -1 \\ 5y + 2x = 18 \\ y + 7x = 19 \end{cases}$ egyenletrendszer megoldása $x = \frac{7}{3}$ és $y = \frac{8}{3}$, tehát az

oldalfelezők összefutnak a $\left(\frac{7}{3}, \frac{8}{3}\right)$ pontban. Ez a háromszög súlypontja.

g) h) A $\begin{cases} 3y - 2x = 1 \\ 4y + x = 12 \\ y + 3x = 11 \end{cases}$ egyenletrendszer összeférhető és megoldása $x = \frac{32}{11}$ és

$y = \frac{25}{11}$, tehát az ortocentrum $H\left(\frac{32}{11}, \frac{25}{11}\right)$.

i) Ha $O(x, y)$ a háromszög köré írt kör középpontja, akkor

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = (x-4)^2 + (y-2)^2 = (x-2)^2 + (y-5)^2,$$

tehát $3x + y = 9$ és $4x - 6y = -9$. Ebből következik, hogy $x = \frac{45}{22}$ és $y = \frac{63}{22}$,

tehát a kör középpontja $O\left(\frac{45}{22}, \frac{63}{22}\right)$.

$$\text{Így a sugár } R = \sqrt{\left(\frac{45}{22} - 1\right)^2 + \left(\frac{63}{22} - 1\right)^2} = \sqrt{\frac{2210}{484}} = \sqrt{\frac{1105}{242}}.$$

6. Írd fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelyik

a) átmegy az $(1, 2)$ és $(3, -2)$ pontokon;

b) átmegy az $(1, 1)$ ponton és merőleges az OA egyenesre, ahol az A koordinátái $(2, 3)$;

c) átmegy a $(-3, 2)$ ponton és párhuzamos az első szögfelezővel;

d) átmegy a $(-1, 5)$ ponton és irányítánszöve -5 .

Megoldás. a) $\frac{y-2}{x-1} = \frac{-2-2}{3-1} = -2$, tehát $y + 2x = 4$.

b) Az OA egyenes egyenlete $y = \frac{3}{2}x$ tehát a keresett egyenes egyenlete $\frac{y-1}{x-1} = -\frac{2}{3}$ vagyis $3y + 2x = 5$.

c) Az első szögfelező irányítánszöve 1 , tehát a keresett egyenes egyenlete $\frac{y-2}{x+3} = 1$, vagyis $y - x = 5$.

d) $\frac{y-5}{x+1} = -5$, tehát $y + 5x = 0$.

7. Írd fel az $M(x_1, y_1)$ és $N(x_2, y_2)$ pontok által meghatározott szakasz felező merőlegesének egyenletét.

Megoldás. A felezőmerőleges azon $P(x, y)$ pontok mértani helye, amelyek egyenlő távolságra vannak az M és az N ponttól. Így az

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2$$

$$\text{azaz az } x \cdot (x_2 - x_1) + y \cdot (y_2 - y_1) = \frac{1}{2}(x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2)$$

egyenlethez jutunk.

8. Vegyél fel a síkban két pontot (C -t és D -t) úgy, hogy az $ABCD$ négyszög trapéz legyen, ha $A(-1, -1)$, $B(2, 3)$. Írd fel az átlók egyenletét.

Megoldás. Ha $C(-3, 3)$ és $D(-2, -1)$, akkor $AD \parallel BC \parallel Ox$. Az $A(-1, -1)$ és $C(-3, 3)$ pontokon áthaladó egyenes egyenlete $y + 2x = -3$ és a $B(2, 3)$, $D(-2, -1)$ pontokon áthaladó egyenes egyenlete $y - x = 1$.

9. Írd fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely a koordinátatengelyekből O -tól kezdve egyenlő hosszúságú szakaszokat metsz ki és áthalad az (x_0, y_0) ponton.

Megoldás. A keresett egyenes párhuzamos az $y = x$ vagy $y = -x$ egyenessel. Így az $y - y_0 = x - x_0$ és $y - y_0 = x_0 - x$ egyenesek teljesítik a kért feltételeket.

10. Írd fel az $(1, -3)$ ponton áthaladó $x + y = 4$ egyenesre merőleges egyenes egyenletét.

Megoldás. Az $x + y = 4$ egyenes irányítánszöve -1 , tehát a keresett egyenes $y + 3 = x - 1$.

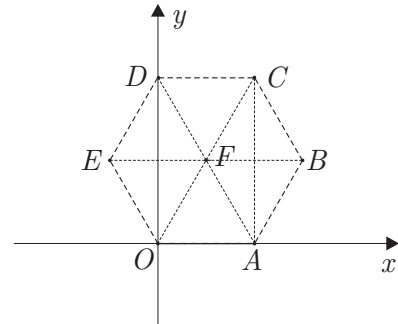
11. Az Ox tengelyen felvettük az $OA = 1$ szakaszt. Írd fel annak a szabályos hatszögnek a csúcsait és oldalegyeneseinek egyenletét, amely az Ox felett van és az egyik oldala OA .

Megoldás. Az ábra jelöléseit használjuk. Az F

pont koordinátái $x_F = \frac{1}{2}$ és $y_F = \frac{\sqrt{3}}{2}$, tehát a C pont koordinátái $x_C = 1$ és $y_C = \sqrt{3}$. Így $x_D = 0$

és $y_D = \sqrt{3}$, $x_B = \frac{3}{2}$, $y_B = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x_E = -\frac{1}{2}$ és $y_E = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Az oldalegyenesek egyenlete $OA: y = 0$,

$DC: y = \sqrt{3}$, $AB: y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$, $ED: y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$, $OE: y = -\sqrt{3}x$ és $BC: y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}$.



12. Határozd meg annak az $ABCD$ négyzetnek a csúcsait, amelynek az A és C csúcsai $(1, 3)$, $(3, 4)$.

Megoldás. Az AC egyenlete $2y - x = 5$ és az AC felezőpontja $M\left(2, \frac{7}{2}\right)$. A fele-

zőmerőleges egyenlete $y + 2x = \frac{15}{2}$. A másik két csúcs a felezőmerőlegesen van és

M -től való távolságuk $\frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Így az

$$\begin{cases} (x-2)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} \\ y + 2x = \frac{15}{2} \end{cases} \text{ rendszer megoldásait keressük.}$$

A másik két csúcs tehát $B\left(2 + \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{7}{2} - \sqrt{5}\right)$ és $D\left(2 - \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{7}{2} + \sqrt{5}\right)$.

13. Legyenek a Descartes féle koordináta-rendszerben az $A(0,0)$, $B(3,0)$, $C(0,4)$, $E\left(\frac{24}{25}, \frac{68}{25}\right)$ pontok. Legyen O az A -ból BC -re húzott magasság talppontja és D az AC felezőpontja.

- a) Írd fel a BC és AO egyenesek egyenletét és határozzuk meg az O pont koordinátáit.
- b) Igazold, hogy $DE \parallel AO$ és határozzuk meg az AE és DO egyenesek F metszéspontjának koordinátáit.
- c) Határozd meg az AO és CF egyenesek M metszéspontjának koordinátáit és igazoljuk, hogy ez a pont az ABE_{Δ} magasságpontja.

Megoldás. a) A BC egyenes egyenlete $3y + 4x = 12$, tehát az A -ból húzott magasság egyenlete $y = \frac{3}{4}x$. Így az O pont koordinátái $x_O = \frac{48}{25}$ és $y_O = \frac{36}{25}$.

b) Látható, hogy $E \in (BC)$, $x_E = \frac{x_C + x_O}{2}$ és $y_E = \frac{y_C + y_O}{2}$, tehát E a CO szakasz felezőpontja. Így F az AOC háromszög súlypontja, tehát $x_F = \frac{16}{25}$ és $y_F = \frac{136}{75}$.

c) Az M pont az AO felezőpontja, tehát $x_M = \frac{24}{25}$ és $y_M = \frac{18}{25}$. Ebből következik, hogy $EM \parallel AC$, tehát $EM \perp AB$. Az M pont rajta van az AEB háromszög AO és EM magasságán, tehát M az ABE háromszög magasságpontja.

14. Határozd meg az a értékét úgy, hogy a következő két egyenes merőleges legyen egymásra:

$$(3a + 2)x + (1 - 4a)y = 8 \text{ és } (5a - 2)x + (a + 4)y - 7 = 0.$$

Megoldás. A merőlegesség feltétele

$$\frac{3a + 2}{4a - 1} \cdot \frac{5a - 2}{a + 4} = 1,$$

tehát $a \in \{0, 1\}$. Mindkét érték megfelel.

15. Az 5. feladatban szereplő háromszögre

- a) számítsd ki az oldalak hosszát;
 b) írd fel a szögfelezők egyenletét;
 c) bizonyítsd be, hogy a szögfelezők összefutnak.

Megoldás. a) A csúcsok koordinátái $A(1, 1)$, $B(4, 2)$, $C(2, 5)$ és az oldalak egyenletei: $AB : 3y - x = 2$, $BC : 3x + 2y = 16$, $CA : y - 4x = -3$.

$$AB = \sqrt{10}, \quad BC = \sqrt{13} \text{ és } CA = \sqrt{17}.$$

b) Az $M(x, y)$ pont akkor van rajta az A szög szögfelezőjén, ha $\frac{|3y - x - 2|}{\sqrt{10}} = \frac{|y - 4x + 3|}{\sqrt{17}}$. A belső szögfelező egyenlete:

$$\frac{3y - x - 2}{\sqrt{10}} = \frac{16 - 3x - 2y}{\sqrt{13}} \text{ és } \frac{16 - 3x - 2y}{\sqrt{13}} = \frac{4x - y - 3}{\sqrt{17}}.$$

c) Mindhárom egyenlőséget kielégíti az

$$x_I = \frac{\sqrt{13} + 4\sqrt{17} + 2\sqrt{10}}{\sqrt{10} + \sqrt{13} + \sqrt{17}} \text{ és } y_I = \frac{\sqrt{13} + 2\sqrt{17} + 5\sqrt{10}}{\sqrt{10} + \sqrt{13} + \sqrt{17}}$$

számpár, tehát a szögfelezők összefutnak és az összefutási pont (x_I, y_I) .

16. Bizonyítsd be, hogy az $M \in BC$, $N \in CA$ és $P \in AB$ pontok pontosan akkor kollineárisak, ha $\alpha\beta\gamma = -1$, ahol $\frac{BM}{MC} = \alpha$, $\frac{CN}{NA} = \beta$ és $\frac{AP}{PB} = \gamma$.

(Menelaosz tétele)

Bizonyítás. A feltételek alapján $x_M = \frac{x_B + \alpha x_C}{1 + \alpha}$, $x_N = \frac{x_C + \beta x_A}{1 + \beta}$, $x_P = \frac{x_A + \gamma x_B}{1 + \gamma}$, $y_M = \frac{y_B + \alpha y_C}{1 + \alpha}$, $y_N = \frac{y_C + \beta y_A}{1 + \beta}$ és $y_P = \frac{y_A + \gamma y_B}{1 + \gamma}$. A pontok pontosan akkor vannak egy egyenesen, ha az $y_M = ax_M + b$, $y_N = ax_N + b$ és $y_P = ax_P + b$ egyenletrendszer összeférhető, vagyis ha

$$\begin{vmatrix} x_M & y_M & 1 \\ x_N & y_N & 1 \\ x_P & y_P & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (1)$$

(vagy az MNP háromszög területe 0).

$$(1) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_B + \alpha x_C & y_B + \alpha y_C & 1 + \alpha \\ x_C + \beta x_A & y_C + \beta y_A & 1 + \beta \\ x_A + \gamma x_B & y_A + \gamma y_B & 1 + \gamma \end{vmatrix} = 0.$$

$$\text{Ez} \quad (1 + \alpha\beta\gamma) \cdot \begin{vmatrix} x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \\ x_A & y_A & 1 \end{vmatrix} = 0$$

alakban írható. A második tényező nem nulla, mert az ABC területe nem 0, tehát a rendszer pontosan akkor összeférhető, ha $\alpha\beta\gamma = -1$.

Megjegyzés. Ferdeszögű koordináta-rendszer választása a számításokat leegyszerűsíti (lásd a következő feladatot).

17. Bizonyítsd be, hogy az AM , BN és CP ($M \in BC$, $N \in CA$ és $P \in AB$) egyenesek pontosan akkor összefutóak, ha $\alpha\beta\gamma = 1$, ahol $\frac{BM}{MC} = \alpha$, $\frac{CN}{NA} = \beta$ és $\frac{AP}{PB} = \gamma$.
(Céva tétele)

Bizonyítás. A koordináta-rendszer kezdőpontjának válasszuk B -t és tengelyeknek a BC illetve BA félegyeneseket. Így $A(0, a)$, $C(c, 0)$ és $B(0, 0)$ tehát

$$M\left(\frac{c}{1+\alpha}, 0\right), P\left(0, \frac{a}{1+\gamma}\right) \text{ és } N\left(\frac{c}{1+\beta}, \frac{\beta a}{1+\beta}\right).$$

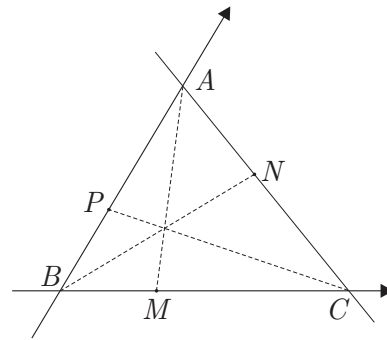
Az AM egyenes egyenlete $y = -\frac{(1+\alpha)a}{\alpha c}x + a$ és

a CP egyenes egyenlete $y = -\frac{a}{c(1+\gamma)}x + \frac{a}{1+\gamma}$.

Ebből következik, hogy a metszéspont koordinátái

$$\bar{x} = \frac{\alpha\beta\gamma}{1+\gamma+\alpha\gamma} \text{ és } y = a \cdot \frac{1}{1+\gamma+\alpha\gamma}.$$

Ugyanakkor a BN egyenes egyenlete $y = \beta \frac{a}{c}x$, tehát a három egyenes pontosan akkor összefutó, ha $\bar{y} = \beta \frac{a}{c}\bar{x}$. Ez ekvivalens az $\alpha\beta\gamma = 1$ egyenlőséggel.



VI.2.8. Feladatok (156. oldal)

1. a) Bizonyítsd be, hogy egy trapéz alapjainak felezőpontjai, a nem párhuzamos oldalak metszéspontja és az átlók metszéspontja egy egyenesen vannak.

b) Csak vonalzó segítségével szerkeszd meg az $ABCD$ paralelogramma oldalainak felezőpontjait.

Bizonyítás. a) A nempárhuzamos oldalak metszéspontját válasszuk origónak és az oldalak tartóegyeneseit tengelyeknek. Így $B(b, 0)$, $C(\lambda b, 0)$, $A(0, a)$ és $D(0, \lambda a)$, tehát az AC és BD egyenlete

$$AC : y = -\frac{a}{\lambda b}x + a, \quad BD : y = -\frac{\lambda a}{b}x + \lambda a$$

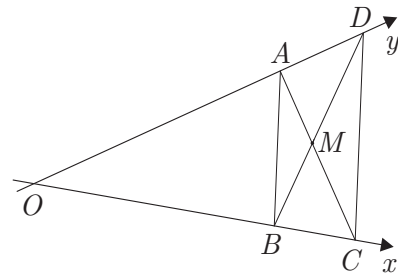
és a metszéspontjuk koordinátái:

$$x_M = \frac{\lambda b}{\lambda + 1} \text{ és } x_M = \frac{\lambda a}{\lambda + 1}.$$

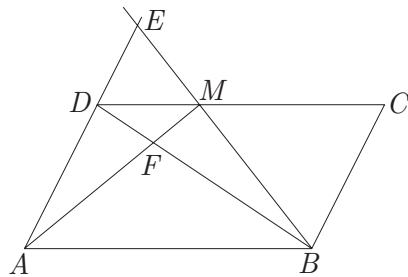
Ebből következik, hogy az OM egyenes egyenlete

$y = \frac{a}{b}x$ és ezen az egyenesen helyezkednek el a

$\left(\frac{b}{2}, \frac{a}{2}\right)$ és $\left(\frac{\lambda b}{2}, \frac{\lambda a}{2}\right)$ felezőpontok is.



b)



Az $M \in (CD)$ tetszőleges pontot összekötjük B -vel. Az $ABMD$ trapézban meghúzzuk az átlókat. Ha $\{E\} = AD \cap MB$ és $\{F\} = AM \cap BD$, akkor az **a)** alpont alapján EF felezi AB -t. Hasonlóan szerkeszthetjük meg a többi oldal felezőpontját is.

2. Bizonyítsd be, hogy egy háromszög magasságai összefutók.

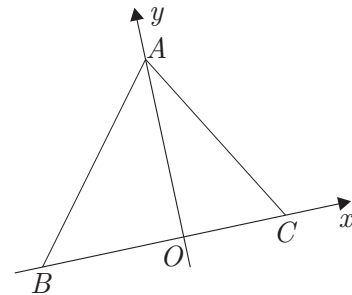
Bizonyítás. Origónak választjuk az A -ból húzott magasság talppontját, Ox tengelynek a BC -t és Oy tengelynek az A -hoz tartozó magasságot. Ha $A(0, a)$, $B(-b, 0)$ és $C(c, 0)$, akkor az AC és AB egyenlete

$$AB : y = \frac{a}{b}x + a, \quad AC : y = -\frac{a}{c}x + a.$$

A B és C ponthoz tartozó magasság egyenlete

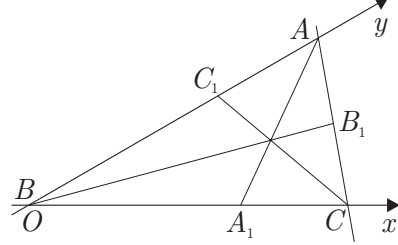
$$y = \frac{c}{a}x + \frac{bc}{a} \text{ és } y = -\frac{b}{a}x + \frac{bc}{a}.$$

A két egyenes metszéspontja a $H\left(0, \frac{bc}{a}\right)$ pont és ez rajta van az AO magasságon, tehát a három magasság összefutó.



3. Bizonyítsd be, hogy egy háromszög belső szögfelezői összefutnak. Számítsd ki az összefutási pont koordinátáit a csúcspontok koordinátái és az oldalhosszak függvényében.

Bizonyítás. A B pontot válasszuk origónak és a BC , BA egyeneseket tengelyeknek. A szögfelező tétel alapján az AA_1 belső szögfelezőre $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{AB}{AC}$. Ha $A(0, c)$ és $C(a, 0)$ valamint



$AC = b$, akkor $A_1\left(\frac{c}{b+c}a, 0\right)$. Hasonlóan

kapjuk, hogy $C_1\left(0, \frac{a}{a+b}c\right)$ és $B_1\left(\frac{ac}{a+c}, \frac{ac}{a+c}\right)$, tehát az AA_1 és CC_1 egyenlete

$$AA_1 : y = -\frac{b+c}{a}x + c, \quad CC_1 : y = -\frac{c}{a+b}x + \frac{ac}{a+b}.$$

Az $AA_1 \cap CC_1 = \{I\}$ pont koordinátái $x_I = \frac{ac}{a+b+c}$ és $y_I = \frac{ac}{a+b+c}$, tehát az (x_I, y_I) pont rajta van az $y = x$ egyenletű BB_1 egyenesen.

Megjegyzés. Derékszögű koordináta-rendszerben az

$$x_I = \frac{a \cdot x_A + b \cdot x_B + c \cdot x_C}{a+b+c}, \quad y_I = \frac{a \cdot y_A + b \cdot y_B + c \cdot y_C}{a+b+c}$$

egyenlőségeket kapjuk, ahol a , b és c az oldalak hossza.

4. Az $ABCD$ paralelogramma oldalaira kifele négyzeteket szerkesztünk. Bizonyítsd be, hogy ha O_1 , O_2 , O_3 és O_4 a négyzetek középpontjai, akkor $O_1O_3 = O_2O_4$ és $O_1O_3 \perp O_2O_4$.

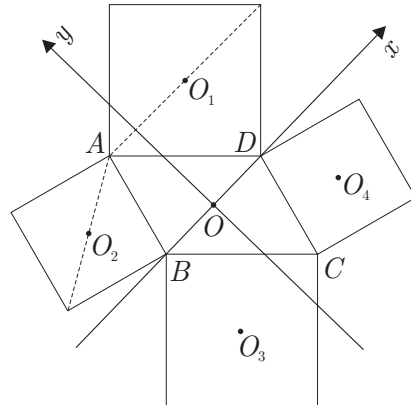
Bizonyítás. A paralelogramma középpontját válasszuk origónak, A BD átlót az Ox tengelynek és az erre merőleges egyenest Oy -nak.

Ha $B(-b, 0)$, akkor $D(b, 0)$. Ha $A(x_0, y_0)$, akkor $C(-x_0, -y_0)$ és a szimmetria alapján elégséges kiszámítani O_1 és O_2 koordinátáit. Az AD és AB oldalak egyenlete

$$AD : y = \frac{y_0}{x_0 - b}(x - b),$$

$$AB : y = \frac{y_0}{x_0 + b}(x + b),$$

tehát az MD és NB egyenes egyenlete:



$$MD : y = -\frac{x_0 - b}{y_0}(x - b), \quad NB : y = -\frac{x_0 + b}{y_0}(x + b).$$

Az $MD = AD$ és $AB = NB$ feltételek alapján $x_M = b + y_0$ és $x_N = -b - y_0$, tehát $y_M = b - x_0$ és $y_N = x_0 + b$. Ebből következik, hogy az O_1 és O_2 pontok koordinátái $O_1\left(\frac{b + x_0 + y_0}{2}, \frac{b + y_0 - x_0}{2}\right)$ és $O_2\left(\frac{-b - y_0 + x_0}{2}, \frac{x_0 + y_0 + b}{2}\right)$, tehát

$OO_1 = OO_2$ és $OO_1 \perp OO_2$. Másrészt O_3 és O_4 az O_1 és O_2 szimmetrikusa az O -ra vonatkozóan, tehát $O_1O_3 = O_2O_4$ és $O_1O_3 \perp O_2O_4$.

5. Az MON szög szárain vedd fel az $A, B, C \in (OM)$ és $A', B', C' \in (ON)$ pontokat és szerkeszd meg a $\{D\} = AB' \cap A'B$, $\{E\} = AC' \cap A'C$ és $\{F\} = BC' \cap B'C$ metszéspontokat. Bizonyítsd be, hogy D, E és F kollineárisak.

Bizonyítás. Az ábra jelöléseit használjuk, ahol $A(0, 1)$, $B(0, a)$, $C(0, a')$, $A'(1, 0)$, $B'(b, 0)$ és $C'(b', 0)$. Az $A'B$ egyenlete $y = -ax + a$, az AB' egyenlete $y = -\frac{1}{b}x + 1$, tehát a D pont koordinátái

$$x_D = \frac{b(1-a)}{1-ab} \text{ és } y_D = \frac{a(1-b)}{1-ab}.$$

Az E pont koordinátáit megkaphatjuk az $a \rightarrow a'$ és $b \rightarrow b'$ helyettesítésekkel, tehát

$$x_E = \frac{b'(1-a')}{1-a'b'} \text{ és } y_E = \frac{a'(1-b')}{1-a'b'}.$$

Ebből következik, hogy a DE egyenes egyenlete

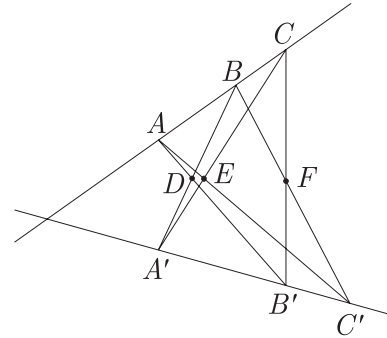
$$(1) \quad \frac{(1-ab)y - a(1-b)}{(1-ab)x - b(1-a)} = \frac{a' - a + ab - a'b' + aa'b' - aa'b}{b' - b + ab - a'b' + bb'a' - bb'a}.$$

Az F pont koordinátái $x_F = \frac{bb'(a-a')}{ab-a'b'}$ és $y_F = \frac{aa'(b-b')}{ab-a'b'}$.

Ha az x_F és y_F kifejezését visszahelyettesítjük az (1) egyenletbe és a bal oldalt egyszerűsítjük ab -vel, a jobb oldalon álló törtet kapjuk, tehát a D, E és F pontok egy egyenesen vannak.

6. Bizonyítsd be, hogy az $ABCD$ négyszögben az AC , BD és EF szakaszok felezőpontjai kollineárisak, ahol $\{E\} = AB \cap CD$ és $\{F\} = AD \cap BC$.

(Newton-Gauss egyenes)



Bizonyítás. Válasszuk C -t origónak és a CB illetve CD egyeneseket tengelyeknek.

Ha $B(b, 0)$, $F(f, 0)$, $D(0, d)$ és $E(0, e)$, akkor a DF és BE egyenesek egyenlete:

$$DF: y = -\frac{d}{f}x + d, \quad BE: y = -\frac{e}{b}x + e.$$

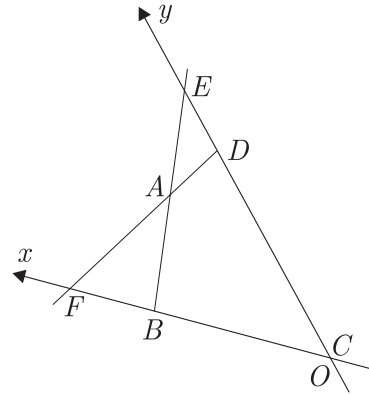
Tehát az A pont koordinátái:

$$x_A = \frac{bf(e-d)}{ef-bd} \quad \text{és} \quad y_A = \frac{ed(f-b)}{ef-bd}.$$

A felezőpontok koordinátái:

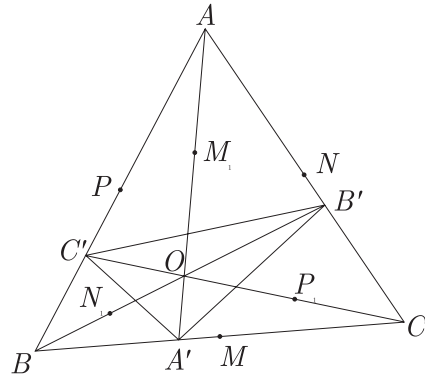
$$M\left(\frac{b}{2}, \frac{d}{2}\right), \quad N\left(\frac{f}{2}, \frac{e}{2}\right), \quad P\left(\frac{bf(e-d)}{2(ef-bd)}, \frac{ed(f-b)}{2(ef-bd)}\right).$$

Mindhárom pont az $y = \frac{d-e}{b-f}x + \frac{1}{2} \cdot \frac{be-df}{b-f}$ egyenletű egyenesen van, tehát kollineárisak.



7. Bizonyítsd be, hogy ha $A' \in (BC)$, $B' \in (CA)$ és $C' \in (AB)$ úgy, hogy $AA' \cap BB' \cap CC' \neq \emptyset$, akkor az AB és $A'B'$ illetve AC és $A'C'$ valamint BC és $B'C'$ szakaszpárok felezőpontjait összekötő egyenesek összefutóak.

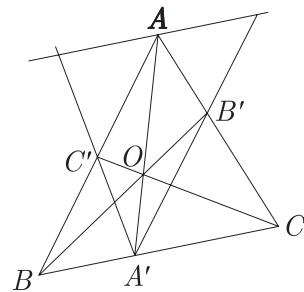
Bizonyítás. Az AB és $A'B'$ felezőpontjait összekötő egyenes az $OA'CB'$ négyszög Newton-Gauss egyenese és így tartalmazza az OC felezőpontját. Tehát elégséges igazolni, hogy $MM_1 \cap NN_1 \cap PP_1 \neq \emptyset$, ahol M_1 , N_1 és P_1 az OA , OB és OC felezőpontja. Másrészt M_1PMP_1 , M_1NMN_1 paralelogrammák ($M_1P \parallel \frac{1}{2}OB \parallel P_1M$ és $M_1N \parallel \frac{1}{2}OC \parallel MN_1$) és így az MM_1 , NN_1 és PP_1 szakaszok felezik egymást.



8. Az ABC háromszögben $A' \in (BC)$, $B' \in (CA)$ és $C' \in (AB)$ úgy, hogy $AA' \cap BB' \cap CC' \neq \emptyset$. Bizonyítsd be, hogy ha $d \parallel BC$ és $A \in d$ valamint $\{E\} = A'B' \cap d$ és $\{F\} = A'C' \cap d$, akkor $AE = AF$.

Bizonyítás. Az $AFC' \sim BA'C'$ és $AEB' \sim CA'B'$ hasonlóságok alapján

$$\frac{AF}{BA'} = \frac{AC'}{C'B} \quad \text{és} \quad \frac{AE}{A'C} = \frac{AB'}{B'C}.$$



Így $\frac{AE}{AF} = \frac{A'C}{BA'} \cdot \frac{BC'}{C'A} \cdot \frac{AB'}{B'C}$, tehát a Ceva tétel alapján $AE = AF$.

9. Határozd meg a sík azon M pontjainak mértani helyét, amelyre $MA^2 - kMB^2$ állandó, ahol A, B rögzített pontok és $k > 0$.

Megoldás. $MA^2 - kMB^2 =$

$$= (x+a)^2 + y^2 - k((x-a)^2 + y^2) =$$

$$= (1-k)x^2 + (1-k)y^2 + 2ax + 2akx + a^2 - ka^2 = c.$$

Tehát $k = 1$ esetén $x = \frac{c}{4a}$ egy AB -re merőleges

egyenes egyenlete. Ha $k \neq 1$, akkor

$$x^2 + y^2 + 2ax \cdot \frac{k+1}{1-k} + a^2 = \frac{c}{1-k},$$

tehát $y^2 + x^2 + 2a \frac{k+1}{1-k} x + \left(a \frac{k+1}{1-k}\right)^2 = \frac{c}{1-k} - a^2 + \left(a \frac{k+1}{1-k}\right)^2$, vagyis a mértani

hely üres halmaz, egy pont vagy egy kör, amelynek középpontja $\left(\frac{k+1}{k-1}a, 0\right)$ és

sugara $\sqrt{\frac{c}{1-k} - a^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{k+1}{k-1}\right)^2\right)}$ aszerint, hogy $a \frac{c}{1-k} - a^2 \left(1 - \left(\frac{k+1}{k-1}\right)^2\right)$

kifejezés negatív, nulla vagy pozitív.

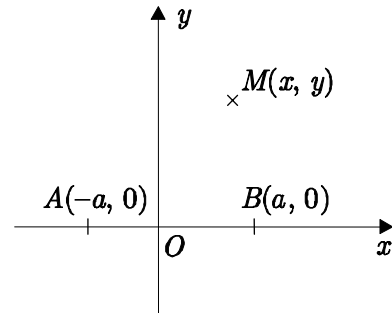
10. Határozd meg a sík azon M pontjainak mértani helyét, amelyre $MA^2 + kMB^2$ állandó, ahol A, B rögzített pontok és $k > 0$.

Megoldás. Az előbbi feladat jelöléseivel

$$MA^2 + kMB^2 = (1+k)x^2 + (1+k)y^2 + 2ax(1-k) + (1+k)a^2 = c.$$

Tehát $k > 0$ alapján a mértani hely üres halmaz, egy pont vagy egy kör aszerint, hogy

$c - (1+k)a^2 + \left(a \frac{1-k}{1+k}\right)^2$ negatív, nulla vagy pozitív.



VI.5. Gyakorlatok (159. oldal)

1. Írd fel a $2x - y + 3 = 0$ és $2x + y + 3 = 0$ valamint az $x + y - 3 = 0$ és $2x - y + 1 = 0$ egyenesek által meghatározott szögek szögfelezőinek egyenletét.

Megoldás. A szögfelező pontjai egyenlő távolságra vannak a szög két szárától.

$$\frac{|2x - y + 3|}{\sqrt{5}} = \frac{|2x + y + 3|}{\sqrt{5}},$$

tehát az egyik szögfelező $y = 0$ és a másik $x = -\frac{3}{2}$.

A második esetben $\frac{|x+y-3|}{\sqrt{2}} = \frac{|2x-y+1|}{\sqrt{5}}$ a szögfelező egyenlete, tehát

az egyik szögfelező: $(\sqrt{5}-2\sqrt{2})x + (\sqrt{5}+\sqrt{2})y - 3\sqrt{5} - \sqrt{2} = 0$

és a másik: $(\sqrt{5}+2\sqrt{2})x + (\sqrt{5}-\sqrt{2})y - 3\sqrt{5} + \sqrt{2} = 0$.

2. Határozd meg azokat a pontokat, amelyek egyenlő távolságra vannak a $2x-y+3=0$, $2x+y+3=0$ és $-2x+y+3=0$ illetve az $x+y-3=0$, $2x-y+1=0$ és $x-y+1=0$ egyenesektől.

Megoldás. A $\frac{|2x-y+3|}{\sqrt{5}} = \frac{|2x+y+3|}{\sqrt{5}} = \frac{|-2x+y+3|}{\sqrt{5}}$ egyenletrendszert kell

megoldanunk. Ez a következő négy lineáris rendszer megoldását jelenti:

$$(1) \quad 2x-y+3=2x+y+3=-2x+y+3$$

$$(2) \quad 2x-y+3=-2x-y-3=2x-y-3$$

$$(3) \quad -2x+y-3=2x+y+3=2x-y-3$$

$$(4) \quad -2x+y-3=-2x-y-3=-2x+y+3$$

A (2) és (4) egyenletrendszerek ellentmondásosak, míg a másik kettő megoldása a $(0, 0)$ és $\left(-\frac{3}{2}, -3\right)$.

A második esetben a megoldások $\left(\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-2\sqrt{2}}, 2\right)$, $\left(\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+2\sqrt{2}}, 2\right)$, $\left(1, \frac{2+3\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}\right)$ és $\left(1, \frac{2-3\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}\right)$.

3. Határozd meg azokat az $M(x, y)$ pontokat, amelyekre $d(M, d_1) + d(M, d_2) = \frac{2\sqrt{5}}{2}$, ahol d_1 és d_2 egyenlete $2x-y-1=0$ illetve $2x+y-1=0$.

Megoldás. A $\frac{|2x-y-1|}{\sqrt{5}} + \frac{|2x+y-1|}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{3}$ egyenlethez jutunk. Ebből a követ-

kező egyenletekhez jutunk:

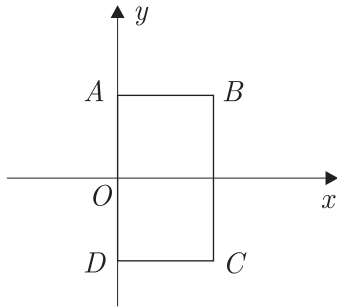
$$1. \quad 2x-y-1+2x+y-1=2, \text{ ha } 2x-y-1 \geq 0 \text{ és } 2x+y-1 \geq 0.$$

$$2. \quad 2x-y-1-2x-y+1=2, \text{ ha } 2x-y-1 < 0 \text{ és } 2x+y-1 \geq 0.$$

$$3. \quad -2x+y+1+2x+y-1=2, \text{ ha } 2x-y-1 \geq 0 \text{ és } 2x+y-1 < 0.$$

$$4. \quad -2x+y+1-2x-y+1=2, \text{ ha } 2x-y-1 < 0 \text{ és } 2x+y-1 < 0.$$

Így a megoldás az $x=1$, $y \in [-1, 1]$; $x=0$, $y \in [-1, 1]$; $y=1$, ha $0 < x < 1$ és $y=-1$, $0 < x < 1$ szakaszokból áll.



Tehát az $ABCD$ téglalap kerületén levő pontokra teljesül az adott egyenlőség.

4. Bizonyítsd be, hogy ha M , N és P a BC , CA és AB oldal felezőpontja, akkor $T[MNP] = \frac{1}{4} T[ABC]$.

Bizonyítás.

$$\begin{aligned}
 T[MNP] &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{x_B + x_C}{2} & \frac{y_B + y_C}{2} & 1 \\ \frac{x_A + x_C}{2} & \frac{y_A + y_C}{2} & 1 \\ \frac{x_A + x_B}{2} & \frac{y_A + y_B}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_B + x_C & y_B + y_C & 1 \\ x_A + x_C & y_A + y_C & 1 \\ x_A + x_B & y_A + y_B & 1 \end{vmatrix} = \\
 &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_B & y_B + y_C & 1 \\ x_C & y_A + y_C & 1 \\ x_A & y_A + y_B & 1 \end{vmatrix} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_C & y_B + y_C & 1 \\ x_A & y_A + y_C & 1 \\ x_B & y_A + y_B & 1 \end{vmatrix} = \\
 &= \frac{1}{8} \left(\begin{vmatrix} x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \\ x_A & y_A & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_B & y_C & 1 \\ x_C & y_A & 1 \\ x_A & y_B & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_C & y_C & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_C & y_B & 1 \\ x_A & y_C & 1 \\ x_B & y_A & 1 \end{vmatrix} \right) = \frac{1}{8} \begin{vmatrix} x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \\ x_A & y_A & 1 \end{vmatrix}, \\
 \text{mert } &\begin{vmatrix} x_B & y_C & 1 \\ x_C & y_A & 1 \\ x_A & y_B & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_C & y_C & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_C & y_B & 1 \\ x_A & y_C & 1 \\ x_B & y_A & 1 \end{vmatrix} = 0.
 \end{aligned}$$

5. Számítsd ki az $a_i x + b_i y + c_i = 0$, $i = \overline{1, 3}$ egyenesek metszéspontjai által meghatározott háromszög területét.

Megoldás. Lásd a III. 1.1.2. paragrafus 8. feladatát.

VI.6. Feladatok (159. oldal)

1. Az ABC háromszög oldalain vegyük fel az $M \in BC$, $N \in CA$ és $P \in AB$ pontokat. Számítsd ki a $\frac{T[MNP]}{T[ABC]}$ arányt az $\alpha = \frac{BM}{MC}$, $\beta = \frac{CN}{NA}$ és $\gamma = \frac{AP}{PB}$ függvényében.

Megoldás. Az adott egyenlőségekből következik, hogy

$$\frac{BM}{BC} = \frac{\alpha}{\alpha+1}, \quad \frac{MC}{BC} = \frac{1}{\alpha+1}, \quad \frac{NC}{AC} = \frac{\beta}{\beta+1},$$

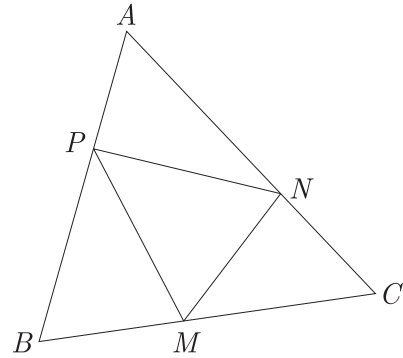
$$\frac{AN}{AC} = \frac{1}{\beta+1}, \quad \frac{AP}{AB} = \frac{\gamma}{\gamma+1} \text{ és } \frac{PB}{AB} = \frac{1}{\gamma+1}.$$

$$\text{Így } \frac{T[APN]}{T[ABC]} = \frac{AP}{AB} \cdot \frac{AN}{AC} = \frac{\gamma}{(\gamma+1)(\beta+1)},$$

$$\frac{T[BMP]}{T[ABC]} = \frac{BP}{AB} \cdot \frac{BM}{BC} = \frac{\alpha}{(\alpha+1)(\gamma+1)},$$

$$\frac{T[CMN]}{T[ABC]} = \frac{CM}{BC} \cdot \frac{CN}{AC} = \frac{\beta}{(\beta+1)(\alpha+1)}.$$

$$\begin{aligned} \text{Tehát } \frac{T[MNP]}{T[ABC]} &= 1 - \frac{\alpha}{(\alpha+1)(\gamma+1)} - \frac{\beta}{(\beta+1)(\alpha+1)} - \frac{\gamma}{(\gamma+1)(\beta+1)} = \\ &= \frac{1 + \alpha\beta\gamma}{(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)}. \end{aligned}$$



2. A , B , C és D négy rögzített pont a síkban. Határozd meg azon M síkbeli pontok mértani helyét, amelyekre $T[MCD] + T[MAB] = k$ állandó.

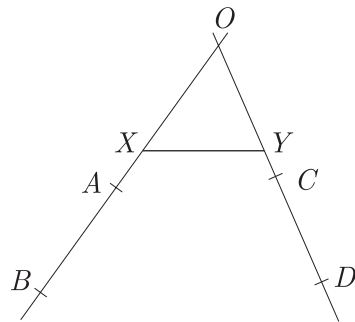
Megoldás. Ha $\{O\} = AB \cap CD$ és $X \in (OA)$, $Y \in (OC)$ úgy, hogy $OX = AB$ illetve $OY = CD$, akkor $T[MAB] + T[MCD] = T[MOX] + T[MOY]$.

Ha M a $\widehat{BOD}$ belsejében van, akkor

$$T[MOX] + T[MOY] = T[OXY] \pm T[XMY]$$

és így $T[XMY]$ állandó kell legyen. Tehát ebben az esetben a mértani hely egy szakasz. Hasonló a helyzet a BOD szög csúcshelyénél a belsejében is illetve a

másik két szögtartományban (csak az $Y' \in OD \setminus (OD)$ és $X' \in OB \setminus (OB)$ segédpontokat használjuk fel). Tehát a mértani hely egy téglalap kerülete.

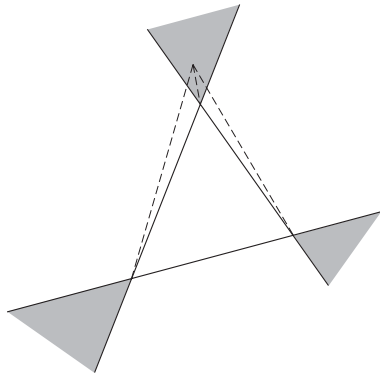
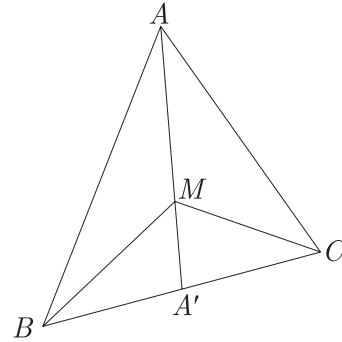


3. Határozd meg az összes olyan M pontot, amelyekre $T[MBC] = T[MCA] = T[MAB]$, ha ABC egy rögzített háromszög.

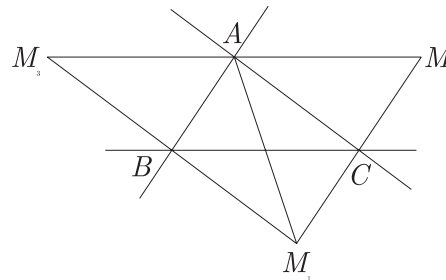
Megoldás. Ha M a háromszög belsejében van, akkor M a háromszög súlypontja, mert

$$T[MAB] = T[MAC] = T[MBC] = \frac{1}{3} T[ABC]$$

alapján $\frac{MA'}{AA'} = \frac{1}{3}$ és így $T[MBA'] = T[MA'C] = \frac{1}{6} T[ABC]$ tehát A' felezőpont. Hasonlóképpen BM és CM is oldalfelezők, tehát M súlypont.



Ha M a háromszögon kívül van, nem lehet a szírozott részben.



Ha $T[MAB] = T[MAC] = T[MBC]$ és M az ábrának megfelelő helyzetben van, akkor $MBAC$ paralelogramma. Így három ilyen pont létezik, tehát összesen (a súlyponttal együtt) négy pontra teljesülnek az adott egyenlőségek.

4. Határozd meg azon M pontok mértani helyét, amelyeknek egy szög két szárától mért távolságai adott arányban vannak.

Megoldás. Ha $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ és $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ a szög két szára, akkor a

$$\frac{|a_1x + b_1y + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = k \cdot \frac{|a_2x + b_2y + c_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

egyenlethez jutunk. Ha a szög csúcsa $O(x_o, y_o)$, akkor az előbbi egyenlőség két O -n áthaladó egyenes egyenletét adja, tehát a mértani hely két O -n áthaladó egyenes.

5. Az ABC háromszög oldalaira kifele megszerkesztjük az ABB_1A_2 , BCC_1B_2 , CAA_1C_2 téglalapokat. Bizonyítsd be, hogy az A_1A_2 , B_1B_2 és C_1C_2 szakaszok felezőmerőlegesei összefutó egyenesek.

Bizonyítás. Ha $BB_2 = x$, a CC_2 és BB_1

BC -re eső vetületének hossza y és z , akkor a következő koordinátákat kapjuk (BC az Ox tengely és az A -ból induló magasság az Oy):

$A(0, a)$, $B(-b, 0)$, $C(c, 0)$, $B_2(-b, -x)$,

$C_1(c, -x)$, $C_2\left(c + y, \frac{c}{a}y\right)$, $A_1\left(y, \frac{c}{a}y + a\right)$,

$A_2\left(-z, \frac{b}{a}z + a\right)$, $B_1\left(-b - z, \frac{b}{a}z\right)$. Az oldalfele-

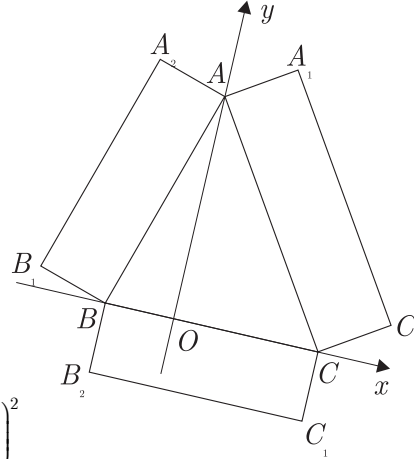
ző merőlegesek egyenlete:

$$\begin{cases} 2Xz - 2Y\left(\frac{bz}{a} + x\right) = x^2 - z^2 - 2bz - \left(\frac{bz}{a}\right)^2 \\ 2Xy + 2Y\left(\frac{c}{a}y + x\right) = -x^2 + y^2 + 2cy + \left(\frac{c}{a}y\right)^2 \\ -2X(y + z) - 2Y\left(\frac{c}{a}y - \frac{b}{a}z\right) = z^2 - y^2 + \left(\frac{bz}{a}\right)^2 - \left(\frac{cy}{a}\right)^2 + 2bz - 2cy \end{cases}$$

Ez a rendszer összeférhető mert a harmadik egyenlet az első kettő összegéből előállítható (-1) -gyel való beszorzás útján, tehát az egyenesek összefutóak.

6. Legyen O az A -ban derékszögű ABC háromszög A -ból húzott magasságának talppontja, D az $[AC]$ befogó felezőpontja, E pedig a $[BC]$ átfogó tetszőleges pontja. Az AE és OD egyenesek F -ben metszik egymást. Igazoljuk, hogy a CF egyenes az ABE_{Δ} H magasságpontján megy át!

Bizonyítás. Ha $AO \cap CF = \{G\}$, akkor az AOC háromszögben OD , AE és CG összefutásából és $CD = DA$ -ból következik, hogy $EG \parallel AC$, tehát EG az ABE háromszög E -hez tartozó magassága. $AO \perp EB$ alapján G az ABE háromszög ortocentruma, tehát CF áthalad az ABE háromszög ortocentrumán.



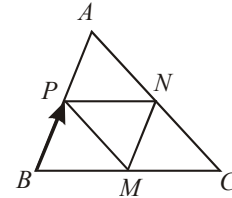
VII. Vektorok a síkban

VII.1.1. Gyakorlatok (162. oldal)

1. Az ABC_{Δ} (BC) , (CA) és (AB) oldalainak felezőpontjai rendre M , N és P . (VII.7. ábra)

a) Bizonyítsd be, hogy $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{PM}$;

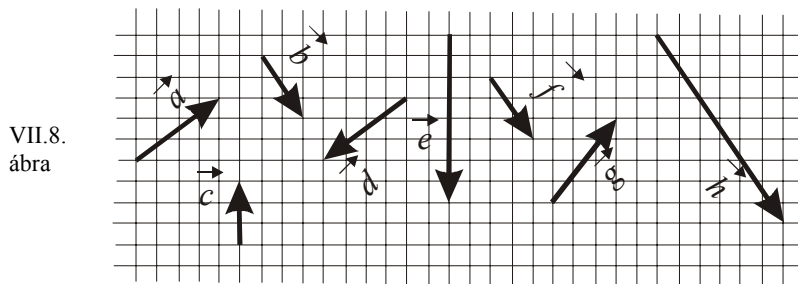
b) Határozd meg a $\overrightarrow{PB}$ vektorral egyenlő vektorokat.



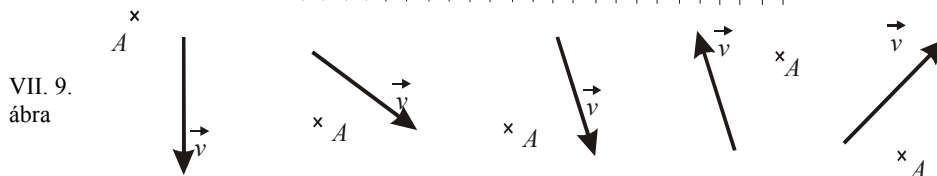
VII. 7. ábra

Megoldás. a) Mivel az AN , NC szakaszok tartóegyenesei megegyeznek és $[AN] = [NC]$, következik, hogy $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NC}$. Az ABC háromszögben PM középvonal, így $PM \parallel AC$ és $[PM] = \frac{1}{2} \cdot [AC] = [NC]$, vagyis $\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{PM}$.

b) $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{NM}$.



VII.8. ábra



VII. 9. ábra

2. Határozd meg azokat a vektorokat a VII.8. ábrán, amelyek:

a) azonos hosszúságúak;

b) azonos irányúak;

c) azonos irányításúak;

d) ellentétes irányításúak.

Megoldás. a) $\|\vec{a}\| = \|\vec{d}\| = \|\vec{g}\|$, $\|\vec{b}\| = \|\vec{c}\| = \|\vec{f}\|$.

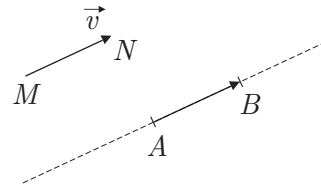
b) Az $\{\vec{a}, \vec{d}\}$, $\{\vec{b}, \vec{f}, \vec{h}\}$, $\{\vec{c}, \vec{e}\}$ halmazok elemei azonos irányúak.

c) Azonos irányításúak a $\vec{b}, \vec{f}, \vec{h}$ vektorok.

d) Ellentétes irányításúak az $\vec{a}$ és $\vec{d}$, valamint a $\vec{c}$ és $\vec{e}$ vektorok.

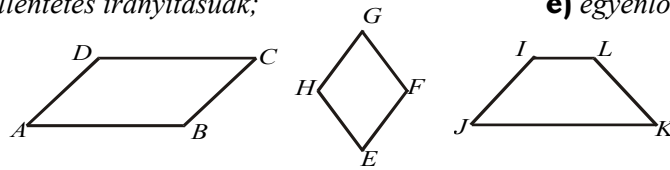
3. Szerkessz egy $\vec{v}_i$ vektorral egyenlő, A kezdőpontú vektort a VII. 9. ábrán látható vektorok esetén.

Megoldás. A $\vec{v}$ vektorral egyenlő, A kezdőpontú vektort úgy szerkeszthetünk, hogy $\vec{v} = \overrightarrow{MN}$ tartó-egyenésével párhuzamost húzunk A -ból és felvesszük a B pontot ezen az egyenesen úgy, hogy $MNBA$ paralelogramma legyen.



4. A VII.10. ábrán $ABCD$ paralelogramma, $EFGH$ rombusz és $IJKL$ egyenlő szárú trapéz. Határozd meg esetenként azokat a vektorokat, amelyek

- a)** azonos hosszúságúak; **b)** azonos irányúak; **c)** azonos irányításúak;
d) ellentétes irányításúak; **e)** egyenlők.



VII. 10. ábra

Megoldás. a) $|\overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{BA}|$; $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{DA}| = |\overrightarrow{CB}|$;
 $|\overrightarrow{HG}| = |\overrightarrow{GF}| = |\overrightarrow{FE}| = |\overrightarrow{EH}| = |\overrightarrow{HE}| = |\overrightarrow{EF}| = |\overrightarrow{FG}| = |\overrightarrow{GH}|$;
 $|\overrightarrow{IJ}| = |\overrightarrow{JI}| = |\overrightarrow{LK}| = |\overrightarrow{KL}|$.

b) Az $\{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}\}$, $\{\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}\}$, $\{\overrightarrow{HG}, \overrightarrow{GH}, \overrightarrow{FE}, \overrightarrow{EF}\}$, $\{\overrightarrow{IL}, \overrightarrow{JK}\}$ halmazokban az elemek azonos irányúak.

c) Az $\{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}\}$, $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}\}$, $\{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{CB}\}$, $\{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD}\}$;

$\{\overrightarrow{HG}, \overrightarrow{EF}\}$, $\{\overrightarrow{HE}, \overrightarrow{GF}\}$, $\{\overrightarrow{EH}, \overrightarrow{FG}\}$, $\{\overrightarrow{GH}, \overrightarrow{FE}\}$;

$\{\overrightarrow{IL}, \overrightarrow{JK}\}$, $\{\overrightarrow{LI}, \overrightarrow{KJ}\}$

halmazokban az elemek azonos irányításúak.

d) Az $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{CB})$, $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD})$, $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC})$, $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC})$,

$(\overrightarrow{HG}, \overrightarrow{FE}, \overrightarrow{GH})$, $(\overrightarrow{GF}, \overrightarrow{EH}, \overrightarrow{FG})$, $(\overrightarrow{GH}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{HG})$, $(\overrightarrow{IL}, \overrightarrow{LI}, \overrightarrow{KJ})$,

$(\overrightarrow{LI}, \overrightarrow{IL}, \overrightarrow{JK})$

csoportokban az első elemmel ellentétes irányítású a többi.

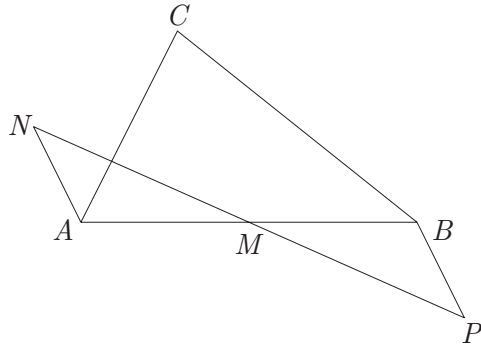
e) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{FE}$,
 $\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{HE}$, $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{EH}$.

5. Legyen M egy pont az $[AB]$ szakaszon. Bizonyítsd be, hogy M pontosan akkor felezőpontja az $[AB]$ szakasznak, ha $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$.

Bizonyítás. Mivel az $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MB}$ vektorok tartóegyenesei megegyeznek (az A , M , B pontok kollinearitása alapján), az $\overrightarrow{AM}$ és $\overrightarrow{MB}$ vektorok akkor és csak akkor egyenlők, ha $\|\overrightarrow{AM}\| = \|\overrightarrow{MB}\|$, vagyis ha $[AM] = [MB]$, ami azt jelenti, hogy M felezőpontja az AB szakasznak.

6. Legyen M az $[AB]$ szakasz felezőpontja valamint N és P két pont úgy, hogy $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{PB}$. Bizonyítsd be, hogy az N , M és P pontok kollineárisak.

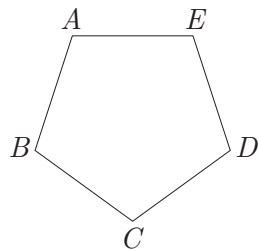
Bizonyítás



Az $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{PB}$ feltétel alapján az AB és NP szakaszok felezőpontjai egybeesnek. Mivel M felezi az $[AB]$ szakaszt, következik, hogy M felezi az $[NP]$ szakaszt is, tehát N , M , P kollineárisak.

7. Bizonyítsd be, hogy az $ABCDE$ szabályos ötszög tetszőleges két csúcsa által meghatározott vektorok közt nincsenek egyenlők! Hány különböző vektort határoznak meg egy paralelogramma, illetve egy szabályos hatszög csúcsai?

Bizonyítás



Ha létezne két ilyen vektor, akkor a végpontjaik által meghatározott négyszög paralelogramma kellene legyen, azonban bárhogyan választunk ki négyet öt csúcs közül, a keletkeztetett négyszög sosem lehet paralelogramma.

Egy $ABCD$ paralelogramma csúcsai 8 különböző vektort határoznak meg, ezek a következők: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{DB}$. Egy szabályos hatszög csúcsai 16 különböző vektort határoznak meg.

8. Bizonyítsd be, hogy ha $(A, C) \sim (B, D)$, akkor $(A, B) \sim (C, D)$.

Bizonyítás. Ha M az $[AD]$ szakasz felezőpontja, akkor az $(A, C) \sim (B, D)$ feltételből következik, hogy M felezi a $[CB]$ szakaszt is, innen M felezi mind az $[AD]$, mind a $[BC]$ szakaszt, tehát $(A, B) \sim (C, D)$.

VII. 4. Gyakorlatok és feladatok (174. oldal)

1. Írd fel az ABC_{Δ} BC oldalának M harmadoló pontja ($BM = 2MC$) esetén az $\overrightarrow{AM}$ vektort az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ lineáris kombinációjaként.

Megoldás. A $BM = 2MC$ feltétel alapján $\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{MC}$. Az $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{MC}$ és $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{MC}$ egyenlőségekből kiküszöbölve $\overrightarrow{MC}$ -t, kapjuk, hogy $\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{MC}$, ahonnan $\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}}{3}$.

2. Legyen $ABCD$ paralelogramma, O az átlók metszéspontja, M az $[AO]$ szakasz felezőpontja és $N \in [AB]$ úgy, hogy $\frac{AN}{AB} = \frac{1}{3}$.

A) Fejezd ki:

- a) az $\overrightarrow{AM}$ vektort az $\overrightarrow{AC}$ függvényében;
- b) a $\overrightarrow{CM}$ vektort az $\overrightarrow{AC}$ függvényében;
- c) az $\overrightarrow{AC}$ vektort az $\overrightarrow{AD}$ és $\overrightarrow{AB}$ lineáris kombinációjaként;
- d) az $\overrightarrow{AC}$ vektort az $\overrightarrow{AD}$ és $\overrightarrow{BA}$ lineáris kombinációjaként;
- e) az $\overrightarrow{AO}$ vektort az $\overrightarrow{AD}$ és $\overrightarrow{AB}$ lineáris kombinációjaként;
- f) a $\overrightarrow{DM}$ vektort a $\overrightarrow{DA}$ és $\overrightarrow{DC}$ lineáris kombinációjaként;
- g) a $\overrightarrow{DN}$ vektort a $\overrightarrow{DA}$ és $\overrightarrow{DC}$ lineáris kombinációjaként.

B) Bizonyítsd be, hogy az N , M és D pontok kollineárisak.

Legyen A , B , C és D négy pont a síkban. Állapítsd meg, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak. Indokold meg a válaszaidat!

„Ha $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, akkor $ABCD$ paralelogramma ”

„Ha $MNPQ$ paralelogramma, akkor $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$. ”

„Ha $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, akkor $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. ”

„Ha $AB = CD$, akkor $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. ”

„Ha $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, akkor $AB = CD$. ”

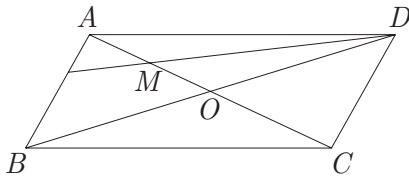
„Ha $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, akkor $AB = CD$. ”

„ $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$. ”

„ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$. ”

„Ha M a $[BC]$ felezőpontja, akkor $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$. ”

„Ha $\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{MC}$, akkor $\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}}{3}$. ”

Megoldás

A) a) Az $\overrightarrow{AM}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok azonos irányításúak és $|AM| = \frac{1}{4} \cdot |AC|$, így $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AC}$.

b) $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{AC}$ ellentétes irányításúak, $|CM| = \frac{3}{4} |AC|$, így $\overrightarrow{CM} = -\frac{3}{4} \overrightarrow{AC}$.

c) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

d) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$.

e) $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}}{2}$.

f) Az M pont $k = \frac{AM}{MC} = \frac{1}{3}$ arányban osztja az $[AC]$ szakaszt, így

$$\overrightarrow{DM} = \frac{\overrightarrow{DA} + k \cdot \overrightarrow{DC}}{k+1} = \frac{3 \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}}{4}.$$

g) $\frac{AN}{NB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \overrightarrow{DN} = \frac{2 \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}}{3} = \frac{2 \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}}{3} = \frac{3 \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}}{3}.$

B) Felhasználva az **f), g)** alpontokat, kapjuk, hogy

$$\overrightarrow{DN} = \frac{3\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}}{3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}}{4} = \frac{4}{3} \cdot \overrightarrow{DM},$$

vagyis a $\overrightarrow{DN}$ és $\overrightarrow{DM}$ vektorok tartóegyenesei megegyeznek, ami azt jelenti, hogy a D, N, M pontok kollineárisak.

A „Ha $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$, akkor $ABCD$ paralelogramma” állítás csak abban az esetben igaz, ha az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{CB}$ tartóegyenese nem megegyező.

Ha $MNPQ$ paralelogramma, akkor $MN \parallel PQ$, $|MN| = |PQ|$, de az irányításuk ellentétes, így $\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{PQ}$.

Ha $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, akkor $[AD]$ és $[BC]$ felezőpontjai megegyeznek, így $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Abból, hogy $AB = CD$, nem következik, hogy $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ (nem biztos, hogy hosszuk is megegyezik), viszont írhatjuk, hogy $\overrightarrow{AB} = \lambda \cdot \overrightarrow{CD}$, ahol λ egy valós szám.

Ha $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, akkor $AB = CD$ vagy $AB \parallel CD$.

Ha $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, akkor $AB = CD$ vagy $AB \parallel CD$.

A háromszög-szabály értelmében igaz az $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$ egyenlőség.

Az $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$ egyenlőség pontosan akkor igaz, ha az A és B pontok egybeesnek.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow A = B.$$

Ha M a $[BC]$ felezőpontja, akkor $\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MC}$.

$$\text{Ha } \overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{MC}, \text{ akkor } \overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}}{2+1} = \frac{\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}}{3}.$$

3. Bizonyítsd be, hogy ha $ABCD$ tetszőleges négyszög, akkor $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$.

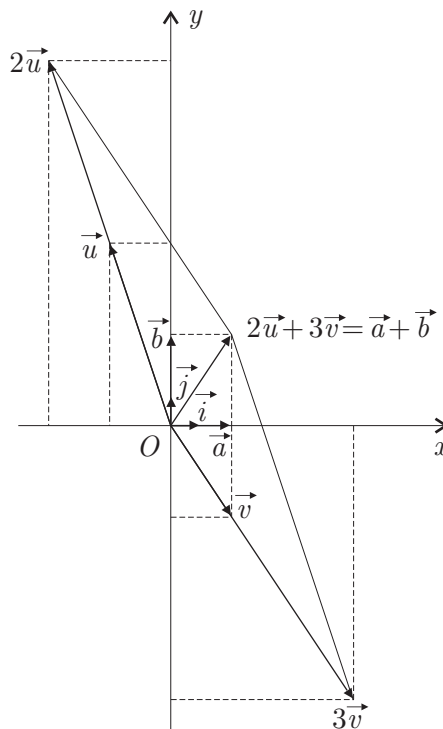
Bizonyítás. Háromszor felhasználva a háromszög-szabályt, írhatjuk, hogy

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}.$$

4. Ha $\vec{i}$ és $\vec{j}$ egymásra merőleges egységvektorok, ábrázoljuk a derékszögű koordináta-rendszerben az alábbi vektorokat:

a) $\vec{a} = 2\vec{i}$; **b)** $\vec{b} = 3\vec{j}$; **c)** $\vec{u} = -\vec{a} + 2\vec{b}$; **d)** $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$; **e)** $2\vec{u} + 3\vec{v}$.

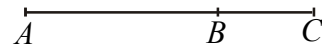
Megoldás



$$2\vec{u} + 3\vec{v} = 2(-\vec{a} + 2\vec{b}) + 3(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} + \vec{b}$$

5. A VII. 31. ábrán $AB = 2$ és $BC = 1$.

a) Írd fel az $\overrightarrow{AB}$ vektort a $\overrightarrow{BC}$ függvényében;



VII.31. ábra

b) Írd fel az $\overrightarrow{AC}$ vektort a $\overrightarrow{BA}$ függvényében.

Megoldás. a) $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BC}$; b) $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{BC} = 3 \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{BA}$.

6. Az ABC_{Δ} -ben $E \in (AB)$, $F \in (AC)$ úgy, hogy $EF \parallel BC$ és $AF = 2$ valamint $FC = 3$.

Fejezd ki: a) $\overrightarrow{AF}$ -t az $\overrightarrow{AC}$ függvényében;

b) $\overrightarrow{BC}$ -t az $\overrightarrow{EF}$ függvényében;

c) $\overrightarrow{EA}$ -t az $\overrightarrow{AB}$ függvényében.

Megoldás. a) $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$.

b) Az AEF és ABC háromszögek hasonlósága alapján $\frac{BF}{BC} = \frac{AF}{AC} = \frac{2}{5}$, így $\overrightarrow{BC} = \frac{5}{2}\overrightarrow{EF}$.

c) $\frac{EA}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{2}{5} \Rightarrow \overrightarrow{EA} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$.

7. A VII. 32. ábrán $AC \parallel BD$, $AC = 4$ és $BD = 3$

Fejezd ki: a) $\overrightarrow{CO}$ -t az $\overrightarrow{OD}$ függvényében;

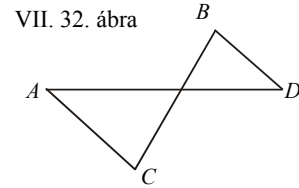
b) $\overrightarrow{AO}$ -t az $\overrightarrow{BO}$ függvényében;

c) $\overrightarrow{BD}$ -t az $\overrightarrow{AC}$ függvényében.

Megoldás. $AOC_{\Delta} \sim BOD_{\Delta}$ és $\frac{AC}{BD} = \frac{4}{3}$, tehát

a) $\overrightarrow{CO} = \frac{|\overrightarrow{CO}|}{|\overrightarrow{OD}|} \cdot \overrightarrow{OD} = \frac{4}{3}\overrightarrow{OD}$; b) $\overrightarrow{AO} = -\frac{|\overrightarrow{AO}|}{|\overrightarrow{BO}|} \cdot \overrightarrow{BD} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{BD}$;

c) $\overrightarrow{BD} = -\frac{|\overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{AC}|} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.



8. Bizonyítsd be, hogy egy véges vektorösszegben a tagok sorrendjét tetszőlegesen megváltoztathatjuk és tetszőleges csoportosításokat végezhetünk, mert az összeg nem változik.

Bizonyítás. Három vektor esetén a 2.1.3. tétel alapján

$$\vec{a}_1 + (\vec{a}_2 + \vec{a}_3) = (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) + \vec{a}_3 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3$$

és a kommutativitás alapján a sorrend felcserélésével is az $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3$ összeget kapjuk.

$$\begin{aligned} \vec{a}_3 + \vec{a}_1 + \vec{a}_2 &= (\vec{a}_3 + \vec{a}_1) + \vec{a}_2 = (\vec{a}_1 + \vec{a}_3) + \vec{a}_2 = \vec{a}_1 + (\vec{a}_3 + \vec{a}_2) = \\ &= \vec{a}_1 + (\vec{a}_2 + \vec{a}_3) = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3. \end{aligned}$$

A továbbiakban indukciót használunk. Ha a tulajdonság igaz minden $n \leq m$ -re, akkor m tetszőleges vektor $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m)$ esetén, tetszőleges sorrend és tetszőleges zárójelzés (csoportosítás) esetén az összeg $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_m$.

Ha $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m, \vec{a}_{m+1}$ $(m+1)$ tetszőleges vektor és S egy tetszőleges összeg, amelyet ezekből a vektorokból szerkesztünk sorrend megváltoztatásával és csoportosítással, akkor a következő eseteket különböztetjük meg:

1. eset. Ha $\vec{a}_{m+1}$ nincs zárójel belsejében, akkor az összeg utolsó tagjával (csoportjával) felcserélhető és így az $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ vektorokra alkalmazhatjuk az indukciós feltételt. Tehát

$$S = (\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_m) + \vec{a}_{m+1} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_m + \vec{a}_{m+1}.$$

2. eset. Ha $\vec{a}_{m+1}$ valamilyen zárójel belsejében van, akkor az őt tartalmazó legkisebb csoport összegét egy vektornak, $\vec{p}$ -nek tekintjük. Így legfeljebb $m-1$ vektort kapunk, tehát az indukciós feltevés alapján

$$S = (\vec{a}_{i_1} + \vec{a}_{i_2} + \dots + \vec{a}_{i_k}) + \vec{p}.$$

Ugyanakkor $\vec{p}$ sem tartalmazhat m -nél több tagot, tehát az indukciós feltétel alapján

$$S = (\vec{a}_{i_1} + \vec{a}_{i_2} + \dots + \vec{a}_{i_k}) + (\vec{a}_{i_{k+1}} + \dots + \vec{a}_{i_{m+1}}),$$

ahol $i_1 < i_2 < \dots < i_k, i_{k+1} < i_{k+2} < \dots < i_{m+1} = m+1$, valamint $\{i_j \mid j = \overline{1, m+1}\} = \{1, 2, \dots, m+1\}$. Ez alapján

$$\begin{aligned} S &= (\vec{a}_{i_1} + \dots + \vec{a}_{i_k}) + (\vec{a}_{i_{k+1}} + \dots + \vec{a}_{i_m}) + \vec{a}_{i_{m+1}} = \\ &= (\vec{a}_{i_1} + \dots + \vec{a}_{i_k} + \vec{a}_{i_{k+1}} + \dots + \vec{a}_{i_m}) + \vec{a}_{i_{m+1}} = \\ &= (\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_m) + \vec{a}_{m+1} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_{m+1}. \end{aligned}$$

Tehát az állítás $(m+1)$ vektor esetén is igaz. Így a matematikai indukció elve alapján a tulajdonság minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén igaz.

9. Számítsd ki az $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FA}$ összeget, ha $ABCDEF$ egy hatszög a síkban.

Megoldás. A háromszög-szabály többszöri alkalmazásával kapjuk, hogy

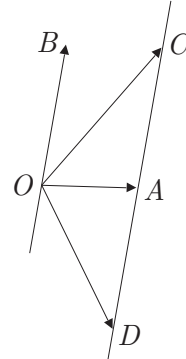
$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FA} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FA} = \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FA} = \vec{0}. \end{aligned}$$

10. Bizonyítsd be, hogy az $\vec{u}$ és $\vec{v}$ vektorok merőlegességének szükséges és elégséges feltétele, hogy $|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u} - \vec{v}|$.

Bizonyítás. Legyen O egy tetszőleges pont és A, B, C, D úgy, hogy $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{u} + \vec{v}$, $\overrightarrow{OD} = \vec{u} - \vec{v}$. Ekkor $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD} = \vec{v}$ és $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = 2\vec{v}$, tehát D, A és C kollineárisak, $DC \parallel OB$ és A a $[CD]$

felezőpontja.

Az $|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u} - \vec{v}|$ feltétel egyenértékű azzal, hogy az OCD háromszög egyenlő szárú, s mivel A a $[CD]$ felezőpontja, ekvivalens azzal is, hogy $\vec{OA} \perp \vec{DC}$, vagyis $\vec{u} \perp 2\vec{v}$, ami a két vektor merőlegességét jelenti.



Megjegyzés. Az $OACB$ négyszög téglalap.

11. Bizonyítsd be, hogy az $\vec{u} + \vec{v}$ és $\vec{u} - \vec{v}$ vektorok merőlegességének szükséges és elégséges feltétele, hogy $|\vec{u}| = |\vec{v}|$.

Bizonyítás. Ha az előző feladatba $\vec{u}$ helyett $(\vec{u} + \vec{v})$ -t, $\vec{v}$ helyett pedig $(\vec{u} - \vec{v})$ -t teszünk, kapjuk, hogy az $\vec{u} + \vec{v}$ és $\vec{u} - \vec{v}$ vektorok merőlegességének szükséges és elégséges feltétele az, hogy $|\vec{u} + \vec{v} + \vec{u} - \vec{v}| = |\vec{u} + \vec{v} - \vec{u} + \vec{v}|$, vagyis $|\vec{u}| = |\vec{v}|$.

Megjegyzés. Az $OACB$ négyszög rombusz.

12. Ha A és B két rögzített pont, határozd meg azt az M pontot, amelyre:

- a) $\vec{AM} = 2\vec{MB}$; b) $3\vec{MA} + \vec{MB} = \vec{0}$; c) $2\vec{MA} - 3\vec{MB} = \vec{0}$;
d) $k\vec{MA} + \vec{MB} = \vec{0}$; e) $\vec{MA} + k\vec{MB} = \vec{0}$; f) $m\vec{MA} + n\vec{MB} = \vec{0}$.

Megoldás. a) Ha $\vec{AM} = 2\vec{MB}$, akkor az A , M és B pontok egy egyenesen vannak és a sorrend $A - M - B$. Tehát M az AB szakasz B -hez közelebb eső harmadolópontja.

b) Az egyenlőség $\vec{BM} = 3\vec{MA}$ alakban is írható, tehát M az AB szakasz A -hoz közelebb eső negyedelőpontja.

c) A $2\vec{MA} = 3\vec{MB}$ egyenlőségből következik, hogy az M , A és B pont egy egyenesen van, M az $[AB]$ szakaszon kívül van és $\frac{MA}{MB} = \frac{3}{2}$.

d) $\vec{BM} = k \cdot \vec{MA}$, tehát ha $k > 0$, akkor $M \in (AB)$, ha $k = 0$, akkor $M = B$ és ha $k < 0$, akkor $M \notin [AB]$. Az első és az utolsó esetben $\frac{BM}{MA} = |k|$.

e) Ha $k > 0$, akkor $M \in (AB)$, ha akkor $M = A$ és ha $k < 0$, akkor $M \notin [AB]$. Az első és az utolsó esetben $\frac{MA}{MB} = |k|$.

f) Ha $m = n = 0$, akkor az egyenlőség minden M pontra teljesül. Ha $m = 0$ és $n \neq 0$, akkor $M = B$, míg ha $m \neq 0$ és $n = 0$, akkor $M = A$. Ha $m \neq 0 \neq n$, akkor az egyenlőség $\vec{BM} = \frac{m}{n} \cdot \vec{MA}$ alakban írható. Tehát $m \cdot n > 0$ esetén

$M \in (AB)$ és $\frac{BM}{MA} = \frac{m}{n}$, $m \cdot n < 0$ esetben pedig $M \notin [AB]$ és $\frac{BM}{MA} = -\frac{m}{n}$.

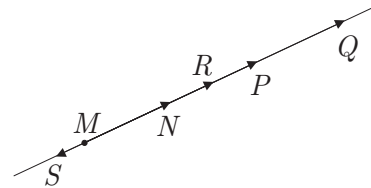
13. Ha az $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ és $\overrightarrow{OD}$ vektorok egyenlő nagyságúak és összegük nulla, mit állíthatunk az A , B , C és D pontokról?

Megoldás. Abból, hogy $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OD}|$, következik, hogy az A , B , C , D pontok egy O középpontú körön helyezkednek el. Ha M és N az $[AB]$, illetve a $[CD]$ szakasz felezőpontja, az $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ feltételből következik, hogy $\frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} = -\frac{\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{2}$, vagyis $\overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{ON}$. Figyelembe véve, hogy az $OM \perp AB$, $ON \perp CD$ (az OAB , OCD háromszögek egyenlő szárúak), kapjuk, hogy $AB \parallel CD$ és $|AB| = |CD|$, tehát $ABCD$ egy paralelogramma. Mivel $ABCD$ körbeírható, következik, hogy $ABCD$ egy téglalap.

14. Adott $\vec{u}$ vektor esetén adjál szerkesztést a következő vektorokra:

- a) $2\vec{u}$; b) $\frac{3}{2}\vec{u}$; c) $-\frac{1}{3}\vec{u}$; d) $\sqrt{3}\vec{u}$.

Megoldás. Ha $\vec{u} = \overrightarrow{MN}$ és P az M pont N szerinti szimmetrikusa, akkor $\overrightarrow{MP} = 2\overrightarrow{MN} = 2\vec{u}$. Ha $Q \in (MN)$ úgy, hogy $MQ = 3MN$ és R az MQ szakasz felezőpontja, akkor $\overrightarrow{MR} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MN} = \frac{3}{2}\vec{u}$. Ha $S \in MN \setminus (MN)$ és $MS = \frac{1}{3}MN$, akkor



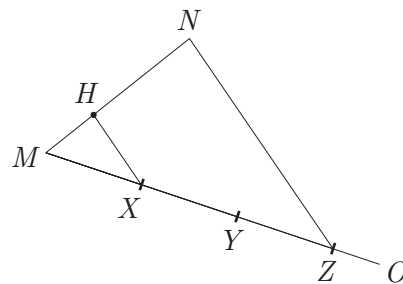
$\overrightarrow{MS} = -\frac{1}{3}\vec{u}$. Ha $T \in (MN)$ úgy, hogy $MT = \sqrt{3}MN$, akkor $\overrightarrow{MT} = \sqrt{3}\vec{u}$. Tehát

körző és vonalzó segítségével a Q , R , S , T pontokat kell megszerkeszteni.

1. $\{Q\} = MN \cap \mathbf{C}(N, MN)$, tehát Q az N középpontú, MN sugarú kör és MN metszeteiként szerkeszthető.

2. Ha $\mathbf{C}(M, R) \cap \mathbf{C}(Q, R) = \{A, B\}$, ahol $R > MN$, akkor AB az MQ felezőmerőlegese, tehát $AB \cap MQ = \{R\}$.

3. Tetszőleges MN szakasz harmadolópontját a következőképpen szerkeszthetjük meg: Az MO felezőmerőlegesen ($\neq (MN)$) felvesszünk egy tetszőleges X pontot, majd körzővel felmérjük az $YX = MX$ és $ZY = MX$ távolságokat. Az X ponton át párhuzamost húzunk az NZ -hez és a $d \cap MN = \{H\}$ pont az M -hez közelebb eső harmadolópont. A párhuzamost úgy szerkesztjük meg, hogy az NY -ra még egyszer rámérjük NY -t és így az $NXUZ$ paralelogramma U csúcsát kapjuk.



4. Ha N -ben merőlegest emelünk MN -re (például párhuzamost húzunk a felezőmerőlegeshez) és ezen felmérjük az $AN = MN$ távolságot, akkor $MA = \sqrt{2}MN$ és ha felmérjük a $BN = MA$ távolságot, akkor $MB = \sqrt{3}MN$, tehát ezt a távolságot visszamérve MN meghosszabbítására, a T pontot kapjuk.

15. Írd fel az $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ vektort az $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$ és $\vec{b} = -2\vec{i} + 5\vec{j}$ vektorok lineáris kombinációjaként. Fel lehet-e írni affín vagy konvex kombinációként?

Megoldás. Legyen $\vec{u} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$, ahol α, β meghatározandó valós számok (skalárok). Ekkor $3\vec{i} - 2\vec{j} = \alpha \cdot (\vec{i} + \vec{j}) + \beta \cdot (-2\vec{i} + 5\vec{j})$, vagyis $(3 - \alpha + 2\beta)\vec{i} + (-2 - \alpha - 5\beta)\vec{j} = \vec{0}$. Így a

$$\begin{cases} 3 - \alpha + 2\beta = 0 \\ -2 - \alpha - 5\beta = 0 \end{cases}$$

egyenletrendszerhez jutunk, amelynek megoldása $\alpha = \frac{11}{7}$, $\beta = -\frac{5}{7}$.

Tehát $\vec{u} = \frac{11}{7}\vec{a} - \frac{5}{7}\vec{b}$. Mivel $\vec{u}$ csak így írható fel mint az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok lineáris kombinációja, nem írható fel affín vagy konvex kombinációként.

16. Bizonyítsd be, hogy a $\vec{v} = 2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}$ vektor nem függ M megválasztásától, ha A, B és C rögzítettek.

Bizonyítás. Tetszőleges M pont esetén

$$\vec{v} = 2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC} = \vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MA} - \vec{MC} = \vec{BA} + \vec{CA},$$

vagyis $\vec{v}$ független az M pont megválasztásától.

17. Bizonyítsd be, hogy ha az $ABCD$ négyszög átlóinak O metszéspontjára $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}$, akkor $ABCD$ paralelogramma.

Bizonyítás. Tekintsük az M, N pontokat, amelyekre $\vec{OA} + \vec{OC} = \vec{OM}$ és $\vec{BO} + \vec{DO} = \vec{ON}$. Az O, A, C illetve O, B, D pontok kollinearitása alapján $M \in AC$ és $N \in BD$. A feltétel még így is írható: $\vec{OA} + \vec{OC} = \vec{BO} + \vec{DO}$, vagyis $\vec{OM} = \vec{ON}$, s mivel $M \in AC$ és $N \in BD$, következik, hogy $M = N = O$. Ezt visszahelyettesítve kapjuk, hogy $\vec{OA} + \vec{OC} = \vec{BO} + \vec{DO} = \vec{0}$, tehát O felezi mindkét átlót. Mivel az átlók felezőpontjai megegyeznek, az $ABCD$ négyszög paralelogramma.

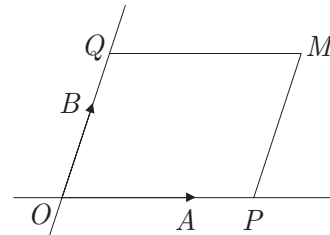
18. Határozd meg azon M pontok mértani helyét, amelyekre $|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}| = |3\vec{MA} - 2\vec{MB} - \vec{MC}|$, ahol A, B és C rögzített pontok.

Megoldás. Ha G az ABC háromszög súlypontja, akkor $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$. Ha X a BC szakasz B -hez közelebbi harmadolópontja, akkor $3\vec{MX} = 2\vec{MB} + \vec{MC}$,

tehát $3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MX} = 3\overrightarrow{XA}$. Így az $|\overrightarrow{MG}| = |\overrightarrow{XA}|$ egyenlőség kell teljesüljön, tehát a mértani hely a G középpontú, AX sugarú kör.

19. Bizonyítsd be, hogy ha az O , A , és B pont nincs egy egyenesen, akkor bármely M pont esetén létezik olyan λ_1 , λ_2 valós szám, amelyre $\overrightarrow{OM} = \lambda_1 \overrightarrow{OA} + \lambda_2 \overrightarrow{OB}$.

Bizonyítás. Mivel O , A , B nem kollineárisak, az M ponton át az OA , illetve OB egyenesekhez húzott párhuzamosok metszik az OB , OA -t a Q illetve P pontokban. A P ekkor OA -n helyezkedik el, így létezik olyan λ_1 valós szám, amelyre $\overrightarrow{OP} = \lambda_1 \overrightarrow{OA}$. Hasonlóan, létezik λ_2 valós szám úgy, hogy $\overrightarrow{OQ} = \lambda_2 \overrightarrow{OB}$. Ekkor viszont $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QM} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OP} = \lambda_1 \overrightarrow{OA} + \lambda_2 \overrightarrow{OB}$.



20. Bizonyítsd be, hogy egyetlen olyan G pont létezik az ABC_Δ síkjában, amelyre $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ és ezen a ponton áthaladnak a háromszög oldalfelezői. (Ezt a pontot nevezzük a háromszög súlypontjának.)

Bizonyítás. $\vec{0} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AM}, \text{ ahol } M \text{ a } [BC] \text{ oldal felezőpontja. Mivel az } \overrightarrow{AG}$$

csak az A , B , C pontoktól függ, egyetlen ilyen G pont létezik, és ez a G az AM oldalfelezőn helyezkedik el (2:1 arányban osztja azt). Hasonlóan igazolható, hogy G -n a másik két oldalfelező is áthalad.

21. Bizonyítsd be, hogy ha A és B két rögzített pont és $m, n \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $m + n \neq 0$, akkor egyetlen olyan G pont létezik, amelyre $m\overrightarrow{GA} + n\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

Igazold, hogy erre a G pontra $\overrightarrow{MG} = \frac{m\overrightarrow{MA} + n\overrightarrow{MB}}{m + n}$ bármely síkbeli M pont esetén. (A G pontot az m és n tömegű A és B pont baricentrumának nevezzük) Általánosítás.

Bizonyítás. Ha a G_1 és G_2 pontokra teljesül az $m\overrightarrow{G_1A} + n\overrightarrow{G_1B} = \vec{0}$ és az $m\overrightarrow{G_2A} + n\overrightarrow{G_2B} = \vec{0}$ egyenlőség, akkor $m \cdot (\overrightarrow{G_1A} - \overrightarrow{G_2A}) + n \cdot (\overrightarrow{G_1B} - \overrightarrow{G_2B}) = \vec{0}$. De $\overrightarrow{G_1A} - \overrightarrow{G_2A} = \overrightarrow{G_1G_2}$ és $\overrightarrow{G_1B} - \overrightarrow{G_2B} = \overrightarrow{G_1G_2}$, tehát $(m + n) \cdot \overrightarrow{G_1G_2} = \vec{0}$. Ez csak akkor lehetséges, ha $\overrightarrow{G_1G_2} = \vec{0}$, tehát az egyenlőség csak egy G pontra teljesülhet.

Ha M egy tetszőleges pont, akkor

$$\frac{m\overrightarrow{MA} + n\overrightarrow{NB}}{m + n} = \frac{m(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + n(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})}{m + n} = \overrightarrow{MG} + \frac{m\overrightarrow{GA} + n\overrightarrow{GB}}{m + n} = \overrightarrow{MG}.$$

22. Bizonyítsd be, hogy az ABC háromszög G súlypontjára, H ortocentrumára és a köré írt kör O középpontjára érvényes az $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ egyenlőség.

Bizonyítás. Ha A_1 a H pont M szerinti szimmetrikusa, ahol M a BC felezőpontja, akkor $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA_1}$. De $BH \perp AC$ és $CH \perp AB$, tehát $A_1B \perp AB$ és $A_1C \perp AC$. Így az AA_1 átmérőjű körön van a B és a C pont, tehát $\overrightarrow{HA_1} + \overrightarrow{HA} = 2\overrightarrow{HO}$. Ebből következik, hogy $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$. Másrészt $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 3\overrightarrow{HG}$, tehát $3\overrightarrow{HG} = 2\overrightarrow{HO}$. Így H, G, O kollineárisak és $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.

23. Bizonyítsd be, hogy ha G és G' az ABC_Δ illetve az $A'B'C'_\Delta$ súlypontja, akkor $3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}$.

Bizonyítás. Ha összeadjuk a $\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'G'}$, $\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'G'}$ és $\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'G'}$ egyenlőségeket és felhasználjuk a $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} = \overrightarrow{A'G'} + \overrightarrow{B'G'} + \overrightarrow{C'G'}$ összefüggéseket, a kért egyenlőséghez jutunk.

24. Bizonyítsd be, hogy az ABC háromszög H ortocentrumára és a köré írt kör O középpontjára érvényes az $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ egyenlőség.

Bizonyítás. A 22. feladat alapján $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OH}$.

25. Az ABC háromszög AB és AC oldalán felvettük az M és N pontokat. Bizonyítsd be, hogy MN pontosan akkor halad át a háromszög G súlypontján, ha $\frac{BM}{MA} + \frac{CN}{NA} = 1$. Általánosítás.

Bizonyítás. Ha $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ és $m\vec{u} + n\vec{v} = 0$, akkor $m = n = 0$. Másrészt az $\overrightarrow{AM} = \frac{AM}{AB}\vec{u}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{AN}{AC}\vec{v}$ és a $G \in MN$ összefüggés pontosan akkor teljesül, ha létezik $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $\alpha + \beta = 1$ és $\overrightarrow{AG} = \alpha \cdot \overrightarrow{AM} + \beta \cdot \overrightarrow{AN}$. Így $\alpha + \beta = 1$ és $\left(3\alpha \frac{AM}{AB} - 1\right)\vec{u} + \left(3\beta \frac{AN}{AC} - 1\right)\vec{v} = 0$, tehát az első megjegyzés alapján

$$\alpha = \frac{1}{3} \frac{AB}{AM} = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{MB}{AM}\right) \quad \text{és} \quad \beta = \frac{1}{3} \frac{AC}{AN} = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{NC}{AN}\right).$$

Tehát az $\alpha + \beta = 1$ összefüggés pontosan akkor teljesül, ha $\frac{MB}{AM} + \frac{NC}{AN} = 1$.

1. Általánosítás. Ha $B' \in AC$, $C' \in AB$ és $\{O\} = CC' \cap BB'$, valamint $M \in AB$

és $N \in AC$, akkor $O \in MN \Leftrightarrow \frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BM}{MA} + \frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{CN}{NA} = 1$.

2. Általánosítás. Az $Oxyz$ triéder élein vegyük fel az $A, A' \in Ox$, $B, B' \in Oy$ és $C, C' \in Oz$ pontokat és jelöljük Q -val az ABC' , ACB' és BCA' síkok metszéspontját. Ha $M \in Ox$, $N \in Oy$ és $Q \in Oz$, az MNP sík pontosan akkor tartalmazza

a Q pontot, ha $\frac{OA'}{A'A} \cdot \frac{AM}{MO} + \frac{OB'}{B'B} \cdot \frac{BN}{NO} + \frac{OC'}{C'C} \cdot \frac{CP}{PO} = 1$.

Az **1. általánosítást bizonyítjuk** (a második bizonyítása hasonló módon történik):

Ha $\frac{AB'}{B'C} = \frac{k_3}{k_1}$ és $\frac{BC'}{C'A} = \frac{k_1}{k_2}$, akkor $\frac{CA'}{A'B} = \frac{k_2}{k_3}$ a *Ceva tétel* alapján és

$\frac{AO}{AA'} = \frac{k_2 + k_3}{k_1 + k_2 + k_3}$. Így az $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ és $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ jelölésekkel

$$\overrightarrow{AO} = \frac{k_2 + k_3}{k_1 + k_2 + k_3} \cdot AA' = \frac{k_2 \cdot \vec{u} + k_3 \cdot \vec{v}}{k_1 + k_2 + k_3}.$$

$O \in MN \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ úgy hogy $\alpha + \beta = 1$ és $\overrightarrow{AO} = \alpha \cdot \overrightarrow{AM} + \beta \cdot \overrightarrow{AN}$.

Tehát a

$$\left(k_2 - (k_1 + k_2 + k_3)\alpha \right) \frac{AM}{AB} \vec{u} + \left(k_3 - (k_1 + k_2 + k_3)\beta \right) \frac{AN}{AC} \vec{v} = 0$$

egyenlőséghez jutunk. Ez pontosan akkor teljesül, ha

$$\alpha = \frac{AB}{AM} \cdot \frac{k_2}{k_1 + k_2 + k_3} \quad \text{és} \quad \beta = \frac{AC}{AN} \cdot \frac{k_3}{k_1 + k_2 + k_3},$$

tehát az $\alpha + \beta = 1$ egyenlőség akkor és csakis akkor igaz, ha

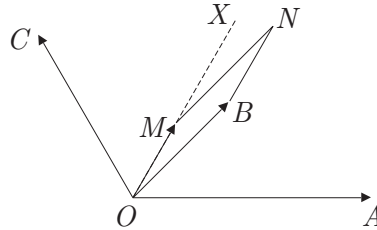
$$\frac{BM}{AM} \cdot \frac{k_2}{k_1} + \frac{NC}{AN} \cdot \frac{k_3}{k_1} = 1 \Leftrightarrow \frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BM}{MA} + \frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{CN}{NA} = 1.$$

26. Bizonyítsd be, hogy ha az $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$ és $\overrightarrow{OA_3}$ egységnyi hosszúságú vektorok végpontjai az Ox fölött vannak, akkor $|\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}| \geq 1$. Általánosítás.

Bizonyítás. Feltételezhetjük, hogy az O középpontú, egységsugarú körön a pontok sorrendje A, B, C .

Ha $m(\widehat{AOB}) = \alpha$ és $m(\widehat{BOC}) = \beta$, akkor $\left| \frac{\alpha - \beta}{2} \right| \leq 90^\circ$. Így az AOC szög OX

belső szögfelezője és az OB félegyenes hegyesszöget zár be, tehát OB -hez hozzáadva tetszőleges OX félegyenesre illeszkedő vektort az összeg hossza legalább 1.



$$m(\widehat{MOB}) < 90^\circ \Rightarrow m(\widehat{OBN}) > 90^\circ \Rightarrow ON > OB.$$

27. Bizonyítsd be, hogy a háromszög oldalfelezőivel szerkeszthető háromszög!

Bizonyítás. $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2} + \frac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}}{2} + \frac{\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}}{2} = 0$, ahol A' , B' és C' az oldalak felezőpontjai. Ebből következik, hogy az $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ és $\overrightarrow{CC'}$ vektorokkal szerkeszthető háromszög.

28. Bizonyítsd be, hogy ha az $ABCD$ négyszög AB , BC , CD és DA oldalain felvesszük az M , N , P illetve Q pontot úgy, hogy $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PD} = \frac{DQ}{QA} = k$,

akkor az $MNPQ$ és az $ABCD$ négyszögek súlypontjai egybeesnek!

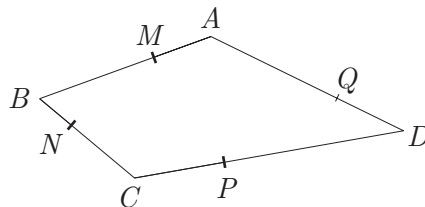
Bizonyítás. Ha O egy tetszőleges pont a síkban, akkor

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + k \cdot \overrightarrow{OB}}{1+k}, \quad \overrightarrow{ON} = \frac{\overrightarrow{OB} + k \cdot \overrightarrow{OC}}{1+k},$$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OC} + k \cdot \overrightarrow{OD}}{1+k} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{OQ} = \frac{\overrightarrow{OD} + k \cdot \overrightarrow{OA}}{1+k},$$

tehát

$$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}.$$



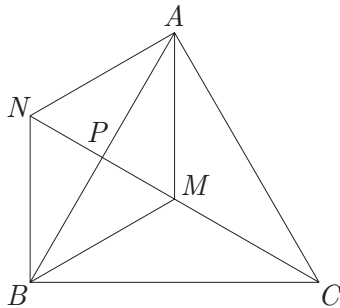
29. Igaz-e az előbbi tulajdonság fordítottja?

Megoldás. Ha az $ABCD$ négyszög oldalain felvesszük az $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (CD)$ és $Q \in (DA)$ pontokat úgy, hogy

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AQ}{QD} = \frac{CN}{NB} = \frac{CP}{PD} = \frac{1}{2},$$

akkor a szimmetria miatt az $ABCD$ és $MNPQ$ súlypontja egybeesik és nem teljesülnek az előbbi feladat feltételei, tehát a tulajdonság fordítottja nem igaz.

30. Bizonyítsd be, hogy ha $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ és az $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ vektorok egyenlő hosszúságúak, akkor az ABC_Δ egyenlő oldalú, és M a háromszög középpontja!

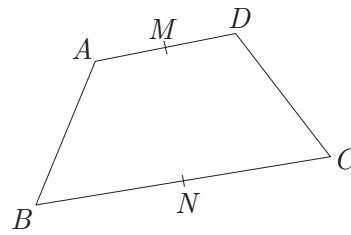


Bizonyítás. Legyen $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MN}$, ekkor az első feltétel alapján $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MC} = 0$, vagyis $M \in [NC]$ és $[MN] = [MC]$. Mivel $\overrightarrow{MA}$ és $\overrightarrow{MB}$ azonos hosszúságúak, az $AMBN$ négyszög rombusz, így $[AP] = [PB]$ és $MN \perp AB$, következésképpen CP oldalfelező és $CP \perp AB$, ami azt jelenti, hogy $[CA] = [CB]$. Hasonlóan igazolható, hogy $[AB] = [AC]$. Tehát az ABC háromszög egyenlő szárú s mivel az M pont távolsága a csúcsoktól megegyezik, M a háromszög köré írt kör középpontja.

31. Az $ABCD$ négyszögben $[AB] \equiv [CD]$. Bizonyítsd be, hogy az $[AD]$ és $[BC]$ szakaszok felezőpontjai által meghatározott egyenes párhuzamos az AB és CD egyenesek által meghatározott szög belső szögfelezőjével!

Bizonyítás. $\overrightarrow{MN} = \frac{(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}) + (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN})}{2} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$.

Mivel $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}|$, az $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$ vektor szerkesztésekor egyenlő szárú háromszög keletkezik és ebben az oldalfelező megegyezik a szögfelezővel. Ezt a reprezentánst szerkeszthetjük az $\{O\} = AB \cap DC$ pontban is, tehát $\overrightarrow{MN}$ párhuzamos az O -beli reprezentánssal, vagyis az AB és DC egyenesek által alkotott szög szögfelezőjével.



32. Az $ABCD$ négyszög AD és BC oldalain felvesszük az $M \in [AD]$ és $N \in [BC]$ pontot úgy, hogy $\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC} = \frac{AB}{CD}$. Bizonyítsd be, hogy MN párhuzamos az AB és CD egyenesek által meghatározott szög belső szögfelezőjével ($AB \nparallel CD$).

Bizonyítás. Ha $AB = a$ és $CD = b$, akkor

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= \frac{a \cdot \overrightarrow{MN} + b \cdot \overrightarrow{MN}}{a + b} = \frac{a \cdot (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN}) + b \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN})}{a + b} = \\ &= \frac{a \cdot \overrightarrow{DC} + b \cdot \overrightarrow{AB}}{a + b}, \end{aligned}$$

mert $a \cdot \overrightarrow{MD} + b \cdot \overrightarrow{MA} = a \cdot \overrightarrow{CN} + b \cdot \overrightarrow{BN} = 0$. Másrészt, ha az $\{O\} = AB \cap DC$ pontban megszerkesztjük az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{DC}$ egy-egy $\overrightarrow{OD}$ és $\overrightarrow{OE}$ reprezentánsát, akkor az ODE háromszögben az OF belső szögfelezőre $\overrightarrow{OF} = \frac{a \cdot \overrightarrow{DC} + b \cdot \overrightarrow{AB}}{a + b}$.

Mivel az összeg megszerkesztése a kezdőponttól független, MN párhuzamos OF -fel.

33. Az $ABCD$ síkbeli négyszögben $\{E\} = AD \cap BC$ és $\{F\} = AB \cap CD$. Bizonyítsd be, hogy az AC , BD és EF szakaszok felezőpontjai egy egyenesen vannak. (Newton–Gauss tétel)

Bizonyítás. Ha $\overrightarrow{AD} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$,
 $\overrightarrow{AE} = \alpha \vec{u}$ és $\overrightarrow{AF} = \beta \vec{v}$, akkor az EF és
 BD szakasz M illetve N felezőpontjaira

$$\overrightarrow{AM} = \frac{\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}}{2}, \quad \overrightarrow{AN} = \frac{\vec{u} + \vec{v}}{2}.$$

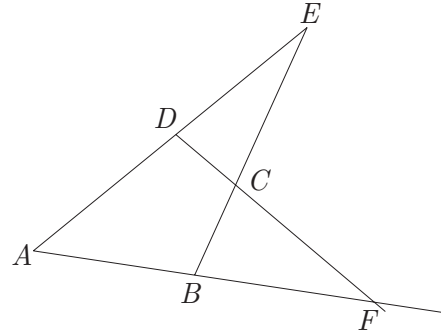
Ugyanakkor

$$\overrightarrow{AC} = \frac{\alpha(1-\beta)}{1-\alpha\beta} \vec{u} + \frac{\beta(1-\alpha)}{1-\alpha\beta} \vec{v},$$

tehát az AC szakasz P felezőpontjára

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha(1-\beta)}{1-\alpha\beta} \vec{u} + \frac{\beta(1-\alpha)}{1-\alpha\beta} \vec{v} \right).$$

Következik, hogy $\overrightarrow{AP} = \frac{\overrightarrow{AM} - \alpha\beta \cdot \overrightarrow{AN}}{1-\alpha\beta}$, tehát M , N és P egy egyenesen vannak.



34. Az ABC_{Δ} -ben az AA' , BB' és CC' egyenesek összefutók, $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$ és $C' \in (AB)$. Jelöljük M , N , P illetve M' , N' , P' -vel az ABC és $A'B'C'$ háromszögek oldalainak felezőpontjait. Bizonyítsd be, hogy $MM' \cap NN' \cap PP' \neq \emptyset$, ahol $M \in (BC)$, $M' \in (B'C')$ stb.

Bizonyítás. Ha $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ és $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$, akkor a $\frac{BA'}{A'C} = \frac{k_3}{k_2}$, $\frac{CB'}{B'A} = \frac{k_1}{k_3}$, $\frac{AC'}{C'B} = \frac{k_2}{k_1}$

jelölésekkel $\overrightarrow{AO} = \frac{k_2 \cdot \vec{u} + k_3 \cdot \vec{v}}{k_1 + k_2 + k_3}$. Ebből és az előbbi feladatból következik, hogy az

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \left(\frac{\vec{u} + \vec{v}}{2} + \frac{k_2 \vec{u} + k_3 \vec{v}}{2(k_1 + k_2 + k_3)} \right) = \frac{(k_1 + 2k_2 + k_3)\vec{u} + (k_1 + k_2 + 2k_3)\vec{v}}{4(k_1 + k_2 + k_3)}$$

végpontja rajta van az MM' , NN' és PP' szakaszokon.

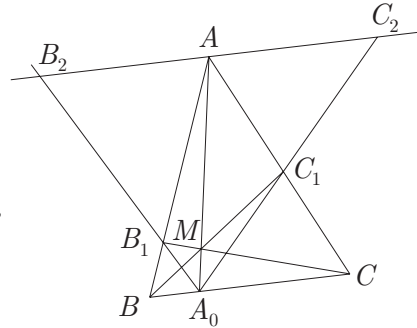
35. Az ABC háromszög BC oldalának tetszőleges A_0 pontja esetén vegyünk fel az AA_0 -n egy M pontot. A $BM \cap AC$ és $CM \cap AB$ metszeteket jelöljük C_1 -gyel és B_1 -gyel. Az A -n át a BC egyenessel húzott párhuzamos és A_0B_1 és A_0C_1 egyeneseket a B_2 illetve C_2 pontban metszi. Bizonyítsd be, hogy a $[B_2C_2]$ szakasz felezőpontja éppen az A pont.

Bizonyítás. Ha $\frac{AB_1}{B_1B} = \frac{k_2}{k_1}$, $\frac{BA_0}{A_0C} = \frac{k_3}{k_2}$

és $\frac{CC_1}{C_1A} = \frac{k_1}{k_3}$, akkor

$$\overrightarrow{AC_2} = \frac{k_2 k_3}{k_1(k_2 + k_3)} \overrightarrow{BC} \text{ és } \overrightarrow{AB_2} = \frac{k_2 k_3}{k_1(k_2 + k_3)} \overrightarrow{CB},$$

tehát $\overrightarrow{AC_2} = -\overrightarrow{AB_2}$.



VII.7. Gyakorlatok (184. oldal)

1. Határozd meg az $\overrightarrow{MM'}$ kötött vektor M' végpontjának mértani helyét, ha M egy d egyenesen mozog és $\overrightarrow{MM'}$ minden M esetén ugyanazt a $\vec{u}$ szabad vektort származtatja.

Megoldás. A d egyenes $\vec{u}$ vektorral való párhuzamos eltolása a mértani hely, tehát egy d -vel párhuzamos egyenes.

2. Milyen alakzatba viszi át a következő alakzatokat egy párhuzamos eltolás? Hát egy homotétia?

a) szakasz; **b)** háromszög; **c)** kör; **d)** paralelogramma.

Megoldás. **a)** A párhuzamos eltolás szakaszt szakaszba visz át mert a $\{\lambda \vec{u} + (1 - \lambda) \vec{v} \mid \lambda \in [0, 1]\}$ szakasz $\vec{w}$ -vel való eltolása a

$$\{\lambda \vec{u} + (1 - \lambda) \vec{v} + \vec{w} \mid \lambda \in [0, 1]\} = \{\lambda(\vec{u} + \vec{w}) + (1 - \lambda)(\vec{v} + \vec{w}) \mid \lambda \in [0, 1]\}.$$

b) Az a) pont alapján egy háromszöget egy vele egybevágó háromszögbe transzformál.

c) Ha $|\overrightarrow{OA}| = R$ és $\vec{u}$ -val eltoljuk az O illetve A pontot, akkor $|\overrightarrow{O'A'}| = R$, tehát a párhuzamos eltolás egy kört, vele kongruens körbe transzformál.

d) Az a) alpont alapján egy párhuzamos eltolás egy paralelogrammát vele egybevágó paralelogrammába transzformál.

3. Bizonyítsd be, hogy egy $\vec{u}$, majd egy $\vec{v}$ vektor szerinti párhuzamos eltolás az $\vec{u} + \vec{v}$ vektor szerinti párhuzamos eltolás.

Bizonyítás. Ha $t_u : P \rightarrow P$, $t_u(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \vec{u}$ és $t_v : P \rightarrow P$,

$t_v(N) = N' \Leftrightarrow \overrightarrow{ON'} = \overrightarrow{ON} + \vec{v}$ a két eltolás, akkor a két transzformáció egymás-

utáni alkalmazásával az $f : P \rightarrow P$, $f(M) = M' \Leftrightarrow \exists M'' \in P : \overrightarrow{OM''} = \overrightarrow{OM} + \vec{u}$

és $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM''} + \vec{v}$ függvényt kapjuk. Ebből következi, hogy

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + (\vec{u} + \vec{v}) \Leftrightarrow f(M) = M',$$

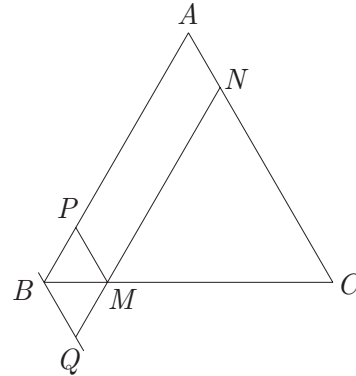
tehát f az $\vec{u} + \vec{v}$ vektorú párhuzamos eltolás.

4. Bizonyítsd be, hogy ha az egyenlő szárú háromszög alapjának tetszőleges M pontján át párhuzamosokat húzunk az oldalakhoz, akkor a két párhuzamosnak a háromszög belsejébe eső részeinek összege állandó.

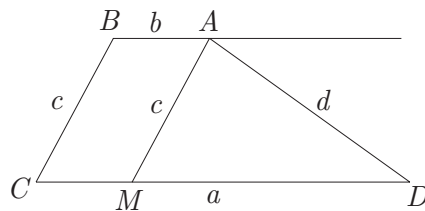
Bizonyítás. Húzzunk párhuzamost B -n át az AC -hez. Az ábra jelölései alapján $BQMP$ rombusz mert

$$m(\widehat{QBC}) = m(\widehat{BCA}) = m(\widehat{CBA}).$$

Így $PM + MN = PB + PA = AB$ és ez állandó.



5. Szerkesszünk trapézt, ha ismerjük az oldalak hosszát (és mindegyikről tudjuk, hogy milyen szerepe van – alapok, szárak).



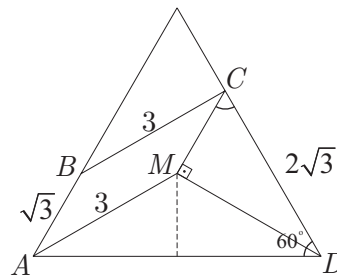
Megoldás. Ha a a nagyalap, b a kisalap c és d a másik két oldal, akkor az AMD háromszög oldalai c , d és $a - b$ (AM a BC szakasz $\vec{BA}$ vektorral való eltolásából származik).

Miután ezt megszerkesztjük A -n át párhuzamost húzunk MD -hez és felvesszük a B pontot úgy, hogy $AB = b$.

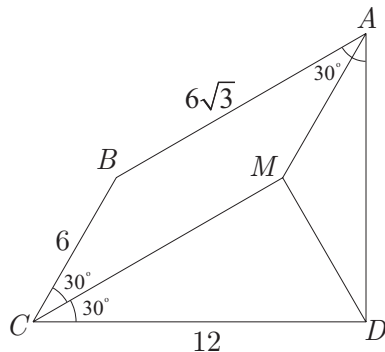
6. Az $ABCD$ négyszögben $|BC| = 3$, $|AB| = \sqrt{3}$, $|CD| = 2\sqrt{3}$, $m(\widehat{BAD}) = 60^\circ$ és $m(\widehat{ADC}) = 60^\circ$. Számítsd ki a négyszög többi szögének mértékét és az AD oldal hosszát.

Megoldás. Az ábra jelöléseit használjuk. Felvesszük az M pontot úgy, hogy $BCMA$ paralelogramma legyen. Így az $\widehat{MCD}$ mértéke 60° , tehát $MC = \sqrt{3}$ és $DC = 2\sqrt{3}$ alapján ez a háromszög derékszögű M -ben. Ebből következik, hogy $MD = 3$, $m(\widehat{CDM}) = m(\widehat{MDA}) = 30^\circ$. Az AMD háromszög egyenlő szárú, tehát

$$AD = 2 \cdot \sqrt{MD^2 - \left(\frac{MD}{2}\right)^2} = 3\sqrt{3}.$$



7. Az $ABCD$ négyszögben $|CD| = 12$, $|AB| = 6\sqrt{3}$, $|AD| = 2\sqrt{3}$, $m(\widehat{CDA}) = 90^\circ$ és $m(\widehat{ABC}) = 150^\circ$. Számítsd ki a BC oldal hosszát.

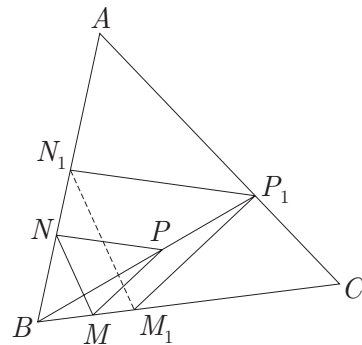


Megoldás. Felvesszük az M pontot úgy hogy a $CBAM$ négyszög paralelogramma legyen. $m(\widehat{MCB}) = 30^\circ$ és $m(\widehat{DCB}) = 60^\circ$ alapján $m(\widehat{DCM}) = 30^\circ$. Hasonlóan $m(\widehat{MAD}) = 30^\circ$. Az MCD háromszögben $CD = 12$, $CM = 6\sqrt{3}$ és $m(\widehat{C}) = 30^\circ$, tehát a háromszög M -ben derékszögű. Így $MD = 6$, $m(\widehat{MDC}) = 60^\circ$ és $m(\widehat{MDA}) = 30^\circ$, tehát $BC = MA = MD = 6$.

8. Írj be az ABC háromszögbe egy DEF háromszöget ($D \in (BC)$, $E \in (AC)$, $F \in (AB)$) úgy, hogy oldalai párhuzamosak legyenek három adott egyenessel.

Megoldás. Egy tetszőleges $M \in BC$ ponton párhuzamost húzunk d_1 -hez és jelöljük N -nel a d_1 metszéspontját AB -vel. M -ből párhuzamost húzunk d_2 -vel és N -ből d_3 -mal és a metszéspontjukat P -vel jelöljük. Az MNP háromszöget B középponttal kinagyítjuk úgy, hogy a P csúcs rákerüljön AC -re. Ezt megtehetjük, ha a $BP \cap AC = \{P_1\}$ pontból párhuzamosat húzunk PM és PN -hez.

$$\left(\frac{BM}{MM_1} = \frac{BP}{PP_1} = \frac{BN}{NN_1}, \text{ tehát } NM \parallel N_1M_1 \right).$$

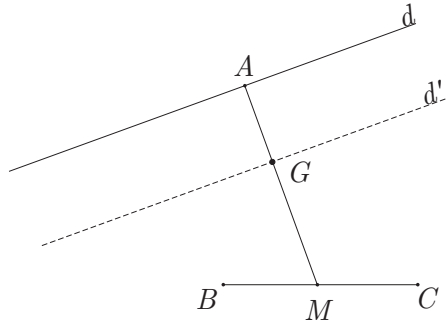


9. Az ABC_Δ B és C csúcsai rögzítettek és az A csúcs egy mozgó pont. Határozd meg az ABC_Δ súlypontjának mértani helyét, ha

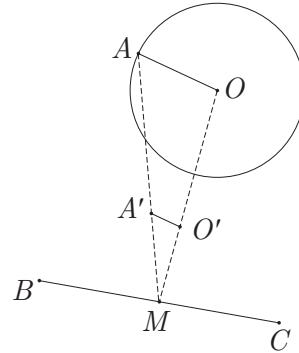
- a) A egy adott egyenesen mozog;
- b) A egy adott körön mozog.

Megoldás. A BC szakasz M felezőpontja rögzített, tehát az **a)** esetben a súlypont egy olyan egyenesen mozog, mely párhuzamos d -vel és tetszőleges $A \in d$ esetén az

$AM \cap d' = \{G\}$ pontra $MG = \frac{1}{3}MA$. Ez a d egyenesnek az M középpontú $\frac{1}{3}$ arányú homotétiával való transzformáltja.



a)



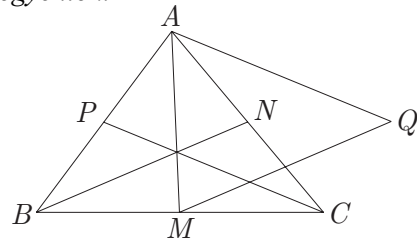
b)

b) A mértani hely a C körnek M középpontú és $\frac{1}{3}$ arányú homotétiával való transzformálása.

10. Bizonyítsd be, hogy a háromszög oldalfelezőiből alkotott háromszög oldalfelezői az eredeti háromszög oldalainak háromnegyedével egyenlők.

Bizonyítás.

Felvesszük a Q pontot úgy, hogy az $AQCP$ négyszög paralelogramma legyen.



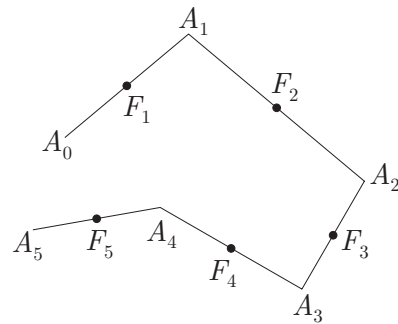
$$\frac{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MQ}}{2} = \frac{\frac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}}{2} + \frac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}}{2}}{2} = \frac{\overrightarrow{BA} + \frac{\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}}{2}}{2} = \frac{\overrightarrow{BA} + \frac{\overrightarrow{BA}}{2}}{2} = \frac{3}{4} \overrightarrow{BA}.$$

Tehát az AMQ háromszög M -hez tartozó oldalfelezője $\frac{3}{4} AB$. Hasonlóan az A -hoz

illetve a Q -hoz tartozó oldalfelezők hossza $\frac{3}{4} AC$ és $\frac{3}{4} BC$.

11. Megszerkeszthető-e egy n oldalú sokszög, ha ismerjük oldalainak felezőpontjait?

Megoldás. Tetszőleges A_0 pontból kiindulva megszerkesztjük az $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$ pontokat úgy, hogy A_{i+1} az A_i -nek F_{i+1} -re vonatkozó szimmetrikusa, ahol $F_1, F_2, \dots, F_n$ az adott felezőpontok.



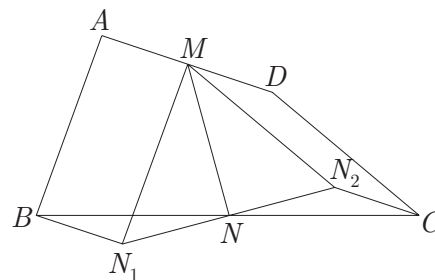
1. eset. n páratlan: Ha $A_n = A_0$, akkor megkaptuk a keresett sokszöget, ellenkező esetben az egyik csúcs az A_0A_n felezőpontja és ebből kiindulva kapjuk a többi csúcsot. (Ha A_0 -t eltoljuk $\vec{u}$ -val, akkor az A_{2k} pontok $\vec{u}$ -val és az A_{2k+1} pontok $-\vec{u}$ -val mozdulnak el, tehát $\vec{u} = \frac{1}{2} \overrightarrow{A_0A_n}$ esetén kerül a kezdőpont a végpontra rá)

2. eset. Ha n páros, akkor A_0 és A_n ugyanazzal az $\vec{u}$ -val mozdulnának el. Ezért vagy tetszőleges A_0 esetén ilyen sokszöget kapunk ($A_n = A_0$), vagy egyetlen A_0 -ra sem kapunk megoldást. Igazolható, hogy ebben az esetben a $\sum_{k \geq 1} \overrightarrow{OF_{2k}} = \sum_{k \geq 0} \overrightarrow{OF_{2k+1}}$ feltétel

szükséges és elégséges feltétele a megoldás létezésének.

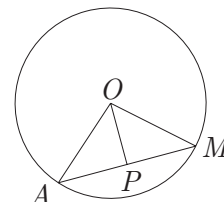
12. Bizonyítsd be, hogy ha az $ABCD$ négyszög AB és CD oldalai kongruensek, akkor a BC és AD oldalak felezőpontja által meghatározott egyenes párhuzamos az AB és CD egyenesek által bezárt szög szögfelezőjével.

Bizonyítás. Az AB és CD szakaszokat eltoljuk önmagukkal párhuzamosan az M -be. Így az AMN_1B és DMN_2C paralelogrammákat kapjuk. $BN_1 = AM = MD = N_2C$ és $BN_1 \parallel AM \parallel N_2C$ alapján BN_1CN_2 paralelogramma, tehát az MN_1N_2 egyenlő szárú háromszögben MN oldalfelező és szögfelező. Ugyanakkor az AB és CD egyenesek szögének szögfelezője párhuzamos MN -nel.



13. Határozd meg az AM egyenes és az $\widehat{AOM}$ szögfelezőjének P metszéspontjának mértani helyét, ha A egy rögzített pont az R sugarú O középpontú körön és M egy mozgó pont ugyanezen a körön.

Megoldás. P az AM felezőpontja mert OAM egyenlő szárú háromszög. Így ha O_1 az AO felezőpontja, akkor a mértani hely az O_1 középpontú $\frac{R}{2}$ sugarú kör.



14. Bizonyítsd be, hogy az ABC_{Δ} A csúcsának a B és C szögek belső illetve külső szögfelezőire eső vetületei egy egyenesen vannak.

Bizonyítás. Az A csúcs szimmetrikusai a vetületekre nézve a BC egyenesen vannak, tehát a vetületek a BC -hez tartozó középvonal tartóegyenesére illeszkednek.

15. Igazold, hogy az $ABCD$ körbeírható négyszög esetén az ABC , BCD , CDA és DAB háromszögek súlypontjai egy körön vannak.

Bizonyítás. Ha G_A, G_B, G_C és G_D a BCD, ACD, ABD és ABC háromszög súlypontja, akkor

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG_A} &= \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{3}, & \overrightarrow{OG_B} &= \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{3}, \\ \overrightarrow{OG_C} &= \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}}{3} \text{ és } & \overrightarrow{OG_D} &= \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}.\end{aligned}$$

Tehát, ha K az $\frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{3}$ helyzetvektorral rendelkező pont, akkor

$$|\overrightarrow{KG_A}| = |\overrightarrow{OG_A} - \overrightarrow{OK}| = \frac{|\overrightarrow{OA}|}{3} = \frac{R}{3} \quad \text{és} \quad |\overrightarrow{KG_B}| = |\overrightarrow{KG_C}| = |\overrightarrow{KG_D}| = \frac{R}{3},$$

ahol R az $ABCD$ köré írható kör sugara és O a középpontja.

Tehát a G_A, G_B, G_C és G_D pontok a K középpontú és $\frac{R}{3}$ sugarú körön vannak.

16. Bizonyítsd be, hogy egy teljes négyszög átlóinak felezőpontjai egy egyenesen helyezkednek el. (Newton-Gauss egyenes)

Bizonyítás. A B pont szimmetrikusát az M, N felezőpontokra nézve jelöljük G -vel és H -val.

Elégséges igazolni, hogy G, D és H egy egyenesen vannak. A feladat tehát a következőképpen fogalmazható meg:

Az $EBFH$ és $BCGA$ paralelogrammákban $(B \in (AE)) \quad \{D\} = AF \cap GH$.

Bizonyítsuk be, hogy E, C, D kollineárisak (vagy $EC \cap GH \cap AF = \emptyset$).

Ha $\{J\} = AF \cap EH$, $\{K\} = HG \cap EB$, valamint $\{L\} = EC \cap JK$, akkor igazolni kell, hogy az EKJ háromszögben JA, KH és EL összefutnak. Másrészt az

$EB = a$, $BA = b$, $EI = c$ és $IH = d$ jelöléssel az $\frac{AK}{EB} = \frac{AG}{EH}$ és $\frac{JH}{JE} = \frac{HF}{EA}$

egyenlőségekből következik, hogy $AK = \frac{c}{d}(a+b)$ és $HJ = \frac{a}{b}(c+d)$. Ugyanakkor

$$\frac{JL}{LK} = \frac{T[EJL]}{T[EJK]} = \frac{EJ}{EK} \cdot \frac{IC}{CB} = \frac{ad}{bc},$$

tehát

$$\frac{EA}{AK} \cdot \frac{KL}{LJ} \cdot \frac{JH}{HE} = \frac{a+b}{\frac{c}{d}(a+b)} \cdot \frac{bc}{ad} \cdot \frac{\frac{a}{b}(c+d)}{c+d} = 1.$$

A Ceva tételének a fordítottja alapján $HK \cap JA \cap EC \neq \emptyset$, tehát az eredeti megfogalmazásban G, D és H egy egyenesen vannak. Ennek az egyenesnek a B közép-

pontú $\frac{1}{2}$ arányú homotétiával való képe az $ABCD$ négyszög Newton-Gauss egyenese.

VIII. A trigonometria elemei

VIII.1.1. Gyakorlatok (186. oldal)

1. Hány fokosak az alábbi szögek?

- a) π ; b) $\frac{\pi}{2}$; c) $\frac{\pi}{3}$; d) $\frac{\pi}{6}$; e) $\frac{2\pi}{3}$; f) $\frac{\pi}{4}$; g) $\frac{5\pi}{6}$; h) $\frac{4\pi}{3}$;
i) $\frac{3\pi}{2}$; j) $\frac{\pi}{90}$; k) $\frac{\pi}{15}$; l) $\frac{2\pi}{9}$.

Megoldás. Az α radián $\frac{\alpha \cdot 180}{\pi}$ foknak felel meg.

- a) 180° ; b) 90° ; c) 60° ; d) 30° ; e) 120° ; f) 45° ; g) 150° ;
h) 240° ; i) 270° ; j) 2° ; k) 12° ; l) 40° .

2. Fejezd ki radiánban az alábbi szögek mértékét:

- a) 30° ; b) 15° ; c) $22^\circ 30'$; d) $11^\circ 15'$; e) 75° ; f) 18° ; g) 72° ;
h) 126° ; i) 529° .

Megoldás. A β° $\frac{\beta \cdot \pi}{180}$ radiánnak felel meg.

- a) $\frac{\pi}{6}$; b) $\frac{\pi}{12}$; c) $\frac{\pi}{8}$; d) $\frac{\pi}{16}$; e) $\frac{5\pi}{12}$; f) $\frac{\pi}{10}$; g) $\frac{2\pi}{5}$; h) $\frac{7\pi}{10}$;
i) $\frac{529\pi}{180}$;

VIII.2.1. Gyakorlatok (188. oldal)

1. Számítsd ki a következő szögek szögfüggvényeit:

- a) 30° ; b) 60° ; c) 45° .

Megoldás. a) Az ABC egyenlő oldalú háromszögben meg-

húzzuk az AD magasságot. Ha $AB = l$, akkor $BD = \frac{l}{2}$,

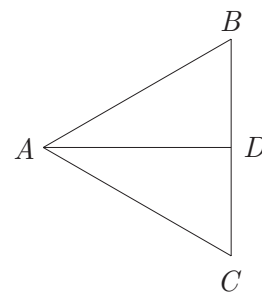
tehát *Pitagorász tétele* alapján

$$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \frac{l\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Tehát } \sin 30^\circ = \frac{BD}{AB} = \frac{1}{2}, \quad \cos 30^\circ = \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{BD}{AD} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{AD}{BD} = \sqrt{3}.$$

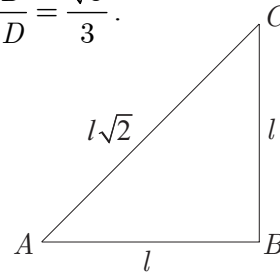
b) Az előbbi ábrán $m(\widehat{ABD}) = 60^\circ$, tehát



$$\begin{aligned}\sin 60^\circ &= \frac{BD}{AD} = \frac{\sqrt{3}}{2}, & \cos 60^\circ &= \frac{BD}{AB} = \frac{1}{2}, \\ \operatorname{tg} 60^\circ &= \frac{AD}{BD} = \sqrt{3}, & \operatorname{ctg} 60^\circ &= \frac{BD}{AD} = \frac{\sqrt{3}}{3}.\end{aligned}$$

c) Az ABC egyenlőszárú és derékszögű háromszögben ha $AB = BC = l$, akkor *Pitagorász tétele* alapján $AC = l\sqrt{2}$, tehát

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{és} \quad \operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{ctg} 45^\circ = 1.$$

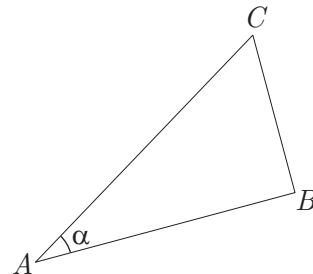


2. Bizonyítsd be, hogy:

- a)** $\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$, $\forall \alpha \in (0, 90^\circ)$;
- b)** $\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$, $\forall \alpha \in (0, 90^\circ)$;
- c)** $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha)$, $\forall \alpha \in (0, 90^\circ)$;
- d)** $\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$, $\forall \alpha \in (0, 90^\circ)$.

Bizonyítás. Rögzített $\alpha \in (0^\circ, 90^\circ)$ esetén tekintjük az ABC derékszögű háromszöget, amelyben $m(\widehat{BAC}) = \alpha$. Így $m(\widehat{BCA}) = 90^\circ - \alpha$, tehát

- a)** $\sin \alpha = \frac{BC}{AC} = \cos \widehat{BCA} = \cos(90^\circ - \alpha)$;
- b)** $\cos \alpha = \frac{AB}{AC} = \sin \widehat{BCA} = \sin(90^\circ - \alpha)$;
- c)** $\operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AB} = \operatorname{ctg}(\widehat{BCA}) = \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha)$;
- d)** $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{AB}{BC} = \operatorname{tg}(\widehat{BCA}) = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$.



3. Írd át szögfüggvényekre a befogó tételt és a magasság tételt.

Megoldás. Az ABC derékszögű háromszögben meghúzzuk az AD magasságot

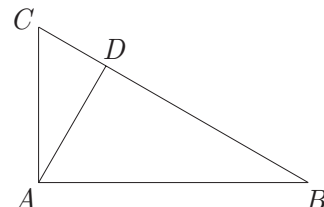
$A \in (BC)$. A befogó tétel alapján $AC^2 = CD \cdot BC$ vagyis $\frac{AC}{BC} = \frac{CD}{AC}$.

Másrészt $\alpha = m(\widehat{CBA}) = m(\widehat{CAD}) = 90^\circ - m(\widehat{ACD})$,

tehát az ABC háromszögben $\sin \alpha = \frac{AC}{BC}$ és az ACD

háromszögben $\sin \alpha = \frac{CD}{AC}$. Ebből következik, hogy a

befogó tétel $\sin \widehat{CBA} = \sin \widehat{CAD}$ alakban is írható (ami nyilvánvalóan igaz).



A magasság tétel alapján $AD^2 = CD \cdot DB$, tehát $\frac{AD}{CD} = \operatorname{tg} \widehat{ACB} = \operatorname{tg} \widehat{BDA} = \frac{BD}{AD}$.

4. Az A -ban derékszögű ABC háromszögben $\sin C = \frac{4}{5}$ és az AB befogó hossza l . Számítsd ki a többi oldal hosszát és a C szög szögfüggvényeit.

Megoldás. Ha $\sin C = \frac{4}{5}$ és $AB = l$, akkor a $\sin C = \frac{AB}{BC}$ alapján $BC = \frac{5}{4}l$ és így $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \frac{3}{4}l$. Ebből következik, hogy $\cos C = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg} C = \frac{4}{3}$ és $\operatorname{ctg} C = \frac{3}{4}$.

5. Az ABC derékszögű háromszögben az egyik szög a másik kétszerese. Mennyi lehet az $\frac{AB}{BC}$ arány?

Megoldás. A derékszög kétszerese nem lehet a háromszög szöge, tehát két esetet kell megvizsgálni:

1. eset. Az egyik szög mértéke $\alpha < 90^\circ$ és $2\alpha = 90^\circ$. Így a háromszög egyenlő szárú és derékszögű, tehát $\frac{AB}{BC} \in \left\{1, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

2. eset. Az egyik szög mértéke $\alpha < 90^\circ$ és $2\alpha < 90^\circ$. Ebben az esetben $\alpha + 2\alpha = 90^\circ$, tehát a szögek mértéke $30^\circ, 60^\circ$ és 90° . Így $\frac{AB}{BC} = \left\{\frac{1}{2}, 2, \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right\}$.

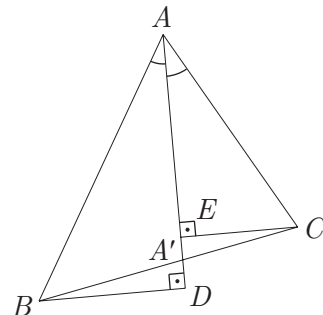
VIII.2.2. Feladatok (188. oldal)

1. Bizonyítsd be, hogy ha AA' ($A' \in (BC)$) az ABC háromszög A szögének belső szögfelezője, akkor $\frac{BA'}{A'C} = \frac{AB}{AC}$.

Bizonyítás. Húzzunk merőleget B -ből és C -ből az AA' -re. Ha D és E a két merőleges talppontja, akkor $\frac{BD}{EC} = \frac{AA'}{A'C}$ (mert a $BA'D$ és $CA'E$ háromszögek

hasonlóak). Ugyanakkor $\sin \frac{A}{2} = \frac{BD}{AB} = \frac{EC}{AC}$, tehát

$\frac{BD}{EC} = \frac{AB}{AC}$ és így $\frac{BA'}{A'C} = \frac{AB}{AC}$.



2. Bizonyítsd be, hogy az ABC háromszög A szögének AA_1 szögfelezőjére igaz az

$$|AA_1| = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2} \text{ összefüggés, ahol } b = |AC| \text{ és } c = |AB|.$$

Bizonyítás. Ha $B_1 \in AC$ úgy, hogy $A_1B_1 \parallel AB$, akkor az 1. feladat alapján $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{c}{b}$, tehát $BA_1 = \frac{ac}{b+c}$ és $A_1C = \frac{ab}{b+c}$.

Ebből következik, hogy

$$A_1B_1 = AB \cdot \frac{A_1C}{BC} = \frac{bc}{b+c}$$

Másrészt $m(\widehat{B_1AA_1}) = m(\widehat{A_1AB}) = m(\widehat{B_1A_1A})$ és így az AB_1A_1 háromszög egyenlő szárú. Ha M az AA_1 felezőpontja, akkor

$$AM = AB_1 \cdot \cos \frac{A}{2} = A_1B_1 \cdot \cos \frac{A}{2} = \frac{bc}{b+c} \cdot \cos \frac{A}{2}.$$

Az M pont felezőpont, tehát $AA_1 = 2AM = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2}$.

3. Bizonyítsd be, hogy az ABC hegyesszögű háromszögben $a = b \cos C + c \cos B$.

Bizonyítás. Mivel a háromszög hegyesszögű, az A csúchoz tartozó magasság D talppontja a (BC) -n van.

$$\text{Így } a = BC = BD + DC = AB \cdot \cos B + AC \cdot \cos C = c \cdot \cos B + b \cdot \cos C.$$

4. Bizonyítsd be, hogy

$$\text{a) } \sin x < x < \operatorname{tg} x, \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right); \quad \text{b) } \sin x \geq \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Bizonyítás. a) Az ABC háromszögben $m(\widehat{BAC}) = x$, $AB = AM = 1$ és $MN \perp AB$ (lásd a mellékelt ábrát).

$$\text{A } \operatorname{tg} x = \frac{BC}{AB}, \quad \sin x = \frac{MN}{AM} \text{ egyenlőségek alapján}$$

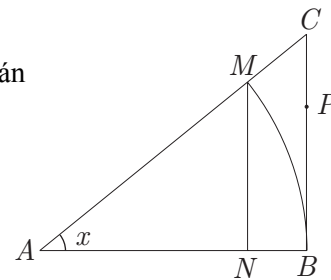
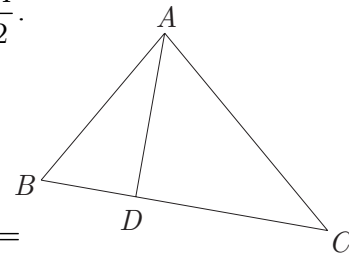
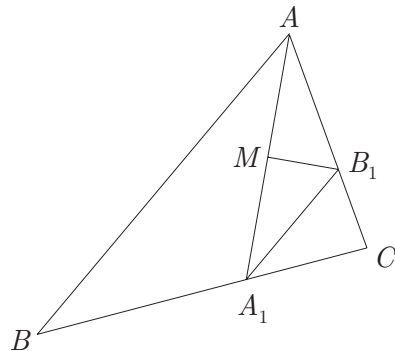
$$BC = \operatorname{tg} x, \quad MN = \sin x, \text{ tehát}$$

$$T[ABC] = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{\operatorname{tg} x}{2},$$

$$T[AMB] = \frac{AB \cdot MN}{2} = \frac{\sin x}{2}.$$

Másrészt az M és a B pont az A középpontú, $AB = 1$ sugarú körön van, tehát

$$T[\widehat{AMB}] = \frac{x}{2}. \quad \text{Világos, hogy } T[AMB] < T[\widehat{AMB}] < T[ACB], \quad \text{tehát}$$



$\sin x < x < \operatorname{tg} x$.

b) Az **a)** alpont második egyenlőtlensége alapján létezik $P \in (BC)$ úgy, hogy $BP = x$. Így $AP = \sqrt{1+x^2}$ és $\sin(\widehat{BAP}) = \frac{BP}{AP} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Másrészt $P \in (BC)$ alapján $\sin(\widehat{BAC}) \geq \sin(\widehat{BAP})$, tehát $\sin x \geq \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

5. Bizonyítsd be, hogy ha $a, b \in \mathbb{R}$ és létezik $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ úgy, hogy

$a \sin x + b \cos x > 2$, akkor $a^2 + b^2 > 4$.

Bizonyítás. A Cauchy-Bunjakovski egyenlőtlenség alapján

$$(a^2 + b^2)(\sin^2 x + \cos^2 x) \geq (a \sin x + b \cos x)^2 > 4$$

tehát $a^2 + b^2 > 4$, mert $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

VIII.5.2. Gyakorlatok és feladatok (200. oldal)

1. Számítsd ki az alábbi értékeket:

a) $\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$; **b)** $\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)$; **c)** $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\right)$; **d)** $\cos\frac{10\pi}{3}$;

e) $\cos\frac{54\pi}{6}$; **f)** $\cos\frac{57\pi}{6}$; **g)** $\sin\frac{2001\pi}{3}$; **h)** $\cos\frac{2002\pi}{3}$;

i) $\sin k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; **j)** $\cos(2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; **k)** $\sin\frac{(2k+1)\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Megoldás. **a)** $\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$; **b)** $\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

c) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = -\sin\frac{5\pi}{12} = -\cos\frac{\pi}{12} = -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$;

d) $\cos\left(\frac{10\pi}{3}\right) = \cos\left(3\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$; **e)** $\cos\frac{54\pi}{6} = \cos 9\pi = -1$;

f) $\cos\frac{57\pi}{6} = \cos\left(9\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0$; **g)** $\sin\frac{2001\pi}{3} = \sin 667\pi = 0$;

h) $\cos\frac{2002\pi}{3} = \cos\left(667\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$; **i)** $\sin k\pi = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$;

j) $\cos(2k+1)\pi = -1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$;

k) $\sin\frac{(2k+1)\pi}{2} = \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin k\pi \cdot \cos\frac{\pi}{2} + \cos k\pi \cdot \sin\frac{\pi}{2} = (-1)^k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$.

2. Számítsd ki $\cos t$ -t, ha

$$\begin{aligned} \text{a)} \sin t &= -\frac{3}{5} \text{ és } t \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right); & \text{b)} \sin t &= \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \text{ és } t \in \left(\frac{21\pi}{2}, 11\pi\right); \\ \text{c)} \sin t &= \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \text{ és } t \in \left(23\pi, \frac{47\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Megoldás. a) $t \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \Rightarrow \cos t > 0$. De $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t = 1 - \frac{9}{25}$, tehát $\cos t = \frac{4}{5}$.

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad 1 - \sin^2 t &= 1 - \frac{10-2\sqrt{5}}{16} = \frac{6+2\sqrt{5}}{16} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2. \\ t \in \left(\frac{21\pi}{2}, 11\pi\right) &\text{ alapján } \cos t < 0, \text{ tehát } \cos t = -\frac{1+\sqrt{5}}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{c)} \quad t \in \left(23\pi, \frac{47\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos t < 0.$$

Másrészt

$$\begin{aligned} \cos^2 t &= 1 - \left(\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2 = 1 - \frac{8-2\sqrt{12}}{16} = \frac{8+2\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}}{16} = \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2, \text{ tehát} \\ \cos t &= -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

3. Számítsd ki $\sin t$ -t, ha

$$\begin{aligned} \text{a)} \cos t &= \frac{5}{13} \text{ és } t \in \left(\frac{7\pi}{2}, 4\pi\right); & \text{b)} \cos t &= -\frac{2}{5} \text{ és } t \in \left(\frac{9\pi}{2}, 5\pi\right); \\ \text{c)} \cos t &= -\frac{2}{7} \text{ és } t \in \left(9\pi, \frac{19\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Megoldás. a) Ha $t \in \left(\frac{7\pi}{2}, 4\pi\right)$, akkor $\sin t < 0$.

$$\sin^2 t = 1 - \cos^2 t = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}, \text{ tehát } \sin t = -\frac{12}{13}.$$

$$\text{b)} \text{ Ha } t \in \left(\frac{9\pi}{2}, 5\pi\right), \text{ akkor } \sin t > 0, \text{ tehát } \sin t = \sqrt{1 - \frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{21}}{5}.$$

$$\text{c)} \text{ Ha } t \in \left(9\pi, \frac{19\pi}{2}\right), \text{ akkor } \sin t < 0, \text{ tehát } \sin t = -\sqrt{1 - \frac{4}{49}} = -\frac{3\sqrt{5}}{7}.$$

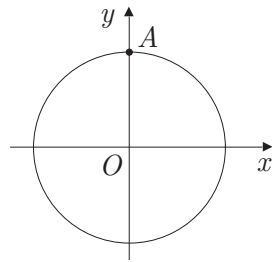
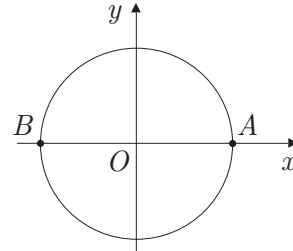
4. A trigonometrikus kör segítségével határozd meg azokat az $x \in \mathbb{R}$ valós számokat, amelyekre:

$$\text{a)} \sin x = 0; \quad \text{b)} \sin x = 1; \quad \text{c)} \cos x = 0; \quad \text{d)} \cos x = -1; \quad \text{e)} \sin x = \frac{1}{2};$$

f) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; **g)** $\sin x = \cos x$; **h)** $\sin x + \cos x = 1$; **i)** $\sin x = -\cos x$.

Megoldás

a) Ha $\sin x = 0$, akkor az x -nek megfelelő pont a trigonometrikus körön az $A(1, 0)$ vagy $B(-1, 0)$ pont. Így $x \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.



b) Ha $\sin x = 1$, akkor x képe a trigonometrikus körön az $A(0, 1)$ pont. Tehát $x \in \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

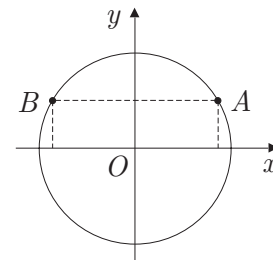
c) Ha $\cos x = 0$, akkor $x \in \left\{\pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

d) Ha $\cos x = -1$, akkor $x \in \{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

e) Ha $\sin x = \frac{1}{2}$, akkor az x képe a trigonometrikus körön

az $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ vagy a $B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ pont. Így

$$x \in \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} = \\ = \left\{(-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$



f) Ha $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, akkor

$$x \in \left\{\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{\pm \frac{\pi}{6} + (2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

g) Ha $\sin x = \cos x$, akkor $\sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$, tehát

$$2 \sin \frac{x - \frac{\pi}{2} + x}{2} \cos \frac{x + \frac{\pi}{2} - x}{2} = 0.$$

Mivel $\cos \frac{\pi}{4} \neq 0$, csak a $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ lehetséges. Így $x - \frac{\pi}{4} \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$,

tehát $x \in \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

h) $\sin x = 1 - \cos x$, tehát $\sin^2 x = 1 + \cos^2 x - 2 \cos x$ és így $2 \cos^2 x - 2 \cos x + 1 = 1$, tehát $\cos x \in \{0, 1\}$.

Ha $\cos x = 0$, akkor $\sin x = 1$, tehát $x \in \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Ha $\cos x = 1$, akkor $\sin x = 0$ és így $x \in \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

A megoldáshalmaz: $M = \left\{\frac{(4k+r)\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}, r \in \{0, 1\}\right\}$.

i) Ha $\sin x = -\cos x$, akkor $0 = \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, tehát $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$. Ebből következik, hogy $x \in \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{(2k+1)\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

5. a) Bizonyítsd be, hogy $\sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{2\pi}{3} + \sin \frac{3\pi}{3} + \sin \frac{4\pi}{3} + \sin \frac{5\pi}{3} = 0$.

b) Határozd meg azokat a $k \in \mathbb{N}^*$ számokat, amelyekre

$$\sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{2\pi}{3} + \sin \frac{3\pi}{3} + \sin \frac{4\pi}{3} + \dots + \sin \frac{k\pi}{3} = 0.$$

Megoldás. a) $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin \frac{3\pi}{3} = \sin \pi = 0$, $\sin \frac{4\pi}{3} = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ és $\sin \frac{5\pi}{3} = -\sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, tehát

$$\sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{2\pi}{3} + \sin \frac{3\pi}{3} + \sin \frac{4\pi}{3} + \sin \frac{5\pi}{3} = 0.$$

b) A $\sin \frac{k\pi}{3}$ értéke az előbbihez hasonlóan ismétlődik (kétszer $\frac{\sqrt{3}}{2}$, egyszer 0, kétszer $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ stb.). Így a $\sum_{j=1}^k \sin \frac{j\pi}{3}$ összeg pontosan akkor lehet 0, ha $k:6$ (0-val fejeződik be az összeg) vagy $(k+1):6$. Tehát $M = \{6j \mid j \in \mathbb{N}^*\} \cup \{6j-1 \mid j \in \mathbb{N}^*\}$.

6. Bizonyítsd be, hogy $-\sqrt{2} \leq \sin x + \cos x \leq \sqrt{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Bizonyítás.

$\sin x + \cos x = \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. Mivel $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \in [-1, 1]$, következik, hogy $-\sqrt{2} \leq \sin x + \cos x \leq \sqrt{2}$.

7. Hasonlítsd össze a $\sin x$ és $\sin y$ kifejezéseket, ha $x, y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ és $x < y$.

Általánosítás.

Megoldás. $\sin y - \sin x = 2 \sin \frac{y-x}{2} \cos \frac{y+x}{2}$. Ha $x, y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ és $x < y$, akkor $\frac{y+x}{2}, \frac{y-x}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, tehát $\sin y > \sin x$.

8. Hasonlítsd össze a $\cos x$ és $\cos y$ kifejezéseket, ha $x, y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ és $x < y$.
Általánosítás.

Megoldás. $\cos y - \cos x = 2 \sin \frac{x-y}{2} \sin \frac{x+y}{2}$. Ha $x, y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ és $x < y$, akkor $\frac{x-y}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\frac{x+y}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, tehát $2 \sin \frac{x-y}{2} \sin \frac{x+y}{2} < 0$. Így $\cos y < \cos x$.

9. Bizonyítsd be, hogy $\sin^8 x + \cos^8 x \geq \frac{1}{8}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Bizonyítás. Az $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}(a+b)^2$ egyenlőtlenség alapján

$$\sin^8 x + \cos^8 x \geq \frac{1}{2}(\sin^4 x + \cos^4 x)^2 \geq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}(\sin^2 x + \cos^2 x)^2\right)^2 = \frac{1}{8}.$$

10. Bizonyítsd be, hogy ha $\sin x + \cos x \in \mathbb{Q}$, akkor $\sin^n x + \cos^n x \in \mathbb{Q}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Bizonyítás. A matematikai indukció módszerével igazoljuk, hogy ha $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 + x_2 \in \mathbb{Q}$ és $x_1^2 + x_2^2 \in \mathbb{Q}$, akkor $x_1^n + x_2^n \in \mathbb{Q}$, $\forall n \geq 2$. A feltételek alapján $x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{2}[(x_1 + x_2)^2 - (x_1^2 + x_2^2)]$, tehát x_1 és x_2 az $x^2 - ax + b = 0$ egyenlet gyökei, ahol $a = x_1 + x_2 \in \mathbb{Q}$ és $b = x_1 x_2 \in \mathbb{Q}$. Így

$$x_1^{n+1} = ax_1^n - bx_1^{n-1}, \quad \forall n \geq 1; \quad x_2^{n+1} = ax_2^n - bx_2^{n-1}, \quad \forall n \geq 1,$$

tehát $x_1^{n+1} + x_2^{n+1} = a(x_1^n + x_2^n) - b(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}) \in \mathbb{Q}$,

ha $x_1^n + x_2^n \in \mathbb{Q}$ és $x_1^{n-1} + x_2^{n-1} \in \mathbb{Q}$. Tehát az állítás amit indukcióval igazolunk:

$$P(n): \quad x_1^n + x_2^n \in \mathbb{Q}, \quad \forall n \leq n$$

Ez igaz $n = 2$ esetén, és az előbbi gondolatmenet alapján $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Így a matematikai indukció elve alapján $P(n)$ igaz $\forall n \in \mathbb{N}^*$ esetén, tehát $x_1^n + x_2^n \in \mathbb{Q}$, $\forall n \geq 1$. Ha ezt $x_1 = \sin x$ és $x_2 = \cos x$ esetén alkalmazzuk, a bizonyítandó tulajdonsághoz jutunk.

11. Bizonyítsd be, hogy $|\sin nx| < n \sin x$, $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ és $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ esetén.

Bizonyítás. A matematikai indukció módszerét használjuk. A tulajdonság igaz $n = 2$ esetén, mert $|\sin 2x| = |2 \sin x \cos x| < 2 |\sin x|$. Ha igaz n -re, akkor a

$$|\sin(n+1)x| = |\sin nx \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos nx| \leq |\sin nx| \cdot |\cos x| + |\sin x| \cdot |\cos nx| < n \cdot |\sin x| + |\sin x| = (n+1) |\sin x|$$

egyenlőtlenség alapján $(n+1)$ -re is érvényes.

Így $|\sin nx| < n \sin x$, $\forall n \geq 2$ és $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.

12. Oldd meg az $5 - 3 \sin x = \frac{4x^2 + 8x + 8}{x + 1}$ egyenletet a valós számok halmazában.

Megoldás. Az $5 - 3 \sin x \leq 8$ és $4x^2 + 8x + 8 \geq 8x + 8$ egyenlőtlenségek alapján $x + 1 > 0$ esetén az egyenlet megoldására mindkét egyenlőtlenségben egyenlőség kellene teljesüljön. Ez nem lehetséges, tehát az $x > -1$ esetben nincs megoldás.

Ha $x < -1$, az egyenlet $-\frac{4x^2}{x+1} = 3(1 + \sin x)$ alakban írható. De $x < -1$ esetén

$$-\frac{4x^2}{x+1} > -4(x-1), \text{ tehát a } 3 \sin x > 1 - 4x \text{ egyenlőtlenség kellene teljesüljön.}$$

Ugyanakkor $x < -1$ alapján $1 - 4x > 5$, tehát a $3 \sin x > 5$ egyenlőtlenséghez jutunk. Mivel ez sem lehetséges, az egyenletnek nincs megoldása.

13. Az $E(x) = \sin 2x + \cos 3x$ kifejezés esetén keresd meg azt a legkisebb, nullától különböző pozitív T számot, amelyre $E(x+T) = E(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Megoldás. Az $E(x+T) = E(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ egyenlőségből következik, hogy

$$\sin 2T + \cos 3T = 1 \quad (\text{az } x = 0 \text{ helyettesítéssel})$$

és $\sin 2T + \cos(3\pi + 3T) = -1$ (az $x = \pi$ helyettesítéssel).

Így $\cos 3T - \cos(3\pi + 3T) = 2$, tehát $\cos 3T = 1$, $\sin 2T = 0$. A legkisebb ilyen $T > 0$ érték a $T = 2\pi$.

14. Bizonyítsd be, hogy ha $a, b > 0$ és $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, akkor $\frac{a - b \sin x}{\cos x} \geq \sqrt{a^2 - b^2}$.

Bizonyítás. A négyzetre emelés és $\cos x$ -szel való szorzás ekvivalens átalakítások, a létezési feltétel és $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ alapján. Így az egyenlőtlenség az $(a \cdot \sin x - b)^2 \geq 0$ alakra hozható, ami igaz.

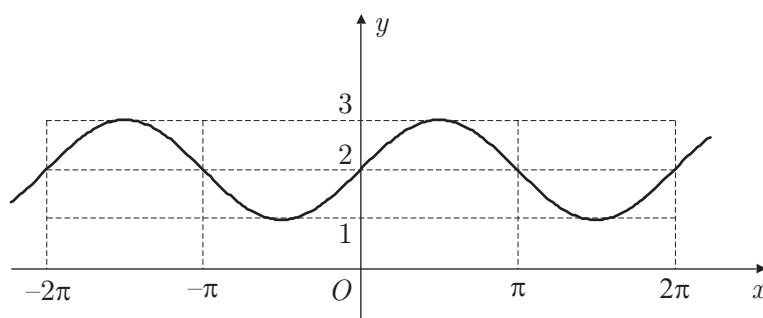
VIII.5.5. Gyakorlatok és feladatok (205. oldal)

1. Ábrázoljuk grafikusan a következő függvényeket:

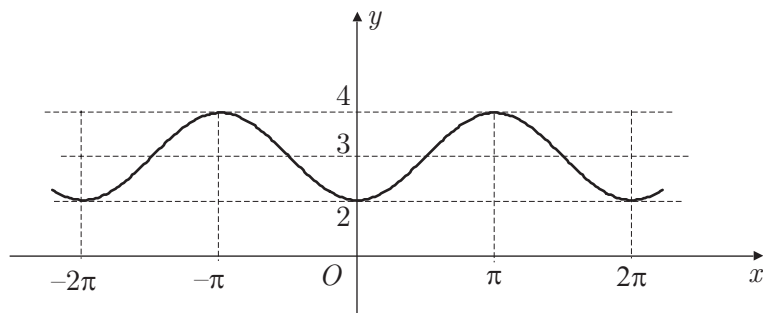
- a)** $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2 + \sin x$; **b)** $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3 - \cos x$;
c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin 2x$; **d)** $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2 \cos x$;
e) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |\sin x|$;
f) $f: \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |\operatorname{tg} x|$;
g) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$; **h)** $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin(x - \pi)$.

Megoldás

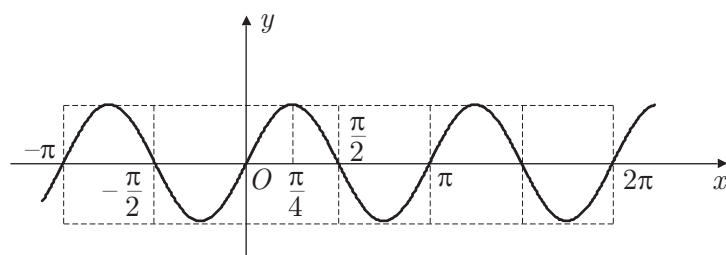
a)



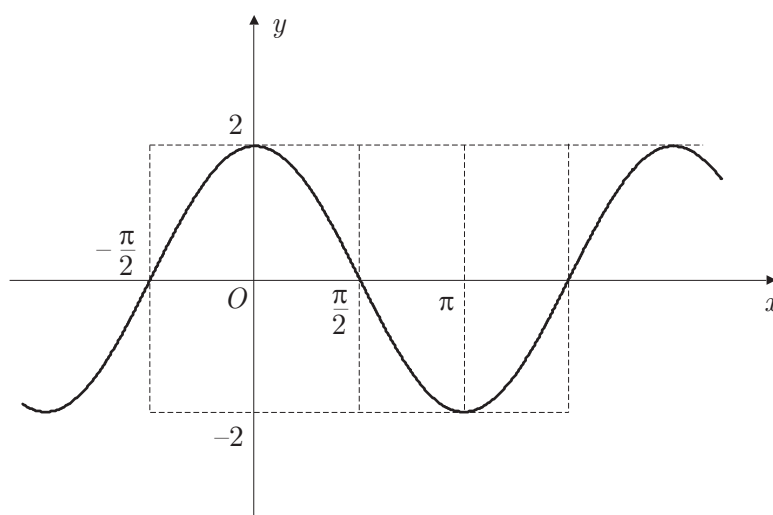
b)



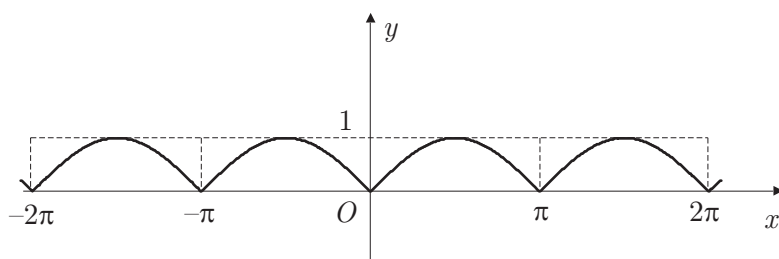
c)



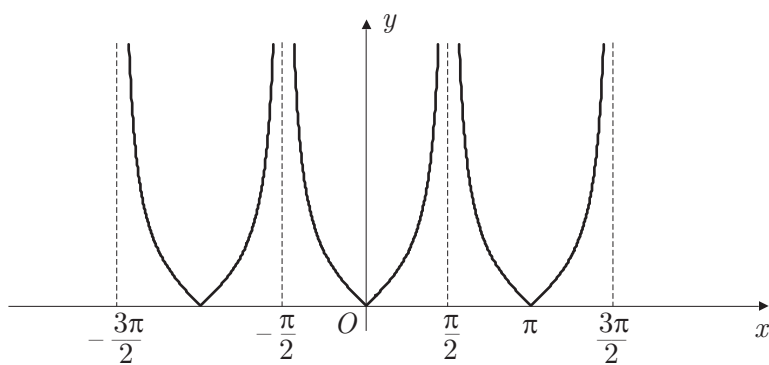
d)



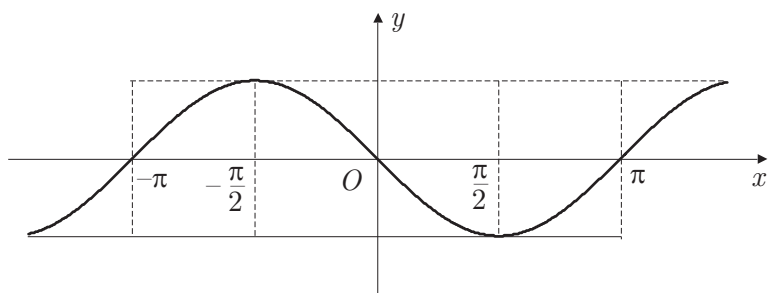
e)



f)



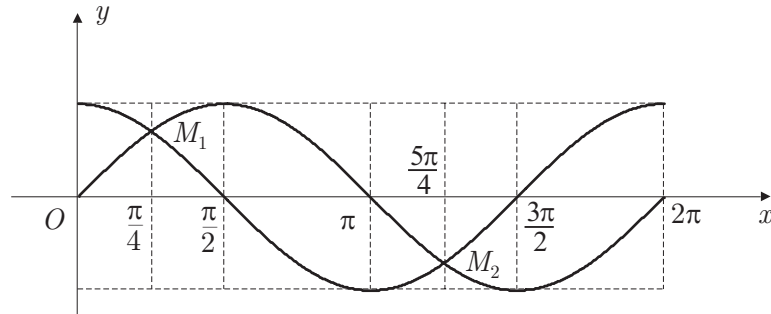
g)



2. A grafikus képek segítségével oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket:

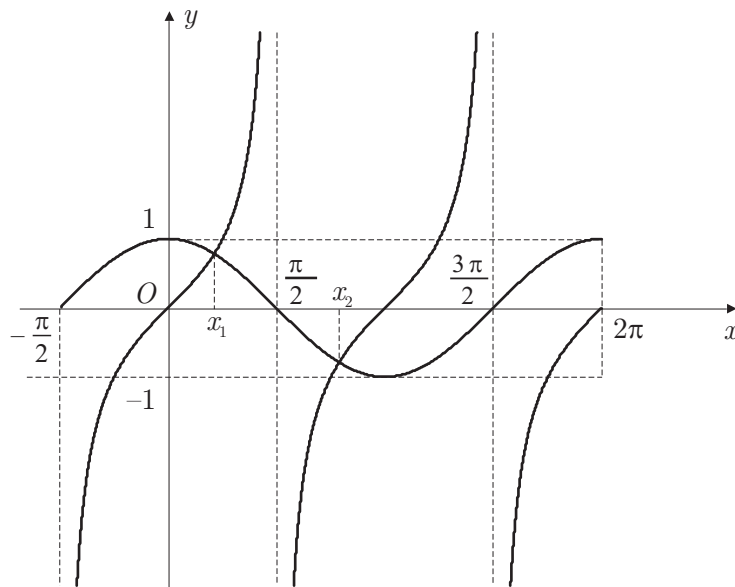
a) $\sin x > \cos x$; b) $\cos x > \operatorname{tg} x$.

Megoldás. a)



A $[0, 2\pi]$ intervallumon a két grafikus kép metszéspontjai $M_1\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $M_2\left(\frac{5\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ és a $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ intervallumon van a szinusz függvény képe magasabban, tehát az egyenlőtlenség megoldáshalmaza: $M = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right)$.

b)



A $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ intervallumban két metszéspont létezik, ezekre $\cos x \in \left\{\pm \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right\}$.

Az ábra alapján ezen az intervallumon a megoldáshalmaz $\left(-\frac{\pi}{2}, x_1\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, x_2\right)$, tehát

$$M = \left(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, x_1 + 2k\pi\right)\right) \cup \left(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, x_2 + 2k\pi\right)\right).$$

VIII.5.6.2. Gyakorlatok (208. oldal)

1. Számítsd ki:

a) $\sin 14^\circ \cos 16^\circ + \cos 14^\circ \sin 16^\circ$; b) $\cos 51^\circ \cos 9^\circ - \sin 51^\circ \sin 9^\circ$;

c) $\frac{\operatorname{tg} 23^\circ + \operatorname{tg} 22^\circ}{1 - \operatorname{tg} 22^\circ \operatorname{tg} 23^\circ}$; d) $\sqrt{3} \sin 19^\circ - \cos 19^\circ$.

Megoldás. a) $\sin 14^\circ \cos 16^\circ + \cos 14^\circ \sin 16^\circ = \sin(14^\circ + 16^\circ) = \frac{1}{2}$;

b) $\cos 51^\circ \cos 9^\circ - \sin 51^\circ \sin 9^\circ = \cos(51^\circ + 9^\circ) = \frac{1}{2}$;

c) $\frac{\operatorname{tg} 23^\circ + \operatorname{tg} 22^\circ}{1 - \operatorname{tg} 22^\circ \cdot \operatorname{tg} 23^\circ} = \operatorname{tg}(23^\circ + 22^\circ) = 1$;

d) $\sqrt{3} \sin 19^\circ - \cos 19^\circ = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 19^\circ - \frac{1}{2} \cos 19^\circ \right) =$
 $= 2 \cdot (\cos 30^\circ \cdot \sin 19^\circ - \sin 30^\circ \cdot \cos 19^\circ) = -2 \sin(30^\circ - 19^\circ) = -2 \sin 11^\circ$.

2. Bizonyítsd be, hogy $a \cos \varphi + b \sin \varphi = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin(\varphi + \varphi_0)$, ahol $\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{a}{b}$.

Bizonyítás. $a \cdot \cos \varphi + b \cdot \sin \varphi = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \cos \varphi + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \sin \varphi \right)$.

Mivel $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1$, létezik olyan φ_0 szög, amelyre

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \rho_0 \text{ és } \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \rho_0. \text{ Egy ilyen } \varphi_0 \text{ szög az } \operatorname{arctg} \frac{a}{b}. \text{ Tehát}$$

$$a \cos \rho + b \sin \rho = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin(\rho + \rho_0), \text{ ahol } \operatorname{tg} \rho_0 = \frac{a}{b}.$$

3. Számítsd ki $a \cos(a - b)$ értékét, ha $\sin a + \sin b = \sqrt{2}$ és $\cos a + \cos b = 1$.

Megoldás. $\sin a + \sin b = \sqrt{2}$ alapján $\sin^2 a + \sin^2 b + 2 \sin a \sin b = 2$.

$$\cos a + \cos b = 1 \text{ -ből következik, hogy } \cos^2 a + \cos^2 b + 2 \cos a \cos b = 1.$$

Ha összeadjuk a kapott egyenlőségek megfelelő oldalait a

$$2 \cdot (\cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b) = 1$$

egyenlőséghez jutunk, tehát $\cos(a - b) = \frac{1}{2}$.

4. Számítsd ki $a \sin(a \pm b)$, $\cos(a \pm b)$, $\operatorname{tg}(a \pm b)$ kifejezések értékét, ha

a) $\sin a = \frac{1}{5}$, $\sin b = \frac{1}{3}$ és $a, b \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;

b) $\sin a = -\frac{1}{3}, \cos b = \frac{2}{3}$ és $a, b \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$;

c) $\cos a = -\frac{1}{7}, \cos b = -\frac{3}{7}$ és $a, b \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$;

d) $\cos a = -\frac{2}{5}, \sin b = \frac{4}{5}, a, b \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Megoldás. a) Mivel $a, b \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, az adott értékekből következik, hogy $\cos a = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

és $\cos b = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Tehát

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a = \frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{6}}{15};$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a = \frac{2\sqrt{2} - 2\sqrt{6}}{15};$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b = \frac{8\sqrt{3} - 1}{15};$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b = \frac{8\sqrt{3} + 1}{15}$$

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b} = \frac{2(\sqrt{2} + \sqrt{6})}{8\sqrt{3} - 1};$$

$$\operatorname{tg}(a-b) = \frac{2(\sqrt{2} - \sqrt{6})}{8\sqrt{3} + 1}.$$

b) $\sin(a \pm b) = \frac{-2 \mp 2\sqrt{10}}{9}; \cos(a \pm b) = \frac{4\sqrt{2} \mp \sqrt{5}}{9}; \operatorname{tg}(a \pm b) = \frac{-2 \mp 2\sqrt{10}}{4\sqrt{2} \mp \sqrt{5}}.$

c) $\sin(a \pm b) = \frac{12\sqrt{3} \pm 2\sqrt{10}}{49}; \cos(a \pm b) = \frac{3 \mp 8\sqrt{30}}{49}; \operatorname{tg}(a \pm b) = \frac{12\sqrt{3} \pm 2\sqrt{10}}{3 \mp 8\sqrt{30}}.$

d) $\sin(a \pm b) = \frac{-3\sqrt{21} \mp 8}{25}; \cos(a \pm b) = \frac{6 \mp 4\sqrt{21}}{25}; \operatorname{tg}(a \pm b) = \frac{-3\sqrt{21} \mp 8}{6 \mp 4\sqrt{21}}.$

5. Hozd egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:

a) $\frac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{\sin(x+y) - \sin(x-y)}; \quad \textbf{b)} \quad \frac{\cos(x+y) + \sin x \sin y}{\cos(x-y) - \sin x \sin y};$

c) $2 \cdot \frac{\operatorname{tg} 2a + \operatorname{tg} 2b - (\operatorname{ctg} 2a + \operatorname{ctg} 2b)}{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b - (\operatorname{ctg} a + \operatorname{ctg} b)}.$

Megoldás. a) $\frac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{\sin(x+y) - \sin(x-y)} = \frac{2 \sin x \cos y}{2 \sin y \cos x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y}.$

$$\text{b)} \frac{\cos(x+y) + \sin x \sin y}{\cos(x-y) - \sin x \sin y} = \frac{\cos x \cos y}{\cos x \cos y} = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad 2 \cdot \frac{\operatorname{tg} 2a + \operatorname{tg} 2b - (\operatorname{ctg} 2a + \operatorname{ctg} 2b)}{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b - (\operatorname{ctg} a + \operatorname{ctg} b)} &= 2 \cdot \frac{\frac{2}{\operatorname{tg} 4a} + \frac{2}{\operatorname{tg} 4b}}{\frac{2}{\operatorname{tg} 2a} + \frac{2}{\operatorname{tg} 2b}} = \\ &= 2 \cdot \frac{\sin(4a+4b) \cdot \operatorname{tg} 2a \cdot \operatorname{tg} 2b \cdot \cos 2a \cdot \cos 2b}{\sin(2a+2b) \cdot \operatorname{tg} 4a \cdot \operatorname{tg} 4b \cdot \cos 4a \cdot \cos 4b} = \frac{2 \cos 2(a+b)}{\cos 2a \cdot \cos 2b} = 2(1 - \operatorname{tg} 2a \cdot \operatorname{tg} 2b). \end{aligned}$$

6. Számítsd ki az $E = \sin 2x - 3 \cos 2x + 2 \sin \frac{x}{2} + 4 \cos \frac{x}{2}$ kifejezés értékét, ha $\sin x = \frac{3}{5}$ és $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Megoldás. Mivel $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ és $\sin x = \frac{3}{5}$ következik, hogy $\cos x = -\frac{4}{5}$, $\sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\sin 2x = \frac{24}{25}$ és $\cos 2x = \frac{7}{25}$.

Ebből következik, hogy $E = \frac{3 + 35\sqrt{10}}{25}$.

7. Fejezd ki $\cos x + \cos y = a$ és $\sin x + \sin y = b$ függvényében a következő kifejezéseket:

a) $\cos(x+y)$; **b)** $\cos(x-y)$; **c)** $\sin(x+y)$; **d)** $\sin(x-y)$.

Megoldás. A $\cos^2 x + \cos^2 y + 2 \cos x \cos y = a^2$, $\sin^2 x + \sin^2 y + 2 \sin x \sin y = b^2$

egyenlőségekből következik, hogy $\cos(x-y) = \frac{a^2 + b^2 - 2}{2}$. Ugyanakkor

$$\begin{aligned} ab &= \cos x \cdot \sin x + \cos y \cdot \sin y + \cos x \cdot \sin y + \cos y \cdot \sin x = \\ &= \frac{1}{2}(\sin 2x + \sin 2y) + \sin(x+y) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sin(x+y) \cos(x-y) + \sin(x+y) = \\ &= \sin(x+y) \cdot (1 + \cos(x-y)). \end{aligned}$$

$$\text{Tehát } \sin(x+y) = \frac{2ab}{a^2 + b^2}.$$

Az adott egyenlőségek $2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = a$ és $2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = b$ alak-

ban írhatók, tehát $\operatorname{tg} \frac{x+y}{2} = \frac{b}{a}$. Ebből a $\cos(x+y) = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ egyenlőséget kapjuk.

Ugyanakkor

$$\sin^2(x-y) = \frac{(a^2+b^2)(4-a^2-b^2)}{4} \Leftrightarrow \sin(x-y) \in \left\{ \pm \frac{\sqrt{(a^2+b^2)(4-a^2-b^2)}}{2} \right\}.$$

8. Bizonyítsd be, hogy ha $\sin x + \sin y = 2 \sin(x+y)$ és $x+y \neq k\pi$ egyetlen $k \in \mathbb{Z}$ esetén sem, akkor $\operatorname{tg} \frac{x}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{y}{2} = \frac{1}{3}$.

Bizonyítás

$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$ és $\sin(x+y) = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$, tehát az

$x+y \neq k\pi$ feltétel alapján $\cos \frac{x-y}{2} = 2 \cos \frac{x+y}{2}$. Ebből következik, hogy

$$\cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} + \sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} = 2 \left(\cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} - \sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \right),$$

tehát $3 \sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} = \cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2}$ és így $\operatorname{tg} \frac{x}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{y}{2} = \frac{1}{3}$.

9. Számítsd ki az $E = a \cos^2 x + 2b \sin x \cos x + c \sin^2 x$ kifejezés helyettesítési értékét, ha $\operatorname{tg} x = \frac{2b}{a-c}$ és $a \neq c$.

Megoldás. $E = \cos^2(a + 2b \cdot \operatorname{tg} x + c \cdot \operatorname{tg}^2 x) = a \cdot \left(1 + \frac{4b^2}{(a-c)^2} \right) \cdot \cos^2 x$.

Másrészt $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$, tehát $E = a \cdot \left(1 + \left(\frac{2b}{a-c} \right)^2 \right) \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{2b}{a-c} \right)^2} = a$.

10. Bizonyítsd be a következő egyenlőségeket:

- a)** $\frac{\cos 5^\circ + \sin 25^\circ}{\cos 25^\circ - \sin 5^\circ} = \sqrt{3}$; **b)** $\frac{\sin 78^\circ + \sqrt{3} \cos 78^\circ}{\cos 3^\circ - \sin 3^\circ} = \sqrt{2}$;
c) $\sin 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ = \frac{1}{8}$; **d)** $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \cdot \sin 60^\circ \sin 80^\circ = \frac{3}{16}$;
e) $\frac{\sin 20^\circ \cos 25^\circ + \cos 20^\circ \sin 25^\circ}{\cos 35^\circ \cos 10^\circ - \sin 35^\circ \sin 10^\circ} = 1$; **f)** $\frac{\cos 56^\circ \sin 146^\circ + \sin 236^\circ \sin 304^\circ}{\cos 32^\circ \cos 28^\circ - \cos 302^\circ \sin 152^\circ} = 2$

Bizonyítás

a) $\frac{\cos 5^\circ + \sin 25^\circ}{\cos 25^\circ - \sin 5^\circ} = \frac{\cos 5^\circ + \cos 65^\circ}{\sin 65^\circ - \sin 5^\circ} = \frac{2 \cos 35^\circ \cos 30^\circ}{2 \sin 30^\circ \cos 35^\circ} = \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}$.

b) $\frac{1}{2} \sin 78^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 78^\circ = \sin 78^\circ \cos 60^\circ + \cos 78^\circ \sin 60^\circ = \sin 138^\circ = \sin 42^\circ$.

Másrészt $\cos 3^\circ - \sin 3^\circ = \sin 87^\circ - \sin 3^\circ = 2 \sin 42^\circ \cos 45^\circ = \sqrt{2} \sin 42^\circ$, tehát

$$\frac{\sin 78^\circ + \sqrt{3} \cos 78^\circ}{\cos 3^\circ - \sin 3^\circ} = \frac{2 \sin 42^\circ}{\sqrt{2} \sin 42^\circ} = \sqrt{2}.$$

c) Szorozzuk be mindkét oldalt $\cos 10^\circ$ -kal.

$$4(\sin 10^\circ \cos 10^\circ) \cos 20^\circ \cos 40^\circ = 2(2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ) \cos 40^\circ = 2 \sin 40^\circ \cos 40^\circ = \sin 80^\circ = \cos 10^\circ.$$

Mivel $\cos 10^\circ \neq 0$, következik, hogy $\sin 10^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ = \frac{1}{8}$.

d) Mivel $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, elégséges igazolni, hogy $\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}$.

Ezt a következőképpen alakítjuk:

$$\begin{aligned} 2 \sin 40^\circ (2 \sin 20^\circ \cdot \sin 80^\circ) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 2 \cos 50^\circ (\cos 60^\circ + \cos 80^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2 \cos 50^\circ \cdot \cos 60^\circ + 2 \cos 50^\circ \cdot \cos 80^\circ &= \cos 30^\circ \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cos 10^\circ - \cos 70^\circ + \cos 30^\circ - \cos 50^\circ &= \cos 30^\circ \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cos 10^\circ &= \cos 70^\circ + \cos 50^\circ. \end{aligned}$$

Az utolsó egyenlőség igaz, mert

$$\cos 70^\circ + \cos 50^\circ = 2 \cos \frac{70^\circ + 50^\circ}{2} \cos \frac{70^\circ - 50^\circ}{2} = 2 \cos 60^\circ \cdot \cos 10^\circ = \cos 10^\circ$$

Tehát a bizonyítandó egyenlőség is igaz.

$$\textbf{e)} \quad \frac{\sin 20^\circ \cdot \cos 25^\circ + \cos 20^\circ \cdot \sin 25^\circ}{\cos 35^\circ \cdot \cos 10^\circ - \sin 35^\circ \cdot \sin 10^\circ} = \frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} = 1.$$

$$\begin{aligned} \textbf{f)} \quad \frac{\cos 56^\circ \sin 146^\circ + \sin 236^\circ \sin 304^\circ}{\cos 32^\circ \cos 28^\circ - \cos 302^\circ \sin 152^\circ} &= \frac{\cos 56^\circ \sin 34^\circ + \sin 56^\circ \cos 34^\circ}{\sin 58^\circ \cos 28^\circ - \cos 58^\circ \sin 28^\circ} = \\ &= \frac{\sin 90^\circ}{\sin 30^\circ} = 2. \end{aligned}$$

11. Számítsd ki a következő kifejezések értékét:

a) $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ$;

b) $\sin 6^\circ \sin 12^\circ \cos 42^\circ \cos 24^\circ$;

c) $\operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{tg} 80^\circ$;

d) $\operatorname{tg} 1^\circ \operatorname{tg} 2^\circ \operatorname{tg} 3^\circ \dots \operatorname{tg} 89^\circ$;

e) $\sin \frac{\pi}{8} + \sin \frac{3\pi}{8} + \sin \frac{5\pi}{8} + \sin \frac{7\pi}{8}$; **f)** $\sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \sin^2 \frac{7\pi}{8}$.

Megoldás. a) A $P = \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ$ egyenlőség mindkét oldalát szorozzuk $8 \sin 20^\circ$ -kal és helyettesítsük be a $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ értéket.

$$\begin{aligned} 8 \sin 20^\circ \cdot P &= (2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ) \cos 40^\circ \cos 80^\circ \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = \\ &= (2 \sin 40^\circ \cos 40^\circ) \cos 80^\circ \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 2 \sin 80^\circ \cos 80^\circ \cdot \frac{1}{2} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\sin 160^\circ}{2} = \frac{\sin 20^\circ}{2}.$$

Mivel $\sin 20^\circ \neq 0$, írhatjuk, hogy $P = \frac{1}{16}$.

b) A 3.7. Alkalmazások 6. feladata alapján írhatjuk, hogy

$$\sin 6^\circ = \sin(36^\circ - 30^\circ) = \frac{\sqrt{30 - 6\sqrt{5}} - \sqrt{5} - 1}{8};$$

$$\cos 24^\circ = \cos(54^\circ - 30^\circ) = \frac{\sqrt{30 - 6\sqrt{5}} + \sqrt{5} + 1}{8};$$

$$\sin 12^\circ = \sin(30^\circ - 18^\circ) = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{15} + \sqrt{3}}{8};$$

$$\cos 42^\circ = \cos(60^\circ - 18^\circ) = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + \sqrt{5} - \sqrt{3}}{8}.$$

$$\text{Így } \sin 6^\circ \cdot \cos 24^\circ = \frac{3 - \sqrt{5}}{8} \text{ és } \sin 12^\circ \cdot \cos 42^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{8}.$$

$$\text{Tehát } \sin 6^\circ \cdot \sin 12^\circ \cdot \cos 24^\circ \cdot \cos 42^\circ = \frac{(\sqrt{5} - 1)^3}{128}.$$

c) A 10. feladat d) alpontja és a 11. feladat a) alpontja alapján

$$\operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 80^\circ = 3.$$

d) $\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 89^\circ = \operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{ctg} 1^\circ = 1$ és általában $\operatorname{tg} k^\circ \cdot \operatorname{tg} (90^\circ - k^\circ) = 1$ ha $k = \overline{1, 44}$.

Így $\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{tg} 89^\circ = 1$.

$$\begin{aligned} \text{e) } \sin \frac{\pi}{8} + \sin \frac{3\pi}{8} + \sin \frac{5\pi}{8} + \sin \frac{7\pi}{8} &= \left(\sin \frac{\pi}{8} + \sin \frac{7\pi}{8} \right) + \left(\sin \frac{3\pi}{8} + \sin \frac{5\pi}{8} \right) = \\ &= 2 \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{3\pi}{8} + 2 \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{8} = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{8} + \cos \frac{\pi}{8} \right) = 2 \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{8} = \\ &= \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{2}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) A } \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \text{ összefüggés alapján } \sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \sin^2 \frac{7\pi}{8} &= \\ = \frac{1}{2} \left(4 - \left(\cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{3\pi}{4} + \cos \frac{5\pi}{4} + \cos \frac{7\pi}{4} \right) \right) &= 2. \end{aligned}$$

12. Írd egyszerűbb alakba az $E = \frac{\sin a + \sin 3a + \sin 5a + \sin 7a + \sin 9a}{\cos a + \cos 3a + \cos 5a + \cos 7a + \cos 9a}$ kifejezést.

Megoldás.

$$\begin{aligned} \sin a + \sin 3a + \sin 5a + \sin 7a + \sin 9a &= 2 \sin 5a \cos 4a + 2 \sin 5a \cos 2a + \sin 5a = \\ &= \sin 5a \cdot (1 + 2 \cos 2a + 2 \cos 4a). \end{aligned}$$

$$\cos a + \cos 3a + \cos 5a + \cos 7a + \cos 9a = 2 \cos 5a \cos 4a + 2 \cos 5a \cos 2a + \cos 5a = \\ = \cos 5a \cdot (1 + 2 \cos 2a + 2 \cos 4a).$$

Tehát ha E értelmezett, akkor $E = \operatorname{tg} 5a$.

13. Bizonyítsd be a következő azonosságokat:

a) $\sin \alpha \sin(\beta - \gamma) + \sin \beta \sin(\gamma - \alpha) + \sin \gamma \sin(\alpha - \beta) = 0, \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R};$

b) $\sin(\alpha + \beta) \sin(\beta + \gamma) = \sin \alpha \sin \gamma + \sin \beta \sin(\alpha + \beta + \gamma) \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R};$

c) $\sin(\alpha + \beta + \gamma) = \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \\ - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma, \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$

Bizonyítás. **a)** A $\sin(x - y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$ összefüggés alapján a kiszámítandó E összeg a következőképpen alakítható:

$$E = \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos \alpha + \\ - \sin \beta \cos \gamma \sin \alpha + \sin \gamma \sin \alpha \cos \beta - \sin \gamma \cos \alpha \sin \beta = 0.$$

b) $S = \sin \alpha \sin \gamma + \sin \beta \sin(\alpha + (\beta + \gamma)) = \\ = \sin \alpha \sin \gamma + \sin \beta \sin \alpha \cos(\beta + \gamma) + \sin \beta \cos \alpha \sin(\beta + \gamma) = \\ = \sin \alpha \cdot (\sin \gamma + \sin \beta \cos(\beta + \gamma)) + \sin \beta \cos \alpha \sin(\beta + \gamma).$

De $\sin \gamma = \sin(\beta + \gamma) \cos \beta - \sin \beta \cos(\beta + \gamma)$, tehát

$$S = \sin(\beta + \gamma)(\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha) = \sin(\beta + \gamma) \sin(\alpha + \beta).$$

c) $\sin(\alpha + \beta + \gamma) = \sin(\alpha + \beta) \cos \gamma + \sin \gamma \cos(\alpha + \beta) = \\ = (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) \cos \gamma + \sin \gamma (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) = \\ = \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma.$

14. Vezess le egy képletet $\cos(\alpha + \beta + \gamma)$ -ra.

Megoldás. $\cos(\alpha + \beta + \gamma) = \cos(\alpha + \beta) \cos \gamma - \sin(\alpha + \beta) \sin \gamma = \\ = (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) \cos \gamma - (\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha) \sin \gamma = \\ = \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma.$

15. Bizonyítsd be, hogy ha $x + y + z = \pi$, akkor:

a) $\sin x + \sin y + \sin z = 4 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} \cos \frac{z}{2};$

b) $\cos x + \cos y + \cos z = 1 + 4 \sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \sin \frac{z}{2};$

c) $\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z = 4 \sin x \sin y \sin z;$

d) $\cos 2x + \cos 2y + \cos 2z = -1 - 4 \cos x \cos y \cos z;$

e) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z, \text{ ha } x, y, z \notin \left\{ (2k+1) \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\};$

f) $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} + \operatorname{ctg} \frac{y}{2} + \operatorname{ctg} \frac{z}{2} = \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \operatorname{ctg} \frac{y}{2} \operatorname{ctg} \frac{z}{2}, \text{ ha } x, y, z \notin \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\};$

g) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} \operatorname{tg} \frac{y}{2} + \operatorname{tg} \frac{y}{2} \operatorname{tg} \frac{z}{2} + \operatorname{tg} \frac{z}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1$, ha $x, y, z \notin \{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$;

h) $\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y + \operatorname{ctg} y \operatorname{ctg} z + \operatorname{ctg} z \operatorname{ctg} x = 1$, ha $x, y, z \notin \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Bizonyítás. A 4.1. megoldott feladatok 1. feladata alapján

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma - \sin(\alpha + \beta + \gamma) = 4 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{y+z}{2} \sin \frac{z+x}{2}.$$

a) Ha $\alpha = x$, $\beta = y$ és $\gamma = z$ valamint $x + y + z = \pi$, akkor

$$\sin x + \sin y + \sin z = 4 \sin \frac{\pi-z}{2} \sin \frac{\pi-y}{2} \sin \frac{\pi-x}{2} = 4 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} \cos \frac{z}{2}.$$

b) Ha $\alpha = \frac{\pi}{2} - x$, $\beta = \frac{\pi}{2} - y$ és $\gamma = \frac{\pi}{2} - z$, akkor $x + y + z = \pi$ alapján

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}, \text{ tehát}$$

$$\begin{aligned} \cos x + \cos y + \cos z - 1 &= 4 \sin \frac{\pi-x-y}{2} \sin \frac{\pi-x-z}{2} \sin \frac{\pi-y-z}{2} = \\ &= 4 \sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \sin \frac{z}{2}. \end{aligned}$$

c) Ha $\alpha = 2x$, $\beta = 2y$ és $\gamma = 2z$, akkor $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$, tehát

$$\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z = 4 \sin(\pi-x) \sin(\pi-y) \sin(\pi-z) = 4 \sin x \sin y \sin z.$$

d) Ha $\alpha = \frac{\pi}{2} - 2x$, $\beta = \frac{\pi}{2} - 2y$ és $\gamma = \frac{\pi}{2} - 2z$, akkor $\alpha + \beta + \gamma = -\frac{\pi}{2}$, tehát

$$\begin{aligned} \cos 2x + \cos 2y + \cos 2z + 1 &= 4 \sin \frac{\pi-2x-2y}{2} \sin \frac{\pi-2y-2z}{2} \sin \frac{\pi-2x-2z}{2} = \\ &= 4 \cos(x+y) \cos(y+z) \cos(x+z) = -4 \cos x \cos y \cos z. \end{aligned}$$

e) $\operatorname{tg}(x+y) = \operatorname{tg}(\pi-z) = -\operatorname{tg} z$. De $\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$, tehát

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = -\operatorname{tg} z + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} z, \text{ vagyis } \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} z.$$

f) $\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{z}{2}\right) = \operatorname{tg} \frac{z}{2} = \frac{1}{\operatorname{ctg} \frac{z}{2}}$. Tehát $\operatorname{ctg} \frac{z}{2} \cdot \frac{1 - \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{y}{2}}{\operatorname{ctg} \frac{x}{2} + \operatorname{ctg} \frac{y}{2}} = -1$,

ahonnan következik a kért összefüggés.

g) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{y}{2} + \operatorname{tg} \frac{y}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{z}{2} + \operatorname{tg} \frac{z}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \left(\operatorname{tg} \frac{y}{2} + \operatorname{tg} \frac{z}{2} \right) + \operatorname{tg} \frac{y}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{z}{2} =$
 $= \operatorname{tg} \frac{x}{2} \left(\operatorname{tg} \left(\frac{y+z}{2} \right) \cdot \left(1 - \operatorname{tg} \frac{y}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{z}{2} \right) \right) + \operatorname{tg} \frac{y}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{z}{2} =$
 $= \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi-x}{2} \cdot \left(1 - \operatorname{tg} \frac{y}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{z}{2} \right) + \operatorname{tg} \frac{y}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{z}{2} = 1,$

$$\text{mert } \operatorname{tg} \frac{\pi - x}{2} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \right) = \operatorname{ctg} \frac{x}{2}.$$

$$\mathbf{h)} \operatorname{ctg} x \cdot (\operatorname{ctg} y + \operatorname{ctg} z) = 1 - \operatorname{ctg} y \cdot \operatorname{ctg} z \Leftrightarrow \operatorname{ctg} x = \frac{1 - \operatorname{ctg} y \cdot \operatorname{ctg} z}{\operatorname{ctg} y + \operatorname{ctg} z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{ctg} x = -\operatorname{ctg}(y + z) \text{ és ez igaz mert } \operatorname{ctg}(\pi - (y + z)) = -\operatorname{ctg}(y + z).$$

$$\mathbf{16. Bizonyítsd be, hogy ha } x, y \in [0, \pi], \text{ akkor } \frac{\sin x + \sin y}{2} \leq \sin \frac{x + y}{2}.$$

Bizonyítás. A $\frac{\sin x + \sin y}{2} = \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}$ egyenlőség és a $\cos \frac{x - y}{2} \leq 1$ egyenlőtlenség alapján írhatjuk, hogy

$$\frac{\sin x + \sin y}{2} = \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2} \leq \sin \frac{x + y}{2},$$

$$\text{mert } \sin \frac{x + y}{2} \geq 0.$$

17. Bizonyítsd be, hogy bármely } x, y \in \mathbb{R} \text{ esetén}

$$\mathbf{a)} \cos^2(x - y) - \cos^2(x + y) = \sin 2x \sin 2y;$$

$$\mathbf{b)} \cos^2(x - y) + \cos^2(x + y) = 1 + \cos 2x \cos 2y;$$

$$\mathbf{c)} \sin(x + y) + \cos(x - y) = (\sin x + \cos x)(\sin y + \cos y) = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \sin \left(y + \frac{\pi}{4} \right);$$

$$\mathbf{d)} \sin \left(x + (2k + 1) \frac{\pi}{2} \right) = (-1)^k \cos x; \quad \mathbf{e)} \cos \left(x + (2k + 1) \frac{\pi}{2} \right) = (-1)^{k+1} \sin x.$$

Bizonyítás

$$\mathbf{a)} \cos^2(x - y) - \cos^2(x + y) = (\cos(x - y) - \cos(x + y)) \cdot (\cos(x - y) + \cos(x + y)) = \\ = 2 \sin x \sin y \cdot 2 \cos x \cos y = \sin 2x \sin 2y.$$

$$\mathbf{b)} \cos^2(x - y) + \cos^2(x + y) = \frac{1 + \cos 2(x - y)}{2} + \frac{1 + \cos 2(x + y)}{2} = \\ = \frac{1}{2} (2 + \cos 2(x - y) + \cos 2(x + y)) = \frac{1}{2} (2 + 2 \cos 2y \cos 2x) = 1 + \cos 2x \cos 2y.$$

$$\mathbf{c)} \sin(x + y) + \cos(x - y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x + \cos x \cos y + \sin y \sin x = \\ = (\sin x + \cos x)(\sin y + \cos y).$$

Másrészt

$$\sin x + \cos x = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + \cos x = 2 \cos \frac{\pi}{4} \cos \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = \\ = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + x \right)$$

$$\text{és} \quad \sin y + \cos y = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + y \right),$$

tehát a második egyenlőség is igaz.

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad \sin\left(x + (2k+1)\frac{\pi}{2}\right) &= \sin x \cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) + \cos x \sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = \\ &= 0 + \cos x \cdot \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \cdot \left(\sin k\pi \cos \frac{\pi}{2} + \cos k\pi \sin \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= \cos x \cos k\pi = (-1)^k \cos x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad \cos\left(x + (2k+1)\frac{\pi}{2}\right) &= \cos x \cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) - \sin x \sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = \\ &= -\sin x \sin(2k+1)\frac{\pi}{2} = -(-1)^k \sin x = (-1)^{k+1} \sin x. \end{aligned}$$

18. Bizonyítsd be, hogy $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ esetén $\sin x \cos y + \sin y \cos z + \sin z \cos x \leq \frac{3}{2}$.

Bizonyítás. Ha

$$2 \sin x \cos y \leq \sin^2 x + \cos^2 y$$

$$2 \sin y \cos z \leq \sin^2 y + \cos^2 z$$

és

$$2 \sin z \cos x \leq \sin^2 z + \cos^2 x$$

egyenlőtlenségek megfelelő oldalait összeadjuk, a kért egyenlőtlenséghez jutunk.

19. Bizonyítsd be, hogy tetszőleges ABC háromszögben érvényesek az alábbi egyenlőtlenségek (A , B és C a háromszög szögeinek mértékét jelöli.):

$$\text{a)} \quad 1 \leq \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}; \quad \text{b)} \quad \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8};$$

$$\text{c)} \quad \cos A \cos B \cos C \leq \frac{1}{8}; \quad \text{d)} \quad \sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2};$$

$$\text{e)} \quad \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}; \quad \text{f)} \quad \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} \leq \frac{1}{3\sqrt{3}};$$

$$\text{g)} \quad \operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \geq \sqrt{3}.$$

Bizonyítás. a) $C = \pi - (A + B)$ alapján

$$\cos A + \cos B + \cos C = \cos A + \cos B - \cos(A + B),$$

tehát a $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$ egyenlőtlenség ekvivalens a

$$2 \cos A + 2 \cos B - 2 \cos A \cos B + 2 \sin A \sin B \leq 3$$

egyenlőtlenséggel.

De $3 = \sin^2 A + \cos^2 A + \sin^2 B + \cos^2 B + 1$, tehát az egyenlőtlenség

$$(\sin A - \sin B)^2 + (\cos A + \cos B - 1)^2 \geq 0$$

alakban írható, és ez igaz.

Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $\sin A = \sin B$ és $\cos A + \cos B = 1$. Ebből

következik, hogy $A = B = C = \frac{\pi}{3}$.

Másrészt $\cos \frac{A+B}{2} \leq \cos \frac{A-B}{2}$, tehát $2 \cos^2 \frac{A+B}{2} \leq 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$ és így $1 + \cos(A+B) \leq \cos A + \cos B$. Ebből következik, hogy $1 \leq \cos A + \cos B + \cos C$.

b) A 15. feladat b) alpontja és az előbb igazolt egyenlőtlenség alapján

$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{\cos A + \cos B + \cos C - 1}{4} \leq \frac{1}{8}.$$

Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha a háromszög egyenlő szárú.

c) Ha a háromszög tompaszögű vagy derékszögű, akkor a bal oldal negatív vagy 0, tehát az egyenlőtlenség igaz. Ha a háromszög hegyesszögű, akkor létezik olyan háromszög, amelynek szögei $\pi - 2A$, $\pi - 2B$ és $\pi - 2C$. Erre a háromszögre alkalmazzuk a b) alpontnál bizonyított egyenlőtlenséget:

$$\cos A \cos B \cos C = \sin \frac{\pi - 2A}{2} \sin \frac{\pi - 2B}{2} \sin \frac{\pi - 2C}{2} \leq \frac{1}{8}.$$

d) $\sin A + \sin B + \sin C = \sin A + \sin B + \sin(A+B) =$

$$= 2 \sin \frac{A+B}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2} \right) \leq 2 \sin \frac{A+B}{2} \left(1 + \cos \frac{A+B}{2} \right).$$

Tehát elégséges igazolni, hogy $2 \sin \frac{A+B}{2} \left(1 + \cos \frac{A+B}{2} \right) \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Ez ekvivalens a

$$\sin^2 \frac{A+B}{2} \left(1 + \cos \frac{A+B}{2} \right)^2 \leq \frac{27}{16} \text{ egyenlőtlenséggel.}$$

De $\sin^2 \frac{A+B}{2} = 1 - \cos^2 \frac{A+B}{2}$ és

$$\left(1 - \cos^2 \frac{A+B}{2} \right) \left(1 + \cos \frac{A+B}{2} \right)^2 = \left(1 - \cos \frac{A+B}{2} \right) \left(1 + \cos \frac{A+B}{2} \right)^3,$$

tehát alkalmazhatjuk a számtani-mértani közepek közti egyenlőtlenségeket a következő számokra: $x = 3 - 3 \cos \frac{A+B}{2}$, $y = z = t = 1 + \cos \frac{A+B}{2}$. Így

$$\left(3 - 3 \cos \frac{A+B}{2} \right) \left(1 + \cos \frac{A+B}{2} \right)^3 = xyz \leq \left(\frac{x+y+z+t}{4} \right)^4 = \left(\frac{6}{4} \right)^4 = \frac{3^4}{2^4},$$

tehát $\sin^2 \frac{A+B}{2} \left(1 + \cos \frac{A+B}{2} \right) \leq \frac{27}{16}$.

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $3 - 3 \cos \frac{A+B}{2} = 1 + \cos \frac{A+B}{2}$ és

$$\cos \frac{A-B}{2} = 1, \text{ tehát ha } A = B = C = \frac{\pi}{3}.$$

e) A 15. feladat a) alpontja alapján

$$4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = \sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{tehát } \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

f) A 15. feladat g) alpontja alapján

$$1 = \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{A}{2} \geq 3 \sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2}},$$

$$\text{tehát } \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2} \leq \sqrt[3]{\frac{1}{3^3}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{g)} \quad & \left(\operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \right)^2 = \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} + 2 \geq \\ & \geq \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{A}{2} + 2 = 3. \end{aligned}$$

$$\text{Tehát } \operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \geq \sqrt{3}.$$

$$\mathbf{20. Bizonyítsd be, hogy } \sin \frac{\pi}{14} \sin \frac{3\pi}{14} \sin \frac{5\pi}{14} = \frac{1}{8}.$$

Bizonyítás

Szorozzuk be a $P = \sin \frac{\pi}{14} \sin \frac{3\pi}{14} \sin \frac{5\pi}{14}$ szorzatot a $P' = 8 \cos \frac{\pi}{14} \cos \frac{3\pi}{14} \cos \frac{5\pi}{14}$ szorzattal. Így

$$PP' = \sin \frac{2\pi}{14} \sin \frac{6\pi}{14} \sin \frac{10\pi}{14}.$$

$$\text{De } \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{14} = \frac{5\pi}{14}, \quad \frac{\pi}{2} - \frac{6\pi}{14} = \frac{\pi}{14} \quad \text{és} \quad \frac{\pi}{2} - \frac{10\pi}{14} = -\frac{3\pi}{14}, \quad \text{tehát}$$

$$PP' = \cos \frac{5\pi}{14} \cos \frac{\pi}{14} \cos \frac{3\pi}{14} = \frac{1}{8} P'.$$

$$\text{Mivel } P' \neq 0, \text{ írhatjuk, hogy } P = \frac{1}{8}.$$

$$\mathbf{21. Bizonyítsd be, hogy bármely } x, y \in \mathbb{R} \text{ esetén } \cos x + \cos y + 2 \cos(x+y) \geq -\frac{9}{4}.$$

Bizonyítás. Az egyenlőtlenség ekvivalens a

$$4(\sin x - \sin y)^2 + (2 \cos x + 2 \cos y + 1)^2 \geq 0$$

egyenlőtlenséggel, tehát igaz.

$$\mathbf{22. Bizonyítsd be, hogy az } E = \frac{1 - \sin x}{1 - \operatorname{tg} x} + \frac{1 - \cos x}{1 - \operatorname{ctg} x}, \quad x \neq k\pi + \frac{\pi}{4} \text{ kifejezés értéke}$$

nem függ x -től.

$$\mathbf{Bizonyítás.} \quad E = \frac{(1 - \sin x) \cos x}{\cos x - \sin x} + \frac{(1 - \cos x) \sin x}{\sin x - \cos x} =$$

$$= \frac{\cos x - \cos x \sin x + \cos x \sin x - \sin x}{\cos x - \sin x} = 1.$$

23. Számítsd ki a következő összegeket:

a) $\operatorname{tg} x + 2 \operatorname{tg} 2x + 2^2 \operatorname{tg}(2^2 x) + \dots + 2^n \operatorname{tg}(2^n x);$

b) $\sin^3 \frac{x}{3} + 3 \sin^3 \frac{x}{3^3} + 3^2 \sin^3 \frac{x}{3^3} + \dots + 3^{n-1} \sin^3 \frac{x}{3^n};$

c) $\frac{1}{\sin 2a} + \frac{1}{\sin 4a} + \dots + \frac{1}{\sin 2^n a};$

d) $\frac{\sin 1}{\cos 0 \cos 1} + \frac{\sin 1}{\cos 1 \cos 2} + \dots + \frac{\sin 1}{\cos(n-1) \cos n};$

e) $\frac{1}{\cos x + \cos 3x} + \frac{1}{\cos x + \cos 5x} + \dots + \frac{1}{\cos x + \cos(2n+1)x}.$

Megoldás. a) A $\operatorname{ctg} a - 2 \operatorname{ctg} 2a = \operatorname{tg} a$ azonosság alapján

$$\sum_{k=0}^n 2^k \operatorname{tg} 2^k x = \sum_{k=0}^n 2^k (\operatorname{ctg} 2^k x - 2 \operatorname{ctg} 2^{k+1} x) = \operatorname{ctg} x - 2^{k+1} \operatorname{ctg} 2^{k+1} x.$$

b) A $4 \sin^3 a = 3 \sin a - \sin 3a$ azonosság alapján

$$3^k \sin^3 \frac{x}{3^{k+1}} = \frac{1}{4} \left(3^{k+1} \sin \frac{x}{3^{k+1}} - 3^k \sin \frac{x}{3^k} \right),$$

tehát

$$\sum_{k=0}^{n-1} 3^k \sin^3 \frac{x}{3^{k+1}} = \frac{1}{4} \left(3^n \sin \frac{x}{3^n} - \sin x \right).$$

c) A $\operatorname{ctg} a - \operatorname{ctg} 2a = \frac{1}{\sin 2a}$ azonosság alapján $\frac{1}{\sin 2^k a} = \operatorname{ctg} 2^{k-1} a - \operatorname{ctg} 2^k a,$

tehát $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sin 2^k a} = \operatorname{ctg} a - \operatorname{ctg} 2^n a.$

d) A $\operatorname{tg} n - \operatorname{tg}(n-1) = \frac{\sin 1}{\cos n \cdot \cos(n-1)} \quad \forall n \geq 1$ egyenlőség alapján

$$\sum_{k=1}^n \frac{\sin 1}{\cos(k-1) \cos k} = \sum_{k=1}^n (\operatorname{tg} k - \operatorname{tg}(k-1)) = \operatorname{tg} n - \operatorname{tg} 0 = \operatorname{tg} n.$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \sum_{k=1}^n \frac{1}{\cos x + \cos(2k+1)x} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2 \cos(k+1)x \cos kx} = \\ &= \frac{1}{2 \sin x} \sum_{k=1}^n \frac{\sin x}{\cos kx \cos(k+1)x} = \frac{1}{2 \sin x} \sum_{k=1}^n (\operatorname{tg}(k+1)x - \operatorname{tg} x) = \\ &= \frac{1}{2 \sin x} (\operatorname{tg}(n+1)x - \operatorname{tg} x) = \frac{\sin nx}{\sin 2x \cos(n+1)x} \end{aligned}$$

24. Bizonyítsd be, hogy

$$\text{a) } \cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2};$$

$$\text{b) } \cos \frac{2\pi}{11} + \cos \frac{4\pi}{11} + \cos \frac{6\pi}{11} \cos \frac{8\pi}{11} + \cos \frac{10\pi}{11} = -\frac{1}{2}.$$

Bizonyítás. A 4.1. Megoldott feladatok 2. feladata (195. oldal) alapján

$$\cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{9\pi}{11} = \frac{\sin \frac{5\pi}{11} \cos \frac{5\pi}{11}}{\sin \frac{\pi}{11}} = \frac{\sin \frac{10\pi}{11}}{2 \sin \frac{\pi}{11}} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{és} \quad \cos \frac{2\pi}{11} + \cos \frac{4\pi}{11} + \cos \frac{6\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{10\pi}{11} &= \frac{\sin \frac{5\pi}{11} \cos \frac{6\pi}{11}}{\sin \frac{\pi}{11}} = \\ &= -\frac{\sin \frac{5\pi}{11} \sin \frac{5\pi}{11}}{\sin \frac{\pi}{11}} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

25. Számítsd ki a $\cos \frac{2\pi}{2n+1} + \cos \frac{4\pi}{2n+1} + \cos \frac{6\pi}{2n+1} + \dots + \cos \frac{2n\pi}{2n+1}$ összeget.

Megoldás. A 4.1. Megoldott feladatok 2. feladata alapján

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \cos \frac{2k\pi}{2n+1} &= \frac{\sin \frac{n\pi}{2n+1} \cos \frac{(n+1)\pi}{2n+1}}{\sin \frac{\pi}{2n+1}} = -\frac{\sin \frac{n\pi}{2n+1} \cos \frac{n\pi}{2n+1}}{\sin \frac{\pi}{2n+1}} = \\ &= -\frac{\sin \frac{2n\pi}{2n+1}}{2 \sin \frac{\pi}{2n+1}} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\left(a = \frac{2\pi}{2n+1}, \quad n \rightarrow n-1 \quad \text{és} \quad r = \frac{2\pi}{2n+1} \right)$$

26. Számítsd ki a következő szorzatokat:

$$\text{a) } \cos x \cos 2x \cos 4x \dots \cos 2^n x;$$

$$\text{b) } \left(1 + \frac{1}{\cos x} \right) \left(1 + \frac{1}{\cos 2x} \right) \left(1 + \frac{1}{\cos 4x} \right) \dots \left(1 + \frac{1}{\cos 2^{n-1}x} \right);$$

$$\text{c) } \cos \frac{\pi}{2n+1} \cos \frac{2\pi}{2n+1} \cos \frac{3\pi}{2n+1} \dots \cos \frac{n\pi}{2n+1}.$$

Megoldás. a) Jelöljük P -vel a kiszámítandó szorzatot és szorozzuk be $2^{n+1} \sin x$ -szel. A $2 \sin u \cos u = \sin 2u$ azonosság alapján

$$\begin{aligned}
2^{n+1} \cdot \sin x \cdot P &= 2^n (2 \sin x \cos x) \cos 2x \cdot \dots \cdot \cos 2^n x = \\
&= 2^{n-1} (2 \sin 2x \cos 2x) \cos 4x \cdot \dots \cdot \cos 2^n x = \\
&= 2^{n-2} (2 \sin 4x \cos 4x) \cdot \dots \cdot \cos 2^n x = \dots \\
&\dots = \sin 2^{n+1} x.
\end{aligned}$$

Tehát $P = \frac{\sin 2^{n+1} x}{2^{n+1} \sin x}$.

b) Az $1 + \frac{1}{\cos 2^k x} = \frac{2 \cos^2 2^{k-1} x}{\cos 2^k x} = \frac{\operatorname{tg} 2^k x}{\operatorname{tg} 2^{k-1} x}$ azonosság alapján a kiszámítandó P

szorzat a következőképpen írható:

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{\cos 2^{k-1} x} \right) = \prod_{k=1}^n \frac{\operatorname{tg} 2^k x}{\operatorname{tg} 2^{k-1} x} = \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} \frac{a}{2}} \cdot \frac{\operatorname{tg} 2a}{\operatorname{tg} a} \cdot \dots \cdot \frac{\operatorname{tg} 2^{n-1} x}{\operatorname{tg} 2^{n-2} x} = \frac{\operatorname{tg} 2^{n-1} x}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}.$$

c) Szorozzuk be a $P = \prod_{k=1}^n \cos \frac{k\pi}{2n+1}$ szorzatot a $P' = \prod_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{2n+1}$ szorzattal.

$$PP' = \frac{1}{2^n} \prod_{k=1}^n \sin \frac{2k\pi}{2n+1} = \frac{1}{2^n} P',$$

mert $2k > n$ esetén a $\sin \frac{2k\pi}{2n+1} = \sin \frac{(2n+1-2k)\pi}{2n+1}$ összefüggés alapján a szorzat

tényezőit átírjuk. Tehát $P = \frac{1}{2^n}$.

IX. A trigonometria alkalmazása a geometriában

IX.1.2. Gyakorlatok (213. oldal)

1. Bizonyítsd be, hogy az ABC háromszög pontosan akkor derékszögű A -ban, ha $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C$.

Bizonyítás. Az ABC háromszög A -ban derékszögű $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow (2R \sin A)^2 = (2R \sin B)^2 + (2R \sin C)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C.$$

2. Az ABC háromszögben $a = 3$, $b = 4$ és $\sin A = \frac{2}{5}$. Határozd meg a C szög mértékét.

Megoldás. $\frac{3}{\frac{2}{5}} = \frac{4}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \sin B = \frac{8}{15} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sin C = \sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B = \frac{2}{5} \cos B + \cos A \cdot \frac{8}{15},$$

$$\text{ahol } \cos A \in \left\{ -\frac{\sqrt{21}}{5}, \frac{\sqrt{21}}{5} \right\} \text{ és } \cos B \in \left\{ -\frac{\sqrt{161}}{15}, \frac{\sqrt{161}}{15} \right\}.$$

• Ha $\cos A = -\frac{\sqrt{21}}{5} \Rightarrow \cos B = \frac{\sqrt{161}}{15}$ (mivel ha a szög koszinusza negatív, az nagyobb 90° -nál). Ekkor $\sin C = \frac{2}{5} \cdot \frac{\sqrt{161}}{15} - \frac{\sqrt{21}}{5} \cdot \frac{8}{15} = \frac{2\sqrt{7}}{75}(\sqrt{21} - 4\sqrt{3}) < 0$, ami nem lehetséges mivel $C \in (0, \pi)$.

• Ha $\cos B = -\frac{\sqrt{161}}{15} \Rightarrow \cos A = \frac{\sqrt{21}}{5} \Rightarrow \sin C = \frac{2}{5} \cdot \frac{-\sqrt{161}}{15} + \frac{\sqrt{21}}{5} \cdot \frac{8}{15} = \frac{2\sqrt{7}}{75}(4\sqrt{3} - \sqrt{23}).$

• Ha $\cos A = \frac{\sqrt{21}}{5}$ és $\cos B = \frac{\sqrt{161}}{15} \Rightarrow \sin C = \frac{2}{5} \cdot \frac{\sqrt{161}}{15} + \frac{\sqrt{21}}{5} \cdot \frac{8}{15} = \frac{2\sqrt{7}}{75}(\sqrt{23} + 4\sqrt{3}).$

3. Számítsd ki az ABC háromszög oldalainak és szögeinek a mértékét, ha

a) $a = 2$, $b = 4$ és $A = \frac{\pi}{3}$;

b) $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $b = \frac{3}{2}$ és $A = \frac{\pi}{6}$.

Megoldás. a) $\frac{2}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{4}{\sin B} \Rightarrow \sin B = \sqrt{3} > 1$, ami lehetetlen.

$$\text{b) } \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{3}{2}}{\sin B} \Rightarrow \sin B = \frac{3\sqrt{2}}{4} > 1, \text{ ami szintén lehetetlen.}$$

$$\text{4. Bizonyítsd be, hogy } \frac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)} = \frac{a^2 - b^2}{c^2}.$$

$$\text{Bizonyítás. } \frac{a^2 - b^2}{c^2} = \frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\sin^2 C} = \frac{1}{\sin(A+B)} \cdot \frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\sin(A+B)}.$$

Igazolni kell, hogy $\sin(A-B) = \frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\sin(A+B)}$. Ez a következő alakban is írható:

$$\begin{aligned} \sin(A-B)\sin(A+B) &= \sin^2 A - \sin^2 B \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin^2 A \cdot \cos^2 B - \cos^2 A \cdot \sin^2 B &= \sin^2 A - \sin^2 B \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin^2 A \cdot (1 - \cos^2 B) &= \sin^2 B \cdot (1 - \cos^2 A) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin^2 A \cdot \sin^2 B &= \sin^2 B \cdot \sin^2 A, \text{ ami igaz.} \end{aligned}$$

$$\text{Tehát } \frac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)} = \frac{a^2 - b^2}{c^2}.$$

5. Bizonyítsd be, hogy

$$\text{a) ha } a = \frac{b+c}{2} \text{ és } A = \frac{B+C}{2}, \text{ akkor az } ABC \text{ háromszög egyenlő oldalú;}$$

$$\text{b) ha } \frac{\sin^2 A}{\cos A} = \frac{a^2}{bc}, \text{ akkor az } ABC \text{ háromszög derékszögű.}$$

$$\text{Bizonyítás. a) } a = \frac{b+c}{2} \Leftrightarrow \sin A = \frac{\sin B + \sin C}{2} \text{ és mivel } A = \frac{B+C}{2},$$

tovább írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \sin \frac{B+C}{2} &= \frac{\sin B + \sin C}{2} \Rightarrow 2 \sin \frac{B+C}{2} = \sin B + \sin C \Rightarrow \\ \Rightarrow \sin \frac{B+C}{2} \left(1 - \cos \frac{B-C}{2} \right) &= 0. \text{ Tehát } \sin \frac{B+C}{2} = 0 \text{ vagy } \cos \frac{B-C}{2} = 1. \end{aligned}$$

$$\text{Ha } \sin \frac{B+C}{2} = 0 \Rightarrow B+C = 0 \text{ vagy } B+C = \pi, \text{ nem megoldások mivel } A,$$

$$B, C \in (0, \pi) \quad . \quad \text{Ha } \cos \frac{B-C}{2} = 1 \Rightarrow \frac{B-C}{2} = 0 \Rightarrow B = C \quad . \quad \text{Viszont}$$

$A = \frac{B+C}{2}$, következik, hogy $A = B = C$. Tehát az ABC háromszög egyenlő oldalú.

$$\text{b) } \frac{\sin^2 A}{\cos A} = \frac{a^2}{bc} \Rightarrow \cos A \neq 0 \Rightarrow A \neq \frac{\pi}{2}.$$

$$\begin{aligned}\frac{\sin^2 A}{\cos A} &= \frac{a^2}{bc} \Leftrightarrow \frac{\sin^2 A}{\cos A} = \frac{\sin^2 A}{\sin B \sin C} \Leftrightarrow \sin^2 A \cdot (\sin B \sin C - \cos A) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sin B \sin C = \cos A \Leftrightarrow \sin B \sin C = -\cos(B+C) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sin B \sin C = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \Leftrightarrow \cos B \cos C = 0.\end{aligned}$$

Tehát az ABC háromszög B -ben vagy C -ben derékszögű.

6. Bizonyítsd be, hogy bármely ABC háromszögben $\operatorname{tg} \frac{A-B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{a-b}{a+b}$.
(Tangens tétel)

$$\begin{aligned}\textbf{Bizonyítás.} \quad \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} &= \frac{\sin(A-B)}{1+\cos(A-B)} \cdot \frac{\sin C}{1+\cos C} = \\ &= \frac{\sin(A-B)\sin(A+B)}{[1+\cos(A-B)] \cdot [1-\cos(A+B)]} = \frac{\sin^2 A \cdot \cos^2 B - \cos^2 A \cdot \sin^2 B}{(1+\sin A \sin B)^2 - \cos^2 A \cdot \cos^2 B} = \\ &= \frac{\sin^2 A \cdot (1-\sin^2 B) - (1-\sin^2 A) \cdot \sin^2 B}{1+2\sin A \sin B + \sin^2 A \sin^2 B - (1-\sin^2 A) \cdot (1-\sin^2 B)} = \\ &= \frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\sin^2 A + 2\sin A \sin B + \sin^2 B} = \frac{(\sin A - \sin B)(\sin A + \sin B)}{(\sin A + \sin B)^2} = \\ &= \frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B} = \frac{a-b}{a+b}.\end{aligned}$$

IX.2.2. Gyakorlatok és feladatok (216. oldal)

1. Bizonyítsd be, hogy az ABC_{Δ} pontosan akkor hegyesszögű, ha a^2 , b^2 és c^2 lehet egy háromszög oldalainak hossza.

Bizonyítás

$$a^2 < b^2 + c^2 \Leftrightarrow b^2 + c^2 - 2bc \cos A < b^2 + c^2 \Leftrightarrow \cos A > 0 \Leftrightarrow A \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\text{Hasonlóan } b^2 < a^2 + c^2 \Leftrightarrow B \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right); \quad c^2 < a^2 + b^2 \Leftrightarrow C \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

2. Bizonyítsd be, hogy az ABC_{Δ} pontosan akkor derékszögű A -ban, ha $\frac{b+c}{a} = \cos B + \cos C$.

$$\begin{aligned}\textbf{Bizonyítás.} \quad \frac{b+c}{2} &= \cos B + \cos C \Leftrightarrow \frac{b+c}{a} = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} + \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2bc(b+c) = b(a^2+c^2-b^2) + c(a^2+b^2-c^2) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2bc(b+c) = a^2(b+c) + bc(b+c) - (b+c)(b^2-bc+c^2) \Leftrightarrow\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 2bc = a^2 + bc - b^2 - c^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2.$$

3. Bizonyítsd be, hogy

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad b \cos C + c \cos B &= a; & \text{b)} \quad b \cos B + c \cos C &= a \cos(B - C); \\ \text{c)} \quad b \cos C - c \cos B &= \frac{b^2 - c^2}{a}; & \text{d)} \quad b \cos B - c \cos C &= -\cos A \cdot \frac{b^2 - c^2}{a}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Bizonyítás. a)} \quad b \cos C + c \cos B &= b \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + c \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \\ &= \frac{a^2 + b^2 - c^2 + a^2 + c^2 - b^2}{2a} = a. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad b \cos B + c \cos C &= 2R \sin B \cos B + 2R \sin C \cos C = \\ &= 2R(\sin B \cos B + \sin C \cos C) = a \frac{\sin B \cos B + \sin C \cos C}{\sin(B + C)}. \end{aligned}$$

$$\text{Kellene igazolni, hogy } \frac{\sin B \cos B + \sin C \cos C}{\sin(B + C)} = \cos(B - C). (*)$$

$$\begin{aligned} (*) \Leftrightarrow \sin B \cos B + \sin C \cos C &= \sin B \cos B \cos^2 C + \sin^2 B \sin C \cos C + \\ &+ \cos^2 B \sin C \cos C + \sin B \cos B \sin^2 C \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \sin B \cos B \sin^2 C + \sin C \cos C \sin^2 B = \sin^2 B \sin C \cos C + \sin B \cos B \sin^2 C,$$

ami igaz.

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad b \cos C - c \cos B &= b \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} - c \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - a^2 - c^2 + b^2}{2a} = \\ &= \frac{b^2 - c^2}{a}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad b \cos B - c \cos C &= -\cos A \cdot \frac{b^2 - c^2}{a} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow b \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} - c \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} &= \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2bc} \cdot \frac{b^2 - c^2}{a} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow b^2(a^2 + c^2 - b^2) - c^2(a^2 + b^2 - c^2) &= (a^2 - b^2 - c^2)(b^2 - c^2) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a^2 b^2 + b^2 c^2 - b^4 - a^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4 &= a^2 b^2 - a^2 c^2 - b^4 + b^2 c^2 - b^2 c^2 + c^4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 0 &= 0, \text{ ami igaz.} \end{aligned}$$

4. Bizonyítsd be, hogy ha $2 \cos A + \cos B + \cos C = 2$, akkor $b + c = 2a$.

$$\text{Bizonyítás. } 2 \cos A + \cos B + \cos C = 2 \Leftrightarrow 2 \cos \frac{B + C}{2} \cos \frac{B - C}{2} = 2(1 - \cos A) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B - C}{2} = 2 \sin^2 \frac{A}{2} \Leftrightarrow \cos \frac{B - C}{2} = 2 \sin \frac{A}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos \frac{B-C}{2} \cos \frac{A}{2} = 2 \sin A \Leftrightarrow \cos \left(\frac{B-C+A}{2} \right) + \cos \left(\frac{B-C-A}{2} \right) = 2 \sin A \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos \left(\frac{\pi}{2} - C \right) + \cos \left(\frac{\pi}{2} - B \right) = 2 \sin A \Leftrightarrow \sin C + \sin B = 2 \sin A \Leftrightarrow b + c = 2a.$$

5. Számítsd ki a következő összegeket:

a) $(a+b) \cos C + (b+c) \cos A + (c+a) \cos B;$

b) $\frac{\cos B - \cos C}{b+c-a} + \frac{\cos C - \cos A}{b+c-a} + \frac{\cos A - \cos B}{a+b-c}.$

Megoldás. a) $(a+b) \cos C + (b+c) \cos A + (c+A) \cos B =$

$$= (a+b) \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + (b+c) \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + (c+a) \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} =$$

$$= \frac{abc(b+a+c+b+a+c)}{2abc} = a+b+c.$$

b) Használjuk az $S = \frac{\cos B - \cos C}{b+c-a} + \frac{\cos C - \cos A}{b+c-a} + \frac{\cos A - \cos B}{a+b-c}$ jelölést.

$$\frac{\cos B - \cos C}{b+c-a} = \frac{\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}}{b+c-a} = \frac{a^2b + bc^2 - b^3 - a^2c - b^2c + c^3}{2abc(b+c-a)} =$$

$$= \frac{(b-c)(a^2 - bc - b^2 - bc - c^2)}{2abc(b+c-a)} = \frac{(b-c)[a^2 - (b+c)^2]}{2abc(b+c-a)} =$$

$$= \frac{(b-c)(a-b-c)(a+b+c)}{2abc(b+c-a)} = \frac{(c-b)p}{abc}.$$

Tehát $S = \frac{(c-b)p}{abc} + \frac{(a-c)p}{abc} + \frac{(b-a)p}{abc} = \frac{p}{abc}(c-b+a-c+b-a) = 0.$

6. Adott az ABC_{Δ} .

a) Bizonyítsd be, hogy ha $M \in (BC)$, akkor

$$AB^2 \cdot MC + AC^2 \cdot MB - BC \cdot MA^2 = MB \cdot MC \cdot BC. \quad (\text{Stewart tétel})$$

b) Bizonyítsd be ebből kiindulva az oldalfelező hosszára vonatkozó tételt.

c) Számítsd ki a belső szögfelező hosszát.

d) Bizonyítsd be, hogy ha a két belső szögfelező kongruens, akkor az ABC_{Δ}

egyenlőszárú.

e) Lehet-e egyenlő egy belső és egy külső szögfelező hossza?

Megoldás. a) Az ABM és ACM háromszögben felírjuk a koszinusz tételt.

Jelöljük $\alpha = m(\widehat{AMB})$. Ekkor

$$AB^2 = MA^2 + MB^2 - 2MA \cdot MB \cdot \cos \alpha \quad | \cdot MC$$

$$AC^2 = MA^2 + MC^2 - 2MA \cdot MC \cdot \cos(\pi - \alpha) \quad | \cdot MB \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 AB^2 \cdot MC &= MA^2 \cdot MC + MB^2 \cdot MC - 2MA \cdot MB \cdot MC \cdot \cos \alpha \\
 \Rightarrow AC^2 \cdot MB &= MA^2 \cdot MB + MC^2 \cdot MB - 2MA \cdot MC \cdot MB \cdot \cos(\pi - \alpha)
 \end{aligned}$$

Az előbbi két összefüggést összeadjuk és kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned}
 AB^2 \cdot MC + AC^2 \cdot MB &= MA^2(MC + MB) + MB \cdot MC(MB + MC) \Rightarrow \\
 \Rightarrow AB^2 \cdot MC + AC^2 \cdot MB - BC \cdot MA^2 &= MB \cdot MC \cdot BC.
 \end{aligned}$$

b) Legyen $MB = MC$. Ekkor az ABC háromszögben a szokásos jelöléseket használva, az **a)**-ban bizonyított összefüggésből következik, hogy:

$$c^2 \cdot \frac{a}{2} + b^2 \cdot \frac{a}{2} - a \cdot MA^2 = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot a \Rightarrow MA^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}.$$

c) Ebben az esetben $\begin{cases} \frac{MB}{MC} = \frac{c}{b} \\ MB + MC = a \end{cases} \Rightarrow MC = \frac{ab}{b+c}; \quad MB = \frac{ac}{b+c}.$

Stewart tételéből következik, hogy

$$\begin{aligned}
 c^2 \cdot \frac{ab}{b+c} + b^2 \cdot \frac{ac}{b+c} - a \cdot MA^2 &= \frac{ac}{b+c} \cdot \frac{ab}{b+c} \cdot a \Rightarrow \\
 \Rightarrow MA^2 &= bc - \frac{a^2 bc}{(b+c)^2} = bc \left(1 - \left(\frac{a}{b+c} \right)^2 \right) = bc \cdot \frac{(-a+b+c)(a+b+c)}{(b+c)^2} = \\
 &= \frac{4bcp(p-a)}{(b+c)^2}.
 \end{aligned}$$

Felhasználva a 2.3. következményt, miszerint $\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$, az előbbi eredményt átírhatjuk:

$$MA = \frac{2}{b+c} \cdot \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \cdot bc = \frac{2bc \cdot \cos \frac{A}{2}}{b+c}.$$

d) Feltételezzük, hogy az A -ból és B -ből induló belső szögfelezők kongruensek.

$$\begin{aligned}
 \frac{4bcp(p-a)}{(b+c)^2} &= \frac{4acp(p-b)}{(a+c)^2} \Rightarrow \frac{b(p-a)}{(2p-a)^2} = \frac{a(p-b)}{(2p-b)^2} \Rightarrow \frac{b(2p-b)^2}{p-b} = \frac{a(2p-a)^2}{p-a} \\
 \Rightarrow \frac{b \cdot [p^2 + 2p(p-b) + (p-b)^2]}{p-b} &= \frac{a \cdot [p^2 + 2p(p-a) + (p-a)^2]}{p-a} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \frac{bp^2}{p-b} + 2bp + b(p-b) &= \frac{ap^2}{p-a} + 2ap + a(p-a) \Rightarrow \\
 \Rightarrow p^2 \left(\frac{a}{p-a} - \frac{b}{p-b} \right) + 2p(a-b) + p(a-b) - (a^2 - b^2) &= 0 \Rightarrow
 \end{aligned}$$

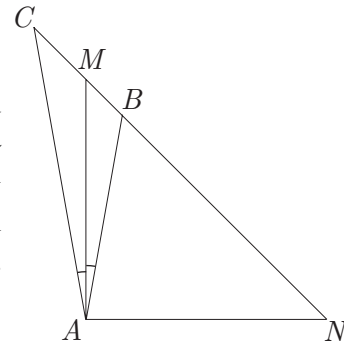
$$\Rightarrow (a-b) \cdot \left[\frac{p^3}{(p-a)(p-b)} + 3p - (a+b) \right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a-b) \left[\frac{p^3}{(p-a)(p-b)} + p + (p-a) + (p-b) \right] = 0,$$

és mivel a szögletes zárójelben levő kifejezés szigorúan pozitív, következik, hogy $a = b$. Tehát az ABC_{Δ} egyenlőszárú.

e) Igen.

Megrajzoljuk az ANM egyenlőszárú, derékszögű háromszöget. Felvesszük az MN egyenesen a $B \in (MN)$ pontot. Az ANM háromszögön kívül megszerkesztjük az $\widehat{MAC} \equiv \widehat{BAM}$ szöveget, ahol $C \in (BM)$. Ekkor az ABC háromszögben AM belső-, illetve AN külső szögfelező és $AM = AN$.



7. Bizonyítsd be, hogy ha G az ABC_{Δ} súlypontja és O a köré írt kör középpontja, akkor

a) ha M egy pont az ABC_{Δ} síkjában, akkor

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}. \quad (\text{Leibniz tétel})$$

b) azon pontok mértani helye, amelyekre $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3R^2$ a G középpontú OG sugarú kör.

Bizonyítás. a) Az MAA'_{Δ} -ben alkalmazzuk Stewart tételét.

$$MA^2 \cdot GA' + MA'^2 \cdot GA - MG^2 \cdot AA' = GA' \cdot GA \cdot AA'. \quad (1)$$

De AA' oldalfelező az ABC_{Δ} -ben, így $AA' = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$, ugyanakkor

$$GA = \frac{2}{3}AA' \text{ és } GA' = \frac{1}{3}AA'. \text{ Ekkor}$$

$$(1) \Leftrightarrow MA^2 \cdot \frac{1}{3}AA' + MA'^2 \cdot \frac{2}{3}AA' - MG^2 \cdot AA' = \frac{1}{3}AA' \cdot \frac{2}{3}AA' \cdot AA' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3MA^2 + 6 \cdot MA'^2 - 9MG^2 = 2 \cdot \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}. \quad (2)$$

Az MBC_{Δ} -ben MA' oldalfelező, tehát

$$MA'^2 = \frac{2(MB^2 + MC^2) - a^2}{4}. \quad (3)$$

A (2) és (3) összefüggésekből azt kapjuk, hogy:

$$3MA^2 + 3 \cdot \frac{2(MB^2 + MC^2) - a^2}{2} - 9MG^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6(MA^2 + MB^2 + MC^2) - 3a^2 - 18MG^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2 \Leftrightarrow$$

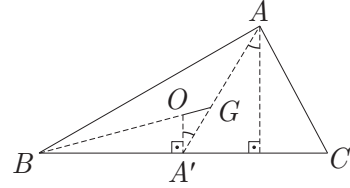
$$\Leftrightarrow MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}.$$

$$\text{b) } MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} = 3R^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow MG^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}. \quad (3)$$

A $BA'O_\Delta$ -ben Pitagorász tétele szerint:

$$OA'^2 = R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$



Jelöljük $\alpha = m(\widehat{OA'G})$ és az A -ból induló

magasságot h_a -val. Ekkor $\cos \alpha = \frac{h_a}{AA'} = \frac{bc}{2R \cdot AA'}$.

Tehát az $OA'G_\Delta$ -ben a koszinusz-tételből következik, hogy:

$$\begin{aligned} OG^2 &= OA'^2 + GA'^2 - 2 \cdot OA' \cdot GA' \cdot \cos \alpha = \\ &= R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{9} AA'^2 - 2 \cdot OA' \cdot \frac{1}{3} AA' \cdot \frac{bc}{2R \cdot AA'} = \\ &= R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{9} \cdot \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{bc}{R} \cdot \sqrt{R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \\ &= R^2 + \frac{1}{18}(b^2 + c^2) - \frac{5}{18}a^2 - \frac{1}{3}bc \cdot \sqrt{1 - \frac{a^2}{4R^2}} = \\ &= R^2 + \frac{1}{18}(b^2 + c^2) - \frac{5}{18}a^2 - \frac{1}{3}bc \cdot \cos A = \\ &= R^2 + \frac{1}{18}(b^2 + c^2) - \frac{5}{18}a^2 - \frac{1}{3} \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} = \\ &= R^2 + \frac{1}{9}(b^2 + c^2) - \frac{1}{9}a^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9} \quad (4) \end{aligned}$$

A (3) és (4) összefüggésekből következik, hogy M rajta van a G középpontú OG sugarú körön. Tehát a mértani hely ez a kör.

8. Bizonyítsd be, hogy ha $a, b, c > 0$, akkor

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{a^2 - ac + c^2} \geq \sqrt{b^2 + bc + c^2}.$$

$$\text{Bizonyítás. } \sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{a^2 - ac + c^2} \geq \sqrt{b^2 + bc + c^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (ab + ac - bc)^2 \geq 0, \text{ ami igaz.}$$

Geometriai megoldás. Szerkesszük meg az OAB és OBC háromszögeket úgy, hogy $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{BOC}) = 60^\circ$ legyen. A koszinusz

tétel alapján $AB = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$, $BC = \sqrt{b^2 - bc + c^2}$ és

$AC = \sqrt{a^2 + ac + c^2}$, tehát az $AB + BC \geq AC$

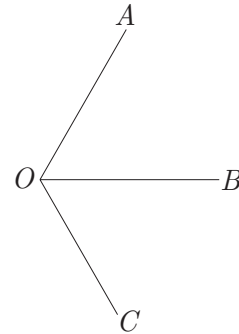
egyenlőtlenség alapján

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geq \sqrt{a^2 + ac + c^2}.$$

9. Oldd meg a következő egyenleteket:

a) $\sqrt{15 - 12 \cos x} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3} \sin x} = 4$, ha $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;

b) $\sqrt{2 - 2 \cos x} + \sqrt{10 - 6 \cos x} = \sqrt{10 - 6 \cos x}$, ha $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.



Megoldás. a) Ha $\sqrt{15 - 12 \cos x} = A$, akkor

$$\cos x = \frac{15 - A^2}{12} \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{(A^2 - 3)(27 - A^2)}}{12}.$$

$$\text{Tehát } \sqrt{15 - 12 \cos x} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3} \sin x} = 4 \Leftrightarrow A + \sqrt{7 - \sqrt{\frac{(A^2 - 3)(27 - A^2)}{3}}} = 4 \Leftrightarrow$$

$$3 \cdot [7 - (4 - A)^2]^2 = (A^2 - 3)(27 - A^2) \Leftrightarrow A^4 - 12A^3 + 54A^2 - 108A + 81 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (A - 3)^4 = 0 \Leftrightarrow A = 3.$$

$$\text{Tehát } \sqrt{15 - 12 \cos x} = 3 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}, \text{ de } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}.$$

Geometriai megoldás. Szerkesszük meg az AOB derékszögű háromszöget ($m(\widehat{AOB}) = 90^\circ$) úgy, hogy

$OA = 2\sqrt{3}$ és $OB = 2$. Ha C egy pont a síkban, $m(\widehat{AOC}) = x$ és $OC = \sqrt{3}$, akkor a koszinusztétel alapján

$$AC = \sqrt{15 - 12 \cos x},$$

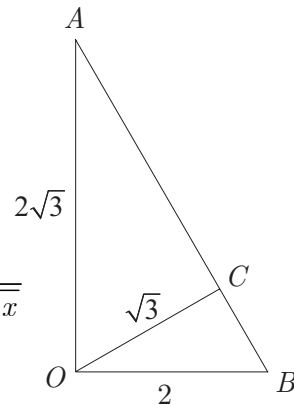
$$BC = \sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \sqrt{7 - 4\sqrt{3} \sin x}$$

$$\text{és } AB = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4.$$

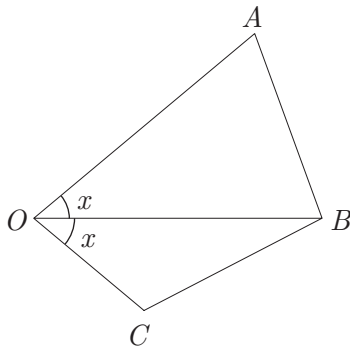
Az egyenlet alapján $AC + BC = AB$, tehát $C \in (AB)$.

Ugyanakkor az O -hoz tartozó magasság $h = \frac{2 \cdot 2\sqrt{3}}{2 \cdot 2} = \sqrt{3}$, tehát C az O -ból

húzott magasság talppontja. De $m(\widehat{OAB}) = 30^\circ$, tehát $x = \frac{\pi}{3}$.



b) Geometriai megoldás. Szerkesszük meg az OAB és OBC háromszögeket úgy, hogy $OA = OB = 6$, $OC = 3$, $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{BOC}) = x$. A koszinusz-tétel alapján



$$AB = \sqrt{2 - 2 \cos x}, \quad BC = \sqrt{10 - 6 \cos x},$$

$$CA = \sqrt{10 - 6 \cos 2x},$$

tehát az $AB + BC = AC$ csak akkor teljesülhet, ha $B \in (AC)$. Így OB szögfelező az OAC háromszögben, tehát $\frac{AB}{BC} = \frac{1}{3}$ és így:

$$9(2 - 2 \cos x) = 10 - 6 \cos x, \quad \text{vagyis} \quad \cos x = \frac{2}{3}.$$

$$\text{A megoldás tehát } x = \arccos \frac{2}{3}.$$

Megjegyzés. Algebrailag is megoldhatjuk a feladatot. Ha az egyenlet mindkét oldalát négyzetre emeljük, a

$$4 \cos x - 3 \cos 2x - 1 = \sqrt{2 - 2 \cos x} \sqrt{10 - 6 \cos x}$$

egyenlethez jutunk. Ha ezt ismét négyzetre emeljük és rendezzük (felhasználva, hogy $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$) az $u = \cos x$ ismeretlenre a

$$9u^4 - 12u^3 - 5u^2 + 12u - 4 = 0$$

egyenlethez jutunk. Ennek a gyökei: $u_{1,2} = \frac{2}{3}$, $u_3 = 1$ és $u_4 = -1$. Az $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

feltétel alapján csak a $\cos x = \frac{2}{3}$ lehetséges.

10. Az ABC_{Δ} -ben $M \in (AC)$ és $N \in (AB)$.

Bizonyítsd be, hogy a $BC^2 + MN^2 = BM^2 + CN^2$ egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $m(\widehat{A}) = 90^\circ$.

Bizonyítás. $BC^2 + MN^2 = BM^2 + CN^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow m(\widehat{A}) = 90^\circ.$$

„ $\Leftarrow$ ” Ha $m(\widehat{A}) = 90^\circ$, akkor

$$MN^2 = AM^2 + AN^2 \quad (\text{az } MAN_{\Delta} \text{ derékszögű});$$

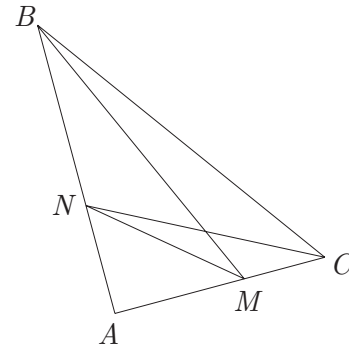
$$BM^2 = AM^2 + AB^2 \quad (\text{az } MAB_{\Delta} \text{ derékszögű});$$

$$CN^2 = AN^2 + AC^2 \quad (\text{az } NAC_{\Delta} \text{ derékszögű});$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \quad (\text{a } BAC_{\Delta} \text{ derékszögű}).$$

$$\begin{aligned} \text{Ekkor } BM^2 + CN^2 &= (AM^2 + AB^2) + (AN^2 + AC^2) = \\ &= (AM^2 + AN^2) + (AB^2 + AC^2) = MN^2 + BC^2. \end{aligned}$$

„ $\Rightarrow$ ” Feltételezzük, hogy $BC^2 + MN^2 = BM^2 + CN^2$. (*)



Legyen $m(\widehat{A}) = \alpha$. Ekkor az ABC_{Δ} -ben a koszinusztétel alapján:

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos \alpha.$$

Az AMN , ANC , AMB háromszögekben ugyancsak a koszinusztétel alapján:

$$MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM \cdot AN \cdot \cos \alpha;$$

$$CN^2 = AN^2 + AC^2 - 2AN \cdot AC \cdot \cos \alpha;$$

$$BM^2 = AM^2 + AB^2 - 2AM \cdot AB \cdot \cos \alpha.$$

$$\text{Ekkor } (*) \Leftrightarrow \cos \alpha \cdot (AB \cdot AC + AM \cdot AN) = \cos \alpha \cdot (AN \cdot AC + AM \cdot AB) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha \cdot [AB \cdot MC - AN \cdot MC] = 0 \Leftrightarrow \cos \alpha \cdot MC \cdot NB = 0.$$

Tehát $\cos \alpha = 0$, vagyis $\alpha = 90^\circ$.

IX.3.1. Gyakorlatok és feladatok (218. oldal)

1. Ha az ABC háromszögben $M \in BC$, akkor

$$\frac{BM}{MC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin \widehat{BAM}}{\sin \widehat{CAM}}.$$

Bizonyítás. Jelöljük $m(\widehat{AMB}) = \alpha$.

$$\begin{aligned} \text{Ekkor az } ABM_{\Delta}\text{-ben: } \frac{BM}{\sin \widehat{BAM}} &= \frac{AB}{\sin \alpha} \\ \text{az } ACM_{\Delta}\text{-ben pedig: } \frac{CM}{\sin \widehat{CAM}} &= \frac{AC}{\sin \alpha} \end{aligned} \Rightarrow \frac{AB \cdot \sin \widehat{BAM}}{BM} = \frac{AC \cdot \sin \widehat{CAM}}{CM} =$$

$$= \sin \alpha \Rightarrow \frac{BM}{CM} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin \widehat{BAM}}{\sin \widehat{CAM}}.$$

2. Ha az ABC háromszögben $D \in (BC)$, $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ és $\{E\} =$

$$= MN \cap AD, \text{ akkor } \frac{BD}{DC} \cdot \frac{NE}{EM} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AN}{AM}.$$

Bizonyítás. Az ABD_{Δ} - és ACD_{Δ} -ekben felírjuk a szinusztételt:

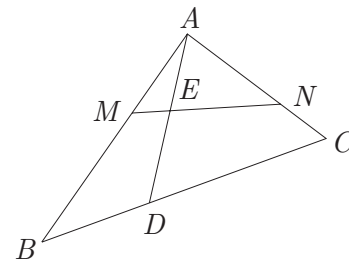
(jel: $m(\widehat{BAD}) = \alpha_1$, $m(\widehat{CAD}) = \alpha_2$, $m(\widehat{ADB}) = \beta$, $m(\widehat{AEM}) = \gamma$)

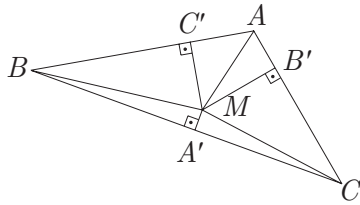
$$\frac{BD}{\sin \alpha_1} = \frac{AB}{\sin \gamma}; \quad \frac{CD}{\sin \alpha_2} = \frac{AC}{\sin \beta}.$$

Az AME_{Δ} - és ANE_{Δ} -ekben is felírjuk a szinusztételt:

$$\frac{EM}{\sin \alpha_1} = \frac{AM}{\sin \gamma}; \quad \frac{NE}{\sin \alpha_2} = \frac{AN}{\sin \gamma}, \text{ tehát}$$

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{NE}{EM} = \frac{AB \cdot \frac{\sin \alpha_1}{\sin \beta}}{AC \cdot \frac{\sin \alpha_2}{\sin \beta}} \cdot \frac{AN \cdot \frac{\sin \alpha_2}{\sin \gamma}}{AM \cdot \frac{\sin \alpha_2}{\sin \gamma}} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AN}{AM}$$





3. Határozd meg az ABC háromszög azon belső pontját, amelyre az oldalaktól való távolságok négyzetösszege minimális.

Megoldás. $A'M^2 + B'M^2 + C'M^2$ minimális kell legyen. Ha $A'M = x$, $B'M = y$, $C'M = z$, akkor

$$2 \cdot \sigma[ABC] = ax + by + cz.$$

Viszont a Cauchy-Bunjakovszki egyenlőtlenség alapján

$$(ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{4 \cdot (\sigma[ABC])^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

és egyenlőség $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = \lambda$ esetén áll fenn.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= \frac{4(\sigma[ABC])^2}{a^2 + b^2 + c^2} \Leftrightarrow \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{\lambda} \right)^2 = 4(\sigma[ABC])^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \lambda &= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2\sigma[ABC]} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2T}. \end{aligned}$$

$$\text{Tehát } x = \frac{2aT}{a^2 + b^2 + c^2}; \quad y = \frac{2bT}{a^2 + b^2 + c^2}; \quad z = \frac{2cT}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

4. Bizonyítsd be, hogy az A -ban derékszögű ABC háromszögben

$$\operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} = \frac{a-c}{a+c} \text{ és } \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} = \frac{a-b}{a+b}.$$

Bizonyítás. A tangens tétel szerint $\frac{a-c}{a+c} = \operatorname{tg} \frac{A-C}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2}$, mivel

$$m(\hat{A}) = 90^\circ. \text{ Hasonlóan } \frac{a-b}{a+b} = \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2}.$$

5. Bizonyítsd be, hogy ha egy háromszögben $\sin B + \cos B = \sin C + \cos C$, akkor a háromszög egyenlő szárú vagy derékszögű.

Bizonyítás

$$\begin{aligned} \sin B + \cos B &= \sin C + \cos C \Leftrightarrow (\sin B - \sin C) + (\cos B - \cos C) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2 \sin \frac{B-C}{2} \cos \frac{B+C}{2} - 2 \sin \frac{B-C}{2} \sin \frac{B+C}{2} &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin \frac{B-C}{2} \left(\sin \frac{A}{2} - \cos \frac{A}{2} \right) &= 0 \Leftrightarrow \sin \frac{B-C}{2} = 0 \text{ vagy } \sin \frac{A}{2} = \cos \frac{A}{2}. \end{aligned}$$

Tehát $B = C$ vagy $\frac{A}{2} = 45^\circ$ $\left(\text{mivel } \frac{A}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right) \right)$, vagyis a háromszög egyenlő-szárú vagy derékszögű.

6. Határozd meg az ABC háromszög oldalainak hosszát és szögeinek a mértékét, ha ismerjük a következő adatokat:

- a)** $a = 4$, $\sin B = \frac{24}{25}$, $\sin C = \frac{12}{13}$; **b)** $b = 1$, $m(\hat{A}) = 135^\circ$, $m(\hat{C}) = 30^\circ$;
c) $a = 7$, $b = 5$, $c = 6$; **d)** $m(\hat{A}) = 18^\circ$, $b = 2$, $c = 3$;
e) $a = 15$, $c = 13$, $T = 24$; **f)** $a = 14$, $c = 13$, $\cos B = \frac{5}{13}$;
g) $b = 3$, $\cos A = \frac{63}{65}$, $\cos C = \frac{3}{5}$; **h)** $a = 15$, $b = 4$, $c = 13$;
i) $a = 10$, $b = 14$, $\cos C = \frac{4}{5}$; **j)** $a = \sqrt{2}$, $b = 2$, $m(\hat{A}) = 30^\circ$;
k) $a = 10$, $b = 14$, $\cos A = \frac{2\sqrt{10}}{7}$; **l)** $a = 3$, $b = 6$, $m(\hat{A}) = 60^\circ$;
m) $a = 13$, $\cos A = \frac{4}{5}$, $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{1513}$.

Megoldás. a) $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Leftrightarrow 25b = 26c \Rightarrow b > c \Rightarrow m(\hat{B}) > m(\hat{C}) \Rightarrow$
 $\Rightarrow m(\hat{C}) < 90^\circ \Rightarrow \cos C = \sqrt{1 - \sin^2 C}$, vagyis $\cos C = \frac{5}{13}$.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \Leftrightarrow c^2 = b^2 - \frac{40}{13}b + 16 \Leftrightarrow \frac{25^2}{13^2 \cdot 4}b^2 = b^2 - \frac{40}{13}b + 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{51}{13^2 \cdot 4}b^2 - \frac{40}{13}b + 16 = 0 \Leftrightarrow b = \frac{104(10 \pm 7)}{51} \begin{cases} b_1 = \frac{104}{17} \\ b_2 = \frac{104}{3} \end{cases}$$

$$c_1 = \frac{100}{17}; \quad c_2 = \frac{100}{3} \cdot \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Leftrightarrow \sin A = \frac{96}{25} \cdot \frac{1}{b}.$$

$$\text{Tehát } \sin A_1 = \frac{204}{325} \text{ és } \sin A_2 = \frac{36}{325}.$$

b) $m(B) = 180^\circ - m(A) - m(C) = 180^\circ - 135^\circ - 30^\circ = 15^\circ$.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Leftrightarrow \frac{a}{\sin(\pi - A)} = \frac{c}{\sin C} \Leftrightarrow \frac{a}{\sin 45^\circ} = \frac{c}{\sin 30^\circ} \Leftrightarrow a = \sqrt{2}c.$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \Leftrightarrow c^2 = 2c^2 + 1 - 2\sqrt{2}c \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow c^2 - \sqrt{6}c + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{\sqrt{6} \pm \sqrt{2}}{2}, \text{ de } c > b, \text{ tehát } c = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}, \quad a = 1 + \sqrt{3}.$$

c) $a = 7$, $b = 5$, $c = 6 \Rightarrow A > C > B$.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \Rightarrow \cos A = \frac{1}{5}.$$

$$\text{Hasonlóan } \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \Rightarrow \cos B = \frac{5}{7}; \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \Rightarrow \cos C = \frac{19}{35}.$$

d) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Rightarrow a = \sqrt{13 - 12 \cos 18^\circ}.$

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} \Rightarrow \sin B = \frac{b \cdot \sin A}{a} \Rightarrow \sin B = \frac{2 \sin 18^\circ}{\sqrt{13 - 12 \cos 18^\circ}}.$$

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} \Rightarrow \sin C = \frac{c \cdot \sin A}{a} \Rightarrow \sin C = \frac{3 \sin 18^\circ}{\sqrt{13 - 12 \cos 18^\circ}}.$$

e) $T = \frac{ac \sin B}{2} \Rightarrow \sin B = \frac{16}{65}.$

$$T = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \Leftrightarrow 24^2 = \frac{28+b}{2} \cdot \frac{b-2}{2} \cdot \frac{b+2}{2} \cdot \frac{28-b}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 24^2 \cdot 16 = (28^2 - b^2)(b^2 - 4) \Leftrightarrow b^4 - 788b^2 + 12352 = 0.$$

A $b^2 = t$ jelöléssel $t^2 - 788t + 12352 = 0 \Rightarrow t_1 = 772, t_2 = 16$. Tehát $b_1 = 4$
 $b_2 = 2\sqrt{193}$. Az A és C szögek szinusztát a szinusztételből határozhatjuk meg.

f) $a = 14, c = 13, \cos B = \frac{5}{13} \Rightarrow B < \frac{\pi}{2}.$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = 225 \Rightarrow b = 15; \sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{12}{13};$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Leftrightarrow \frac{14}{\sin A} = \frac{65}{4} \Leftrightarrow \sin A = \frac{56}{65}; \frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} \Leftrightarrow \sin C = \frac{4}{5}.$$

g) $b = 3, \cos A = \frac{63}{65}, \cos C = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin A = \frac{16}{65}.$

$\sin C = \frac{4}{5}$, tehát $\sin B = \sin(A + C) = \frac{12}{13}$. Innen a szinusztétel alapján

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{13}{4} = \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C},$$

tehát $a = \frac{4}{5}$ és $c = \frac{13}{5}$.

h) $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = -\frac{5}{13}, \sin A = \frac{12}{13}; \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{63}{65},$

$$\sin B = \frac{16}{65}; \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{3}{5}, \sin C = \frac{4}{5}.$$

i) A koszinusztétel alapján $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$, tehát $c = 6\sqrt{2}$. Ugyanakkor

$$\sin A = \frac{a \cdot \sin C}{c} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ és } \sin B = \frac{b \cdot \sin C}{c} = \frac{7\sqrt{2}}{10}.$$

j) A szinusztételt használjuk. $\sin B = \frac{\sqrt{2}}{2}$ és így $m(\hat{B}) = 45^\circ$ vagy $m(\hat{B}) = 135^\circ$. Ha

$m(\hat{B}) = 45^\circ$, akkor $m(\hat{C}) = 105^\circ$ és így $c = 2\sqrt{2} \cdot \sin 75^\circ$. Ha $m(\hat{B}) = 135^\circ$, akkor $m(\hat{C}) = 15^\circ$ és $c = 2\sqrt{2} \cdot \sin 15^\circ$.

k) $\sin A = \frac{3}{7}$ és így $\sin B = \frac{3}{5}$ és $\sin C = \frac{12 + 6\sqrt{10}}{35}$ vagy $\sin C = \frac{6\sqrt{10} - 12}{35}$. A

c hosszát mindkét esetben a koszinusztételből számítjuk ki.

l) A feltételek ellentmondáshoz vezetnek.

m) Az $m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$ egyenlőség alapján $b^2 + c^2 = 841$. Ugyanakkor

$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, tehát $bc = 420$. Ebből következik, hogy $\{b, c\} = \{20, 21\}$.

7. Határozd meg az ABC háromszög oldalainak hosszát és szögeinek a mértékét, ha ismerjük a következő adatokat:

- | | | |
|---|-----------------------------------|--------------------------------|
| a) A, B, p ; | b) $a + b = m, A$ és B ; | c) A, B, T ; |
| d) a, m_b, m_c ; | e) a, b, m_c ; | f) $h_a, h_b, \cos A$; |
| g) a, h_b, h_c ; | h) a, m_a, h_a ; | i) $a, A, b - c = d$; |
| j) $a^2 - b^2 = 24, m(\widehat{C}) = 30^\circ, T = 8,75 m^2$. | | |

Megoldás. **a)** $C = \pi - A - B$ így $p = R(\sin A + \sin B + \sin C)$, tehát kiszámítható R . Ebből és a szinusztételből következik, hogy

$$a = \frac{2p \sin A}{\sin A + \sin B + \sin(A + B)}; \quad b = \frac{2p \sin B}{\sin A + \sin B + \sin(A + B)}$$

és
$$c = \frac{2p \sin(A + B)}{\sin A + \sin B + \sin(A + B)}$$

b) A szinusztétel alapján $m = 2R(\sin A + \sin B)$, tehát $R = \frac{m}{2(\sin A + \sin B)}$.

Így $a = \frac{m \sin A}{\sin A + \sin B}$, $b = \frac{m \sin B}{\sin A + \sin B}$ és $C = \frac{m \sin(A + B)}{\sin A + \sin B}$.

c) A $T = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$ összefüggés alapján $R = \sqrt{\frac{T}{2 \sin A \sin B \sin(A + C)}}$.

Ebből a szinusztétel alapján kiszámíthatók az oldalak.

d) Az adatok és az oldalfelező hosszára vonatkozó tétel alapján

$$\begin{cases} 2c^2 - b^2 = 4m_b^2 - 2a^2 \\ 2b^2 - c^2 = 4m_c^2 - 2a^2 \end{cases}$$

Tehát $c^2 = \frac{8m_b^2 + 4m_c^2 - 6a^2}{3}$ és $b^2 = \frac{8m_c^2 + 4m_b^2 - 6a^2}{3}$. Az oldalak hosszából a

koszinusztétel alapján kiszámíthatók a szögek is.

e) $c^2 = 2(a^2 + b^2) - 4m_c^2$ és a többi adat a koszinusztétel segítségével számítható ki.

f) $\frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a} = \frac{\sin B}{\sin A}$, tehát $\sin B = \frac{h_a}{h_b} \sqrt{1 - \cos^2 A}$. Másrészt $\sin B = \frac{h_a}{c}$, tehát $c = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 A}}{h_b}$. Ugyanakkor $\sin C = \sin(A + B)$ és így a szinusztétel alapján

kiszámítható az a és b .

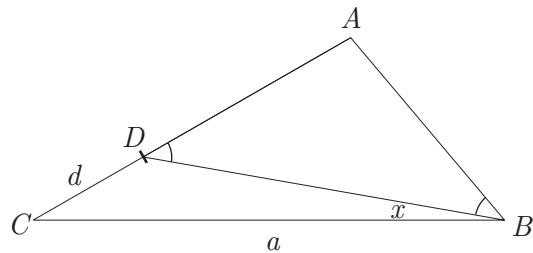
g) A $\sin C = \frac{h_a}{a}$ és $\sin B = \frac{h_c}{a}$ egyenlőségek alapján meghatározhatók a háromszög szögei. Így a szinusztétel alapján az a hosszából kiszámítható b és c .

h) $b^2 + c^2 = \frac{4m_a^2 + a^2}{2}$ és így $2bc \cos A = (b^2 + c^2) - a^2 = \frac{4m_a^2 - a^2}{2}$. De

$2bc \sin A = 4T = 2a \cdot h_a$, tehát $\operatorname{tg} A = \frac{4a \cdot h_a}{4m_a^2 - a^2}$. Így meghatározható $\cos A$, tehát

ismerjük $b^2 + c^2$ és bc értékét. Ebből a két adatból kiszámíthatjuk b -t és c -t.

i) Ha $D \in (AC)$ úgy, hogy $AD = b - c$, akkor a CDB háromszög megszerkeszthető mert ismerjük a CD , CB oldalát és a D szögét. Így visszakereszkészthető az ABC háromszög is. A szerkesztés menetét végigszámolva megkapjuk a háromszög adatait.



$$\sin x = d \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi - A}{2}\right)}{a} = \frac{d}{a} \cos \frac{A}{2};$$

$$\sin B = \sin\left(s + \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{A}{2} - x\right)\right) = \cos\left(\frac{A}{2} - x\right),$$

és így $b = \sin B \cdot \frac{a}{\sin A} = \cos\left(\frac{A}{2} - x\right) \cdot \frac{a}{\sin A}$, illetve $c = \cos\left(\frac{A}{2} + x\right) \cdot \frac{a}{\sin A}$.

j) A $T = \frac{ab \sin C}{2}$ egyenlőség alapján $ab = 35$. Az $\begin{cases} a^2 - b^2 = 24 \\ ab = 35 \end{cases}$ egyenletrendszer

megoldásai $a = 7, b = 5$ vagy $a = -7$ és $b = -5$. Mivel az oldalak hossza pozitív, $a = 7$ és $b = 5$. Így $c = \sqrt{39}$.

8. Az ABC háromszögben $m(\hat{A}) = 45^\circ$ és $\frac{AC}{AB} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Bizonyítsd be, hogy $\operatorname{tg} B = 2$.

Bizonyítás. A feltételek alapján $\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, tehát $\frac{\operatorname{tg} \frac{B+C}{2}}{\operatorname{tg} \frac{B-C}{2}} = \frac{2\sqrt{2}+3}{2\sqrt{2}-3}$. Így

$$\operatorname{tg} \frac{B-C}{2} = \frac{2\sqrt{2}-3}{2\sqrt{2}+3} \cdot \operatorname{tg} \frac{B+C}{2}. \text{ Másrészt}$$

$$\operatorname{tg} B = \operatorname{tg} \left(\frac{B-C}{2} + \frac{B+C}{2} \right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{B-C}{2} + \operatorname{tg} \frac{B+C}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{B-C}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B+C}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{B+C}{2} \left(1 + \frac{2\sqrt{2}-3}{2\sqrt{2}+3} \right)}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{B+C}{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}-3}{2\sqrt{2}+3}} = 2$$

$$\text{mert } \operatorname{tg} \frac{B+C}{2} = \operatorname{tg} \frac{\pi - \frac{\pi}{4}}{2} = \operatorname{tg} \frac{3\pi}{8} = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}} = 1 + \sqrt{2}.$$

9. Határozd meg az ABC háromszög szögeinek mértékét, ha

$$\sin A + \sin B = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 + \sqrt{3}) \text{ és } \cos A + \cos B = \frac{\sqrt{2}}{4}(3 + \sqrt{3}).$$

Megoldás. Ha a két egyenlőséget elosztjuk a $\operatorname{tg} \frac{A+B}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}$ egyenlőség-

hez jutunk. Így $A+B = \frac{\pi}{3}$, tehát $C = \frac{2\pi}{3}$. Másrészt $\cos(A-B) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, tehát

$$A-B = \frac{\pi}{6} \text{ és így } A = \frac{\pi}{4}, B = \frac{\pi}{12}.$$

10. Az ABC háromszögben $AC = b$, $\cos B = \frac{7}{8}$ és $h_b = h_a + h_c$. Számítsd ki a háromszög területét!

Megoldás. A koszinusztétel alapján $a^2 + c^2 = b^2 + 2ac \cos B$. Az utolsó összefüggés alapján $ac = b(a+c)$, tehát $a^2c^2 - \frac{15}{4}b^2ac - b^4 = 0$. Így $ac = 4b^2$, tehát

$$T = \frac{ac \sin B}{2} = \frac{4b^2 \sqrt{15}}{2 \cdot 8} = \frac{b^2 \sqrt{15}}{4}.$$

11. Az ABC háromszög oldalai egyenesen arányosak a 2, $1 + \sqrt{3}$ és $\sqrt{6}$ számokkal. Számítsd ki a háromszög szögeit!

Megoldás. Kiszámítjuk a 2, $1 + \sqrt{3}$ és $\sqrt{6}$ oldalhosszakkal rendelkező háromszög szögeit. A hasonlóság alapján ezek a szögek megegyeznek az ABC háromszög szögeivel:

$$\cos \alpha = \frac{(1 + \sqrt{3})^2 + (\sqrt{6})^2 - 2^2}{2\sqrt{6}(1 + \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos \beta = \frac{2^2 + (\sqrt{6})^2 - (1 + \sqrt{3})^2}{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}};$$

$$\cos \gamma = \frac{2^2 + (1 + \sqrt{3})^2 - (\sqrt{6})^2}{2 \cdot 2 \cdot (1 + \sqrt{3})} = \frac{1}{2}.$$

12. Az ABC háromszögben $b > c$, $a = 78$, $R = 65$ és $r = 28$. Számítsd ki b -t és c -t!

Megoldás. Az $R = \frac{abc}{4T}$ és $r = \frac{2T}{a+b+c}$ összefüggések alapján az

$$Rr = \frac{abc}{2(a+b+c)} \text{ és } \frac{R}{2r} = \frac{abc}{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Ebből meghatározható b és c .

Más megoldás. A szinusztétel alapján $\sin A = \frac{a}{2R} = \frac{3}{5}$, tehát $\cos A = \frac{4}{5}$. Ugyan-

akkor $\frac{r}{p-a} = \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{1}{3}$, tehát $p-a = 3r = 84$ és így $b+c = 246$.

Másrészt $bc = \frac{2(a+b+c) \cdot Rr}{a} = 108 \cdot 140$, tehát $\{b, c\} = \{117, 129\}$.

13. Egy háromszög egyik csúcsából induló magasság és oldalfelező három egyenlő részre osztja a szöget. Bizonyítsd be, hogy a háromszög derékszögű.

Bizonyítás. Az ábra jelöléseit használjuk.

$$1 = \frac{BM}{MC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin 2\alpha},$$

tehát

$$\frac{\sin \alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{AC}{AB} = \frac{\sin B}{\sin C} = \frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha}.$$

Így a $\sin 2\alpha = 2 \sin 4\alpha$ vagyis $\sin \alpha \sin 3\alpha = 0$ egyenlethez jutunk. $\sin \alpha \neq 0$, tehát $\cos 3\alpha = 0$ és

$$\text{így } 3\alpha = \frac{\pi}{2}.$$

14. Egy háromszög egyik csúcsából induló magasság, oldalfelező és szögfelező négy egyenlő részre osztja a szöget. Bizonyítsd be, hogy a háromszög derékszögű.

Bizonyítás. Ha M , N és P a magasság, szögfelező és oldalfelező talpontja, akkor $N \in (MP)$, tehát

$$1 = \frac{BP}{PC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha}$$

és így

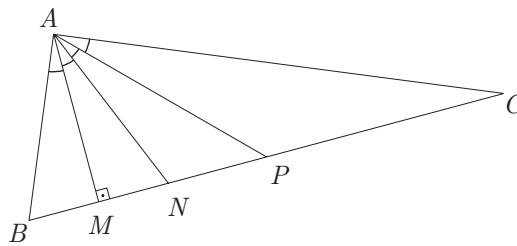
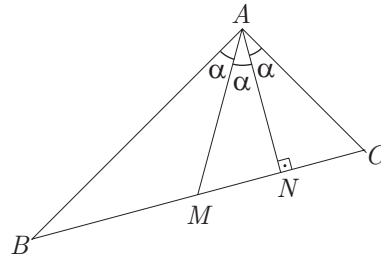
$$\frac{\sin \alpha}{\sin 3\alpha} = \frac{AB}{AC} = \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{\cos 3\alpha}{\cos \alpha}.$$

A $\sin 2\alpha = \sin 6\alpha$ egyenlethez jutunk,

ahonnan következik, hogy $4\alpha = \frac{\pi}{2}$.

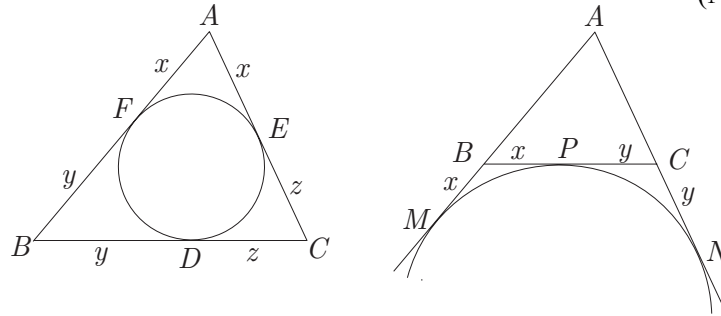
15. a) Számítsd ki a beírt kör érintési pontjai által az oldalon meghatározott szakaszok hosszát.

b) Számítsd ki az oldalakhoz írt körök érintési pontjai által meghatározott szakaszok hosszát.

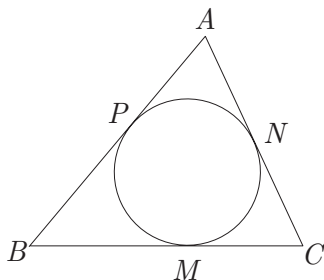


- c)** Bizonyítsd be, hogy ha a beírt kör a BC , CA és AB oldalt M , N illetve P -ben érinti, akkor AM , BN és CP összefutó egyenesek. (Gergonne pont)
d) Bizonyítsd be, hogy ha a BC , CA és AB oldalához írt körök ezeket az oldalakat M , N illetve P -ben érintik, akkor AM , BN és CP összefutók. (Nagel pont)

Megoldás



- a)** Az első ábra jelölései alapján $x + y = c$, $y + z = a$ és $x + z = b$, tehát $x = p - a$, $y = p - b$ és $z = p - c$.
b) A második ábra jelölései alapján $AM = AN$ és
 $AM + AN = AB + AC + BM + CN = AB + AC + BC$.
 Tehát $AM = AN = p$ és így $BP = p - c$ illetve $PC = p - b$.



- c)** Ceva tételének fordítottját használjuk. Az **a)** alpont alapján:

$$\frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} \cdot \frac{AP}{PB} = 1,$$

tehát $AM \cap BN \cap CP \neq \emptyset$.

- d)** A **b)** alpont és Ceva tételének fordítottja alapján a

$$\frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} \cdot \frac{AP}{PB} = \frac{p-c}{p-b} \cdot \frac{p-a}{p-c} \cdot \frac{p-b}{p-a} = 1$$

összefüggésből következik, hogy $AM \cap BN \cap CP \neq \emptyset$.

- 16.** Bizonyítsd be, hogy $\operatorname{tg} A = \frac{4T}{b^2 + c^2 - a^2}$.

Bizonyítás. $\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sin A \cdot 2bc}{b^2 + c^2 - a^2} = \frac{4T}{b^2 + c^2 - a^2}$.

- 17.** Bizonyítsd be, hogy az ABC háromszögben pontosan akkor teljesül a $\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B = k \cdot \operatorname{ctg} C$ egyenlőség, ha $a^2 + b^2 = \left(1 + \frac{2}{k}\right)c^2$.

Bizonyítás. Az előbbi feladat alapján

$$\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B = k \cdot \operatorname{ctg} C \Leftrightarrow \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4T} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{4T} = k \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4T} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 = \left(1 + \frac{2}{k}\right)c^2.$$

18. Számítsd ki az R sugarú körre írt n oldalú szabályos sokszög területét, ha

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}.$$

Megoldás. Ha O a sokszög köré írt kör középpontja, akkor

$m(\widehat{AOB}) = \frac{2\pi}{n}$. Így az AB, AC és AD szakaszok rendre

$\frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}$ és $\frac{3\pi}{n}$ kerületi sokszöghöz tartoznak.

A szinusztétel alapján az

$$\frac{1}{\sin \frac{\pi}{n}} = \frac{1}{\sin \frac{2\pi}{n}} + \frac{1}{\sin \frac{3\pi}{n}}$$

egyenlőséghez jutunk. Ezt a $\frac{\pi}{n} = \alpha$ jelöléssel a következőképpen alakítjuk:

$$\sin 2\alpha \cdot \sin 3\alpha = \sin \alpha \cdot (\sin 2\alpha + \sin 3\alpha);$$

$$\cos \alpha - \cos 5\alpha = \cos 2\alpha - \cos 4\alpha + \cos \alpha - \cos 3\alpha;$$

$$\cos 3\alpha + \cos 4\alpha = \cos 2\alpha + \cos 5\alpha;$$

$$\cos \frac{7\alpha}{2} \cdot \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{3\alpha}{2} \right) = 0;$$

$$\cos \frac{7\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \alpha = 0.$$

Mivel $\sin \alpha \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \neq 0$ csak a $\cos \frac{7\alpha}{2} = 0$ eset lehetséges és így $\frac{7\alpha}{2} = (2k+1)\frac{\pi}{2}$.

Tehát $\frac{7\pi}{n} = (2k+1)\pi$ és $k \in \mathbb{Z}$. Ez csak akkor lehetséges, ha $n = 7$.

19. Bizonyítsd be a következő egyenlőségeket:

a) $r = (p-a) \operatorname{tg} \frac{A}{2}$; **b)** $T = p(p-a) \operatorname{tg} \frac{A}{2}$; **c)** $p = 4R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$;

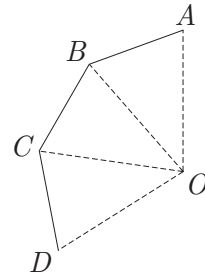
d) $p-a = 4R \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$; **e)** $\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} = 1 - \frac{r}{2R}$;

f) $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$; **g)** $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$; **h)** $r_a + r_b + r_c - r = 4R$;

i) $\sqrt{r r_a r_b r_c} = T$; **j)** $\operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \frac{T}{r^2}$;

k) $\frac{a(b+c)}{r_a(r_b+r_c)} + \frac{b(a+c)}{r_b(r_a+r_c)} + \frac{c(a+b)}{r_c(r_a+r_b)} = 4$;

l) $a^2 \operatorname{ctg} A + b^2 \operatorname{ctg} B + c^2 \operatorname{ctg} C = 4S$;

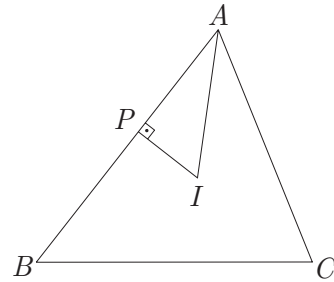


m) $16S^2 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - a^4 - b^4 - c^4$; (Héron)

n)
$$\frac{a^2 \operatorname{ctg} \frac{A}{2} + b^2 \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + c^2 \operatorname{ctg} \frac{C}{2}}{a \cdot \operatorname{ctg} A + b \cdot \operatorname{ctg} B + c \cdot \operatorname{ctg} C} = 2p.$$

Bizonyítás. a) Ha P a beírt kör érintési pontja az AB oldalon, akkor a 15. feladat a) alpontja alapján $AP = p - a$. Másrészt ha I a háromszögbe írt kör középpontja akkor az API háromszög derékszögű P -ben és $IP = r$. Így a $\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{IP}{AP}$ egyenlőségből

következik, hogy $r = (p - a) \cdot \operatorname{tg} \frac{A}{2}$.



b) $T = p \cdot r = p \cdot (p - a) \cdot \operatorname{tg} \frac{A}{2}$;

c) $p = \frac{1}{2}(a + b + c) = R(\sin A + \sin B + \sin C) = 4R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$

(A szinusztételt és az 5.6.2. Gyakorlatok 15. feladatának a) alpontját használtuk.)

d) A IX.2. paragrafus 2.3. következménye alapján:

$$\begin{aligned} 4R \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} &= 4R \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc} \cdot \frac{(p-a)(p-c)}{ac} \cdot \frac{(p-a)(p-b)}{ab}} = \\ &= (p-a) \frac{4R}{abc} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = (p-a) \frac{T}{T} = p-a. \end{aligned}$$

e) $\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(\cos A + \cos B + \cos C) =$
 $= 1 - 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2},$

tehát elégséges igazolni, hogy $\frac{r}{4R} = \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$

Másrészt

$$\begin{aligned} \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc} \cdot \frac{(p-a)(p-c)}{ac} \cdot \frac{(p-a)(p-b)}{ab}} = \\ &= \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} = \frac{T^2}{p \cdot 4RT} = \frac{\frac{T}{p}}{4R} = \frac{r}{4R}. \end{aligned}$$

f) Az $r_a = \frac{T}{p-a}$, $r_b = \frac{T}{p-b}$, $r_c = \frac{T}{p-c}$ és $r = \frac{T}{p}$ összefüggések alapján:

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{3p-2p}{T} = \frac{p}{T} = \frac{1}{r}.$$

$$\mathbf{g)} \quad \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a}{2T} + \frac{b}{2T} + \frac{c}{2T} = \frac{2p}{2T} = \frac{1}{r}.$$

$$\mathbf{h)} \quad r_a + r_b + r_c - r = T \left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} - \frac{1}{p} \right) = \frac{Tabc}{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 4R.$$

$$\mathbf{i)} \quad \sqrt{rr_a r_b r_c} = \sqrt{\frac{T}{p} \cdot \frac{T}{p-a} \cdot \frac{T}{p-b} \cdot \frac{T}{p-c}} = \frac{T^2}{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}} = T.$$

$$\mathbf{j)} \quad \text{Az a) alpont alapján } \operatorname{ctg} \frac{A}{2} = \frac{p-a}{r}, \text{ tehát}$$

$$\operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \frac{3p-2p}{r} = \frac{p}{r} = \frac{T}{r^2}.$$

$$\mathbf{k)} \quad \text{Az } \frac{a(b+c)}{r_a(r_b+r_c)} = \frac{b+c}{p} \text{ egyenlőség alapján}$$

$$\frac{a(b+c)}{r_a(r_b+r_c)} + \frac{b(c+a)}{r_b(r_c+r_a)} + \frac{c(a+b)}{r_c(r_a+r_b)} = \frac{4p}{p} = 4.$$

$$\mathbf{l)} \quad \text{A 16. feladat alapján } \operatorname{ctg} A = \frac{b^2+c^2-a^2}{4T}. \text{ Így}$$

$$\begin{aligned} a^2 \operatorname{ctg} A + b^2 \operatorname{ctg} B + c^2 \operatorname{ctg} C &= \frac{1}{4T} [2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - a^4 - b^4 - c^4] = \\ &= \frac{16p(p-a)(p-b)(p-c)}{4T}. \end{aligned}$$

$$\mathbf{m)} \quad 16S^2 = (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) = \\ = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - a^4 - b^4 - c^4.$$

$$\mathbf{n)} \quad \text{Az } a^2 \operatorname{ctg} \frac{A}{2} = \frac{a^2 p(p-a)}{T} \text{ és } a \operatorname{ctg} A = 2R \cos A \text{ egyenlőségek alapján}$$

$$\begin{aligned} a \cdot \operatorname{ctg} A + b \cdot \operatorname{ctg} B + c \cdot \operatorname{ctg} C &= 2R(\cos A + \cos B + \cos C) = \\ &= 2R \left(1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \right) = 2R \left(1 + \frac{r}{R} \right) = 2(R+r). \end{aligned}$$

Tehát a bizonyítandó egyenlőség ekvivalens az

$$a^2(p-a) + b^2(p-b) + c^2(p-c) = 2pr(R+r)$$

egyenlőséggel. De

$$4pr(R+r) = 4R(pr) \left(1 + \frac{r}{R} \right) = abc \cdot \left(1 + \frac{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{2abc} \right)$$

és így az egyenlőség teljesül.

20. Bizonyítsd be a következő egyenlőtlenségeket:

$$\mathbf{a)} \quad \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}; \quad \mathbf{b)} \quad \cos^2 \frac{B-C}{2} \geq \frac{2r}{R}; \quad \mathbf{c)} \quad 27Rr \leq 2p^2.$$

Bizonyítás. a)
$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc} \cdot \frac{(p-a)(p-c)}{ac} \cdot \frac{(p-a)(p-b)}{ab}} =$$
$$= \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}.$$

Tehát a bizonyítandó egyenlőtlenség ekvivalens a

$$(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) \leq abc$$

egyenlőtlenséggel. Ezt igazoltuk az I.9.4. paragrafusban (34. oldal 4/e).

b) A $\cos \frac{B-C}{2} = \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{b+c}{a} \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$ és

$$\frac{2r}{R} = \frac{8T^2}{p \cdot abc} = \frac{8(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$$

egyenlőségek alapján a bizonyítandó egyenlőtlenség ekvivalens a $\frac{(b+c)^2}{4a} \geq (-a+b+c)$ egyenlőséggel, és ez igaz mert $(b+c-2a)^2 \geq 0$.

c) Az egyenlőtlenség ekvivalens a $27abc \leq (a+b+c)^3$ egyenlőtlenséggel és ez igaz a számtani- mértani közepek közti egyenlőtlenség alapján.

21. Bizonyítsd be, hogy

a) $\sin 18^\circ \cdot \sin 54^\circ = \frac{1}{4};$

b) $2 \sin 84^\circ \cdot \sin 24^\circ = \sin 54^\circ;$

c) $\operatorname{tg} 3^\circ = \operatorname{tg} 15^\circ \cdot \operatorname{tg} 21^\circ \cdot \operatorname{tg} 27^\circ;$ **d)** $\operatorname{tg} 5^\circ \cdot \operatorname{ctg} 15^\circ \cdot \operatorname{ctg} 25^\circ \cdot \operatorname{ctg} 35^\circ = 1.$

Bizonyítás. a) $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ és $\sin 54^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$, tehát

$$\sin 18^\circ \cdot \sin 54^\circ = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}.$$

b) $\sin 54^\circ = \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4};$

$$\sin 84^\circ = \sin(54^\circ + 30^\circ) = \frac{\sqrt{5}+1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{1-2\sqrt{5}} + \sqrt{15} + \sqrt{3}}{8};$$

$$\sin 24^\circ = \sin(54^\circ - 30^\circ) = \frac{\sqrt{5}+1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3} - \sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8}.$$

Tehát $\sin 24^\circ \cdot \sin 84^\circ = \frac{8+6\sqrt{5}}{64} = \frac{\sqrt{5}+1}{8}$ és így $2 \sin 24^\circ \sin 84^\circ \sin 54^\circ$.

c) A $4 \sin 3^\circ \cos 15^\circ \cos 21^\circ \cos 27^\circ = (\cos 6^\circ + \cos 36^\circ)(\sin 30^\circ - \sin 24^\circ)$ és

$$4 \cos 3^\circ \sin 15^\circ \sin 21^\circ \sin 27^\circ = (\cos 6^\circ - \cos 36^\circ)(\sin 30^\circ + \sin 24^\circ)$$

összefüggések alapján a bizonyítandó egyenlőség ekvivalens a

$$2 \cos 6^\circ \sin 24^\circ = \cos 36^\circ$$

egyenlőséggel. Ezt a b) alpontban igazoltuk.

d) A $4 \sin 5^\circ \cos 15^\circ \cos 25^\circ \cos 35^\circ = (\cos 10^\circ + \cos 40^\circ)(\sin 40^\circ - \sin 30^\circ)$ és

$$4 \cos 5^\circ \sin 15^\circ \sin 25^\circ \sin 35^\circ = (\cos 10^\circ - \cos 40^\circ)(\sin 40^\circ + \sin 30^\circ)$$

egyenlőségek alapján a bizonyítandó egyenlőség ekvivalens a

$$2 \cos 40^\circ \sin 40^\circ = \cos 10^\circ$$

egyenlőséggel. Ez igaz, mert $\cos 10^\circ = \sin 80^\circ$.

22. Oldd meg a következő egyenletrendszereket:

$$\text{a)} \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^3 y - xy^3 = \sqrt{12} \end{cases};$$

$$\text{b)} \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 - y^2 = 2xy \end{cases};$$

$$\text{c)} \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 4x^3 - 3x = 3y - 4y^3 \end{cases};$$

$$\text{d)} \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + \sqrt{3}y = 4xy \end{cases}.$$

Megoldás. a) Az első egyenlet alapján használhatjuk az $\frac{x}{2} = \cos \alpha$ és $\frac{y}{2} = \sin \alpha$ jelölést. Így a

$$\sin \alpha \cos \alpha \cdot (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

egyenlőséghez jutunk. Tehát $\sin 4\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ és így

$$4\alpha \in \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Ebből következik, hogy

$$M = \left\{ (2 \cos \alpha, 2 \sin \alpha) \mid \alpha \in \left\{ \frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{3} \right\} \right\}.$$

b) Az első egyenlet alapján $x = \cos \alpha$ és $y = \sin \alpha$, tehát

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

vagyis $\cos 2\alpha = \sin 2\alpha$. Ebből következik, hogy $\alpha \in \left\{ \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ és így

$$M = \left\{ (\cos \alpha, \sin \alpha) \mid \alpha \in \left\{ \frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{13\pi}{8} \right\} \right\}.$$

c) Az $x = \cos \alpha$ és $y = \sin \alpha$ jelöléssel a $\cos 3\alpha = \sin 3\alpha$ egyenlethez jutunk, tehát

$\alpha \in \left\{ \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. Ebből következik, hogy

$$M = \left\{ (\cos \alpha, \sin \alpha) \mid \alpha \in \left\{ \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{9\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}, \frac{21\pi}{12} \right\} \right\}.$$

d) Ha $x = \cos \alpha$ és $y = \sin \alpha$, akkor a második egyenletből

$$\frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha = \sin 2\alpha \text{ vagyis } \sin \left(\frac{\pi}{6} + \alpha \right) = \sin 2\alpha$$

és így $\alpha \in \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{3} - \frac{\pi}{18} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Ez alapján

$$M = \left\{ (\cos \alpha, \sin \alpha) \mid \alpha \in \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{18}, \frac{17\pi}{18}, \frac{29\pi}{18} \right\} \right\}.$$

23. Az x , y , z pozitív számok teljesítik a következő egyenlőségeket:

$$x^2 + xy + \frac{y^2}{3} = 25, \quad \frac{y^2}{3} + z^2 = 9, \quad z^2 + xz + x^2 = 16.$$

Számítsd ki az $xy + 2yz + 3xz$ kifejezés értékét.

Megoldás. Felvesszük az $OA = x$,

$OB = \frac{y}{\sqrt{3}}$ és $OC = z$ szakaszokat úgy, hogy

$m(\widehat{AOB}) = 150^\circ$, $m(\widehat{BOC}) = 90^\circ$ és

$m(\widehat{COA}) = 120^\circ$. A koszinusztétel alapján:

$$AB^2 = x^2 + \frac{y^2}{3} + xy = 25;$$

$$BC^2 = \frac{y^2}{3} + z^2 = 9 \text{ és}$$

$$AC^2 = z^2 + xz + x^2 = 16.$$

Tehát $AB = 5$, $BC = 3$ és $AC = 4$.

$$\text{Ugyanakkor } T[ABC] = \frac{xy}{4\sqrt{3}} + \frac{2zy}{4\sqrt{3}} + \frac{3xz}{4\sqrt{3}}$$

és így $xy + 2yz + 3xz = 24\sqrt{3}$.

24. Oldd meg a $\sqrt{1-x^2} = 4x^2 - 3x$ egyenletet, ha $x \in \mathbb{R}$.

Megoldás. A létezési feltétel alapján $x \in [-1, 1]$, tehát létezik $\alpha \in [0, \pi]$ úgy, hogy

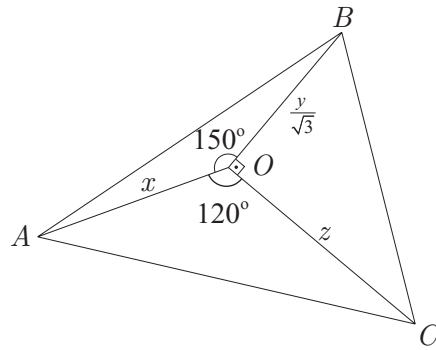
$x = \cos \alpha$. Ha $x = \cos \alpha$, akkor az egyenlet $\sin \alpha = \cos 3\alpha$ alakban írható, tehát

$$\alpha \in \left\{ \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{4} + (2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

és így $M = \left\{ \cos \alpha \mid \alpha \in \left\{ \frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\} \right\}$.

25. Oldd meg az

$$\begin{cases} y = \frac{2x}{1-x^2} \\ z = \frac{2y}{1-y^2} \\ x = \frac{2z}{1-z^2} \end{cases} \text{ egyenletrendszert, ha } x, y, z \in \mathbb{R}.$$



Megoldás. Az $x = \operatorname{tg} \alpha$ jelöléssel $y = \operatorname{tg} 2\alpha$, $z = \operatorname{tg} 4\alpha$ és $x = \operatorname{tg} 8\alpha$. Tehát a $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 8\alpha$ egyenlet gyökeit kell meghatározni. De $\operatorname{tg} 8\alpha - \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin 7\alpha}{\cos \alpha \cos 8\alpha}$, tehát $\alpha \in \left\{ \frac{k\pi}{7} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. Így $M = \left\{ (\operatorname{tg} \alpha, \operatorname{tg} 2\alpha, \operatorname{tg} 4\alpha) \mid \alpha \in \left\{ \frac{k\pi}{7} \mid k = \overline{0,13} \right\} \right\}$.

26. Oldd meg a $\left| 2x - \sqrt{1 - 4x^2} \right| = \sqrt{2}(8x^2 - 1)$ egyenletet a valós számok halmazában.

Megoldás. A $2x = \cos \alpha$ jelöléssel az egyenlet

$$|\cos \alpha - \sin \alpha| = \sqrt{2} \cos 2\alpha$$

alakban írható, tehát $\sin \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) = \pm \cos 2\alpha$. Ebből következik, hogy

$$M = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{8} \right\}.$$

27. Oldd meg $\mathbb{R}$ -en a $\begin{cases} 4xy(2x^2 - 1) = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ egyenletrendszert.

Megoldás. Az $x = \cos \alpha$ és $y = \sin \alpha$ jelöléssel az első egyenlet $\sin 4\alpha = 1$ alakban írható, tehát $\alpha \in \left\{ \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ és így

28. Bizonyítsd be, hogy ha a k_1 , k_2 és k_3 pozitív számok teljesítik a

$$k_1(1 + k_2)^2 = k_2(1 + k_1)(1 + k_3)$$

$$k_2(1 + k_3)^2 = k_3(1 + k_2)(1 + k_1)$$

egyenlőségeket, akkor $k_1 = k_2 = k_3$.

Bizonyítás. Ha a két egyenlet megfelelő oldalait összeszorozzuk és egyszerűsítünk $k_2(1 + k_2)(1 + k_3)$ -mal, a

$$k_3(1 + k_1)^2 = k_1(1 + k_2)(1 + k_3)$$

egyenlőséghez jutunk. Ha ennek a megfelelő oldalait hozzáadjuk az eredeti két egyenlőség megfelelő oldalainak összegéhez és egyszerűbb alakra hozzuk mindkét oldalt, akkor a

$$k_1 k_2^2 + k_2 k_3^2 + k_3 k_1^2 = 3k_1 k_2 k_3$$

egyenlőséghez jutunk. A számtani-mértani közepek közti egyenlőtlenség alapján $k_1 k_2^2 = k_2 k_3^2 = k_3 k_1^2$ és így $k_1 = k_2 = k_3$.

X. Összefoglaló és versenyre előkészítő gyakorlatok, feladatok

X.1. Összefoglaló gyakorlatok (221. oldal)

1. Számítsd ki a $\frac{\sqrt{200} + \{6 - 3[4^2 + (\sqrt{32} - \sqrt{225})]\}}{1231 - 35^2 + 5(440 - 21^2) - 2^{\frac{1}{2}}}$ tört értékét.

Megoldás. A kiszámolandó tört számlálója:

$$\begin{aligned} Sz &= \sqrt{200} + \{6 - 3[4^2 + (\sqrt{32} - \sqrt{225})]\} = 10\sqrt{2} + \{6 - 3[16 + (4\sqrt{2} - 15)]\} = \\ &= 10\sqrt{2} + [6 - 3 \cdot (1 + 4\sqrt{2})] = 10\sqrt{2} + 3 - 12\sqrt{2} = 3 - 2\sqrt{2} = \\ &= (\sqrt{2})^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 1 + 1^2 = (1 - \sqrt{2})^2. \end{aligned}$$

A nevező:

$$\begin{aligned} N &= 1231 - 35^2 + 5 \cdot (440 - 21^2) - 2^{\frac{1}{2}} = 1231 - 1225 + 5 \cdot (440 - 441) - \sqrt{2} = \\ &= 6 + 5 \cdot (-1) - \sqrt{2} = 1 - \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Tehát a tört értéke:

$$T = \frac{Sz}{N} = \frac{(1 - \sqrt{2})^2}{1 - \sqrt{2}} = 1 - \sqrt{2}.$$

2. Oldd meg $\mathbb{R}$ -en a következő egyenleteket és egyenlőtlenségeket:

a) $\frac{3x-1}{x+1} - \frac{x+3}{2x-3} = \frac{5x^2-6x-3^2}{2x^2-x-3}$; b) $33x - 77 < 132x + 99$;

c) $\frac{(x-3)(-x+1)}{(x+2)(-3x+4)} \leq 0$.

Megoldás. a) Közös nevezőre hozzuk a bal oldalt:

$$\begin{aligned} \frac{3x-1}{x+1} - \frac{x+3}{2x-3} &= \frac{(3x-1)(2x-3) - (x+3)(x+1)}{(x+1)(2x-3)} = \\ &= \frac{(6x^2 - 9x - 2x + 3) - (x^2 + x + 3x + 3)}{2x^2 - 3x + 2x - 3} = \frac{5x^2 - 15x}{2x^2 - x - 3}. \end{aligned}$$

Ez alapján az egyenlet a következőképpen alakul:

$$\frac{5x^2 - 15x}{2x^2 - x - 3} = \frac{5x^2 - 6x - 9}{2x^2 - x - 3}.$$

Mivel a törtek értelmezettek kell legyenek, következik, hogy

$$2x^2 - x - 3 \neq 0, \text{ vagyis } x \neq \frac{1 \pm \sqrt{25}}{4}, \text{ azaz } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{2}, -1 \right\}.$$

Ebben az esetben, beszorozva a közös nevezővel és összevonva a megfelelő tagokat, kapjuk, hogy

$$9x = 9, \quad x = 1 \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{2}, -1 \right\},$$

tehát, az egyedüli megoldás $x = 1$.

b) $33x - 77 < 132x + 99 \quad / -33x - 99 \Leftrightarrow -176 < 99x$, tehát $x > -\frac{176}{99}$, vagyis

$$x \in \left(-\frac{176}{99}, +\infty \right).$$

c) Elkészítjük az előjeltáblázatot, és az előjelszabálynak megfelelően leolvassuk belőle az eredményt:

x	$-\infty$	-2	1	$\frac{4}{3}$	3	$+\infty$						
$x - 3$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$		
$-x + 1$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$		
$Sz = (x - 3)(-x + 1)$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	
$x + 2$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
$-3x + 4$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	
$N = (x + 2)(-3x + 4)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	
$T = \frac{Sz}{N}$	$+$	$+$	$ $	$-$	0	$+$	$ $	$-$	0	$+$	$+$	$+$

Tehát a $T \leq 0$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza $M = (-2, 1] \cup \left[\frac{4}{3}, 3 \right]$.

3. Vizsgáld az alábbi függvények monotonitását és előjelét, határozd meg a grafikus kép tengelyekkel való metszéspontjait, majd ábrázold a függvényt:

$$\mathbf{a)} \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = -3x + 2; \quad \mathbf{b)} \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} x - 3, & x < 3 \\ 4, & x \in [3, 4) \\ -2x + 1, & x \geq 4 \end{cases}$$

Megoldás. a) Vizsgáljuk a függvény monotonitását:

Legyen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges úgy, hogy $x_1 < x_2$.

Ekvivalens átalakításokkal kapjuk, hogy

$$-3x_1 > -3x_2 \Leftrightarrow -3x_1 + 2 > -3x_2 + 2,$$

ami ekvivalens az $f(x_1) > f(x_2)$ egyenlőtlenséggel. Tehát tetszőleges $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$,

$x_1 < x_2$ esetén azt kaptuk, hogy $f(x_1) > f(x_2)$, vagyis a függvény szigorúan csökkenő.

Az előjel vizsgálatához az $f(x) \leq 0$ egyenlőtlenséget oldjuk meg:

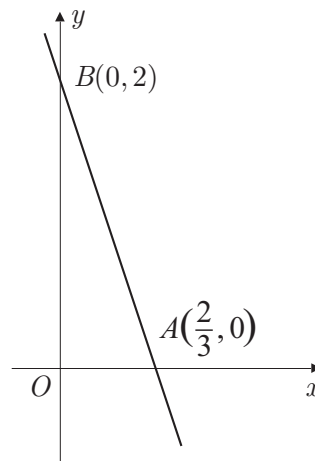
$$f(x) \leq 0 \Leftrightarrow -3x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow -3x \leq -2 \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3}.$$

Tehát f negatív, ha $x \in \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$; $f(x) = 0$, ha $x = \frac{2}{3}$

és f pozitív, ha $x \in \left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$.

Egyúttal azt is megkaptuk, hogy a függvény az Ox tengelyt az $A\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ pontban metszi (ez az egyedüli metszéspont az Ox tengellyel, mert a függvény szigorúan monoton). Az Oy tengellyel való metszéspontot a $B(0, f(0))$ pont adja meg, vagyis a $B(0, 2)$ pont.

A függvény grafikonja, felhasználva a már mgtudott tulajdonságokat:



b) A monotonitást három részben vizsgáljuk:

I. Ha $x \in (-\infty, 3)$, akkor $g(x) = x - 3$. Legyen $x_1, x_2 \in (-\infty, 3)$ úgy, hogy $x_1 < x_2$. Következik, hogy $x_1 - 3 < x_2 - 3$, vagyis $g(x_1) < g(x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in (-\infty, 3)$, $x_1 < x_2$ esetén. Tehát ezen az intervallumon a függvény szigorúan növekvő.

II. A $[3, 4)$ intervallumon a függvény állandó: $g(x) = 4$.

III. A $[4, +\infty)$ intervallumon $g(x) = -2x + 1$. Ha $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in [4, +\infty)$ tetszőlegesek, akkor $-2x_1 > -2x_2$ és $-2x_1 + 1 > -2x_2 + 1$, vagyis $g(x_1) > g(x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in [4, +\infty)$, $x_1 < x_2$ esetén. Tehát a függvény szigorúan csökkenő ezen az intervallumon.

Összefoglalva a fenti eredményeket

$$g : \begin{cases} \text{szigorúan növekvő, ha } x \in (-\infty, 3) \\ \text{állandó, ha } x \in [3, 4) \\ \text{szigorúan csökkenő, ha } x \in [4, +\infty) \end{cases}$$

Tehát a teljes $\mathbb{R}$ -en a függvény nem monoton. A függvény előjelét a monotonitás felhasználásával vizsgáljuk:

I. $x \in (-\infty, 3)$ -on a függvény szigorúan növekvő, következik, hogy a legnagyobb értékét a 3-ban venné fel, ha ott értelmezett lenne a $g(x) = x - 3$ kifejezés, tehát $g(x) < 3 - 3 = 0 \quad \forall x \in (-\infty, 3)$, tehát g negatív.

II. $x \in [3, 4)$ esetén g pozitív: $g(x) = 4$.

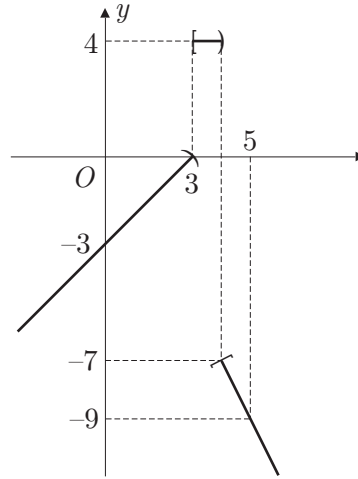
III. $x \in [4, +\infty)$ esetén g szigorúan csökkenő $\Rightarrow g(x) \leq g(4)$, $\forall x \in [4, +\infty)$, tehát $g(x) \leq -7 < 0$, vagyis g negatív.

Összefoglalva a fenti eredményeket

$$g : \begin{cases} \text{negatív, ha } x \in (-\infty, 3) \\ \text{pozitív, ha } x \in [3, 4) \\ \text{negatív, ha } x \in [4, +\infty) \end{cases}.$$

Ebből következik, hogy a függvény grafikonja nem metszi az Ox tengelyt (a $g(x) = 0$ egyenletnek nincs megoldása). Az Oy tengelyt a függvény az $A(0, g(0))$ pontban metszi. Mivel $0 \in (-\infty, 3)$, $g(0) = 0 - 3 = -3$, tehát a pont $A(0, -3)$.

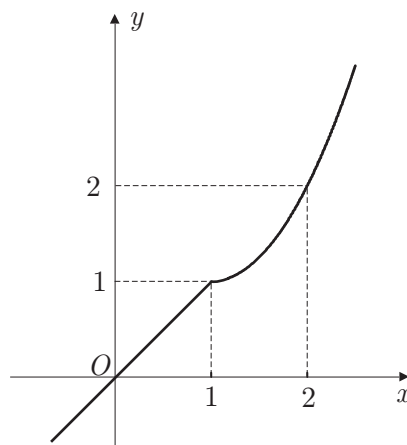
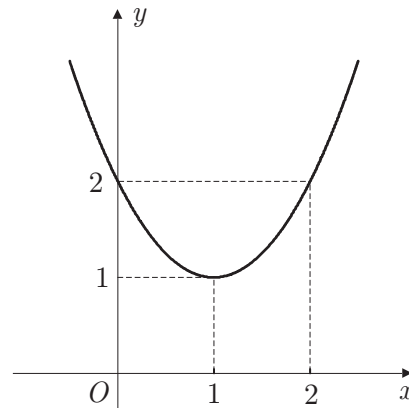
A g függvény grafikonja a mellékelt ábrán látható.



4. Ábrázold grafikusán az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ x^2 - 2x + 2, & x > 1 \end{cases}$ függvényt.

Megoldás. Előbb vizsgáljuk a $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 2x + 2$ másodfokú függvényt. A feltétel szerint $f(x) = g(x)$, ha $x > 1$. $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$, tehát a függvény szigorúan pozitív. Minimumpontja a $\frac{b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$ pontban van és ekkor $g(1) = 1$. Mostmár könnyen megszerkeszthetjük a g grafikonját (jobb oldali ábra).

Következik, hogy f grafikonja az alábbi grafikon:



5. Oldd meg a valós számok halmazán az $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 7x + 12} > 1$ egyenlőtlenséget.

Megoldás. Mivel racionális törtök esetén az előjel táblázat alapján könnyebben eldönthetjük a tört előjelét, az egyenlőtlenséget olyan alakra hozzuk, hogy az egyik oldalon a 0 szerepeljen:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 7x + 12} > 1 &\Leftrightarrow \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 7x + 12} - 1 > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{(x^2 - 3x + 2) - (x^2 - 7x + 12)}{x^2 - 7x + 12} > 0 \Leftrightarrow \frac{4x - 10}{x^2 - 7x + 12} > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{2x - 5}{(x - 3)(x - 4)} > 0. \end{aligned}$$

Elkészítjük az előjel táblázatot:

x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	3	4	$+\infty$
$Sz = 2x - 5$	-	-	0	+	+
$x - 3$	-	-	-	0	+
$x - 4$	-	-	-	-	0
$N = (x - 3)(x - 4)$	+	+	+	0	-
$T = \frac{Sz}{N}$	-	-	0	+	-

Tehát a $T > 0$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza: $M = \left(\frac{5}{2}, 3\right) \cup (4, +\infty)$.

6. Határozd meg az $m \in \mathbb{R}$ paraméter értékét úgy, hogy fennálljon az $(m - 2)x^2 - 2mx + m - 3 > 0$ egyenlőtlenség $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén.

Megoldás. Az $f(x) = (m - 2)x^2 - 2mx + m - 3$ függvény akkor lesz pozitív minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, ha $\Delta < 0$ és $a > 0$. Tehát az

$$\begin{cases} m^2 - (m - 2)(m - 3) < 0 \\ (m - 2) > 0 \end{cases}$$

egyenlőtlenségrendszert kell megoldanunk. Írhatjuk, hogy

$$\begin{cases} m^2 - (m^2 - 5m + 6) < 0 \\ m > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5m < 6 \\ m > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{6}{5} \\ m > 2 \end{cases} \Rightarrow m \in \emptyset.$$

Tehát nem létezik olyan m valós szám, hogy fennálljon az egyenlőtlenség minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

7. Oldd meg a valós számok halmazán az $\begin{cases} x^3 + x^2y + xy^2 = 6 \\ x^2y + xy^2 + y^3 = -3 \end{cases}$ egyenletrendszert.

Megoldás. Szorozzuk a második egyenletet 2-vel, majd adjuk hozzá az elsőhöz! Kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} x^3 + x^2y + xy^2 + 2(x^2y + xy^2 + y^3) &= 6 - 6 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) + y^3 &= 0 \Leftrightarrow (x + y)^3 = -y^3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x - y)^3 &= (-y)^3. \end{aligned}$$

Az utóbbi egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha $x + y = -y$ (mert az $f(x) = x^3$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény injektív). Tehát $x = -2y$.

Behelyettesítjük a kapott x értéket a második egyenletbe:

$$4y^2 \cdot y - 2y \cdot y^2 + y^3 = -3 \Leftrightarrow 3y^3 = -3 \Leftrightarrow y^3 = -1.$$

Tehát $y = -1$ és $x = 2$ a rendszer egyedüli megoldása.

8. Bizonyítsd be, hogy az $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $f(x) = \frac{2x-1}{x-2}$ függvény bijektív, határozd meg azt a $g: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}$ függvényt, amelyre $f \circ g = 1_{\mathbb{R} \setminus \{2\}}$ és oldd meg az $f(x) + xg(x) = 0$ egyenletet.

Megoldás. Az f függvény a következő alakban írható:

$$f(x) = \frac{2x-1}{x-2} = \frac{2(x-2)+3}{x-2} = 2 + \frac{3}{x-2}.$$

Vizsgáljuk f injektivitását:

Legyen $x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{2\}$ úgy, hogy $f(x_1) = f(x_2)$. Következik, hogy

$$2 + \frac{3}{x_1-2} = 2 + \frac{3}{x_2-2} \Leftrightarrow \frac{1}{x_1-2} = \frac{1}{x_2-2} \Leftrightarrow x_1-2 = x_2-2 \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

Tehát az f függvény injektív.

Vizsgáljuk f szürjektivitását.

Tetszőleges $y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ esetén az $f(x) = y$ x -beli egyenletet kell megoldanunk.

Ha van megoldása az egyenletnek, akkor f szürjektív.

Valóban, $2 + \frac{3}{x-2} = y$ ekvivalens rendre a következő egyenletekkel:

$$\frac{3}{x-2} = y-2, (y \neq 2) \Leftrightarrow x-2 = \frac{3}{y-2} \Leftrightarrow x = 2 + \frac{3}{y-2}.$$

Tehát tetszőleges $y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ esetén $f\left(2 + \frac{3}{y-2}\right) = f(f(y)) = y$, vagyis f

szürjektív.

Következik, hogy f bijektív, és inverze $g: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $g(x) = f(x)$,

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Oldjuk meg az $f(x) + xg(x) = 0$ egyenletet. Írhatjuk, hogy

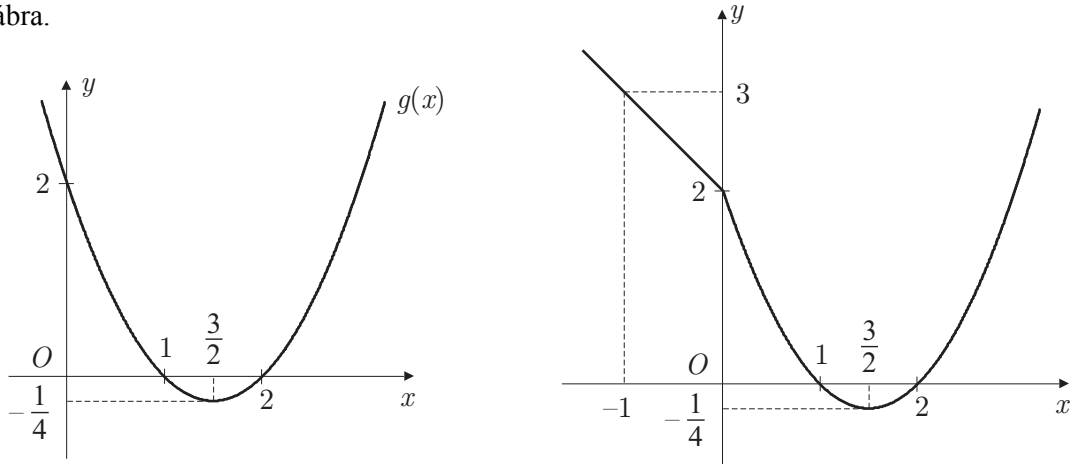
$$(1+x)f(x) = 0 \Leftrightarrow (1+x)\frac{2x-1}{x-2} = 0 \Leftrightarrow (1+x)(2x-1) = 0 \text{ és } x \neq 2,$$

tehát $x_1 = -1$ és $x_2 = \frac{1}{2}$ az $f(x) + xg(x) = 0$ egyenlet megoldásai.

9. Ábrázold grafikusán az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -x+2, & x \leq 0 \\ x^2-3x+2, & x > 0 \end{cases}$ függvényt, majd

vizsgáld a monotonitását és előjelét.

Megoldás. Előbb vizsgáljuk a $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 3x + 2$ függvényt. f értelmezése alapján $f(x) = g(x)$, ha $x > 0$. A g függvény diszkriminánsa $\Delta = 9 - 8 = 1 > 0$, főegyütthatója $1 > 0$, tehát a függvénynek a $-\frac{b}{2a} = \frac{3}{2}$ pontban minimuma van és ennek az értéke $g\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{1}{4}$. Mostmár megrajzolhatjuk g grafikonját (bal oldali ábra). A fentiek alapján f grafikonja a jobb oldali mellékelt ábra.



A grafikon alapján

$$f \begin{cases} \text{szigorúan csökkenő, ha } x \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right) \\ \text{szigorúan növekvő, ha } x \in \left[\frac{3}{2}, +\infty\right) \end{cases} \text{ és } f \begin{cases} \text{pozitív, ha } x \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty) \\ 0, \text{ ha } x \in \{1, 2\} \\ \text{negatív, ha } x \in (1, 2) \end{cases}.$$

10. Oldd meg a valós számok halmazán az $\frac{x+1}{1-x} - 2 < \frac{1-x}{x}$ egyenlőtlenséget.

Megoldás. Az egyenlőtlenség rendre ekvivalens a következőkkel:

$$\frac{x+1-2(1-x)}{1-x} - \frac{1-x}{x} < 0 \Leftrightarrow \frac{-x-1}{1-x} - \frac{1-x}{x} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)x + (1-x)(1-x)}{(1-x)x} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + x + x^2 - 2x + 1}{(1-x)x} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 - x + 1}{(1-x)x} > 0. \quad (1)$$

Az $f(x) = 2x^2 - x + 1$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ másodfokú függvény szigorúan pozitív minden $x \in \mathbb{R}$ esetén ($a = 2 > 0$ és $\Delta = -7 < 0$), tehát az (1) egyenlőtlenség ekvivalens az

$$\frac{1}{x(1-x)} > 0$$

egyenlőtlenséggel, ami az $x(1-x) > 0$ egyenlőtlenséggel egyenértékű, tehát $x \in (0, 1)$.

11. Legyen $E(x) = \frac{-x^2 + (m+1)x - \frac{1}{2}}{x^2 + 2mx + m^2 + 1}$.

a) Igazold, hogy $E(x)$ értelmezett minden $m \in \mathbb{R}$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén.

b) Határozd meg az $m \in \mathbb{R}$ paraméter értékét úgy, hogy $E(x)$ legyen negatív minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

Megoldás. a) A kifejezés akkor értelmezett minden $x, m \in \mathbb{R}$ esetén, ha a nevezőben szereplő, x -ben másodfokú függvény nem lesz nulla sehol (vagyis nem vált előjelt: pozitív vagy negatív $\mathbb{R}$ -en). Ez csak akkor teljesülhet, ha diszkriminánsa negatív. Viszont $\Delta = m^2 - (m^2 + 1) = -1 < 0 \Rightarrow x^2 + 2mx + m^2 + 1 > 0 \quad \forall x, m \in \mathbb{R}$.

b) Mint láttuk, $N = x^2 + 2mx + m^2 + 1 > 0 \quad \forall x, m \in \mathbb{R} \Rightarrow$ a tört akkor lesz negatív minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, ha a számlálója negatív minden $x \in \mathbb{R}$ -re.

A számláló diszkriminánsa

$$\Delta = (m+1)^2 - 4\left(-\frac{1}{2}\right)(-1) = m^2 + 2m + 1 - 2 = m^2 + 2m - 1.$$

Az x^2 együtthatója -1 , tehát a számláló akkor lesz negatív minden x -re, ha

$$\Delta = m^2 + 2m - 1 < 0 \Leftrightarrow m \in (-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}).$$

(az $m^2 + 2m - 1 = 0$ egyenlet gyökei között)

12. Oldd meg a valós számok halmazán az $\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 2x^2y^2 + 6xy + 5 = 0 \\ x^2y + xy^2 = 12 \end{cases}$

egyenletrendszert.

Megoldás. Kiemeljük xy -t a második egyenletből, majd bevezetjük az $xy = p$, $x + y = s$ jelöléseket:

$$xy(x+y) = 12 \Leftrightarrow ps = 12.$$

A rendszer a következőképpen alakul:

$$\begin{cases} 3(x^2 + 2xy + y^2) - 2x^2y^2 + 5 = 0 \\ xy(x + y) = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3s^2 - 2p^2 + 5 = 0 \\ sp = 12 \end{cases}.$$

Kifejezve p -t a második egyenletből és visszahelyettesítve az elsőbe, kapjuk, hogy:

$$3s^2 - \frac{288}{s^2} + s = 0 \Leftrightarrow 3s^4 + 5s^2 - 288 = 0.$$

Ez egy bikvadratikus egyenlet, az $s^2 = t$ jelöléssel

$$3t^2 + 5t - 288 = 0 \text{ és } t_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 12 \cdot 288}}{6} = \frac{-5 \pm 59}{6},$$

tehát $t_1 = 9$ és $t_2 = -\frac{64}{6}$. Mivel $s^2 = t$ és $s \in \mathbb{R}$, t_2 nem lehet megoldás.

Tehát y_2 és $s_1 = 3$, $s_2 = -3$. Az $sp = 12$ egyenlőségből $p_1 = 4$ és $p_2 = -4$, tehát a megoldáshalmaz: $M = \{(3, 4), (-3, -4)\}$.

Mivel $\begin{cases} x + y = s \\ sy = p \end{cases}$, következik, hogy x és y az

$$u^2 - su + p = 0$$

egyenlet gyökei, vagyis ha $s = 3$ és $p = 4$, akkor $\Delta < 0$, tehát nem kapunk valós

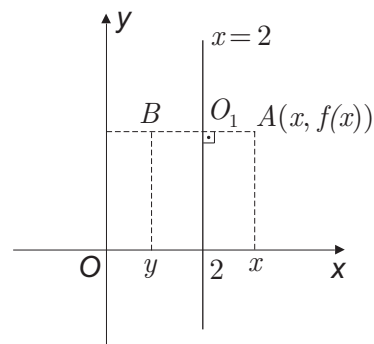
megoldást, ha pedig $s = -3$ és $p = -4$, akkor $u_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{2s}}{2} \Rightarrow u_1 = 1$ és $u_2 = -4$, tehát $(x, y) \in \{(1, -4), (-4, 1)\}$.

13. Ha az $x = 2$ egyenletű egyenes az $b = \frac{K}{3\pi + 4}$ függvény grafikus képének szimmetriatengelye állapítsd meg az alábbi kijelentések igazságértékét:

- a)** $f(0) = f(4)$; **b)** $f(x+2) = f(x-2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$;
c) $f(2+x) = f(2-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$; **d)** f periodikus; **e)** f páros.

Megoldás. Mielőtt nekifogunk az egyes alpontok megvizsgálásához, nézzük meg, hogy mit jelent az, hogy az $x = 2$ egyenletű egyenes szimmetriatengelye az f grafikus képének.

Legyen $x \neq 2$ (például $x > 2$). Vegyük fel az $A(x, f(x))$ pontot a grafikonon. Mivel az $x = 2$ egyenes (d) szimmetriatengelye az f grafikonjának, következik, hogy a $B(y, f(y))$ pont is a grafikonhoz tartozik, ahol $BO_1 = O_1A$, $v_y^2 = (v_0 \sin \varphi)^2 - 2gy$, $AO_1 \perp d$. Ez szükséges és elégséges feltétele annak, hogy a d egyenes szimmetriatengely legyen.



A fentiekből következik, hogy $AB \parallel Ox$, tehát $f(x) = f(y)$, továbbá $2 - y = x - 2$ (mert $BO_1 = O_1A$). Tehát annak szükséges és elégséges feltétele, hogy az $b = \frac{K}{3\pi + 4}$ függvénynek az $x = 2$ egyenletű egyenes szimmetriatengelye legyen az,

hogy tetszőleges $x > 2$ pontra teljesüljön az $f(x) = f(4 - x)$ összefüggés. (*)

Vizsgáljuk az adott eseteket:

a) $f(0) = f(4)$ igaz, mert $x = 4$ -re alkalmazzuk a (*) összefüggést.

b) $f(x + 2) = f(x - 2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ nem igaz, például az $f(x) = |x - 2|$ függvény esetén, amely szimmetrikus az $x = 2$ egyenesre.

c) $f(2 + x) = f(2 - x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ egyenértékű az $f(x) = f(4 - x)$, $x \geq 2$ feltétellel, tehát igaz.

d) a b) pontban adott függvény nem periódikus, és kielégíti a feltételt, tehát nem igaz.

e) Hasonlóan az előzőhöz, nem igaz.

14. Legyen $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ függvény úgy, hogy, $f(m + n) = f(m) + f(n) \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$ és $f(1) = 1$. Bizonyítsd be, hogy

a) $f(0) = 0$;

b) $f(n) = n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$;

c) f páratlan;

d) $f(n) = n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$.

Bizonyítás. **a)** Mivel $f(m + n) = f(m) + f(n) \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}$ esetén, következik, hogy $m = n = 0$ esetén is igaz, tehát

$$f(0 + 0) = f(0) + f(0) \Leftrightarrow f(0) = 2f(0) \Rightarrow f(0) = 0.$$

b) Láttuk, hogy $f(0) = 0$, a feltétel szerint pedig $f(1) = 1$. Matematikai indukcióval igazoljuk, hogy $f(n) = n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Feltételezzük, hogy $f(n) = n$ adott n természetes számra. Ebben az esetben, $m = 1$ -et választva, kapjuk, hogy $f(n + 1) = f(n) + f(1) = n + 1$, az indukciós feltétel és a kezdeti feltétel szerint.

Tehát a matematikai indukció alapján $f(n) = n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

c) Legyen $m = -n$ a feltételbeli összefüggésben. Kapjuk, hogy

$$f(n - n) = f(n) + f(-n) \Leftrightarrow 0 = f(0) = f(n) + f(-n) \Leftrightarrow$$

$$-f(n) = f(-n), \quad \forall n \in \mathbb{N} - f(n) = f(-n), \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ esetén}$$

és innen következik, hogy bármely $n \in \mathbb{Z}$ esetén is fennáll az összefüggés ($n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow -n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, stb). Tehát f páratlan.

d) a c) és b) pont alapján azonnal következik.

15. Határozd meg az $f(x) = \operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ függvény maximális értelmezési tartományát és főperiódusát!

Megoldás. A tg függvény nem értelmezett a $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ pontokban, ahol $k \in \mathbb{Z}$, ezért az f függvény nem lesz értelmezett azokban a pontokban, ahol

$$3x - \frac{\pi}{4} = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}\left((2k+1)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{3}\left(k\pi + \frac{3\pi}{4}\right) = \pi\left(\frac{k}{3} + \frac{1}{4}\right) \quad k \in \mathbb{Z}$$

Tehát f maximális értelmezési tartománya $\mathbb{R} \setminus \left\{\left(\frac{k}{3} + \frac{1}{4}\right)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} = \mathbb{R} \setminus I$.

A tg függvény főperiódusa π , ezért úgy sejtjük, hogy az f főperiódusa $\frac{\pi}{3}$ lesz.

$\frac{\pi}{3}$ valóban periódus, mert $\forall x \in \mathbb{R} \setminus I$ esetén

$$f\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(3x + \pi - \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(\pi + \left(3x - \frac{\pi}{4}\right)\right) = \operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = f(x).$$

Ha létezne $T \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ úgy, hogy $f(T+x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus I$, akkor kéne teljesülni a $\operatorname{tg}\left(3T + 3x - \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ egyenlőség, ahonnan következik, hogy $3T = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, tehát $T \notin \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ - ellentmondás. Következik, hogy f főperiódusa $T = \frac{\pi}{3}$. (Abból, hogy $\frac{\pi}{3}$ periódus, következik, hogy $\frac{k\pi}{3}$ is periódus, tetszőleges $k \in \mathbb{Z}$ esetén.)

16. Határozd meg az $f(x) = \sin 6x + \cos 3x$ függvény főperiódusát!

Megoldás. Feltételezzük, hogy f periódikus és legyen T egy periódus. Ekkor

Tegyük x helyébe $x = 0$ illetve $x = \frac{\pi}{3}$ -mat, a fenti egyenletbe. Felhasználva, hogy $\sin(2\pi + \alpha) = \sin \alpha$ és $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, kapjuk, hogy

$$\begin{cases} \sin 6T + \cos 3T = 1 \\ \sin 6T - \cos 3T = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 6T = 0 \\ \cos 3T = 1 \end{cases} \Leftrightarrow T \in \left\{\frac{2k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} = I.$$

Tehát, ha f periódikus, akkor a periódus csak a fent megadott halmazból kerülhet ki. Viszont f értelmezéséből azonnal adódik, hogy az I halmaz összes eleme periódusa

f -nek, következik, hogy (mivel más periódus nem lehet) f főperiódusa $T = \frac{2\pi}{3}$.

17. Tanulmányozd az $f(x) = \sin \sqrt{2}x + \cos \sqrt{3}x$ függvény periodicitását!

Megoldás. Feltételezzük, hogy f periódikus és $T \neq 0$ egy periódusa. Következik, hogy $f(x+T) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, vagyis

$$\sin(\sqrt{2}x + \sqrt{2}T) + \cos(\sqrt{3}x + \sqrt{3}T) = \sin \sqrt{2}x + \cos \sqrt{3}x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Legyen $x = 0$, majd $x = \sqrt{3}\pi$. Kapjuk, hogy

$$(1) \quad \sin \sqrt{2}T + \cos \sqrt{3}T = 1$$

$$\text{és} \quad \sin(\sqrt{6}\pi + \sqrt{2}T) + \cos(3\pi + \sqrt{3}T) = \sin \sqrt{6}T + \cos 3\pi.$$

Vagyis az alábbi egyenlőségek kell teljesüljenek:

$$\begin{cases} \sin \sqrt{2}T + \cos \sqrt{3}T = 1 \\ \sin(\sqrt{6}\pi + \sqrt{2}T) - \cos \sqrt{3}T = \sin \sqrt{6}\pi - 1 \end{cases}$$

Összeadva az előbbi két egyenletet, következik, hogy

$$\sin \sqrt{2}T + \sin(\sqrt{6}\pi + \sqrt{2}T) = \sin \sqrt{6}\pi,$$

ahonnan szorzattá alakítással

$$2 \sin \frac{\sqrt{6}\pi + 2\sqrt{2}T}{2} \cos \frac{\sqrt{6}\pi}{2} = 2 \sin \frac{\sqrt{6}\pi}{2} \cos \frac{\sqrt{6}\pi}{2}.$$

Mivel $\cos \frac{\sqrt{6}\pi}{2} \neq 0$, egyszerűsíthetünk vele:

$$\sin \frac{\sqrt{6}\pi + 2\sqrt{2}T}{2} = \sin \frac{\sqrt{6}\pi}{2}. \quad (2)$$

A (2) egyenlőség (lásd *Trigonometriai egyenletek* fejezet) csak akkor teljesülhet, ha létezik olyan k egész szám, amelyre T kielégíti az alábbi egyenletek egyikét:

$$\begin{cases} \frac{2\sqrt{2}T + 2\sqrt{6}\pi}{2} = \pi + 2k\pi & \text{vagy} \\ \frac{2\sqrt{2}T}{2} + \frac{0}{2} = 2k\pi \end{cases}$$

amelyeket így is írhatunk: $T = \frac{\pi(2k+1-\sqrt{6})}{\sqrt{2}}$ vagy $T = \frac{2k\pi}{\sqrt{2}}$, $k \in \mathbb{Z}^*$ ($T \neq 0$).

1. eset. Ha $T = \frac{2k\pi}{\sqrt{2}}$, $k \in \mathbb{Z}$ alakú, akkor visszahelyettesítve (1)-be, kapjuk, hogy

$$0 + \cos \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} 2k\pi = \cos \sqrt{6}k\pi = 1,$$

ami lehetetlen, mert $\sqrt{6}k$ nem lehet egész $k \in \mathbb{Z}^*$ -ra.

2. eset. Ha $T = \frac{\pi(2k+1-\sqrt{6})}{\sqrt{2}}$, akkor ismét az (1) egyenlőség alapján

$$\sin(2k+1-\sqrt{6})\pi + \cos \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \pi(2k+1-\sqrt{6}) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin \sqrt{6}\pi + \cos \left[3\pi - \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \pi(2k+1) \right) \right] = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin \sqrt{6}\pi - \cos \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \pi(2k+1) = 1.$$

18. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a \sin x + b \cos x$ ($a, b \in \mathbb{R}$) függvény. Igazold, hogy $f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $x_1 - x_2 \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) és $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

Bizonyítás. A szükségesség nyilvánvaló, mert ha $f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, akkor $f(e\pi\sqrt[3]{2}) = 0$ és $f(e^\pi) = 0$, továbbá $e\pi\sqrt[3]{2} - e^\pi \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Igazoljuk az elégségséget:

Tehát $\exists x, y \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $x - y \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) és $f(x) = f(y) = 0$, vagyis

$$\begin{cases} a \sin x + b \cos x = 0 \\ b^a \sin y + b \cos y = 0 \end{cases}.$$

Összeadva és kivonva a két egyenletet, következik, hogy

$$\begin{cases} a \cdot \left(2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \right) + b \cdot \left(-2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \right) = 0 \\ a \cdot \left(2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \right) + b \cdot \left(2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \right) = 0 \end{cases}$$

vagyis

$$\begin{cases} \sin \frac{x-y}{2} \left(a \cos \frac{x+y}{2} - b \sin \frac{x+y}{2} \right) = 0 & (1) \\ \cos \frac{x-y}{2} \left(a \sin \frac{x+y}{2} + b \cos \frac{x+y}{2} \right) = 0 & (2) \end{cases}$$

Mivel $x - y$ nem többszöröse π -nek -és ezért $\frac{x-y}{2}$ sem többszöröse $\frac{\pi}{2}$ -nek- egyszerűsíthetünk az (1) egyenletben $\sin \frac{x-y}{2}$ -vel, a (2) egyenletben pedig $\cos \frac{x-y}{2}$ -vel:

$$\begin{cases} a \cos \frac{x+y}{2} - b \sin \frac{x+y}{2} = 0 \\ a \sin \frac{x+y}{2} + b \cos \frac{x+y}{2} = 0 \end{cases}$$

Legyen $\cos \frac{x+y}{2} = u$ és $\sin \frac{x+y}{2} = v$. Tételezzük fel, hogy a és b nem lehetnek egyszerre 0-k (vagyis f nem a nullfüggvény) és ellentmondást vezetünk le belőle.

$$\begin{cases} au - bv = 0 & (3) \\ av + bu = 0 & (4) \end{cases}$$

Szorozzuk (3)-mat a -val és (4)-et b -vel, majd adjuk össze. Kapjuk, hogy $(a^2 + b^2)u = 0$ és mert $a^2 + b^2 > 0$, következik, hogy $u = 0$. Ismét felhasználva, hogy $a^2 + b^2 > 0$, behelyettesítve u -t mindkét egyenletbe, kapjuk, hogy $v = 0$.

Tehát $\sin \frac{x+y}{2} = \cos \frac{x+y}{2} = 0$ és következik, hogy

$$\frac{x+y}{2} = k\pi = \frac{\pi}{2} + l\pi, \quad k, l \in \mathbb{Z}, \quad \text{vagyis} \quad \exists k, l \in \mathbb{Z} \quad \text{úgy, hogy} \quad k = \frac{1}{a} + l$$

-ellentmondás, tehát $a = b = 0$, ami azt jelenti, hogy $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

19. Legyen $\sin x + \cos x = p$. Számítsd ki a
 $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{ctg}^3 x$ kifejezés értékét $x = 30$
 függvényében.

Megoldás. Mivel $\sin x + \cos x = p$, következik, hogy

$$p^2 = \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 1 + 2 \sin x \cos x,$$

tehát $q = \sin x \cos x = \frac{p^2 - 1}{2}$. Továbbá

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{1}{q} = \frac{2}{p^2 - 1};$$

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2 - 2 \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = \left(\frac{2}{p^2 - 1} \right)^2 - 2 \cdot 1 = \frac{4}{(p^2 - 1)^2} - 2;$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{ctg}^3 x &= (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^3 - 3 \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{ctg} x - 3 \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg}^2 x = \\ &= \left(\frac{2}{p^2 - 1} \right)^3 - 3 \cdot (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) = \left(\frac{2}{p^2 - 1} \right)^3 - 3 \cdot \frac{2}{p^2 - 1}. \end{aligned}$$

Tehát

$$\begin{aligned} S &= (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) + (\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x) + (\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{ctg}^3 x) = \\ &= \frac{2}{p^2 - 1} + \frac{4}{(p^2 - 1)^2} - 2 + \frac{8}{(p^2 - 1)^3} - 3 \cdot \frac{2}{p^2 - 1} = \\ &= -\frac{4}{p^2 - 1} + \frac{4}{(p^2 - 1)^2} + \frac{8}{(p^2 - 1)^3} - 2. \end{aligned}$$

20. Igazold, hogy

$$\text{a) } \sin^4 x + \cos^4 x \geq \frac{1}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

$$\text{b) } \sin^6 x + \cos^6 x \geq \frac{1}{4}, \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

$$\text{c)} \left| \frac{1 - \sin 2x}{\sin x - \cos x} \right| \leq \sqrt{2}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bizonyítás. a) A számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget használjuk, a $\sin^2 x$ és $\cos^2 x$ pozitív vagy 0 valós számokra, $x \in \mathbb{R}$.

$$\frac{1}{x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{2} \geq \sqrt{\sin^2 x \cos^2 x},$$

ahonnan négyzetreemeléssel

$$\frac{1}{4} \geq \sin^2 x \cos^2 x. \quad (*)$$

A kapott egyenlőtlenség rendre ekvivalens a következőkkel:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \geq 2 \sin^2 x \cos^2 x &\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2} \leq 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} &\leq (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \sin^4 x + \cos^4 x, \end{aligned}$$

ami, éppen a bizonyítandó egyenlőtlenség.

b) Az előző alpontban már igazoltuk, hogy $\sin^4 x + \cos^4 x \geq \frac{1}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Ez az egyenlőtlenség a következő alakban is írható:

$$\begin{aligned} (\sin^4 x + \cos^4 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) &\geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin^6 x + \cos^6 x + \sin^4 x \cos^2 x + \cos^4 x \sin^2 x &\geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin^6 x + \cos^6 x + 1 \cdot \sin^2 x \cos^2 x &\geq \frac{1}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (**) \end{aligned}$$

A (*) egyenlőtlenség szerint $\sin^2 x \cos^2 x \leq \frac{1}{4}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, tehát a (**) egyenlőtlenségben $\sin^2 x \cos^2 x$ -et $\frac{1}{4}$ -re növelhetjük, vagyis

$$\sin^6 x + \cos^6 x + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin^6 x + \cos^6 x \geq \frac{1}{4}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

c) Azt kell bizonyítanunk, hogy $\left| \frac{1 - \sin 2x}{\sin x - \cos x} \right| \leq \sqrt{2} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus I$, ahol $I = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

$$\begin{aligned} \left| \frac{1 - \sin 2x}{\sin x - \cos x} \right| &= \left| \frac{\sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x}{\sin x - \cos x} \right| = \left| \frac{(\sin x - \cos x)^2}{\sin x - \cos x} \right| = |\sin x - \cos x| = \\ &= \left| \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \sin x - \sin \frac{\pi}{4} \cos x \right) \right| = \sqrt{2} \left| \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \right| \leq \sqrt{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus I. \end{aligned}$$

21. Igazold, hogy $(\cos a + \cos b)^2 + (\sin a + \sin b)^2 = 4 \cos^2 \frac{a-b}{2}$, majd oldd meg $a(\sin a + \sin b)x^2 - 2(\cos a + \cos b)x - \sin a - \sin b = 0$ egyenletet. x_1 -gyel és x_2 -vel jelölve a fenti egyenlet gyökeit, számítsd ki az $a+b$ értékét, ha $x_1^2 + x_2^2 = 2$ (a és b a másodfokú egyenlet együtthatóit jelöli a szokásos jelöléssel).

Bizonyítás. Alkalmazzuk a $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$ és

$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$ képleteket. Tehát.

$$\begin{aligned} (\cos a + \cos b)^2 + (\sin a + \sin b)^2 &= 4 \cos^2 \frac{a+b}{2} \cos^2 \frac{a-b}{2} + 4 \sin^2 \frac{a+b}{2} \cos^2 \frac{a-b}{2} = \\ &= 4 \cos^2 \frac{a-b}{2} \left(\cos^2 \frac{a+b}{2} + \sin^2 \frac{a+b}{2} \right) = 4 \cos^2 \frac{a-b}{2}. \end{aligned}$$

Oldjuk meg a $(\sin a + \sin b)x^2 - 2(\cos a + \cos b)x - (\sin a + \sin b) = 0$ egyenletet:

Ha $\sin a + \sin b \neq 0$, akkor

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{\cos a + \cos b \pm \sqrt{(\cos a + \cos b)^2 + (\sin a + \sin b)^2}}{\sin a + \sin b} = \\ &= \frac{\cos a + \cos b \pm 2 \left| \cos \frac{a-b}{2} \right|}{\sin a + \sin b} = \\ &= \frac{\cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \pm \cos \frac{a-b}{2}}{\sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}} = \frac{\cos \frac{a+b}{2} \pm 1}{\sin \frac{a+b}{2}}. \end{aligned}$$

$$\text{Tehát } x_1 = \frac{1 + \cos \frac{a+b}{2}}{\sin \frac{a+b}{2}} \text{ és } x_2 = \frac{-1 + \cos \frac{a+b}{2}}{\sin \frac{a+b}{2}}.$$

Mivel $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = s^2 - 2p$, a Viète-összefüggések alapján

$$\frac{2(\cos a + \cos b)^2}{(\sin a + \sin b)} - 2 \cdot \frac{(\sin a + \sin b) \cdot (-1)}{\sin a + \sin b} = 2.$$

$$\left(s = \frac{2(\cos a + \cos b)^2}{(\sin a + \sin b)}; \quad p = \frac{-\sin a - \sin b}{\sin a + \sin b} \right)$$

Tehát $(\cos a + \cos b)^2 = 0$, vagyis $\cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} = 0$.

22. Határozd meg az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x$ függvény maximumát és minimumát.

Megoldás. Észrevesszük, hogy

$$f(x) = 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{6} \sin 2x - \sin \frac{\pi}{6} \cos 2x \right) = 2 \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right).$$

Tehát f maximuma 2 és minimuma -2 .

23. Ha $\sin 2(a + c) = n \sin 2b$, akkor igazold, hogy

$$\operatorname{tg}(a + b + c) = \frac{n + 1}{n - 1} \operatorname{tg}(a - b + c). \quad (1)$$

Bizonyítás. A feladatnak nyilván akkor van értelme, ha a tangensek értelmezettek és $n \neq 1$.

Abban az esetben, ha $\sin 2b = 0$, akkor $\sin 2(a + c) = 0$, tehát

$$\sin 2b + \sin 2(a + c) = 2 \sin(a + b + c) \cos(a + c - b) = 0 \text{ és}$$

$$-\sin 2b + \sin 2(a + c) = 2 \sin(a - b + c) \cos(a + b + c) = 0,$$

és (mivel a tangensek értelmezettek) következik, hogy

$$\sin(a + b + c) = \sin(a - b + c) = 0 = \operatorname{tg}(a + b + c) - \operatorname{tg}(a - b + c).$$

Tehát fennáll az (1) egyenlőség.

Feltételezhetjük, hogy $\sin 2b \neq 0$, ezért

$$n = \frac{\sin 2(a + c)}{\sin 2b} \text{ és}$$

$$n + 1 = \frac{\sin 2(a + c) + \sin 2b}{\sin 2b} = \frac{2 \sin(a + b + c) \cos(a + c - b)}{\sin 2b}.$$

Továbbá

$$n - 1 = \frac{\sin 2(a + c) - \sin 2b}{\sin 2b} = \frac{2 \sin(a - b + c) \cos(a + b + c)}{\sin 2b},$$

tehát

$$\frac{n + 1}{n - 1} = \frac{\sin(a + b + c)}{\cos(a + b + c)} \cdot \frac{\cos(a - b + c)}{\sin(a - b + c)} = \frac{\operatorname{tg}(a + b + c)}{\operatorname{tg}(a - b + c)}.$$

Így az állítást igazoltuk.

24. Bizonyítsd be, hogy igazak az alábbi ekvivalenciák:

$$\frac{\sin(a + b)}{\sin(a - b)} = \frac{\sin(c + d)}{\sin(c - d)} \Leftrightarrow \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} b} = \frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} d} \Leftrightarrow \frac{\cos(a + d)}{\cos(a - d)} = \frac{\cos(c + b)}{\cos(c - b)}.$$

Megoldás. Hamis! Attól, hogy $\sin(a - b)$ és $\sin(c - d)$ nem nulla, $\cos a$, vagy $\cos c$, stb. Lehet nulla!

Ha eltekintünk ettől, a megoldás a következő:

$$\frac{\sin(a + b)}{\sin(a - b)} = \frac{\sin(c + d)}{\sin(c - d)} \Leftrightarrow \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\sin a \cos b - \cos a \sin b} = \frac{\sin c \cos d + \cos c \sin d}{\sin c \cos d - \cos c \sin d}.$$

Aránypárok származtatásával rendre a következő, az előzővel ekvivalens összefüggéseket kapjuk:

$$\begin{aligned} \frac{2 \sin a \cos b}{\sin a \cos b - \cos a \sin b} &= \frac{2 \sin c \cos d}{\sin c \cos d - \cos c \sin d} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\sin a \cos b}{-\cos a \sin b} &= \frac{\sin c \cos d}{-\cos c \sin d} \Leftrightarrow \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} b} = \frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} d}. \end{aligned}$$

Igazoljuk a $\frac{\cos(a+d)}{\cos(a-d)} = \frac{\cos(c+b)}{\cos(c-b)} \Leftrightarrow \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} b} = \frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} d}$ ekvivalenciát:

$$\frac{\cos(a+d)}{\cos(a-d)} = \frac{\cos(c+b)}{\cos(c-b)} \Leftrightarrow \frac{\cos a \cos d - \sin a \sin d}{\cos a \cos d + \sin a \sin d} = \frac{\cos c \cos b - \sin c \sin b}{\cos c \cos b + \sin c \sin b}.$$

Hasonlóan az előző megoldáshoz, az előbbi egyenlőség ekvivalens a következővel:

$$\begin{aligned} \frac{\cos a \cos d}{\sin a \sin d} &= \frac{\cos c \cos b}{\sin c \sin b} \Leftrightarrow \frac{\cos a \sin b}{\cos a \cos b} = \frac{\cos c \sin d}{\sin c \cos d} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a} &= \frac{\operatorname{tg} d}{\operatorname{tg} c} \Leftrightarrow \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} b} = \frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} d} \end{aligned}$$

Megjegyzés. Természetesen csak akkor állnak az ekvivalenciák, ha a nevezőkben megjelenő kifejezések nem lehetnek nullák.

25. Bizonyítsd be, hogy $\cos \frac{3\pi}{5} = -\cos \frac{2\pi}{5}$, majd számítsd ki $\cos \frac{\pi}{5}$ -öt és igazold a

$$\cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2} \text{ egyenlőséget.}$$

Bizonyítás. $\cos(\pi - x) = \cos \pi \cos x + \sin \pi \sin x = -\cos x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, tehát

$$\cos \frac{3\pi}{5} = \cos \left(\pi - \frac{2\pi}{5} \right) = -\cos \frac{2\pi}{5}.$$

A $\cos \frac{\pi}{5}$ értékét két lépésben számoljuk ki: előbb kiszámoljuk $\sin \frac{\pi}{10}$ -et, majd utána a

$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$ képletet használva megkapjuk $\cos \frac{\pi}{5}$ -öt.

$$\sin \frac{2\pi}{10} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{10} \right) = \cos \frac{3\pi}{10} \Rightarrow 2 \sin \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi}{10} = 4 \cos^3 \frac{\pi}{10} - 3 \cos \frac{\pi}{10},$$

és mivel $\cos \frac{\pi}{10} \neq 0$, kapjuk, hogy

$$2 \sin \frac{\pi}{10} = 4 \cos^2 \frac{\pi}{10} - 3, \text{ vagyis } 2 \sin \frac{\pi}{10} = 4 - 4 \sin^2 \frac{\pi}{10} - 3$$

ahonnan a

$$4 \sin^2 \frac{\pi}{10} + 2 \sin \frac{\pi}{10} - 1 = 0$$

egyenletet kapjuk. Tehát $\sin \frac{\pi}{10} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$, vagy $\sin \frac{\pi}{10} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}$ és mivel

$\sin \frac{\pi}{10} > 0$, következik, hogy $\sin \frac{\pi}{10} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$.

Tehát $\cos \frac{\pi}{5} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{10} = 1 - 2 \cdot \frac{6 - 2\sqrt{5}}{16} = 1 - \frac{3 - \sqrt{5}}{4} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$.

Számítsuk ki $\cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5}$ értékét:

$$\begin{aligned} \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} &= 2 \cos \frac{6\pi}{10} \cos \frac{2\pi}{10} = -2 \cos \frac{2\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5} = \\ &= -2 \left(2 \cos^2 \frac{\pi}{5} - 1 \right) \cos \frac{\pi}{5} = -2 \left(2 \frac{6 + 2\sqrt{5}}{16} - 1 \right) \frac{\sqrt{5} + 1}{4} = \\ &= -2 \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \cdot \frac{\sqrt{5} + 1}{4} = -2 \cdot \frac{4}{16} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

26. Bizonyítsd be, hogy $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}(\alpha + 60^\circ) + \operatorname{tg}(\alpha + 120^\circ) = 3 \operatorname{tg} 3\alpha$.

Bizonyítás. Alkalmazzuk a $\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b}$ képletet az $a = \alpha + 60^\circ$ és

$b = \alpha + 120^\circ$ értékekre:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha + 60^\circ) + \operatorname{tg}(\alpha + 120^\circ) &= \operatorname{tg}(\alpha + 60^\circ) + \operatorname{tg}(\alpha - 60^\circ) = \\ &= \frac{\sin 2\alpha}{\cos(\alpha + 60^\circ) \cos(\alpha - 60^\circ)} = \frac{\sin 2\alpha}{\frac{\cos 2\alpha + \cos 120^\circ}{2}} = \frac{2 \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha - \frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Tehát

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}(\alpha + 60^\circ) + \operatorname{tg}(\alpha + 120^\circ) &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{2 \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha - \frac{1}{2}} = \\ &= \frac{\sin \alpha \cos 2\alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha + 2 \sin 2\alpha \cos \alpha}{\cos \alpha \cos 2\alpha - \frac{1}{2} \cos \alpha} = \frac{\sin 3\alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha + \sin 2\alpha \cos \alpha}{\cos 3\alpha - \frac{1}{2} \cos \alpha + \sin 2\alpha \sin \alpha} = \\ &= \frac{\sin 3\alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{\sin 3\alpha + \sin \alpha}{2}}{\cos 3\alpha - \frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{\cos \alpha - \cos 3\alpha}{2}} = \frac{2 \sin 3\alpha}{\cos 3\alpha} = 3 \cdot \operatorname{tg} 3\alpha. \end{aligned}$$

Megjegyzés. A következő képleteket alkalmaztuk:

$$\sin a \cos b = \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2}; \quad \cos a \cos b = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2};$$

$$\sin a \sin b = \frac{\sin(a-b) - \cos(a+b)}{2}; \quad \sin 3\alpha = \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha;$$

$$\cos 3\alpha = \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha.$$

27. Bizonyítsd be, hogy ha egy háromszögben $a \sin B + b \sin A = 2c \sin C$ és $b \sin C + c \sin B = 2a \sin A$, akkor az ABC_Δ egyenlő oldalú.

Bizonyítás. Mivel $A, B, C \in (0, \pi)$, következik, hogy $\sin A, \sin B, \sin C$ nem lehetnek nullával egyenlők. Osszuk el az első egyenletet $\sin B \sin A$ -val, a másodikat pedig $\sin C \sin B$ -vel. Kapjuk, hogy

$$\frac{a}{\sin A} + \frac{b}{\sin B} = 2c \frac{\sin C}{\sin A \sin B}; \quad \frac{b}{\sin B} + \frac{c}{\sin C} = 2a \frac{\sin A}{\sin B \sin C}.$$

Viszont a szinusztétel alapján $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, ezért a fenti egyenlőségek a következőképpen alakulnak:

$$\frac{1}{\sin C} = \frac{\sin C}{\sin A \sin B} \Leftrightarrow \sin^2 C = \sin A \sin B; \quad (1)$$

$$\frac{1}{\sin A} = \frac{\sin A}{\sin B \sin C} \Leftrightarrow \sin^2 A = \sin B \sin C. \quad (2)$$

(1) és (2)-ből következik, hogy $\sin^2 B = \sin A \sin C$. (3)

Összeadva az (1), (2) és (3) egyenlőségeket, kapjuk, hogy

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = \sin A \sin B + \sin B \sin C + \sin C \sin A \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sin A - \sin B)^2 + (\sin B - \sin C)^2 + (\sin C - \sin A)^2 = 0,$$

tehát $\sin A = \sin B = \sin C$, és háromszög esetében ez azt jelenti, hogy $A = B = C = 60^\circ$, vagyis a háromszög egyenlő oldalú.

28. Bizonyítsd be, hogy ha egy háromszögben $b \cos C = c \cos B$, akkor a háromszög egyenlő szárú.

Bizonyítás. Írjuk fel a koszinusztételt a b és c oldalakra:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B; \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

Most fejezzük ki a fenti összefüggésekből $c \cdot \cos B$ -t illetve $b \cdot \cos C$ -t:

$$c \cdot \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}; \quad b \cdot \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}.$$

A feltétel szerint $\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$, vagyis $b^2 = c^2$, és mivel b és c pozitív számok (egy háromszög oldalainak hossza), következik, hogy $b = c$. Tehát a háromszög egyenlő szárú.

29. Bizonyítsd be, hogy ha egy háromszögben $b^2 + 2ac \cos B = a^2 + 2bc \cos A$, akkor a háromszög egyenlő szárú.

Bizonyítás. A koszinusztételből kapjuk, hogy

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \text{ illetve } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

A fentiekből következik, hogy

$$b^2 + 2ac \cos B = a^2 + c^2 \quad \text{és} \quad a^2 + 2bc \cos A = b^2 + c^2,$$

tehát a feltétel szerint $a^2 + c^2 = b^2 + c^2$, vagyis $a = b$, mert a és b pozitívak.

30. Bizonyítsd be, hogy ha egy háromszögben $a \cos A = c \cos B$, akkor az ABC_Δ egyenlő szárú vagy derékszögű.

Bizonyítás. A koszinusztétel alapján

$$a \cos A - b \cos B = \frac{a^2(b^2 + c^2 - a^2) - b^2(a^2 + c^2 - b^2)}{2abc} = \frac{(a^2 - b^2)(c^2 - a^2 - b^2)}{2abc}.$$

Tehát, ha $a \cos A - b \cos B = 0$, akkor $a^2 = b^2$ vagy $c^2 = a^2 + b^2$.

31. Bizonyítsd be, hogy ha egy háromszögben $\cos B + \cos C = \frac{b+c}{a}$, akkor az ABC_Δ derékszögű.

Bizonyítás. A koszinusztételből kifejezzük $\cos B$ -t és $\cos C$ -t:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}; \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

A feltétel szerint $\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{b+c}{a}$, vagyis

$$(a^2 + c^2 - b^2) \cdot b + (a^2 + b^2 - c^2) \cdot c = (b+c) \cdot 2bc.$$

Elvégezve a műveleteket, kapjuk, hogy

$$a^2b + a^2c - b^3 - c^3 - b^2c - c^2b = 0 \Leftrightarrow$$

$$a^2(b+c) - (b+c)(b^2 - bc + c^2) - bc(b+c) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(b+c)(a^2 - b^2 - c^2) = 0.$$

Mivel b és c pozitív valós számok, a fenti egyenlőségből az $a^2 = b^2 + c^2$ egyenlőség következik, tehát az ABC_Δ derékszögű.

32. Bizonyítsd be, hogy ha egy háromszögben $\frac{b+c}{a} = \frac{h_a}{l_a} = \sqrt{2}$, akkor az ABC_Δ derékszögű.

Bizonyítás. Az $l_a = 2 \frac{bc}{b+c} \cos \frac{A}{2}$ és $h_a = \frac{bc \sin A}{a}$ összefüggések alapján:

$$\frac{h_a}{l_a} = \frac{b+c}{a} \sin \frac{A}{2}.$$

Tehát az adott egyenlőségből $\sin \frac{A}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ és így $m(\hat{A}) = 90^\circ$.

33. Bizonyítsd be, hogy ha egy háromszögben $\frac{b^3 + c^3 - a^3}{b+c-a} = a^2$, akkor $m(\hat{A}) = 60^\circ$.

Bizonyítás. A koszinusztételből és a feltételből következik, hogy

$$\frac{b^3 + c^3 - a^3}{b + c - a} = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

vagyis

$$b^3 + c^3 - a^3 = b^3 + c^2b - 2b^2c \cos A + b^2c + c^3 - 2bc^2 \cos A - ab^2 - ac^2 + 2abc \cos A$$

,
tehát

$$a^3 + c^2b + b^2c - ab^2 - ac^2 + 2abc \cos A - 2bc^2 \cos A - 2b^2c \cos A = 0.$$

Kiemelve a -t az öt tartalmazó tagokból kapjuk, hogy

$$a(a^2 - b^2 - c^2 + 2bc \cos A) + b^2c + c^2b - 2 \cos A(b^2c + bc^2) = 0,$$

tehát $(b^2c + c^2b)(1 - 2 \cos A) = 0$.

Mivel $b^2c + c^2b > 0$, következik, hogy $\cos A = \frac{1}{2}$ és mert $A \in (0, \pi)$, következik,

hogy $m(\hat{A}) = 60^\circ$.

34. Bizonyítsd be, hogy ha egy háromszögben $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$, akkor

$m(\hat{B}) = 60^\circ$.

Bizonyítás. Szorozzuk be a fenti összefüggést $(a+b)(b+c)(a+b+c)$ -vel.

Kapjuk, hogy:

$$(a+2b+c) \cdot (a+b+c) = 3(ab+ac+bc+b^2) \Leftrightarrow$$

$$a^2 + 2ab + ac + ab + 2b^2 + bc + ac + 2bc + c^2 = 3ab + 3ac + 3bc + 3b^2,$$

vagyis $b^2 = a^2 + c^2 - ac$.

Viszont a koszinusztétel alapján $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$, tehát $\cos B = \frac{1}{2}$ és

$m(\hat{B}) = 60^\circ$.

35. Bizonyítsd be, hogy ha egy háromszögben $(b+c)a = b^2 + c^2$ és $b+c = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$,

akkor $m(\hat{A}) = 30^\circ$.

Bizonyítás. Kiszámítjuk $b^2 + c^2$ -et és $2bc$ -t a függvényében:

$$b^2 + c^2 = (b+c) \cdot a = \frac{2\sqrt{3}}{3}a^2,$$

továbbá

$$(b+c)^2 - (b^2 + c^2) = 2bc = \frac{4}{3}a^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}a^2 = a^2 \cdot \frac{4-2\sqrt{3}}{3}.$$

A koszinusztétel alapján

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

és behelyettesítve a $b^2 + c^2$ illetve $2bc$ értékeit, kapjuk, hogy

$$a^2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}a^2 - a^2 \cdot \frac{4-2\sqrt{3}}{3} \cos A,$$

tehát $\cos A = \left(1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \cdot \frac{3}{2\sqrt{3}-4} = \frac{3-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Következik, hogy $m(\hat{A}) = 30^\circ$.

36. Bizonyítsd be, hogy ha egy háromszögben $b^2 + c^2 = 2a^2$, akkor $m(\hat{A}) \leq 60^\circ$.

Bizonyítás. A koszinusztétel felhasználásával a feltételből következik, hogy $a^2 = 2bc \cos A$, vagyis $\cos A = \frac{a^2}{2bc} > 0$ és mivel $0^\circ < A < 180^\circ$, következik, hogy $0^\circ < A < 90^\circ$ (a koszinusz pozitív).

Ugyancsak a feltételből írhatjuk, hogy $a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} \geq \sqrt{b^2 c^2} = bc$, tehát

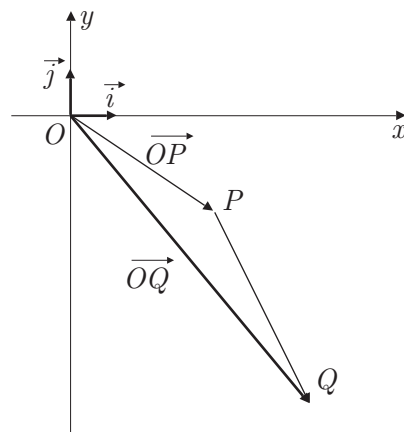
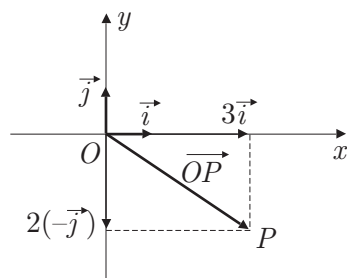
$$\cos A \geq \frac{bc}{2bc} = \frac{1}{2}.$$

Mivel a koszinuszfüggvény a $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumon szigorúan csökkenő és $\cos 60^\circ = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, a fenti egyenlőségből következik, hogy $m(\hat{A}) \leq 60^\circ$.

37. Tekintsük az O kezdőpontú, $\vec{i}$ és $\vec{j}$ egymásra merőleges egységvektorokkal megadott koordináta-rendszert. Határozzuk meg a P és Q pontok koordinátáit ebben a koordináta-rendszerben, ha tudjuk hogy

$$\overrightarrow{OP} = 3\vec{i} - 2\vec{j} \text{ és } \overrightarrow{PQ} = 2\vec{i} - 4\vec{j}.$$

Megoldás. Rajzoljuk le a koordináta-rendszert:



Mivel $\overrightarrow{OP} = 3\vec{i} - 2\vec{j} = 3\vec{i} + 2 \cdot (-\vec{j})$, a paralelogramma szabály szerint megkapjuk a P pontot a $3\vec{i}$ és $2(-\vec{j})$ vektorokból. Tehát a P pont koordinátái $P(3, 2)$.

Most tételezzük fel, hogy ismerjük a Q pont helyét.

Mivel $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}$, következik, hogy $\overrightarrow{OQ} = 5\vec{i} - 6\vec{j}$, tehát a Q pont koordinátái $Q(5, -6)$.

X.2. Összefoglaló feladatok (224. oldal)

1. Bizonyítsd be, hogy

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}(\alpha + 20^\circ) + \operatorname{tg}(\alpha + 40^\circ) + \operatorname{tg}(\alpha + 60^\circ) + \dots + \operatorname{tg}(\alpha + 160^\circ) = 9 \operatorname{tg} 9\alpha.$$

Bizonyítás. A 26. gyakorlat alapján:

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}(\alpha + 60^\circ) + \operatorname{tg}(\alpha + 120^\circ) = 3 \operatorname{tg}(3\alpha)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + 20^\circ) + \operatorname{tg}(\alpha + 80^\circ) + \operatorname{tg}(\alpha + 140^\circ) = 3 \operatorname{tg}(3\alpha + 60^\circ) \text{ és}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + 40^\circ) + \operatorname{tg}(\alpha + 100^\circ) + \operatorname{tg}(\alpha + 160^\circ) = 3 \operatorname{tg}(3\alpha + 120^\circ)$$

$$\text{tehát } \sum_{k=0}^8 \operatorname{tg}(\alpha + 20^\circ \cdot k) = 3(\operatorname{tg} 3\alpha + \operatorname{tg}(3\alpha + 60^\circ) + \operatorname{tg}(3\alpha + 120^\circ)) = 9 \operatorname{tg} 9\alpha$$

2. Bizonyítsd be, hogy $\cos \frac{8\pi}{35} + \cos \frac{12\pi}{35} + \cos \frac{18\pi}{35} = \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{5} + \frac{\sqrt{7}}{2} \sin \frac{\pi}{5}$.

Bizonyítás. A feladat a Kvant nevű folyóirat 4/1982-es számában jelent meg.

3. Bizonyítsd be, hogy $\operatorname{tg} \frac{\pi}{24} = (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{3} - \sqrt{2})$.

Bizonyítás. Előbb kiszámoljuk $\sin \frac{\pi}{12}$ és $\cos \frac{\pi}{12}$ értékét:

$$\sin \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \text{ és}$$

$$\cos \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

A $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ képlet alapján:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\pi}{24} &= \frac{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}{1 + \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4 + \sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})(4 + \sqrt{2} - \sqrt{6})}{(4 + \sqrt{2})^2 - 6} = \\ &= \frac{4\sqrt{6} + 2\sqrt{3} - 6 - 4\sqrt{2} - 2 + 2\sqrt{3}}{12 + 8\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{6} + 4\sqrt{3} - 4\sqrt{2} - 8}{12 + 8\sqrt{2}} = \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{3} - \sqrt{2} - 2}{3 + 2\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{6} + \sqrt{3} - \sqrt{2} - 2)(3 - 2\sqrt{2})}{9 - 8} = \\ &= (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{3} - \sqrt{2}). \end{aligned}$$

4. Bizonyítsd be, hogy $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{24} = \sqrt{6} + \sqrt{3} - \sqrt{2} - 2$.

Bizonyítás. $1 = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \operatorname{tg} \left(\frac{5\pi}{24} + \frac{\pi}{24} \right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{5\pi}{24} + (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{1 - \operatorname{tg} \frac{5\pi}{24} (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{3} - \sqrt{2})} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 1 - \operatorname{tg} \frac{5\pi}{24} (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = \operatorname{tg} \frac{5\pi}{24} + (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{3} - \sqrt{2}).$$

Tehát $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{24} = \frac{1 - (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{1 + (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{3} - \sqrt{2})}$, és a műveletek elvégzése után megkapjuk a kívánt eredményt.

5. Hasonlítsd össze a $\cos 36^\circ$ és $\operatorname{tg} 36^\circ$ értékeket.

Megoldás. $36^\circ = \frac{\pi}{5} \text{ rad}$ és az X.1.25 feladatban megmutattuk, hogy

$$\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$

Igazoljuk, hogy $\cos \frac{\pi}{5} > \operatorname{tg} \frac{\pi}{5}$, vagyis $\cos^2 \frac{\pi}{5} > \sin \frac{\pi}{5}$. Mivel $\cos \frac{\pi}{5} > 0$ és $\sin \frac{\pi}{5} > 0$, a fenti egyenlőtlenség egyenértékű a $\cos^4 \frac{\pi}{5} > 1 - \cos^2 \frac{\pi}{5}$ egyenlőtlenséggel. Ez az egyenlőtlenség a következő alakban is írható:

$$\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4} \right)^4 > 1 - \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4} \right)^2 \Leftrightarrow 56 + 24\sqrt{5} > 160 - 32\sqrt{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 56\sqrt{5} > 104 \Leftrightarrow 28\sqrt{5} > 57 \quad (1)$$

Mivel $\sqrt{5} > 2,2$, következik, hogy $28\sqrt{5} > 28 \cdot 2,2 = 61,6 > 57$, tehát az (1) egyenlőtlenség igaz, ezért a $\cos 36^\circ > \operatorname{tg} 36^\circ$ egyenlőtlenség is igaz.

6. Bizonyítsd be, hogy $\operatorname{tg} 55^\circ > 1,4$.

Bizonyítás. A $\operatorname{tg} 55^\circ = \operatorname{tg}(45^\circ + 10^\circ) = \frac{1 + \operatorname{tg} 10^\circ}{1 - \operatorname{tg} 10^\circ}$ egyenlőség alapján a bizonyítandó egyenlőtlenség ekvivalens a $\operatorname{tg} 10^\circ > \frac{1}{6}$ egyenlőtlenséggel.

Ha $\operatorname{tg} 10^\circ \leq \frac{1}{6}$, akkor a $\operatorname{tg} 3x = \frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x}$ összefüggés és az $u : \left[0, \frac{1}{6} \right] \rightarrow \mathbb{R}$,

$u(x) = 3u - u^3$ függvény monotonitása alapján (u szigorúan növekvő) a

$$\operatorname{tg} 30^\circ \leq \frac{3 \cdot \frac{1}{6} - \frac{1}{6^3}}{1 - 3 \cdot \frac{1}{6^2}} = \frac{107}{6 \cdot 33} \text{ egyenlőtlenséghez jutunk.}$$

Másrészt $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ és $\frac{\sqrt{3}}{3} > \frac{107}{6 \cdot 33}$. A kapott ellentmondás alapján $\operatorname{tg} 55^\circ > 1,4$.

7. Bizonyítsd be, hogy $\operatorname{tg} 11^\circ < 0,2$.

Bizonyítás. Ha $\operatorname{tg} 11^\circ > \frac{1}{5}$, akkor a $\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$ egyenlőtlenség alapján kö-

vetkezik, hogy $\operatorname{tg} 22^\circ > \frac{2 \cdot \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{5}{12}$.

Másrészt $\operatorname{tg} 22^\circ 33' > \operatorname{tg} 22^\circ$ és $\operatorname{tg} 22^\circ 30' = \sqrt{2} - 1$, tehát $\sqrt{2} > \frac{17}{12}$.

Ez ellentmondás, mert $2 \cdot 12^2 < 17^2$ ($288 < 289$), tehát $\operatorname{tg} 11^\circ < \frac{1}{5}$.

8. Bizonyítsd be, hogy bármely $x_1, x_2, x_3 \in [0, \pi]$ esetén

$$\sqrt{1 - \cos(x_3 - x_2)} + \sqrt{1 - \cos(x_2 - x_1)} \geq \sqrt{1 - \cos(x_3 - x_1)}.$$

Bizonyítás. Ha $x_1 \leq x_2 \leq x_3$, akkor az egyenlőtlenség

$$\sin \frac{x_3 - x_2}{2} + \sin \frac{x_2 - x_1}{2} \geq \sin \frac{x_3 - x_1}{2} \text{ alakban írható.}$$

Ha $x_1, x_2, x_3 \in [0, \pi]$, akkor az $a = \frac{x_3 - x_2}{2}$ és $b = \frac{x_2 - x_1}{2}$ jelöléssel $a, b \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

így $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{|a-b|}{2} \geq 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a+b}{2}$ mivel

$\frac{|a-b|}{2} < \frac{a+b}{2}$. Más sorrend esetén is hasonló a bizonyítás.

9. Bizonyítsd be, hogy bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén $\sin(\sin^2 x) + \cos(\cos^2 x) > \frac{1}{2}$.

Bizonyítás. $E = \sin(\sin^2 x) + \cos(\cos^2 x) = \sin(\sin^2 x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \cos^2 x\right) =$

$$= 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\cos 2x}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right).$$

De $0 < \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \leq \frac{\pi}{4} - \frac{\cos 2x}{2} \leq \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} < \frac{\pi}{2}$

és így $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\cos 2x}{2}\right) \geq \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)$,

tehát $E \geq 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \cos 1$.

Másrészt $0 < 1 < \frac{\pi}{3}$, tehát $\cos 1 > \cos \frac{\pi}{3}$ és így $E > \frac{1}{2}$.

10. Bizonyítsd be, hogy $\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{13} + \operatorname{tg}^2 \frac{3\pi}{13} + \operatorname{tg}^2 \frac{4\pi}{13} = 39 - 10\sqrt{13}$.

Bizonyítás. Az $E = \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{13} + \operatorname{tg}^2 \frac{3\pi}{13} + \operatorname{tg}^2 \frac{4\pi}{13}$ kifejezés a következőképpen

alakítható (a $\frac{\pi}{13} = \alpha$ jelölést használjuk):

$$\begin{aligned} E &= (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) + (1 + \operatorname{tg}^2 3\alpha) + (1 + \operatorname{tg}^2 4\alpha) - 3 = \\ &= \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 3\alpha} + \frac{1}{\cos^2 4\alpha} - 3 = \frac{2}{1 + \cos 2\alpha} + \frac{2}{1 + \cos 6\alpha} + \frac{2}{1 + \cos 8\alpha} - 3 = \\ &= -3 + \frac{4[(\cos 6\alpha + \cos 10\alpha + \cos 14\alpha) + 5(\cos 2\alpha + \cos 6\alpha + \cos 8\alpha) + 6]}{\cos 16\alpha + 2\cos 14\alpha + \cos 12\alpha + 2\cos 10\alpha + 6\cos 8\alpha + 6\cos 6\alpha + 3\cos 4\alpha + 6\cos 2\alpha + 5} = \\ &= -3 + 4 \cdot \frac{6 + 5S_2 - S_1}{5 + 6S_2 - 3S_1}, \text{ ahol } S_2 = \cos 2\alpha - \cos 5\alpha + \cos 6\alpha \text{ és} \end{aligned}$$

$$S_1 = \cos \alpha + \cos 3\alpha - \cos 4\alpha.$$

Ha $S = S_2 - S_1$, akkor

$$\begin{aligned} S &= \cos 2\alpha - \cos 5\alpha + \cos 6\alpha - \cos \alpha - \cos 3\alpha + \cos 4\alpha = \\ &= \cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cos 6\alpha - \cos 5\alpha - \cos 3\alpha - \cos \alpha = \\ &= \cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cos 6\alpha + \cos 8\alpha + \cos 10\alpha + \cos 12\alpha = \\ &= \frac{\sin 13\alpha - \sin \alpha}{2 \sin \alpha} = -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

mert $\sin 13\alpha = 0$ és $\sin \alpha \neq 0$.

Ugyanakkor:

$$\begin{aligned} S_1 &= \cos \alpha + \cos 3\alpha - \cos 4\alpha = -\cos 4\alpha - \cos 10\alpha - \cos 12\alpha = \\ &= -S + \cos 2\alpha + \cos 6\alpha + \cos 8\alpha = \frac{1}{2} + \cos 2\alpha + \cos 6\alpha + \cos 8\alpha. \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy:

$$\begin{aligned} 2S_1 &= 4(\cos^2 \alpha + \cos^2 3\alpha + \cos^2 4\alpha) - 5 = \\ &= 4[(\cos \alpha + \cos 3\alpha - \cos 4\alpha)^2 - 2\cos 3\alpha \cos \alpha + 2\cos 4\alpha \cos \alpha + \\ &\quad + 2\cos 4\alpha \cos 3\alpha] - 5 = \\ &= 4(S_1^2 - \cos 4\alpha - \cos 2\alpha + \cos 5\alpha + \cos 3\alpha + \cos 7\alpha + \cos \alpha) - 5 = \\ &= 4[S_1^2 - (\cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cos 6\alpha + \cos 8\alpha + \cos 10\alpha + \cos 12\alpha)] - 5 \end{aligned}$$

Így S_1 gyöke a $4S_1^2 - 2S_1 - 3 = 0$ egyenletnek, tehát $S_1 = \frac{1 + \sqrt{13}}{4}$ (mivel $S_1 > 0$)

Ebből következik, hogy $S_2 = \frac{\sqrt{13}-1}{4}$ és így

$$E = 4 \cdot \frac{6 + 5S_2 - S_1}{5 + 6S_2 - 3S_1} - 3 = 39 - 10\sqrt{13}.$$

11. Bizonyítsd be, hogy $2 \cos \frac{\pi}{2^n} = \sqrt{2 + \underbrace{\sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}_{n-1 \text{ gyök}}}$.

Bizonyítás. Matematikai indukcióval igazoljuk az összefüggést:

$n = 2$ -re az állítás igaz, mert $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Feltételezzük, hogy $2 \cos \frac{\pi}{2^n} = \sqrt{2 + \underbrace{\sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}_{n-1 \text{ gyök}}}$,

és igazoljuk, hogy $2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} = \sqrt{2 + \underbrace{\dots + \sqrt{2}}_{n \text{ gyök}}}$.

Valóban, mivel $\cos \frac{\pi}{2^{n+1}} > 0$, alkalmazhatjuk a $\cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$ képletet, tehát

$$\cos \frac{\pi}{2^{n+1}} = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{2^n}}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{2} \underbrace{\sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}_{n-1 \text{ gyök}}}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \underbrace{\sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}_{n-1}}$$

vagyis $2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} = \sqrt{2 + \underbrace{\dots + \sqrt{2}}_{n \text{ gyök}}}$.

12. Bizonyítsd be, hogy ha $13^\circ \leq x \leq 28^\circ$, **akkor**

$$\frac{3}{2} \leq \sin^2(4x + 8^\circ) + \cos^2(4x - 82^\circ) \leq 2.$$

Bizonyítás. Ha $13^\circ \leq x \leq 28^\circ$, akkor $4x + 8^\circ \geq 60^\circ$ és $4x - 82^\circ \leq 30^\circ$, tehát

$$\sin(4x + 8^\circ) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ és } \cos(4x - 82^\circ) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Így $\sin^2(4x + 8^\circ) + \cos^2(4x - 82^\circ) \geq \frac{3}{2}.$

Másrészt $\sin^2(4x + 8^\circ) \leq 1$ és $\cos^2(4x - 82^\circ) \leq 1,$

tehát $\sin^2(4x + 8^\circ) + \cos^2(4x - 82^\circ) \leq 2.$

13. Bizonyítsd be, hogy az $x^4 - 6x^2 + 1 = 0$ egyenlet gyökei $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}$, $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{8}$, $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{8}$ és $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{8}$.

Bizonyítás. Ha $2t \in \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}$, akkor $\operatorname{tg}^2 2t = 1$. De $\operatorname{tg} 2t = \frac{2 \operatorname{tg} t}{1 - \operatorname{tg}^2 t}$, tehát $\left(\frac{2 \operatorname{tg} t}{1 - \operatorname{tg}^2 t} \right)^2 = 1$ ha $t \in \left\{ \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8} \right\}$. Ha a műveleteket elvégezzük és rendezzük az egyenletet a $\operatorname{tg}^4 t - 6 \operatorname{tg}^2 t + 1 = 0$ egyenlethez jutunk, tehát az $x^4 - 6x^2 + 1 = 0$ egyenlet gyökei: $\operatorname{tg} \frac{(2k+1)\pi}{8}$ $k = 0, 3$.

14. Bizonyítsd be, hogy ha $n \geq \frac{21}{4}$, akkor $\cos \frac{\pi}{n} > 1 - \frac{1}{n+1}$.

Bizonyítás. Mivel $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$ esetén $\sin x < x$, írhatjuk, hogy

$$1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} > 1 - 2 \left(\frac{x}{2} \right)^2 = 1 - \frac{x^2}{2},$$

viszont $\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ tehát $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$ esetén $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$. $x = \frac{\pi}{4}$ -et

helyettesítve, ha $n > 2$, kapjuk, hogy $\cos \frac{\pi}{n} > 1 - \frac{\pi^2}{2n^2}$.

Megvizsgáljuk, hogy milyen n természetes számra teljesül a $\frac{\pi^2}{2n^2} \leq \frac{1}{n+1}$

egyenlőtlenség: $\frac{\pi^2}{2n^2} \leq \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow 2n^2 \geq \pi^2(n+1) \Leftrightarrow 2n^2 - \pi^2 n - \pi^2 \geq 0$.

A másodfokú függvény tulajdonságai alapján a fenti egyenlőtlenség teljesül minden n -re, ha $n \geq \alpha$, ahol α az $2n^2 - \pi^2 n - \pi^2 = 0$ egyenlet legnagyobb

gyöke, vagyis $\alpha = \frac{\pi^2 + \sqrt{\pi^4 + 8\pi^2}}{4} \approx \frac{23,149}{4}$, tehát jobb becslésre van

szükségünk, mint a $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$.

15. Periodikus-e az $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin \sqrt{x}$ függvény? Hát a $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sin x + \cos \sqrt{2}x$?

Megoldás. Igazoljuk, hogy f nem periodikus:

Valóban, ha $T \neq 0$ egy periódusa lenne f -nek, akkor minden $x \in \mathbb{R}$ esetén kéne teljesülnön a $\sin \sqrt{x+T} = \sin \sqrt{x}$ (1) összefüggés. $x = 0$ -t helyettesítve az (1) összefüggésbe, kapjuk, hogy $\sin \sqrt{T} = 0$ vagyis $\sqrt{T} = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}^*$ alakú, tehát $T = k^2\pi^2$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Helyettesítsünk az (1) egyenletben x helyett $x = \frac{\pi^2}{4}$ -et!

Kapjuk, hogy $\sin \sqrt{\frac{\pi^2}{4} + k^2\pi} = 1$, tehát $\pi \sqrt{\frac{4k^2 + 1}{4}} = \frac{\pi}{2} + 2l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$, vagyis $\sqrt{4k^2 + 1}$ racionális kell legyen, ami lehetetlen ($k > 0$). Tehát f nem periodikus.

A g függvény sem periodikus: hasonlóan járunk el, mint az f esetében: ha T periódusa lenne g -nek ($T \neq 0$), akkor minden $x \in \mathbb{R}$ esetén kéne teljesülnön a

$$\sin(x+T) + \cos(\sqrt{2}x + \sqrt{2}T) = \sin x + \cos \sqrt{2}x \text{ összefüggés.}$$

Végezzük el az $x = 0$, $x = \pi$ és $x = \sqrt{2}\pi$ helyettesítéseket az előző egyenletben:

$$x = 0 \Rightarrow \sin T + \cos \sqrt{2}T = 1 \quad (1)$$

$$x = \pi \Rightarrow -\sin T + \cos \sqrt{2}\pi + \sqrt{2}T = \cos \sqrt{2}\pi \quad (2)$$

$$x = \sqrt{2}\pi \Rightarrow \sin(\sqrt{2}\pi + T) + \cos \sqrt{2}T = \sin \sqrt{2}\pi + 1 \quad (3)$$

A (3) összefüggésből kivonva (1)-et, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \sin(\sqrt{2}\pi + T) - \sin T &= \sin \sqrt{2}\pi, \\ 2 \cos \frac{\sqrt{2}\pi + 2T}{2} \sin \frac{\sqrt{2}\pi}{2} &= 2 \sin \frac{\sqrt{2}\pi}{2} \cos \frac{\sqrt{2}\pi}{2} \end{aligned}$$

és mert $\sin \frac{\sqrt{2}\pi}{2} \neq 0$, következik, hogy $\cos \frac{\sqrt{2}\pi + 2T}{2} = \cos \frac{\sqrt{2}\pi}{2}$, vagyis

$$\frac{\sqrt{2}\pi + 2T}{2} + \frac{\sqrt{2}\pi}{2} = 2k\pi \text{ vagy } \frac{2T}{2} = 2k\pi \text{ kell teljesülnön, ahol } k \in \mathbb{Z}.$$

1.eset: ha $T = 2k\pi$ akkor (1) alapján $\Leftrightarrow 2\sqrt{2}k\pi = 1$, vagyis $2\sqrt{2}k = 2l$, $l, k \in \mathbb{Z}$, ami lehetetlen.

2.eset: ha $T = -\sqrt{2}\pi + 2k\pi$ valamely $k \in \mathbb{Z}$ -re.

-ből következik hogy:

$$2 \cos \left(\frac{2\sqrt{2}T + \sqrt{2}\pi}{2} \right) \cos \frac{\sqrt{2}\pi}{2} = 1 + \cos \sqrt{2}\pi = 2 \cdot \frac{1 + \cos \sqrt{2}\pi}{2} = 2 \cos^2 \frac{\sqrt{2}\pi}{2},$$

és mivel $\cos \frac{\sqrt{2}\pi}{2} \neq 0$, kapjuk, hogy $\cos \frac{2\sqrt{2}T + \sqrt{2}\pi}{2} = \cos \frac{\sqrt{2}\pi}{2}$, vagyis

$$\sqrt{2}T + \sqrt{2}\pi = 2l\pi, \text{ vagy } \sqrt{2}T = 2l\pi, \text{ valamely } l \in \mathbb{Z}\text{-re. (4)}$$

Viszont $T = -\sqrt{2}\pi + 2k\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$, ezért ismét ellentmondáshoz jutottunk (viszszahelyettesítve T -t (4)-be és felhasználva, hogy $k, l \in \mathbb{Z}$). Tehát g sem periódikus.

16. Bizonyítsd be, hogy $\cos \frac{\pi}{11} - \cos \frac{2\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} - \cos \frac{4\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} = \frac{1}{2}$.

Bizonyítás. Mivel $\cos \frac{2\pi}{11} = -\cos \frac{9\pi}{11}$ és $\cos \frac{4\pi}{11} = -\cos \frac{7\pi}{11}$, a kiszámítandó összeg írható

$$S = \cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{9\pi}{11}$$

alakban. A VIII.4.1 paragrafus 2. feladata alapján

$$\cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{9\pi}{11} = \frac{\sin \frac{5\pi}{11} \cos \frac{5\pi}{11}}{\sin \frac{\pi}{11}} = \frac{\sin \frac{10\pi}{11}}{2 \sin \frac{\pi}{11}} = \frac{1}{2},$$

mert $\sin \frac{10\pi}{11} = \sin \frac{\pi}{11} \neq 0$.

17. Bizonyítsd be az alábbi egyenlőségeket, ha A , B és C egy háromszög szögeinek mértékei:

a) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C - 2 \cos A \cos B \cos C = 2$;

b) $\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} = 1 - 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$;

c) $\cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} = 2 + 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$.

Bizonyítás. a) Mivel $A + B + C = \pi$, írhatjuk, hogy:

$$\begin{aligned} 3 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2(A+B) + 2 \cos A \cos B \cos(A+B) &= 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cos^2 A + \cos^2 B + (\cos A \cos B - \sin A \sin B)^2 - & \\ - 2 \cos A \cos B (\cos A \cos B - \sin A \sin B) &= 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 A \cos^2 B + \sin^2 A \sin^2 B - & \\ - 2 \sin 2A \sin 2B - 2 \cos^2 A \cos^2 B + 2 \sin 2A \sin 2B &= 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cos^2 A + \cos^2 B - \cos^2 A \cos^2 B + (1 - \cos^2 A)(1 - \cos^2 B) &= 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1 &= 1. \end{aligned}$$

Az utolsó egyenlőség fennáll, tehát az ekvivalenciák miatt a kezdeti is fennáll. Ezzel az állítást igazoltuk.

b) Alkalmazva a $\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{2}$, stb. képleteket, a fenti azonosság a következőkkel egyenértékű:

$$\frac{3 - \cos A - \cos B - \cos C}{2} = 1 - 2\sqrt{\frac{1 - \cos A}{2} \cdot \frac{1 - \cos B}{2} \cdot \frac{1 - \cos C}{2}},$$

$$\left(\sin \frac{A}{2} > 0, \text{ stb.} \right).$$

Az előző egyenlőség rendre ekvivalens a következőkkel:

$$1 - (\cos A + \cos B + \cos C) = -\frac{2}{\sqrt{2}} \sqrt{(1 - \cos A)(1 - \cos B)(1 - \cos C)} \stackrel{(*)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2(\cos A + \cos B + \cos C) + \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C +$$

$$+ 2(\cos A \cos B + \cos C \cos B + \cos B \cos A) = 2(1 - (\cos A + \cos B + \cos C) +$$

$$+ (\cos A \cos B + \cos C \cos B + \cos A \cos C) - \cos A \cos B \cos C) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C - 2 \cos A \cos B \cos C = 2,$$

ami pontosan az a) pontban igazolt azonosság.

Megjegyzés: A (*) ekvivalencia azért áll, mert ebben az esetben mindkét oldal negatív, tehát nem áll fenn a veszély, hogy négyzetreemeléssel „elveszítünk” egy előjelt. Általában ezt nem tehetjük meg.

c) A $\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{1 + \cos A}{2}$, stb. képleteket használva ismét az a) pontra vezetődik vissza a feladat.

18. Bizonyítsd be, hogy, ha $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, akkor

a) $\operatorname{tg} x \sin x \geq x^2$;

b) $\frac{\operatorname{tg} x + \sin x}{2} \geq x$.

Bizonyítás. **a)** $x = 0$ -ra teljesül az egyenlőtlenség, tehát feltételezhetjük, hogy $x > 0$.

A VIII.24. fejezet 4. feladatában igazoltuk, hogy $\operatorname{tg} x \geq x, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ (1)

esetén. Könnyen belátható az is, hogy $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ esetén $0 < 1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} < 1$ (2).

A $\operatorname{tg} x \sin x \geq x^2$ egyenlőtlenség rendre ekvivalens a következőkkel, ha $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$:

$$\frac{\operatorname{tg} x}{x} \geq \frac{x}{\sin x} \Leftrightarrow \frac{\operatorname{tg} x}{x} - \frac{x}{\sin x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x \sin x} \left(\frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} - x^2 \right) \geq 0.$$

Viszont $\operatorname{tg} \frac{x}{2} > \frac{x}{2}$ és $0 < 1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} < 1$, következik, hogy

$$\left(\frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} - x^2 \right) \geq \left(\frac{2x}{2} \cdot \frac{2x}{2} - x^2 \right) = 0,$$

tehát $\frac{1}{x \cdot \sin x} \cdot (\dots) \geq 0$ és ezért $\operatorname{tg} x \sin x \geq x^2, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

b) mivel $\operatorname{tg} x, \sin x, x \geq 0$ ha $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, az a) pontot felhasználva írhatjuk, hogy:

$$\frac{\operatorname{tg} x + \sin x}{2} \geq \sqrt{\operatorname{tg} x \cdot \sin x} \geq \sqrt{x^2} = x.$$

19. Bizonyítsd be, hogy ha az ABC_{Δ} háromszögben $b^2 + c^2 = 2a^2$, akkor

a) $2 \operatorname{ctg} A = \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C$;

b) $a \cdot m_a = b \cdot m_b$.

Bizonyítás. **a)** A IX.3.1 paragrafus 16.feladata alapján:

$$2 \operatorname{ctg} A - \operatorname{ctg} B - \operatorname{ctg} C = \frac{2(b^2 + c^2 - a^2) - a^2 - b^2 + c^2}{4T} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{b) } a^2 m_a^2 - b^2 m_b^2 &= a^2 \cdot \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} - b^2 \cdot \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4} = \\ &= \frac{(a^2 - b^2)(2c^2 - a^2 - b^2)}{4} = 0. \end{aligned}$$

20. Számítsd ki az R sugarú körbe írt szabályos

a) hatszög; **b)** ötszög; **c)** nyolcszög oldalát.

Megoldás. **a)** A szabályos n -szög oldalához tartozó középponti szög mértéke $\frac{2\pi}{n}$, tehát a hozzá tartozó kerületi szög mértéke $\frac{\pi}{n}$. Így az oldal l_n

hosszára igaz az $l_n = 2R \sin \frac{\pi}{n}$ összefüggés.

Tehát a hatszög oldala $l_6 = 2R \sin \frac{\pi}{6} = R$,

az ötszög oldala $l_5 = 2R \sin \frac{\pi}{5} = R \cdot \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2}$ és

a nyolcszög oldala $l_8 = 2R \sin \frac{\pi}{8} = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

21. Bizonyítsd be, hogy ha az ABC háromszögben $b + c = 3a$, akkor

a) $2 \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = 1$; **b)** $T = a \cdot r_a$; **c)** $\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \sin \frac{A}{2}$.

Bizonyítás. **a)** $\operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{p-a}{p} = \frac{1}{2}$ mert $a + b + c = 4a$ és így $p = 2a$.

b) $T = (p-a) \cdot r_a = a \cdot r_a$ mert $p-a = 2a-a = a$.

c) $\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}} \cdot \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} =$
 $= \frac{p-a}{a} \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} = \sin \frac{A}{2}$ mert $\frac{p-a}{a} = 1$.

22. Bizonyítsd be, hogy ha az ABC háromszögben $b + c = 2a$, akkor

a) $3 \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = 1$; **b)** $2 \cos A + \cos B + \cos C = 2$.

Bizonyítás. **a)** Az adott feltételből $2p = a + b + c = 3a$, tehát

$$\operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{p-a}{p} = \frac{1}{3}.$$

b) $2 \cos A + \cos B + \cos C - 2 = (\cos A - 1) + (\cos A + \cos B + \cos C - 1) =$

$$= -2 \sin^2 \frac{A}{2} + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} =$$

$$= -2 \sin^2 \frac{A}{2} + 4 \sin \frac{A}{2} \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}} \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} =$$

$$= -2 \sin^2 \frac{A}{2} + 4 \sin \frac{A}{2} \cdot \frac{p-a}{a} \cdot \sin \frac{A}{2} = 0 \text{ mert } \frac{p-a}{a} = \frac{1}{2}.$$

23. Bizonyítsd be, hogy ha az ABC háromszögben $m(\hat{A}) = \frac{\pi}{7}$ és $m(\hat{B}) = \frac{2\pi}{7}A$,

akkor

a) $\cos A = \frac{b}{2a}$, $\cos B = \frac{c}{2b}$, $\cos C = \frac{a-b}{2b}$;

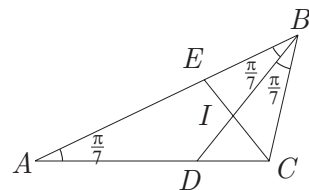
b) $\cos A \cos B \cos C = -\frac{1}{8}$;

c) $h_a = h_b + h_c$.

Bizonyítás. **a)** Ha meghúzzuk a BD belső szögfelezőt, az ABD egyenlő szárú háromszög keletkezik, tehát $AD = BD$.

Másrészt $BD = \frac{2ac}{a+c} \cos \frac{\pi}{7}$ és $AD = \frac{bc}{c+a}$ (a szög-

felező hosszára vonatkozó tételből és a szögfelező tételből), tehát $\cos A = \cos \frac{\pi}{7} = \frac{b}{2a}$. Ha ugyanezt



megismételjük a C szög CE szögfelezőjével, akkor a $CE = EB$ egyenlőségből következik, hogy $\cos B = \cos \frac{2\pi}{7} = \frac{c}{2b}$. A szögek mértékéből következik, hogy az ABC háromszög hasonló ACE háromszöghöz, tehát $\frac{AE}{AC} = \frac{EC}{BC} = \frac{AC}{AB}$. Ebből következik, hogy $EC = \frac{a \cdot b}{c}$ és $c^2 = b^2 + ab$.

$$\text{Tehát } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{a^2 - ab}{2ab} = \frac{a - b}{2b}.$$

b) Az a) alpont alapján az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $a(b + c) = bc$.

Ez ekvivalens a $\sin \frac{\pi}{7} \left(\sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} \right) = \sin \frac{2\pi}{7} \sin \frac{4\pi}{7}$ egyenlőséggel.

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{7} \left(\sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} \right) &= \sin \frac{\pi}{7} \left(2 \sin \frac{3\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} \right) = \sin \frac{2\pi}{7} \sin \frac{3\pi}{7} = \\ &= \sin \frac{2\pi}{7} \sin \frac{3\pi}{7} \text{ mert } \sin \frac{4\pi}{7} = \sin \left(\pi - \frac{4\pi}{7} \right) = \sin \frac{3\pi}{7}. \end{aligned}$$

c) $h_a = h_b + h_c \Leftrightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \Leftrightarrow a(b + c) = bc$, tehát az egyenlőség teljesül.

24. Bizonyítsd be az alábbi egyenlőtlenségeket:

a) $r_a + r_b + r_c \geq 9r$;

b) $a \cos A + b \cos B + c \cos C \leq p$;

c) $r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 \geq p^2$; **d)** $\frac{(b+c)^2}{4bc} \leq \frac{m_a}{l_a}$; **e)** $\frac{b^2 + c^2}{2bc} \leq \frac{m_a}{h_a}$.

Bizonyítás. a) A X.3.1 paragrafus 19/f feladata alapján $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$.

Az első fejezet 9.2.2 paragrafusának 3. feladata alapján

$$(r_a + r_b + r_c) \left(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \right) \geq 9, \text{ tehát } r_a + r_b + r_c \geq 9r.$$

$$\text{b) } \sum a \cdot \cos A = \sum \frac{a^2 (b^2 + c^2 - a^2)}{2abc} = \frac{2(a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2) - a^4 - b^4 - c^4}{2abc} =$$

$$= \frac{16T^2}{2abc}, \text{ tehát a bizonyítandó egyenlőtlenség ekvivalens a } 8T^2 \leq p \cdot abc$$

egyenlőtlenséggel. A Heron-képlet alapján $(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c) \leq abc$ alakban írható és ezt már igazoltuk az I.9.4. paragrafusban (4/e feladat).

c) Az $r_a = p \cdot \operatorname{tg} \frac{A}{2}$ összefüggés alapján az egyenlőtlenség ekvivalens a

$$\operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} \geq 1 \quad \text{egyenlőtlenséggel.}$$

Ugyanakkor a VIII.5.6.2 paragrafus 15/g feladata alapján

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 1$$

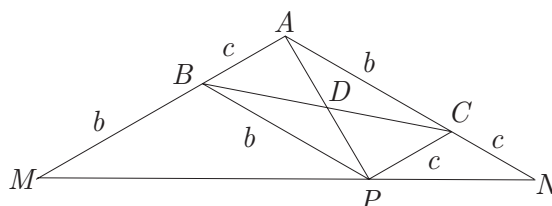
és így az $u^2 + v^2 + t^2 \geq uv + vt + tu$ egyenlőtlenség alapján

$$\operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} \geq 1.$$

d) Az $l_a = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2}$

összefüggés alapján az egyenlőtlenség ekvivalens a

$$\frac{b+c}{2} \cos \frac{A}{2} \leq m_a$$



egyenlőtlenséggel.

Megszerkesztjük az $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ pontokat úgy, hogy $CN = AB$, $BM = AC$ és felvesszük az A -nak a BC felezőpontjára vonatkozó P szimmetrikusát. Belátható, hogy M, P és N egy egyenesre illeszkedik, tehát írhatjuk, hogy

$$\cos \frac{A}{2} = \frac{h}{b+c} \leq \frac{AP}{b+c} = \frac{2m_a}{b+c},$$

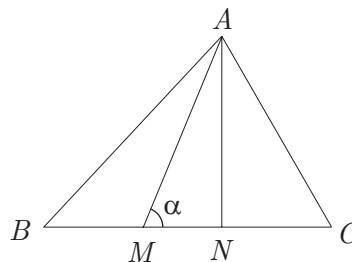
ahol h az MAN háromszög A csúcsához tartozó magassága.

e) Ha N az A -hoz tartozó magasság talppontja, akkor $BN^2 - NC^2 = c^2 - b^2$ és $BN - NC = a$

alapján $BN = \frac{c^2 - b^2 + a^2}{2a}$ és így $MN = \frac{c^2 - b^2}{2a}$.

Tehát

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AM}{MN} = \frac{2a \cdot h_a}{c^2 - b^2} = \frac{2bc \sin A}{c^2 - b^2} \leq \frac{2bc}{c^2 - b^2}.$$



Ebből következik, hogy $\sin \alpha \leq \frac{2bc}{b^2 + c^2}$ tehát

$$\frac{AN}{NM} = \frac{h_a}{m_a} \leq \frac{2bc}{b^2 + c^2}.$$

25. Bizonyítsd be az alábbi azonosságokat:

a) $r_a + r_b + r_c = 4R + r$;

b) $r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a = p^2$;

c) $p^2 = 2r(6R - r)$;

d) $ab + bc + ca = p^2 + r^2 + 4Rr$;

e) $a^2 + b^2 + c^2 = 2p^2 - 2r^2 - 8Rr$;

f) $a \operatorname{ctg} A + b \operatorname{ctg} B + c \operatorname{ctg} C = 2(R + r)$

$$\mathbf{g)} \quad r_a r_b = p(p - c);$$

$$\mathbf{i)} \quad 2S = \frac{a^2}{\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C};$$

$$\mathbf{k)} \quad \frac{b - a}{c} = \frac{\sin \frac{B - A}{2}}{\cos \frac{C}{2}}$$

;

$$\mathbf{h)} \quad (r_a + r_b)(r_b + r_c)(r_c + r_a) = 4Rp^2;$$

$$\mathbf{j)} \quad a = \frac{p \sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}};$$

$$\mathbf{l)} \quad \frac{(p - a)^2}{bc} + \frac{(p - b)^2}{ac} + \frac{(p - c)^2}{ab} = \frac{2R - r}{2R}$$

$$\mathbf{m)} \quad (c - a)(c \cos B + b \cos C) = ab(\cos A - \cos C) + a(a - c) \cos B;$$

$$\mathbf{n)} \quad a \cdot \operatorname{ctg} A + b \cdot \operatorname{ctg} B + c \cdot \operatorname{ctg} C = 2R + 2r;$$

$$\mathbf{o)} \quad r_a(r_b + r_c) + r_b(r_c + r_a) + r_c(r_a + r_b) = 2p^2.$$

Bizonyítás. **a)** Már igazoltuk a IX.3.1 paragrafus 19/h feladatában.

b) Az $r_a = p \operatorname{tg} \frac{A}{2}$ összefüggés alapján az egyenlőség ekvivalens a

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 1$$

egyenlőséggel és ezt igazoltuk a VIII.5.6.2 paragrafus 15/g alpontjában.

c)

$$\mathbf{d)} \quad A \quad 4r^2 = \frac{(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)}{a + b + c} \quad \text{és} \quad 2Rr = \frac{abc}{a + b + c} \quad \text{egyenlőség}$$

alapján a bizonyítandó egyenlőség ekvivalens a

$$4(ab + bc + ca)(a + b + c) = (a + b + c)^3 + (-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c) + 8abc$$

egyenlőséggel. Ez számolással ellenőrizhető.

$$\mathbf{e)} \quad a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc) = 4p^2 - 2(p^2 + r^2 + 4Rr) = 2p^2 - 2r^2 - 8Rr.$$

f) $a \operatorname{ctg} A = 2R \sin A \cdot \operatorname{ctg} A = 2R \cos A$, tehát

$$a \operatorname{ctg} A + b \operatorname{ctg} B + c \operatorname{ctg} C = 2R(\cos A + \cos B + \cos C) = 2R \cdot \left(1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}\right) = 2R \left(1 + \frac{r}{R}\right) = 2(R + r).$$

$$\mathbf{g)} \quad r_a r_b = \frac{T}{p - a} \cdot \frac{T}{p - b} = \frac{p(p - a)(p - b)(p - c)}{(p - a)(p - b)} = p(p - c).$$

$$\mathbf{h)} \quad r_a + r_b = T \cdot \frac{2p - a - b}{(p - a)(p - b)} = \frac{c \cdot T}{(p - a)(p - b)}, \text{ tehát}$$

$$(r_a + r_b)(r_b + r_c)(r_c + r_a) = \frac{abc \cdot T^3}{(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2} = \frac{abc \cdot T^3 \cdot p^2}{T^4} = \\ = \frac{abc}{T} p^2 = 4Rp^2.$$

$$\textbf{i)} \quad \frac{a^2}{\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C} = \frac{a^2}{\frac{a^2 + c^2 - b^2}{4T} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4T}} = 2T.$$

$$\textbf{j)} \quad a \cdot \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = a \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac} \cdot \frac{p(p-c)}{ab}} = p \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} = p \sin \frac{A}{2}.$$

$$\textbf{k)} \quad \frac{b-a}{c} = \frac{\sin B - \sin A}{\sin C} = \frac{2 \sin \frac{B-A}{2} \cos \frac{B+A}{2}}{2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}} = \frac{\sin \frac{B-A}{2}}{\cos \frac{C}{2}}$$

$$\text{mert } \cos \frac{A+B}{2} = \cos \left(\frac{\pi - C}{2} \right) = \sin \frac{C}{2}.$$

$$\textbf{l)} \quad \sum \frac{(p-a)^2}{bc} = \sum \frac{a(p-a)^2}{abc} = \frac{\sum a(p-a)^2}{abc} = \\ = \frac{(\sum a)p^2 - 2p \cdot \sum a^2 + \sum a^3}{abc} = \frac{\sum a^3 + 6abc - \sum (ab^2 + a^2b)}{4abc}$$

$$\text{Ugyanakkor } \frac{2R-r}{2R} = 1 - \frac{r}{2R} = 1 - \frac{2T^2}{p \cdot abc} = \\ = \frac{4abc - (a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{4abc} = \\ = \frac{\sum a^3 + 6abc - \sum (ab^2 + a^2b)}{4abc}$$

tehát az összefüggés igazolása teljes.

m) $c \cos B + b \cos C = a$, tehát elégséges igazolni, hogy

$$(c-a) \neq (1 + \cos B) = \neq b(\cos A - \cos C), \text{ vagy}$$

$$(\sin C - \sin A) 2 \cos^2 \frac{B}{2} = \sin B \cdot (\cos A - \cos C).$$

$$\text{Ez igaz, mert } (\sin C - \sin A) 2 \cos^2 \frac{B}{2} = 2 \sin \frac{C-A}{2} \cos \frac{C+A}{2} 2 \cos^2 \frac{B}{2} = \\ = 2 \sin \frac{C-A}{2} \sin \frac{C+A}{2} \cdot 2 \cos \frac{B}{2} \sin \frac{B}{2} = (\cos A - \cos C) \cdot \sin B.$$

n) Az n) alpont ugyanaz, mint az f) alpont.

o) A b) alpont alapján nyilvánvaló.

26. Bizonyítsd be, hogy bármely $n \in \mathbb{N}^*$ és azon $x \in \mathbb{R}$ esetén, amelyekre az egyenlőségben szereplő kifejezések értelmezettek, igazak az alábbi egyenlőségek:

$$\text{a) } \cos^2 x + \cos^2 2x + \dots + \cos^2 nx = \frac{n}{2} + \frac{\cos(n+1)x \sin nx}{2 \sin x};$$

$$\text{b) } \sin^2 x + \sin^2 2x + \dots + \sin^2 nx = \frac{n}{2} - \frac{\cos(n+1)x \sin nx}{2 \sin x};$$

c)

$$\frac{\sin 2x}{\cos 2x - \sin 2x} + \frac{\sin 4x}{\cos 4x - \sin 4x} + \dots + \frac{\sin 2nx}{\cos 2nx - \sin 2nx} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sin n(n+1)x}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - n(n+1)x\right)}$$

;

d)

$$\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{\sin 3x}{\cos^2 x \cos^2 2x} + \frac{\sin 5x}{\cos^2 2x \cos^2 3x} + \dots + \frac{\sin(2n-1)x}{\cos^2(n-1)x \cos^2 nx} = \frac{\operatorname{tg}^2 nx}{\sin x}.$$

$$\begin{aligned} \text{Bizonyítás. a) } \sum_{k=1}^n \cos^2 kx &= \sum_{k=1}^n \frac{1 + \cos 2kx}{2} = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \cos 2kx = \\ &= \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos(n+1)x \cdot \sin nx}{2 \sin x} \end{aligned}$$

a VIII.4.1 paragrafus 2. megoldott feladata alapján.

$$\text{b) } \sum_{k=1}^n \sin^2 kx = \sum_{k=1}^n \frac{1 - \cos 2kx}{2} = \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \cos 2kx = \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos(n+1)x \cdot \sin nx}{2 \sin x}.$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \sum_{k=2}^n \frac{\sin kx}{\cos kx - \sin k^2 x} &= \\ &= \sum_{k=2}^n \frac{\sin \frac{k(k+1)}{2} x}{\cos \frac{k(k+1)}{2} x - \sin \frac{k(k+1)}{2} x} - \frac{\sin \frac{k(k-1)}{2} x}{\cos \frac{k(k-1)}{2} x - \sin \frac{k(k-1)}{2} x} = \\ &= \frac{\sin \frac{n(n+1)}{2} x}{\cos \frac{n(n+1)}{2} x - \sin \frac{n(n+1)}{2} x} - \frac{\sin x}{\cos x - \sin x} = \\ &= \frac{\sin \frac{n^2 + n - 2}{2} x}{\cos \frac{n^2 + n - 2}{2} x - \sin \frac{n^2 + n + 2}{2} x} \end{aligned}$$

$$\text{Felhasználtuk a} \quad \frac{\sin a}{\cos a - \sin a} - \frac{\sin b}{\cos b - \sin b} = \frac{\sin(a-b)}{\cos(a-b) - \sin(a+b)}$$

azonosságot.

d) A $\frac{\operatorname{tg}^2 nx}{\sin x} + \frac{\sin(2n+1)x}{\cos^2 nx \cdot \cos^2(n+1)x} = \frac{\operatorname{tg}^2(n+1)x}{\sin x}$ összefüggés és a matematikai indukció elve alapján az egyenlőség igaz $\forall n \geq 1$ esetén.

27. a) Bizonyítsd be, hogy ha $k \in \mathbb{N}$ és $a, \alpha \in \mathbb{R}$ úgy, hogy az alábbi kifejezések értelmezettek, akkor

$$\operatorname{tg}(a + k\alpha) - \operatorname{tg} k\alpha = \frac{2 \sin a}{\cos a + \cos(a + 2k\alpha)} \text{ és}$$

$$\operatorname{ctg} k\alpha - \operatorname{ctg}(a + k\alpha) = \frac{2 \sin a}{\cos a - \cos(a + 2k\alpha)} \quad (k \neq 0).$$

b) Számítsd ki a $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\cos a + \cos(2k+1)a}$ és $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\cos a - \cos(2k+1)a}$ összegeket.

Bizonyítás. a)

$$\begin{aligned} \text{b) } \sum_{k=1}^n \frac{1}{\cos a + \cos(2k+1)a} &= \frac{\operatorname{tg}(n+1)\alpha - \operatorname{tg} \alpha}{2 \sin \alpha} \text{ és} \\ \sum_{k=1}^n \frac{1}{\cos a - \cos(2k+1)a} &= \frac{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg}(n+1)\alpha}{2 \sin \alpha}. \end{aligned}$$

28. Számítsd ki az alábbi összegeket, majd az eredményt igazold a matematikai indukció módszerével:

$$\text{a) } S_1 = \sin^2 x + \sin^2 3x + \dots + \sin^2(2n-1)x;$$

$$\text{b) } S_2 = \cos^3 x + \cos^3 2x + \dots + \cos^3 nx;$$

$$\text{c) } S_3 = \sin^3 x + \sin^3 2x + \dots + \sin^3 nx.$$

$$\begin{aligned} \text{Megoldás. a) } S_1 &= \sum_{k=1}^n \sin^2(2k-1)x = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [1 - \cos 2(2k-1)x] = \\ &= \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \cos(4k-2)x = \frac{n}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin 4nx}{\sin 2x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } S_2 &= \sum_{k=1}^n \cos^3 kx = \frac{1}{4} \left(\sum_{k=1}^n \cos 3kx + 3 \sum_{k=1}^n \cos kx \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{\sin \frac{3nx}{2} \cos \frac{3(n+1)x}{2}}{\sin \frac{3x}{2}} + 3 \cdot \frac{\sin \frac{nx}{2} \cos \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right). \end{aligned}$$

$$\text{c) } S_3 = \sum_{k=1}^n \sin^3 kx = \frac{1}{4} \left(3 \sum_{k=1}^n \sin kx - \sum_{k=1}^n \sin 3kx \right) =$$

$$= \frac{1}{4} \left(3 \cdot \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} - \frac{\sin \frac{3(n+1)x}{2} \sin \frac{3nx}{2}}{\sin \frac{3x}{2}} \right).$$

29. Bizonyítsd be, hogy az $ABCD$ körbeírható négyszögben

a) $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$ (Ptolemaiosz I. tétele);

b) $\frac{AC}{BD} = \frac{AB \cdot AD + CB \cdot CD}{BA \cdot BC + DA \cdot DC}$ (Ptolemaiosz II. tétele).

Bizonyítás. a) Az ábra jelölései alapján az egyenlőség

$$\sin(\beta + \gamma) \cdot \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \sin \gamma + \sin \beta \cdot \sin(\alpha + \beta + \gamma)$$

alakban írható (a szinusz-tétel segítségével). Ezt igazoltuk a VIII.5.6.2 paragrafus 13/b feladatában.

b) A $T[ABCD] = T[ABD] + T[BCD] =$

$$= \frac{AB \cdot AD}{2} \cdot \sin(\alpha + \beta) + \frac{BC \cdot CD}{2} \cdot \sin(\alpha + \beta) \text{ és}$$

$$T[ABCD] = T[ABC] + T[ADC] =$$

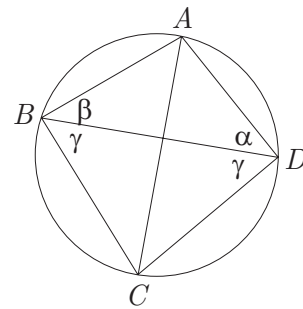
$$= \frac{AB \cdot BC}{2} \cdot \sin(\beta + \gamma) + \frac{AD \cdot DC}{2} \cdot \sin(\beta + \gamma) \text{ egyenlőségek}$$

alapján
$$\frac{\sin(\beta + \gamma)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{AB \cdot AD + BC \cdot CD}{AB \cdot BC + AD \cdot CD}.$$

Másrészt a szinusz-tételből következik, hogy

$$AC = 2R \sin(\beta + \gamma) \text{ és } BD = 2R \sin(\alpha + \beta),$$

tehát
$$\frac{AC}{BD} = \frac{AB \cdot AD + BC \cdot CD}{AB \cdot BC + AD \cdot DC}.$$



30. Az AB körív felezőpontját jelöljük C -vel és legyen P egy tetszőleges pont az AB köríven. Bizonyítsd be, hogy $PA \cdot PB = AC^2 - PC^2$.

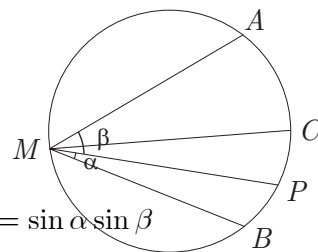
Bizonyítás. Az ábra jelölései alapján

$$PA \cdot PB = 4R^2 \sin \alpha \sin \beta \text{ és}$$

$$AC^2 - PC^2 = 4R^2 \left(\sin^2 \frac{\alpha + \beta}{2} - \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2} \right).$$

Másrészt

$$\sin^2 \frac{\alpha + \beta}{2} - \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)) = \sin \alpha \sin \beta$$



tehát $PA \cdot PB = AC^2 - PC^2$.

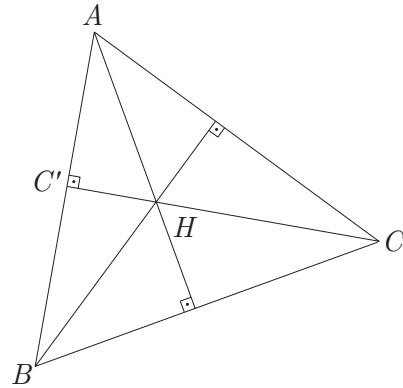
31. Bizonyítsd be, hogy ha H az ABC hegyesszögű háromszög ortocentruma, akkor $HA + HB + HC = 2(R + r)$, ahol R és r az ABC háromszög köré illetve a háromszögbe írt kör sugara.

Bizonyítás. Az ábra jelölései szerint

$$AH = \frac{AC'}{\sin B} = \frac{b \cdot \cos A}{\sin B} = 2R \cos A,$$

tehát

$$\begin{aligned} HA + HB + HC &= 2R(\cos A + \cos B + \cos C) = \\ &= 2R \left(1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \right) = 2R \left(1 + \frac{r}{R} \right) = 2(R + r). \end{aligned}$$

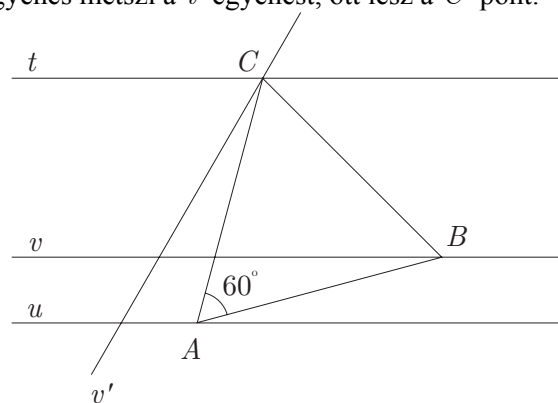


32. Három egymással párhuzamos egyenes közül a középső a két szélsőtől a és b távolságra van. Határozd meg annak az egyenlő oldalú háromszögnek az oldalhosszát, amelynek csúcsai a három egyenesen vannak (minden egyenesen van csúcs).

Megoldás. Mielőtt kiszámítjuk az oldal hosszát, kell igazolnunk, hogy létezik ilyen háromszög, és ha több van belőlük, akkor azok oldalai egyforma hosszúságúak (az utóbbi kérdésre maga a számítás adja meg a választ, tehát nem kell foglalkozunk vele).

Feltételezzük, hogy sikerült megrajzolni egy ilyen háromszöget (alábbi ábra).

Észrevesszük, hogy a B pontot 60° -kal elforgatva A körül, megkapjuk a C pontot. Mivel $B \in v$, következik, hogy a v egyenest forgatjuk el 60° -kal az A pont körül és ahol a kapott v' egyenes metszi a t egyenest, ott lesz a C pont.



Tetszőlegesen tologatva az ABC_{Δ} -et (párhuzamosan) az u, v, t egyenseken, minden kapott háromszög megoldás lesz, ezért, az előbbi észrevétel miatt, egy ilyen háromszög szerkesztése a következő:

1. Az u egyenesen felvesszünk egy tetszőleges (A) pontot.

2. Az A pont körül 60° -kal elforgatjuk a v egyenest.

3. A v' és t egyenesek metszéspontja lesz az egyenlő oldalú háromszög másik csúcspontja.

4. A B pont megszerkesztése az A és C pontok segítségével.

Az előbb vázolt gondolatok miatt az ABC háromszög egyenlő oldalú lesz, tehát létezik ilyen háromszög.

Számítsuk ki az oldalhosszát a és b függvényében:

Az ábra szerint $\sin \alpha = \frac{b}{m}$ és $\sin(60^\circ - \alpha) = \frac{a}{m}$.

Tehát $\sin 60^\circ \cos \alpha - \cos 60^\circ \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha = \frac{a}{m} \Rightarrow$

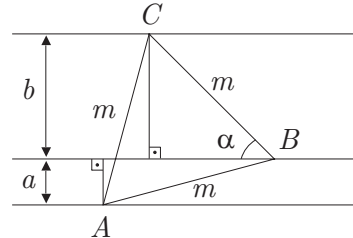
$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} - \frac{1}{2} \sin \alpha = \frac{a}{m} \quad (\cos \alpha > 0, \text{ mert } 0 < \alpha < 60^\circ),$$

vagyis
$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{b^2}{m^2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{m} = \frac{a}{m} \quad / \cdot m,$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{m^2 - b^2} = a + \frac{b}{2},$$

$$3(m^2 - b^2) = 4a^2 + b^2 + 4ab,$$

$$m = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{a^2 + b^2 + ab}.$$



33. Az ABC_{Δ} -ben legyenek $M \in (BC)$ és $N \in (AM)$ pontok úgy, hogy $\frac{BM}{MC} = \frac{1}{2}$

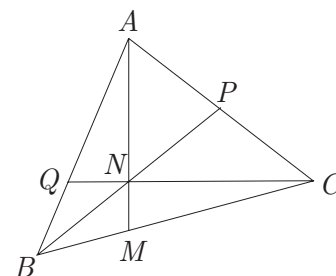
és $\frac{AN}{NM} = 3$ valamint $\{P\} = BN \cap AC$, $\{Q\} = CN \cap AB$.

a) Határozzuk meg az $\frac{AP}{PC}$; $\frac{AQ}{AB}$; $\frac{BN}{NP}$ arányokat.

b) Határozzuk meg a CNP_{Δ} és ABC_{Δ} háromszögek területeinek arányát.

Megoldás. a) Menelaosz tételét alkalmazzuk az AMC háromszögben a $B - N - P$ szelőre majd az AMB háromszögben $Q - N - C$ szelőre. Tehát

$$\frac{AP}{PC} = \frac{BM}{BC} \cdot \frac{AN}{MN} = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1 \text{ és}$$



$$\frac{AQ}{QB} = \frac{CM}{BC} \cdot \frac{AN}{MN} = \frac{2}{3} \cdot 3 = 2.$$

Ugyanakkor

$$\frac{BN}{NP} = \frac{BM}{MC} + \frac{BQ}{QA} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

$$\text{b) } \frac{T[CNP]}{T[ABC]} = \frac{T[CNP]}{T[CAQ]} \cdot \frac{T[CAQ]}{T[ABC]} = \frac{CP}{CA} \cdot \frac{CN}{CQ} \cdot \frac{AQ}{AB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{4}.$$

34. Legyen ABC egy nem elfajult háromszög és $M \in (BC)$ úgy, hogy $MB = kMC$ ($k \in \mathbb{R}_+^*$). Igazoljuk, hogy $(1+k)AM < AB + kAC$.

Megoldás. $\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} + k \cdot \overrightarrow{AC}}{1+k}$, tehát

$$\|\overrightarrow{AM}\| = \frac{1}{1+k} \cdot \|\overrightarrow{AB} + k \cdot \overrightarrow{AC}\| \leq \frac{1}{1+k} \cdot (\|\overrightarrow{AB}\| + k \cdot \|\overrightarrow{AC}\|)$$

és így
$$AM \leq \frac{AB + k \cdot AC}{1+k}.$$

35. Igazoljuk, hogy egy háromszög egy belső szögfelezőjének hossza kisebb, mint az ugyanabból a csúcsból kiinduló oldalak hosszainak harmonikus középárányosa.

Megoldás. A szögfelező hosszára vonatkozó tétel alapján

$$l_a = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2} \leq \frac{2bc}{b+c} = \frac{2}{\frac{1}{b} + \frac{1}{c}}.$$

36. Az ABC_Δ -ben legyenek $E \in (AB)$ és $F \in (AC)$ úgy, hogy $EF \parallel BC$

valamint $M \in (EF)$ és $N \in (BC)$ úgy, hogy $\frac{BN}{NC} = \frac{EM}{MF}$. Igazoljuk, hogy az A , M és N pontok kollineárisak.

Megoldás. Ha $\frac{EM}{MF} = k$, akkor

$$\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AE} + k \cdot \overrightarrow{AF}}{1+k} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{AN} = \frac{\overrightarrow{AB} + k \cdot \overrightarrow{AC}}{1+k}.$$

Másrészt $EF \parallel BC$ alapján létezik $\lambda \in \mathbb{R}_+$, amelyre

$$\overrightarrow{AB} = \lambda \cdot \overrightarrow{AE} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \overrightarrow{AF}.$$

Ebből következik, hogy $\overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \overrightarrow{AN}$, tehát az A , M és N pontok egy egyenesen vannak.

37. Legyen $ABCD$ paralelogramma, M az $[AB]$ felezőpontja és N egy pont a $[DM]$ -en úgy, hogy $MN = \frac{1}{3} MD$.

a) Fejezd ki az $\overrightarrow{AN}$ és $\overrightarrow{BN}$ vektorokat az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{BC}$ vektorok lineáris kombinációjaként.

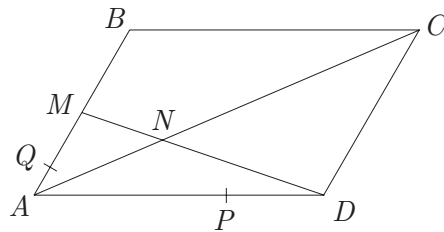
b) Igazold, hogy az A, N és C pontok kollineárisak.

c) Ha $P \in (AD)$ és $Q \in (AM)$ úgy, hogy $\frac{DP}{PA} = \frac{AQ}{QM} = \frac{1}{2}$, bizonyítsd be, hogy az $[AN]$, $[MP]$ és $[DQ]$ szakaszokkal, mint oldalakkal szerkeszthető háromszög.

Megoldás. a)

$$\overrightarrow{AN} = \frac{2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AD}}{3} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}}{3}.$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BN} &= \frac{2\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BD}}{3} = \frac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}}{3} = \\ &= \frac{\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AB}}{3}.\end{aligned}$$



b) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, tehát A, N és C kollineárisak és $AN = \frac{1}{3}AC$.

$$\begin{aligned}\text{c) } \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{DQ} + \overrightarrow{MP} &= \frac{2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AD}}{3} + \frac{2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DM}}{3} + \frac{2\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MA}}{3} = \\ &= \frac{\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA}}{3} = \vec{0}, \text{ tehát az } \overrightarrow{AN}, \overrightarrow{DQ} \text{ és } \overrightarrow{MP}\end{aligned}$$

vektorokkal szerkeszthető háromszög. Ennek a háromszögnek az oldalhosszai AM, MD és DA .

38. Legyenek $A\left(1 + \sqrt{3}, \frac{3}{2}\right)$, $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)$ és $C\left(1, \frac{1}{2}\right)$ pontok a síkban.

Igazoljuk, hogy az ABC_{Δ} derékszögű. Melyik a derékszög?

Megoldás. Mivel két - $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ - ponton átmenő egyenes egyenlete

$$\frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{x - x_1}{x_1 - x_2},$$

következik, hogy az ABC_{Δ} oldalait tartó egyenesek irányítányezői rendre

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, \quad \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}, \quad \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1},$$

ahol az A, B és C pontok koordinátái $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ és $C(x_3, y_3)$.

Tehát az AB irányítányezője: $m_{AB} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} + \sqrt{3}},$

az AC irányítányezője: $m_{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}},$

a BC irányítányezője: $m_{BC} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}.$

Két egyenes akkor merőleges egymásra ha irányítányezőik között fennáll az $m_1 m_2 = -1$ összefüggés. Ebből következik, hogy csakis az AC egyenes lehet merőleges valamelyik másikra (az ő irányítányezője pozitív egyedül), $-\frac{1}{m_{AC}} = -\sqrt{3} = m_{BC}$, tehát a $\hat{C}$ derékszög.

39. Számítsd ki:

a) $\sqrt[3]{7 + \sqrt{50}} + \sqrt[3]{7 - \sqrt{50}};$

b) $\sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}};$

c) $\sqrt[3]{38\sqrt{14} - 100\sqrt{2}} - \sqrt[3]{99 - 70\sqrt{2}};$

d) $\sqrt[3]{1 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}} - \sqrt[3]{1 - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}.$

Megoldás. a) Ha $x = \sqrt[3]{7 + \sqrt{50}} + \sqrt[3]{7 - \sqrt{50}}$, akkor $x^3 = 14 - 3x$, tehát x egy valós gyöke az $x^3 + 3x - 14 = 0$ egyenletnek. De $x^3 + 3x - 4 = (x - 2)(x^2 + 2x + 7)$ és így az egyenlet egyetlen valós gyöke $x = 2$. Tehát

$$\sqrt[3]{7 + \sqrt{50}} + \sqrt[3]{7 - \sqrt{50}} = 2.$$

b) $(a - b\sqrt{2})^3 = a^3 - 3a^2b\sqrt{2} + 6ab^2 - 2\sqrt{2}b^3$, tehát $a^3 + 6ab^2 = 45$ és

$3a^2b + 2b^3 = 29$ összefüggések kéne teljesüljenek. Ha $a = 3$ és $b = 1$, akkor az összefüggések teljesülnek, tehát

$$\sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}} = 3 - \sqrt{2}.$$

c) Az előbbihez hasonló gondolatmenet alapján

$$\sqrt[3]{99 - 70\sqrt{2}} = 3 - 2\sqrt{2} \quad \text{és}$$

$$\sqrt[3]{38\sqrt{14} - 100\sqrt{2}} = \sqrt{14} - 2\sqrt{2},$$

tehát $\sqrt[3]{38\sqrt{14} - 100\sqrt{2}} - \sqrt[3]{99 - 70\sqrt{2}} = \sqrt{14} - 3.$

d) Ha $x = \sqrt[3]{1 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}} - \sqrt[3]{1 - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}$ akkor

$$x^3 = 1 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}} - 3x \cdot \sqrt{1 - \frac{4}{9} \cdot \frac{7}{3}} - \left(1 - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}\right),$$

tehát x valós megoldása az $x^3 - x - \frac{4}{3}\sqrt{\frac{7}{3}} = 0$ egyenletnek.

Ha az $x = y\sqrt{\frac{7}{3}}$ helyettesítést elvégezzük, a $7y^3 - 3y - 4 = 0$ egyenlethez jutunk.

De $7y^3 - 3y - 4 = (y-1)(7y^2 + 7y + 4)$ és így $y = 1$ az egyetlen megoldás, tehát

$$\sqrt[3]{1 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}} - \sqrt[3]{1 - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}} = \sqrt{\frac{7}{3}}.$$

40. Határozd meg az X és Y valós számokat úgy, hogy $\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{X} + \sqrt{Y}$, ha $A, B \geq 0$ és $A^2 - B \geq 0$.

Megoldás. Az $A + \sqrt{B} = X + Y + 2\sqrt{XY}$ egyenlőségből $X + Y = A$ és $XY = \frac{B}{4}$ tehát

$$A + \sqrt{B} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} + \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}.$$

41. Bizonyítsd be, hogy ha $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, $a + b + c \neq 0$ és $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a + b + c}$, akkor

$$\frac{1}{a^{2001}} + \frac{1}{b^{2001}} + \frac{1}{c^{2001}} = \frac{1}{a^{2001} + b^{2001} + c^{2001}}.$$

Bizonyítás. Ha $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a + b + c}$, akkor $abc = (a + b + c)(ab + bc + ca)$

és így $(a + b)(b + c)(c + a) = 0$. Ha $a = -b$, akkor

$$\frac{1}{a^{2001}} + \frac{1}{b^{2001}} + \frac{1}{c^{2001}} = \frac{1}{a^{2001}} - \frac{1}{a^{2001}} + \frac{1}{c^{2001}} = \frac{1}{c^{2001}} = \frac{1}{(a + b + c)^{2001}}.$$

Hasonlóan látható be az egyenlőség a másik két esetben is.

42. Bizonyítsd be, hogy ha $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, akkor $abc(a + b + c) \leq a^3b + b^3c + c^3a$.

Bizonyítás. Mivel a, b és c pozitívak, a bizonyítandó egyenlőtlenség ekvivalens a következővel:

$$(a + b + c) \leq \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b} \quad (1)$$

Az (1) egyenlőtlenség szimmetrikus a , b és c -ben, ezért írhatjuk, hogy $a \leq b \leq c$.

Az $a \leq b \leq c$ összefüggésből következik, hogy $a^2 \leq b^2 \leq c^2$, tehát az a^2 , b^2 , c^2 és

$\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ számsorozatok ellentétes rendezésűek.

A rendezési elvből következik, hogy

$$a^2 \cdot \frac{1}{a} + b^2 \cdot \frac{1}{b} + c^2 \cdot \frac{1}{c} \leq a^2 \cdot \frac{1}{c} + b^2 \cdot \frac{1}{a} + c^2 \cdot \frac{1}{b},$$

ami éppen az (1) egyenlőtlenség.

43. Határozd meg az összes olyan p prímszámot, amelyre $p^2 - 2$, $2p^2 - 1$ és $3p^3 + 4$ szintén prímszám.

Megoldás. Ha $p = 2$, akkor $3p^2 + 4$ páros és nagyobb, mint 2. Tehát p páratlan prímszám. Ha $p = 7$, akkor $p^2 - 2 = 47$, $2p^2 - 1 = 97$ és $3p^2 + 4 = 151$. Ezek mind prímszámok, tehát $p = 7$ egy megoldás. Ha $p > 7$, p^2 -nek 7-tel való osztási maradéka 1, 4 vagy 2. Az első esetben $(3p^2 + 4):7$, a második esetben $(2p^2 - 1):7$ és a harmadik esetben $(p^2 - 2):7$, tehát $p \leq 7$. Ha $p = 3$, akkor $p^2 - 2 = 7$, $2p^2 - 1 = 17$ és $3p^2 + 4 = 31$ tehát $p = 3$ is megoldás. Ha $p = 5$, akkor $2p^2 - 1 = 49$ nem prímszám, tehát $M = \{3, 7\}$.

44. Bizonyítsd be, hogy $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$.

(Catalan összefüggés)

Bizonyítás. Matematikai indukcióval igazoljuk az állítást:

$n = 1$ -re igaz az állítás, mert $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Feltételezzük, hogy $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} = \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{2(k)}$ és

igazoljuk, hogy $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} = \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{2k+2}$.

Valóban az indukciós feltétel szerint

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} = \\ & = \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{2k+1} + \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{2(k+1)} \right) =$$

$$= \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2},$$

tehát a matematikai indukció elve alapján $\forall n \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

45. Bizonyítsd be, hogy ha $a + b + c = 0$, akkor

$$\frac{bc - a^2}{bc + 2a^2} + \frac{ac - b^2}{ac + 2b^2} + \frac{ab - c^2}{ab + 2c^2} = 0,$$

ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$ és a nevezők egyike sem 0.

Bizonyítás. Az $x = \frac{b}{a}$, $y = \frac{c}{a}$ jelöléssel $x + y = -1$, tehát a bizonyítandó

egyenlőség
$$\frac{x^2 + x + 1}{x - 1} \cdot \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{2x+1} \right) = \frac{x^2 + x + 1}{2x^2 + 5x + 2}$$

alakban írható és ez igaz.

46. Egy mesebeli fa egyszer elkezdett növekedni. Az első nap félszeresével nőtt, a második nap az egyharmadoszorosával, a harmadik nap az egynegyedszeresével és így tovább. Hány nap alatt nőtt a százszorosára?

Megoldás. Számoljuk ki, hogy az első néhány nap elteltével milyen magasra nőtt a fa, majd matematikai indukcióval próbáljuk megadni a fa magasságát az eltelt napok függvényében.

Kezdetben a fa magassága 1-szerese volt önmagának.

Az első nap után a magassága: $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$

A 2. nap után: $\frac{3}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2}.$

A 3. nap után: $\frac{4}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{2} = \frac{5}{2}.$

Az eddigi eredmények alapján azt feltételezzük, hogy az n -edik nap elteltével a fa magassága $\frac{n+2}{2}$ -szerese a kezdeti magasságnak.

$n = 1, 2, 3$ -ra láttuk, hogy teljesül a feltételezésünk.

Ha feltételezzük, hogy ez így van az n -edik nap végén is, akkor a fa az $n+1$ -edik napon addigi magasságának $\frac{1}{n+2}$ -szeresével nő (a feltétel szerint), tehát

az $n+1$ -edik nap végén a fa magassága $\frac{n+2}{2} + \frac{1}{n+2} \cdot \frac{n+2}{2} = \frac{n+3}{2}$ -szerese a kezdeti magasságnak. Ezzel igazoltuk, hogy általában, az n -edik nap végén a fa magassága $\frac{n+2}{2}$ -szerese a kezdeti magasságnak és így a fa magassága akkor lesz százszorosa a kiinduló magasságnak, ha $\frac{n+2}{2} = 100$, vagyis $n = 198$.

47. Bizonyítsd be, hogy az $f: A \rightarrow B$ függvény pontosan akkor szürjektív, ha $\forall X \subset A$ esetén $C_B f(X) = f(C_A X)$.

Bizonyítás. Ha az egyenlőség teljesül és $X = \emptyset$, akkor $C_A \emptyset = A$ és így $B = f(A)$, tehát f szürjektív. Ha $X = A \setminus \{x_0\}$ akkor $C_A X = \{x_0\}$ és $f(C_A X) = \{f(x_0)\}$ tehát $f(X) = B \setminus \{f(x_0)\}$. Ha f nem injektív, akkor létezik olyan y_0, x_0 és $z_0 \neq x_0$, amelyre $y_0 = f(x_0) = f(z_0)$. Így $z_0 \in X$ tehát $f(x_0) \in f(X)$ és ez ellentmond $f(X) = B \setminus \{f(x_0)\}$ -nak.

Ha f bijektív és $X \subset A$, akkor kétirányú bennfoglalást bizonyítunk:

$b \in C_B f(X) \Leftrightarrow b \in B \setminus f(X) \Leftrightarrow b \in B$ és $\nexists x \in X$ úgy, hogy $f(x) = b$.

De $b \in B$, tehát létezik $x_0 \in A$ úgy, hogy $f(x_0) = b$. Az előbbi tulajdonság alapján $x_0 \in X$, tehát $x_0 \in A \setminus X$ és így $b \in f(C_A X)$. Ebből következik, hogy

$$C_B f(X) \subset f(C_A X).$$

Ha $b \in f(C_A X)$, akkor létezik $x_0 \in C_A X$ úgy, hogy $f(x_0) = b$. Mivel f injektív, nem létezik $x \in X$ úgy, hogy $f(x) = b$, tehát $b \in C_B f(X)$.

48. Bizonyítsd be, hogy az $f: A \rightarrow B$ függvény pontosan akkor injektív, ha

$$f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y), \quad \forall X, Y \subset A.$$

Bizonyítás. Ha f nem injektív, akkor létezik $x_0, y_0 \in A$ úgy, hogy

$$f(x_0) = f(y_0).$$

Ebben az esetben az $X = \{x_0\}$ és $Y = \{y_0\}$ halmazokra nem teljesül az $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$, tehát ha ez a feltétel teljesül minden $X, Y \subset A$ esetén, akkor f injektív.

Ha f injektív és $X \cap Y = Z$ ($X, Y \subset A$) akkor $f(Z) \subset f(X) \cap f(Y)$.

Másrészt ha $u \in f(X) \cap f(Y)$, akkor létezik $x_0 \in X$ és $y_0 \in Y$ úgy, hogy

$$f(x_0) = f(y_0) = u.$$

Mivel f injektív $v = x_0 = y_0$ és így $v \in X \cap Y$, tehát

$$u = f(v) \in f(X \cap Y).$$

Az előbbi két tulajdonság alapján

$$f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y), \quad \forall X, Y \subset A.$$

49. Határozd meg az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}$ függvény képeinek halmazát.

Megoldás. Lásd a VI.1.2. paragrafus II/3 feladatát (148. oldal).

50. Az m és n valós paraméterek milyen értékeire teljesül az $\text{Im } f = [-4, 5]$

egyenlőség, ha $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3x^2 + mx + n}{x^2 + 1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Megoldás. Az f függvényt a következő alakban is írhatjuk:

$$f(x) = \frac{3x^2 + mx + n + 3 - 3}{x^2 + 1} = 3 + \frac{mx + n - 3}{x^2 + 1}.$$

Tehát $\text{Im } f = [-4, 5] \Leftrightarrow -7 \leq \frac{mx + n - 3}{x^2 + 1} \leq 2, \quad \forall x \in \mathbb{R}$, és a tört minden értéket

felvesz a $[-7, 2]$ intervallumból. Az előbbi egyenlőtlenséglánc a következő egyenlőtlenségrendszerrel egyenértékű: $(x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R})$

$$\begin{cases} -7x^2 - 7 \leq mx + n - 3 \\ 2x^2 + 2 \geq mx + n - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x^2 + mx + n + 4 \geq 0 \\ 2x^2 - mx - n + 5 \geq 0 \end{cases}.$$

Ahhoz, hogy $\text{Im } f = [-7, 2]$ teljesüljön, a fenti másodfokú egyenlőtlenségekben szereplő másodfokú függvények minden értéket fel kell vegyenek a $[0, +\infty)$ intervallumból, és más értékeket nem vehetnek fel, vagyis

a

$$\begin{cases} \Delta_1 = m^2 - 28n - 112 = 0 \\ \Delta_2 = m^2 - 8n - 40 = 0 \end{cases}$$

egyenlőségek kell teljesüljenek.

Következik, hogy $36n = -72$, vagyis $n = -2$ és $m^2 = 56$, tehát $m = \pm\sqrt{56}$.

Tehát a megoldás: $m \in \{\pm\sqrt{56}\}$ és $n = -2$.

51. Határozd meg az a és b valós paramétereket úgy, hogy az

$$f(x) = \max\{x^2 + ax + b, x^2 + bx + a\}$$

függvény grafikus képe áthaladjon a $(-1, 4)$ és $(2, 9)$ pontokon.

Megoldás. Ha $a > b$ akkor

$$\max \left\{ x^2 + ax + b, x^2 + bx + a \right\} = \begin{cases} x^2 + ax + b, & x \geq 1 \\ x^2 + bx + a, & x < 1 \end{cases}.$$

Tehát az $1 - a + b = 4$ és $4 + 2b + a = 9$ egyenlőségekhez jutunk. Így $a = -\frac{1}{3}$

és $b = \frac{8}{3}$. A $b > a$ esetben az $a = \frac{8}{3}$ és $b = -\frac{1}{3}$ értékekhez jutunk, tehát

$$M = \left\{ \left(-\frac{1}{3}, \frac{8}{3} \right), \left(\frac{8}{3}, -\frac{1}{3} \right) \right\}.$$

52. Az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ függvény minden valós x esetén teljesíti az $f(f(x)) = x$ egyenlőséget. Milyen geometriai transzformációja f a számegyenesnek?

Megoldás. $f(f(x)) = af(x) + b = a \cdot (ax + b) + b = a^2x + ab + b$,
tehát a feltétel szerint $a^2x + ab + b = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Következik, hogy

$$(a^2 - 1)x + ab + b = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

és mivel egy polinom csak akkor identikusan nulla, ha minden együtthatója nulla, következik hogy $a^2 = 1$ és $ab + b = 0$ (vagy ha nem tetszik, akkor helyettesítsünk x -nek 0-t, majd 1-et, stb.).

Két esetet kell vizsgáljunk:

1. Ha $a = 1$, akkor $b = 0$.
2. Ha $a = -1$, akkor $b \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Az első esetben $f(x) = x$, tehát f minden x pontnak megfelelteti önmagát, vagyis f az identikus transzformáció.

A második esetben $f(x) = -x + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ állandó, tehát $f(x) = s \circ t(x)$, ahol $s(x) = -x$ szimmetria és $t(x) = x - \alpha$ eltolás. Tehát f egy szimmetriából és egy translációból tevődik össze.

53. Legyen α az $x^2 + px + q = 0$ és β a $-x^2 + px + q = 0$ egyenlet egy-egy gyöke. Bizonyítsd be, hogy az $\frac{1}{2}x^2 + px + q = 0$ egyenletnek van legalább egy gyöke α és β közt.

Bizonyítás. Mivel α gyöke az $x^2 + px + q = 0$ egyenletnek, következik, hogy

$$\alpha^2 + p\alpha + q = 0 \quad (1)$$

Hasonlóan, $-p^2 + p\beta + q = 0 \quad (2).$

Vizsgáljuk α és β értékét az $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + px + q$ függvényben:

$$\frac{1}{2}\alpha^2 + p\alpha + q = -\frac{1}{2}\alpha^2 \leq 0 \quad (\text{az (1) összefüggés alapján}) \text{ és}$$

$$\frac{1}{2}\beta^2 + p\beta + q = \frac{3}{2}\beta^2 \geq 0 \quad (\text{a (2) összefüggés alapján}).$$

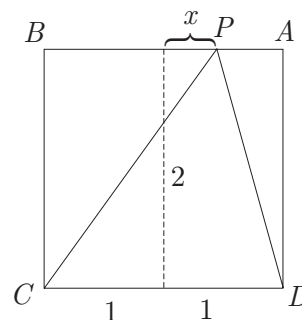
Tehát az $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + px + q$ függvénynek vagy gyöke α vagy β (ha $\alpha = 0$ vagy $\beta = 0$), vagy pedig előjelt vált az $[\alpha, \beta]$ intervallumon, ha $\alpha < \beta$, illetve a $[\beta, \alpha]$ intervallumon, ha $\beta < \alpha$. Ez pedig pontosan azt jelenti, hogy f -nek van gyöke α és β között.

54. Az $ABCD$ négyzet AB oldalegyenesén mozog a P pont. Milyen határok között változik a $\frac{PC}{PD}$ arány?

Megoldás. Amikor $p \in (BA)$ az A irányában mozdul el a PC növekszik és a PD rövidül, tehát a $\frac{PC}{PD}$ arány növekszik. Így $P = B$ -re a legkisebb és $P = A$ -ra a legnagyobb értéket kapjuk, tehát

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \frac{PC}{PD} \leq \sqrt{2}.$$

Ha P az egész AB egyenesen mozoghat, akkor az ábrán látható jelöléssel:



$$\frac{PC}{PD} = \frac{\sqrt{(x+1)^2 + 4}}{\sqrt{(x-1)^2 + 4}},$$

tehát elégséges meghatározni az $E(x) = \frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 - 2x + 5}$ kifejezés értékkészletét.

Ha $\frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 - 2x + 5} = y$, akkor az

$$(1-y)x^2 + 2(1+y)x + 5(1-y) = 0$$

egyenletnek van valós gyöke, tehát

$$\Delta = 4 \cdot ((1+y)^2 - 5(1-y)^2) \geq 0.$$

Az $y - 6y + 1 \leq 0$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza $M = [3 - 2\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}]$, tehát a $\frac{PC}{PD}$ arány minden értéket felvesz a $[\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + 1]$ intervallumból (és más értéket nem).

55. Határozd meg az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x - a_1| + |x - a_2| + \dots + |x - a_n|$ függvény minimumát, ha $a_1 < a_2 < \dots < a_n$.

Megoldás. Ha n páros ($n = 2k$), akkor az f konstans az $[a_k, a_{k+1}]$ intervallumon és itt éri el a minimumát. Ez

$$\begin{aligned} f(a_k) &= a_k - a_1 + a_k - a_2 + \dots + a_k - a_{k-1} + a_{k+1} - a_k + \dots + a_n - a_k = \\ &= (a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_n) - (a_1 + a_2 + \dots + a_k). \end{aligned}$$

Ha n páratlan ($n = 2k + 1$), akkor az $[a_{k+1}, a_n]$ intervallumon f növekvő és az $[a_1, a_{k+1}]$ intervallumon csökkenő, tehát a minimuma:

$$\begin{aligned} f(a_{k+1}) &= (a_{k+1} - a_1) + (a_{k+1} - a_2) + \dots + (a_{k+1} - a_k) + \\ &\quad + (a_{k+2} - a_{k+1}) + (a_{k+3} - a_{k+1}) + \dots + (a_n - a_{k+1}) = \\ &= (a_{k+2} + a_{k+3} + \dots + a_n) - (a_1 + a_2 + \dots + a_k). \end{aligned}$$

56. Határozd meg a $z = x + y + \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2}$ kifejezés minimumát, ha a és b valós számok, x és y tetszőleges nemnegatív számok.

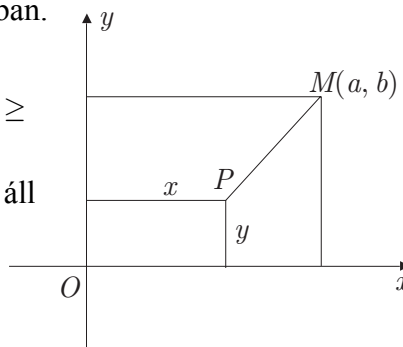
Megoldás. Tekintsük az $M(a, b)$ pontot a síkban.

Ha $P(x, y)$, akkor

$$\begin{aligned} x + y + \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2} &= AP + PB + PM \geq \\ &\geq OB + BP + PM \geq OP + PM \geq OM. \end{aligned}$$

Tehát a kifejezés minimuma pontosan akkor áll elő, ha $x = a$ és $y = b$.

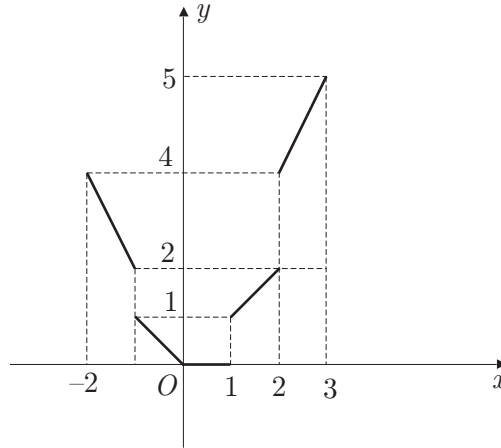
Belátható, hogy $a < 0$ vagy $b < 0$ esetén is a minimális értéket $x = y = 0$ esetén kapjuk.



57. Ábrázold grafikusan az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot [x]$ függvényt.

Megoldás. $f(x) = 0$ ha $x \in [0, 1)$, $f(x) = x$ ha $x \in [1, 2)$ és általában

$$f(x) = kx \text{ ha } x \in [k, k+1).$$



58. Számítsuk ki a következő $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényekre az $\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n\text{-szer}}$ összetételt:

a) $f(x) = \frac{x}{3}$;

b) $f(x) = x + \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$;

c) $f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{4}{x} \right)$;

d) $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$.

Megoldás. **a)** $(f \circ f)(x) = \frac{x}{9}$ és általában $\left(\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_n \right)(x) = \frac{x}{3^n}$. Ezt indukcióval igazolhatjuk.

b) $(f \circ f)(x) = x + 2\alpha$ és általában $\left(\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_n \right)(x) = x + n\alpha$.

c) Ha $f(x) = \frac{x^2 + 4}{2x}$, akkor $\frac{f(x) - 2}{f(x) + 2} = \frac{(x-2)^2}{(x+2)^2}$.

Így $\frac{(f \circ f)(x) - 2}{(f \circ f)(x) + 2} = \left(\frac{f(x) - 2}{f(x) + 2} \right)^2 = \left(\frac{x-2}{x+2} \right)^{2^2}$ és indukcióval igazolhatjuk, hogy

$$\frac{\left(\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_n \right)(x) - 2}{\left(\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_n \right)(x) + 2} = \left(\frac{x-2}{x+2} \right)^{2^n}$$

Tehát $\left(\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_n \right)(x) = 2 \cdot \frac{(x-2)^{2^n} + (x+2)^{2^n}}{(x+2)^{2^n} - (x-2)^{2^n}} \quad \forall n \geq 1$.

d) $(f \circ f)(x) = \frac{x}{3x+4},$

$$(f \circ f \circ f)(x) = \frac{x}{7x+8} \text{ és általában}$$

$$\left(\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_n \right)(x) = \frac{x}{(2^n - 1)x + 2^n} \quad \forall n \geq 1.$$

59. Bizonyítsd be, hogy ha $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ és $a(4a + 3b + 2c) \geq 0$, akkor nem lehet az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet mindkét gyöke az $(1, 2)$ intervallumban.

Bizonyítás. Ha $(1, 2)$ a két gyök, akkor $x_i - 3x_i + 2 < 0$, tehát

$$(x_1^2 + x_2^2) - 3(x_1 + x_2) + 4 < 0.$$

Ebből következik, hogy $4a^2 + 3ab - 2ac + b + b^2 < 0$, tehát ha hozzáadjuk az adott egyenlőtlenség megfelelő oldalait a $S^2 - 4ac < 0$ egyenlőtlenséghez jutunk. Ez ellentmondás, mert a gyökök valósak, tehát nem lehet az egyenlet mindkét gyöke az $(1, 2)$ intervallumban.

60. Bizonyítsd be, hogy ha $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $b^2 < 4ac$ és $4a + 2b + c > 0$, akkor $a + 2b + 4c > 0$.

Bizonyítás. Tekintsük az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ függvényt. A feltételek alapján $\Delta < 0$ és $f(2) > 0$, tehát $f\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ mert a függvény előjeltartó.

$$\text{Így } \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + c > 0, \text{ tehát } a + 2b + 4c > 0.$$

61. Hány olyan $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ függvény létezik, amelyre

$$|f(x) - f(y)| \geq |x - y| \quad \forall x, y \in [0, 1]?$$

Megoldás. Ha $x = 1$ és $y = 0$, akkor az $|f(1) - f(0)| \geq 1$ egyenlőséghez jutunk.

Mivel $f(1), f(0) \in [0, 1]$, következik, hogy $\{f(1), f(0)\} = \{0, 1\}$.

1.eset. Ha $f(1) = 1$ és $f(0) = 0$, akkor $y = 0$ esetén az $f(x) \geq x \quad \forall x \in [0, 1]$ egyenlőtlenséghez jutunk, tehát $f(x) = x \quad \forall x \in [0, 1]$.

2.eset. Ha $f(0) = 1$ és $f(1) = 0$, akkor $y = 0$ esetén az $f(x) \leq 1 - x, \quad \forall x \in [0, 1]$ és $y = 1$ esetén az $f(x) \geq 1 - x, \quad \forall x \in [0, 1]$ egyenlőtlenséghez jutunk. Tehát $f(x) = 1 - x, \quad \forall x \in [0, 1]$ és így két függvény teljesíti a feltételt.

62. Bizonyítsd be, hogy az ABC_Δ pontosan akkor derékszögű vagy egyenlő szárú, ha

$$\frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} C} = \frac{\sin^2 B}{\sin^2 C}.$$

Bizonyítás. Az egyenlőség a $\sin 2C = \sin 2B$ egyenlőséghez vezet, tehát $\sin(C - B) \cos(B + C) = 0$.

Ha $\sin(C - B) = 0$, akkor a háromszög egyenlő szárú, míg ha $\cos(B + C) = 0$, akkor $B + C = \frac{\pi}{2}$ és így a háromszög derékszögű.

63. Bizonyítsd be, hogy ha $8 \cos A \cos B \cos C = 1$, akkor ABC_{Δ} egyenlő oldalú.

Bizonyítás. A koszinusz-tétel alapján

$$(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2) = a^2 b^2 c^2,$$

tehát az I.9.4. paragrafus 4/e feladata alapján $a^2 = b^2 = c^2$ és így a háromszög egyenlő oldalú.

64. Adott kerületű téglalapok közül melyiknek a legnagyobb a területe?

Megoldás. Ha az oldalak x és y , akkor $x + y = \frac{k}{2}$ állandó. Így a számtani-

mértani közepek közti egyenlőtlenség alapján $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$. Egyenlőség $x = y$ esetén teljesül, tehát a négyzetnek a legnagyobb a területe.

65. Adott területű téglalapok közül melyiknek a legkisebb a kerülete?

Megoldás. Ha x és y az oldalak hossza, akkor $xy = T$ állandó. Így az $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ egyenlőtlenség alapján a kerülete akkor a legkisebb, amikor $x = y$ vagyis a négyzet esetén.

66. Adott kerületű háromszögek közül melyiknek a legnagyobb a területe?

67. Adott területű háromszögek közül melyiknek a legkisebb a kerülete?

Megoldás.(66-67) A VIII.5.6.2. paragrafus 19/f feladata alapján

$$(*) \quad \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Másrészt a $p^2 \geq 3\sqrt{3}S$ egyenlőtlenség $p \geq 3\sqrt{3}r$ majd $\frac{r}{4R} \cdot \frac{4R}{p} \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}$ alakban írható.

De $\frac{4R}{p} = \frac{1}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}$ (IX.3.1. 19-es feladatának c) alpontja)

és $\frac{r}{4R} = \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$ (lásd ugyanannak a feladatnak az e) alpontját) tehát a $p^2 \geq 3\sqrt{3}S$ egyenlőtlenség ekvivalens a (*) egyenlőtlenséggel. Egyenlőség pontosan akkor állhat fenn, ha a háromszög egyenlő oldalú, tehát ha rögzítjük a kerületet, akkor a legnagyobb területe az egyenlő oldalú háromszögnek van és ha a területet rögzítjük, akkor a legkisebb kerülete szintén az egyenlő oldalú háromszögnek van.

68. Számítsuk ki az $M(x_0, y_0)$ pont távolságát az $ax + by + c = 0$ egyenletű egyenestől!

Megoldás. Ha $P(x, y) \in d$ akkor $MP^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ és így az $f(x) = (x - x_0)^2 + \left(\frac{-c - ax}{b} - y_0\right)^2$ másodfokú függvény minimumát keressük.

$$f_{\min} = -\frac{\Delta}{4\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)} = \frac{(ax_0 + by_0 + c)^2}{a^2 + b^2},$$

tehát az M pont távolsága az $ax + by + c = 0$ egyenletű egyenestől

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

69. Adott az $A(x_1, y_1)$ és $B(x_2, y_2)$ pont. Határozzuk meg az $M(x, 0)$ pont abszcisszáját úgy, hogy az $A - M - B$ útvonal hossza minimális legyen!

Megoldás.

$$AM + MB = \sqrt{(x - x_1)^2 + y_1^2} + \sqrt{(x - x_2)^2 + y_2^2} \geq \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Tehát ha az (AB) szakasz metszi az Ox tengelyt, akkor a metszéspontra $AM + MB$ minimális. Ha az AB szakasz nem metszi az Ox szakaszt, akkor a Minkovski egyenlőtlenséget

$$\sqrt{(x - x_1)^2 + y_1^2} + \sqrt{(x - x_2)^2 + y_2^2} \geq \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

alakban írjuk fel (ez annyit jelent mintha a B pontot tükröztük volna Ox -re nézve) és az AB' szakasz biztosan metszi az Ox tengelyt (B' koordinátái x_2 és y_2).

70. Egy téglalap egyik oldalára félkört szerkesztünk. Mennyi a téglalap oldalainak aránya, ha a kapott alakzat kerülete K és a területe maximális? Fogalmazd meg, majd oldd is meg a duális feladatot!

Megoldás. Az ábra jelölései alapján $T = 4ab + \frac{\pi \cdot b^2}{2}$ és $K = 4a + 2b + 2\pi b$.

Így $4a = K - 2b(\pi + 1)$

és
$$T = b \cdot (K - 2b(\pi + 1)) + \frac{\pi b^2}{2} = b^2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 2(\pi + 1) \right) + K \cdot b$$

Ennek a kifejezésnek $b = \frac{K}{3\pi + 4}$ esetén van maximuma és ebben az esetben

$$\frac{b}{a} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \approx 1,28.$$

71. Számítsuk ki adott körbe írt téglalap területének maximumát!

Megoldás. Ha R a kör sugara és x, y a téglalap oldalainak hossza, akkor $x^2 + y^2 = 4R^2$ és a terület xy . A $2xy \leq x^2 + y^2$ egyenlőtlenség alapján a téglalap területe akkor maximális, ha $x = y = R\sqrt{2}$, vagyis négyzet esetén.

72. Számítsuk ki az R sugarú kör köré írt trapéz kerületének minimumát!

Megoldás. Az ábra jelölései alapján $AB = x + y$ és így

$$(x + y)^2 = (2R)^2 + (y - x)^2.$$

Tehát keressük a $2x + 2y$ kifejezés minimumát ha $xy = R^2$. A számtani-mértani közepek közti egyenlőtlenség alapján $2(x + y) \geq 4R$ és egyenlőség csak $x = y = R$ esetén van. Így a legkisebb kerületű, R sugarú kör köré írt trapéz a négyzet.

73. Egy folyó partján 3200 m^2 nagyságú, téglalap alakú területet kell elkeríteni. Mekkora legyen a téglalap méretei, ha azt szeretnénk, hogy a kerítés a legrövidebb legyen? (a parton nincs kerítés)

Megoldás. Az $ab = 3200$ feltétel mellett a $2a + b$ minimumát keressük.

Másképp $\frac{2a + b}{2} \geq \sqrt{2ab}$ és így $2a + b \geq 160$. Egyenlőség akkor lehetséges, ha $2a = b$ és így $a = 40 \text{ m}$ és $b = 80 \text{ m}$.

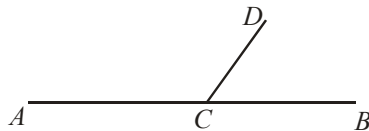
74. A vízszintessel φ szöget bezáró irányba kilövünk egy lövedéket. Milyen magasra emelkedik ez a lövedék, ha a légellenállást elhanyagoljuk?

Megoldás. A lövedék mozgásának egyenletei a tengelyekre lebontva

$$v_x = v_0 \cdot \cos \varphi, \quad v_y^2 = (v_0 \sin \varphi)^2 - 2gy,$$

tehát a pálya csúcspontja $y = \frac{v_0^2 \sin^2 \varphi}{2g}$ magasságra van.

75. Egy gyalogos az A helyiségből a D helyiségbe tart. A két helyiséget nem köti össze közvetlen út. Hol kell letérnie az AB útról a mezőre, ha az úton a sebessége v_1 , míg a mezőn v_2 , a lehető legrövidebb idő alatt



szeretne D -be érkezni, és a D -nek AB -re eső vetülete A -tól a méternyi távolságra van?

Megoldás. Az út megtételéhez szükséges idő

$$f(x) = \frac{x}{v_1} + \frac{\sqrt{(a-x)^2 + h^2}}{v_2}$$

Ha $\frac{x}{v_1} + \frac{\sqrt{(a-x)^2 + h^2}}{v_2} = m$ akkor $\frac{\sqrt{(a-x)^2 + h^2}}{v_2} = m - \frac{x}{v_1}$ és így

$$\frac{(a-x)^2 + h^2}{v_2^2} = \left(m - \frac{x}{v_1}\right)^2$$

tehát az $x^2 \cdot \left(\frac{1}{v_2^2} - \frac{1}{v_1^2}\right) + 2x \cdot \left(-\frac{a}{v_2^2} + \frac{m}{v_1}\right) + \frac{h^2 + a^2}{v_2^2} - m^2 = 0$ egyenletnek

van valós gyöke.

$$\Delta' = \left(-\frac{a}{v_2^2} + \frac{m}{v_1}\right)^2 - \left(\frac{1}{v_2^2} - \frac{1}{v_1^2}\right) \left(\frac{h^2 + a^2}{v_2^2} - m^2\right) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$m^2 \cdot \left(\frac{1}{v_1^2} + \frac{1}{v_2^2} - \frac{1}{v_1^2}\right) - \frac{2am}{v_1 v_2^2} - \left(\frac{1}{v_2^2} - \frac{1}{v_1^2}\right) \cdot \frac{h^2 + a^2}{v_2^2} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$m^2 - \frac{2a}{v_1} m - \left(\frac{1}{v_2^2} - \frac{1}{v_1^2}\right) (h^2 + a^2) \geq 0.$$

Az m legkisebb értéke tehát $m = \frac{1}{2} \left(\frac{2a}{v_1} - \sqrt{\Delta_1} \right)$,

ahol $\Delta_1 = \frac{4a^2}{v_1^2} + 4 \left(\frac{1}{v_2^2} - \frac{1}{v_1^2} \right) (h^2 + a^2) = 4 \left[\frac{h^2 + a^2}{v_2^2} - \frac{h^2}{v_1^2} \right]$.

Így $m = \frac{a}{v_1} - \sqrt{\frac{h^2 + a^2}{v_2^2} - \frac{h^2}{v_1^2}}$.

Erre az m értékre $\Delta' = 0$, tehát

$$x_{\min} = \frac{\frac{a}{v_2^2} - \frac{m}{v_1}}{\frac{1}{v_2^2} - \frac{1}{v_1^2}} = \frac{(v_1 \cdot a - m) v_1}{(v_1^2 - v_2^2)}$$

távolság megtétele után érdemes letérni az útról.

76. Két vasútvonal derékszögben metszi egymást. A kereszteződés felé egyidejűleg egy-egy vonat halad a két vasútvonalon. Az első vonat, amely a kereszteződéstől 40 km távolságra fekvő állomásról indul, percenként 800 m-t tesz meg, a második vonat pedig a kereszteződéstől 50 km távolságra fekvő

állomásból indul és percenként 600 m-t tesz meg. Az indulás pillanatától számítva hány perc múlva lesz a két mozdony távolsága a legkisebb?

Megoldás.

t perc múlva

$OA_1 = 40000 - 800t$ és $OB_1 = 50000 - 600t$ tehát

$$\frac{A_1B_1}{100} = \sqrt{(400 - 8t)^2 + (500 - 6t)^2}.$$

Ha a $t = 100t'$ jelölést használjuk az

$$\frac{A_1B_1}{10000} = \sqrt{(4 - 8t')^2 + (5 - 6t')^2}$$

összefüggést kapjuk, tehát az $f(t') = 100t' - 124t' + 41$ kifejezés minimumát

keressük. A kifejezés a minimumát $t'_m = \frac{124}{2 \cdot 100}$ -re éri el, tehát $t = 62$ perc múlva lesz minimális a két mozdony távolsága.

77. Egy függőleges tartályban víz van. Hova kell a tartály falába nyílást vágni, hogy a vízszög a lehető legmesszebbre jusson, ha gondoskodunk, hogy a tartályban a víz szintje állandó maradjon?

Megoldás. A kiáramló folyadék sebességének négyzete egyenesen arányos a $(H - h)$. Ugyanakkor az itt kiáramló folyadék $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ idő alatt ér földet és ez

idő alatt a tartály aljától $v_k \cdot t$ távolságot tesz meg. Tehát a $v_k = c \cdot \sqrt{H - h}$ egyenlőség alapján a

$$d = c \cdot \sqrt{\frac{2h(H - h)}{g}}$$

kifejezés maximumát keressük.

Mivel $h(H - h) \leq \left(\frac{H}{2}\right)^2$ és egyenlőség $h = \frac{H}{2}$ esetén van, a vízszint felénél kell lyukat vágni.

78. Egy pontszerű fényforrás két gömb középpontját összekötő egyenesen helyezkedik el. A fényforrás milyen helyzetére lesz a gömbfelületek megvilágított részeinek összege maximális?

Megoldás. Egy h magasságú gömbsüveg felszíne $T = 2\pi Rh$, ahol R a gömb sugara. Ha $O_1M = d_1$, akkor az M -ből megvilágított gömbsüveg magassága

$$m_1 = R_1 - \frac{R_1^2}{d_1}.$$

Tehát a $d_1 + d_2 = O_1O_2 (= d)$ feltétellel keressük az

$$E = 2\pi \left(R_1^2 \cdot \left(1 - \frac{R_1}{d_1} \right) + R_2^2 \cdot \left(1 - \frac{R_2}{d_2} \right) \right)$$

kifejezés minimumát. Ez ekvivalns az $\frac{R_1^3}{d_1} + \frac{R_2^3}{d_2}$ minimumának meghatározásával. A *Cauchy-Buniakovski egyenlőtlenség* alapján

$$\left(\frac{R_1^3}{d_1} + \frac{R_2^3}{d_2} \right) (d_1 + d_2) \geq (\sqrt{R_1^3} + \sqrt{R_2^3})^2$$

és egyenlőség pontosan akkor van ha

$$\frac{\sqrt{\frac{R_1^3}{d_1}}}{\sqrt{d_1}} = \frac{\sqrt{\frac{R_2^3}{d_2}}}{\sqrt{d_2}} \quad \text{vagyis ha} \quad \frac{d_1}{d_2} = \sqrt{\frac{R_1^3}{R_2^3}}.$$

79. Egy repülőgép félkörívet leírva repül az A repülőtérrel a B repülőtérre. A repülőterek légvonalban mért távolsága c km. Az AB szakasz melyik pontjában van a megfigyelő a legtávolabb a repülőgéptől, abban a pillanatban, amikor a repülő ugyanolyan távol van az A repülőtértől mint a megfigyelő?

Megoldás. Az ábra jelölései alapján $x^2 = 2R^2(1 - \cos \varphi)$, tehát $\cos \varphi = \frac{2R^2 - x^2}{2R^2}$. Ugyanakkor $\cos \alpha = \cos \left(\frac{\pi - \varphi}{2} \right) = \sin \frac{\varphi}{2}$, tehát $\cos \alpha = \frac{x}{2R}$.

Másrészt

$$RM^2 = 2x^2 - 2x^2 \cdot \cos \alpha = 2x^2 - 2x^2 \cdot \frac{x}{2R} = 2x^2 \left(1 - \frac{x}{R} \right).$$

A számtani-mértani közepek közti egyenlőtlenség alapján

$$2x^2 \left(1 - \frac{x}{R} \right) = 8R^2 \cdot \frac{x}{2R} \cdot \frac{x}{2R} \cdot \left(1 - \frac{x}{R} \right) \leq 8R^2 \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^3$$

és egyenlőség pontosan akkor teljesül ha $\frac{x}{2R} = 1 - \frac{x}{R}$ vagyis $x = \frac{2R}{3}$.

80. Határozd meg a síknak azt a tartományát, amelynek $M(x, y)$ pontjaira teljesülnek az alábbi egyenlőtlenségek:

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y \leq 4 \\ 2x + y \geq 2 \\ x - 2y \leq 3 \end{cases} ; \text{ b) } \begin{cases} -2x + y \leq 1 \\ x + y \leq 3 \\ x \leq 2 \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{cases} ; \text{ c) } \begin{cases} x - y \geq 4 \\ -\frac{1}{2}x + y \geq 0 \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{cases} ; \text{ d) }$$

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - y \geq -1 \\ x + 2y \geq 0 \end{cases}$$

Megoldás. a)

b)

c)

d)

81. Határozd meg az x és y értékét úgy, hogy az $f(x, y) = 3x + y$ kifejezés értéke maximális legyen, ha teljesülnek az alábbi egyenlőtlenségek:

$$\begin{cases} x - y \leq 1 \\ x + y \leq 3 \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{cases}$$

Megoldás.

Az egyenlőtlenségek által értelmezett alakzat az ABC háromszög, a $3x + y$ kifejezés A -ban minimális és C -ben maximális, tehát

$$f_{\max} = 3 \cdot 3 + 0 = 9.$$

82. Határozd meg az x és y értékét úgy, hogy az $f(x, y) = 3x + 2y$ kifejezés értéke minimális legyen, ha teljesülnek az alábbi egyenlőtlenségek:

$$\begin{cases} 2x + y \geq 5 \\ 3x - 2y \leq 6 \\ x + y \leq 4 \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{cases}$$

Megoldás.

Az egyenlőtlenségek által defineált doménium az ABC háromszög és belseje, ahol $A(1, 3)$, $B\left(\frac{14}{5}, \frac{6}{5}\right)$ és $C\left(\frac{16}{7}, \frac{3}{7}\right)$. A csúcspontokban a $3x + 2y$ kifejezés értéke:

$$f_A = 9, f_B = \frac{54}{5} \text{ és } f_C = \frac{54}{7}.$$

Tehát a kifejezés minimális értéke $\frac{54}{7}$ és ezt $x = \frac{16}{7}$, $y = \frac{3}{7}$ esetén veszi fel.

83. Egy asztalosműhelyben kétféle bútorsort készítenek. Az első típusúhoz $1,2 \text{ m}^3$ diófa és $0,8 \text{ m}^3$ cserefa szükséges, míg a másik fajta bútorsor előállításához $0,5 \text{ m}^3$ diófát és 1 m^3 cserefát használnak fel. A két típusú bútorsorból származó bevétel rendre 400 DM illetve 500 DM . Határozd meg, hogy melyik fajtából mennyit kell gyártani, ha azt szeretnénk, hogy a bevétel a lehető legnagyobb legyen, és ha 61 m^3 diófa és 74 m^3 cserefa áll rendelkezésünkre.

Megoldás. Ha x és y az első illetve második bútorsorból előállított mennyiség, akkor $1,2x + 0,5y$ a felhasznált diófa térfogata (m^3 -ben) és $0,8x + y$ a felhasznált cserefa térfogata. A haszon $4x + 5y$ és így a következő feltételeket kapjuk:

$$\begin{cases} 1,2x + 0,5y \leq 61 \\ 0,8x + y \leq 74 \\ x \geq 0, y \geq 0, \quad x, y \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

A célfüggvény $f(x, y) = 4x + 5y$.

A feltételek

$$\begin{cases} 12x + 5y \leq 610 \\ 4x + 5y \leq 370 \\ x, y \in \mathbb{N} \end{cases}$$

alakban írhatók. Látható, hogy $x = 30$ és $y = 50$ esetén mindkét egyenlőség teljesül és a nyereség maximális. Tehát 30 bútorsor kell az első fajtából és 50 a másodikból.

84. Két raktárban (A_1 és A_2) 200 t és 300 t tüzelőanyag áll, és ezt kell elszállítanunk három (B_1 , B_2 , és B_3) fogyasztóhoz úgy, hogy a fogyasztókhoz 100 t , 300 t és 100 t tüzelőanyag jusson. Ha az A_1 raktárból az egyes fogyasztókhoz a szállítási költségek rendre 4 , 9 és 3 millió lej, és az A_2 raktárból a fogyasztókhoz való szállítási költségek rendre 5 , 8 és 7 millió lej, adjál olyan szállítási tervet, amely szerint a szállítási költség minimális!

Megoldás. Az adatokat a következő táblázatba foglalhatjuk:

Tehát $x + y + z \leq 200$ és $500 - x - y - z \leq 300$ alapján $x + y + z = 200$. A költség pedig $K = 3600 - x + y - 4z$. Tehát az eredeti feladatban B_1 -be csak az A_1 -ből szállítunk, B_2 -be csak A_2 -ből és B_3 -ba ismét A_1 -ből. Így a költség $3.100.000.000$ lej.

X.3. versenyre előkészítő feladatok

1. *Rendelkezésünkre áll két rúd és gyújtóeszköz. Ha mindkét rúd egy óra alatt ég el (de nem tudni, hogy milyen gyorsasággal) ki lehet-e mérni háromnegyed órát?*

Megoldás. Igen, ki lehet mérni, a következő eljárással: egyszerre meggyújtjuk az egyes rúd mindkét végét, valamint a kettes rúd egyik végét. Amikor az egyes rúdon a két láng összeér (eddig pontosan egy fél óra telt el), meggyújtjuk a kettes rúd másik végét is. A két láng találkozásáig pontosan még egy negyed óra telik el, ez összesen háromnegyed óra.

2. *A kannibálok elfogtak n matematikust és másnapra matekos-tokányt szándékoznak főzni. A törzsfőnök a következőt javasolja: reggel sorba állítják a matematikusokat és mindenki fejére felhúznak egy-egy sapkát. A sapkák egymástól függetlenül feketét vagy fehérek. Minden matematikus láthatja a többi fején levő sapkát, de az övét nem. Ezután sorra mindenki mondhatja, hogy fehér vagy fekete. Aki eltalálja a saját sapkája színét azt szabadon bocsátják, a többit megeszik.*

Legalább hány matematikus kerül a kondérba, ha éjjel kidolgozhatnak bármilyen stratégiát?

Megoldás. A matematikusok összeegyezhhetnek a következő módon:

- aki elsőnek szól, az azt mondja, hogy 0, ha páros számú fehér sapkát lát, és azt, hogy 1, ha páratlan számút (a nulla helyett mondhat fehéret, és az 1 helyett feketét);
- mindenki csak azoknak a sapkáját nézi, akik még nem szólaltak meg.
- ha a második matematikus által látott fehér sapkák számának paritása megegyezik az első által látott fehér sapkák számának paritásával, akkor az ő fején fekete sapka van, ellenkező esetben fehér.
- általában, ha az első k felszólaló közt, az elsőt leszámítva x_k darab fehér sapka volt és a $(k+1)$ -ik felszólaló y_k fehér sapkát lát, akkor a következő a szabály: ha $x_k + y_k$ paritása megegyezik az első által mondott szám paritásával, akkor a $(k+1)$ -edik matematikus fején fekete sapka áll, ellenkező esetben fehér.

Így az első kivételével mindenki megmenekülhet, tehát a kondérba egynél több matematikus nem kerül (persze, ha nem követik a szabályokat).

3. *Hány különböző szám van az $A = \left\{ \left\lfloor \frac{k^2}{n} \right\rfloor \mid 1 \leq k \leq n \right\}$ halmazban?*

Megoldás. Jelöljük $f(n)$ -nel az $\left\lfloor \frac{1^2}{n} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{2^2}{n} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{n^2}{n} \right\rfloor$ számok közt előforduló

különböző értékek számát. Határozd meg $f(n)$ -et! Két különböző esetet vizsgálunk, aszerint, hogy n páros, vagy páratlan.

1. eset. $n = 2k$. $2 > \frac{(x+1)^2}{2k} - \frac{x^2}{2k} = \frac{2x+1}{2k} > 1$ ha $x \geq k$, míg $x < k$ -ra szigorúan kisebb mint 1. Ebből következik, hogy $\left\lfloor \frac{(x+1)^2}{2k} \right\rfloor$ és $\left\lfloor \frac{x^2}{2k} \right\rfloor$ közt nem lehet ezektől különböző egész szám, ha $x < k$. $x \geq k$ esetén $\left\lfloor \frac{(x+1)^2}{2k} \right\rfloor \neq \left\lfloor \frac{x^2}{2k} \right\rfloor$. Tehát $x \leq k$ esetén az $\left\lfloor \frac{x^2}{2k} \right\rfloor$ kifejezés $\left\lfloor \frac{k^2}{2k} \right\rfloor + 1$ különböző értéket vesz fel (0-tól $\left\lfloor \frac{k^2}{2k} \right\rfloor$ -ig mindent), míg $k < x \leq 2k$ -ra pontosan k darab különböző értéket. Összesen tehát $k + 1 + \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$ különböző érték fordul elő az $\left\lfloor \frac{1^2}{2k} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{(2k)^2}{2k} \right\rfloor$ számok közt.

2. eset. Hasonlóan gondolkodva $n = 2k + 1$ esetén $k + 2 + \left\lfloor \frac{k^2}{2k + 1} \right\rfloor$ különböző

$$\text{értéket kapunk, tehát } f(m) = \begin{cases} k + 1 + \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor, & \text{ha } m = 2k \\ k + 2 + \left\lfloor \frac{k^2}{2k + 1} \right\rfloor, & \text{ha } m = 2k + 1 \end{cases}.$$

$$\text{Egy képlettel kifejezve írhatjuk, hogy } f(m) = 1 + \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor^2}{m} \right\rfloor.$$

4. Bizonyítsd be a következő egyenlőtlenségeket, ha $(a_k)_{k=1, n}$ és $(b_k)_{k=1, n}$ pozitív számok:

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} + \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} &\geq \sqrt[n]{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \dots (a_n + b_n)} \geq \\ &\geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} + \sqrt[n]{b_1 b_2 \dots b_n}. \end{aligned}$$

Megoldás

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} + \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} &= \frac{(a_1 + b_1) + \dots + (a_n + b_n)}{n} \geq \\ &\geq \sqrt[n]{(a_1 + b_1) \dots (a_n + b_n)} \end{aligned}$$

(a számtani- mértani egyenlőtlenség alapján).

$$\begin{aligned}
& \sqrt[n]{\frac{a_1}{a_1+b_1} \cdots \frac{a_n}{a_n+b_n}} \leq \frac{1}{n} \left(\frac{a_1}{a_1+b_1} + \cdots \frac{a_n}{a_n+b_n} \right) \Bigg| \stackrel{\oplus}{\Rightarrow} \\
& \sqrt[n]{\frac{b_1}{a_1+b_1} \cdots \frac{b_n}{a_n+b_n}} \leq \frac{1}{n} \left(\frac{b_1}{a_1+b_1} + \cdots \frac{b_n}{a_n+b_n} \right) \Bigg| \stackrel{\oplus}{\Rightarrow} \\
& \Rightarrow \sqrt[n]{\frac{a_1}{a_1+b_1} \cdots \frac{a_n}{a_n+b_n}} + \sqrt[n]{\frac{b_1}{a_1+b_1} \cdots \frac{b_n}{a_n+b_n}} \leq 1 \Rightarrow \\
& \Rightarrow \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} + \sqrt[n]{b_1 b_2 \cdots b_n} \leq \sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2) \cdots (a_n+b_n)}
\end{aligned}$$

5. Ha $x \geq \frac{1}{2}$ és $n \geq 1$, akkor

$$\begin{aligned}
\sqrt{(n+1)^2 x + \frac{n(n+1)(2n+3)}{6}} &< \sqrt{x} + \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} + \dots + \sqrt{x+n} < \\
&< \sqrt{(n+1)^2 x + \frac{n(n+1)^2}{2}}.
\end{aligned}$$

Megoldás. Mindkét egyenlőtlenség a matematikai indukció módszerével igazoljuk.

1. $n = 1$ esetén az első egyenlőtlenség:

$$\begin{aligned}
\sqrt{4x+1} &< \sqrt{x} + \sqrt{x+1} \Leftrightarrow 4x+1 < 2x+1+2\sqrt{x(x+1)} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x < \sqrt{x(x+1)} \Leftrightarrow \sqrt{x} < \sqrt{x+1}, \text{ igaz.}
\end{aligned}$$

2. Feltételezve, hogy valamely rögzített n -re

$$\sqrt{(n+1)^2 x + \frac{n(n+1)(2n+3)}{6}} < \sqrt{x} + \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} + \dots + \sqrt{x+n},$$

igazolni szeretnénk, hogy

$$\sqrt{(n+2)^2 x + \frac{(n+1)(n+2)(2n+5)}{6}} < \sqrt{x} + \sqrt{x+1} + \dots + \sqrt{x+n+1}.$$

Ehhez elég kimutatni azt, hogy

$$\begin{aligned}
& \sqrt{(n+2)^2 x + \frac{(n+1)(n+2)(2n+5)}{6}} < \\
& < \sqrt{(n+1)^2 x + \frac{n(n+1)(2n+3)}{6}} + \sqrt{x+n+1}.
\end{aligned}$$

Négyzetre emelve és rendezve a tagokat, a következő igaz egyenlőtlenséget kapjuk:

$$0 < \frac{2}{3}(n+2)(2n+1)x + \frac{(n+1)(3n^2+6n-4)}{9}.$$

Ezzel az első egyenlőtlenséget igazoltuk.

1. $n = 1$ -re a második egyenlőtlenség:

$$\sqrt{x} + \sqrt{x+1} < \sqrt{4x+2} \Leftrightarrow \sqrt{x(x+1)} < x+1 \Leftrightarrow x < x+1.$$

2. Feltételezve, hogy az egyenlőtlenség igaz n -re, igazoljuk, hogy $n+1$ -re is igaz.

Ehhez elég kimutatni, hogy

$$(n+1)\sqrt{x+\frac{n}{2}} + \sqrt{x+n+1} \leq (n+2)\sqrt{x+\frac{n+1}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{\left(x+\frac{n}{2}\right)(x+n+1)} \leq 2x + \frac{3n+2}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \left(\sqrt{x+\frac{n}{2}} + \sqrt{x+n+1}\right)^2,$$

ami igaz.

6. Bizonyítsd be, hogy ha $\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0$, akkor

$$\frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2} = 0.$$

Megoldás Az $\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0$ egyenlőségből rendre következik, hogy

$$\left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b}\right)\left(\frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2} + \frac{a}{b-c}\left(\frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b}\right) +$$

$$+ \frac{b}{c-a}\left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c}\right) + \frac{c}{a-b}\left(\frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2} + \frac{a(c-b) + b(a-c) + c(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2} = 0.$$

7. Bizonyítsd be, hogy minden n természetes szám végtelen sok különböző módon előállítható $n = \varepsilon_1 \cdot 1^2 + \varepsilon_2 \cdot 2^2 + \dots + \varepsilon_k \cdot k^2$ alakban, ahol $k \in \mathbb{N}$ és

$$\varepsilon_j \in \{-1, 1\}, \forall j = \overline{1, k}.$$

Megoldás. Az $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$ egyenlőség alapján

$$(n+3)^2 - (n+2)^2 - (n+1)^2 + n^2 = 4 \text{ és}$$

$$(n+7)^2 - (n+6)^2 - (n+5)^2 + (n+4)^2 -$$

$$- (n+3)^2 + (n+2)^2 + (n+1)^2 - n^2 = 0 \quad (*)$$

Tehát ha rögzített $m \in \mathbb{N}$ esetén találtunk $m = \sum_{j=1}^k \varepsilon_j j^2$ alakú előállítást (ahol

$\varepsilon_j \in \{-1, 1\}$, $j = \overline{1, k}$), akkor az

$$m+4 = \sum_{j=1}^k \varepsilon_j j^2 + (k+1)^2 - (k+2)^2 - (k+3)^2 + (k+4)^2$$

egyenlőség alapján $(m+4)$ -re is létezik ilyen előállítás, sőt, végtelen sok ilyen létezik a (*) azonosság alapján. A matematikai indukció teljességéhez előállítjuk a 0, 1, 2, 3 számokat:

$$0 = -1^2 + 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2$$

$$1 = 1^2$$

$$2 = -1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2$$

$$3 = -1^2 + 2^2$$

8. Határozd meg azokat az $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ szigorúan növekvő függvényeket, amelyekre

a) $f(2) = 2$; és

b) $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n), \quad \forall m, n \in \mathbb{N}^*.$

Megoldás. Matematikai indukcióval igazoljuk, hogy $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

Pontosabban a $P(n): "f(m) = m, \forall m \leq n"$ állítást bizonyítjuk.

Az $f(m) = f(m \cdot 1) = f(m) \cdot f(1)$ és $f(m) \neq 0$ összefüggések alapján $f(1) = 1$, tehát az a) feltétel alapján $P(2)$ igaz.

Ha $P(n)$ igaz valamilyen $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ esetén, akkor $f(2n) = 2f(n)$ és $f(n) = n$, valamint a szigorú monotonitás alapján

$$n = f(n) < f(n+1) < f(n+2) < \dots < f(2n-1) < f(2n) = 2n.$$

Mivel $f(k) \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}^*$, ez utóbbi egyenlőtlenségsorozat csak akkor teljesülhet, ha $f(k) = k, k = \overline{n+1, 2n-1}$. Így $P(n+1)$ is igaz, tehát a matematikai indukció elve alapján $f(n) = n, \forall n \geq 1$.

9. Határozd meg azokat az $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ függvényeket, amelyekre

a) $f(p) = p$, bármely prímszám esetén; **b)** $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n), \quad \forall m, n \in \mathbb{N}^*.$

Megoldás. A **b)** feltétel alapján bármely $k \geq 2, m_1, m_2, \dots, m_k \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$f(m_1 m_2 \dots m_k) = f(m_1) f(m_2) \dots f(m_k).$$

Tehát ha p prímszám, akkor $f(p^\alpha) = [f(p)]^\alpha = p^\alpha$. Tetszőleges $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ esetén $f(n) = f(p_1^{\alpha_1}) f(p_2^{\alpha_2}) \dots f(p_k^{\alpha_k}) = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} = n$. Ha $n = 1$, akkor $f(1) = 1$, tehát $f(n) = n, \forall n \geq 1$.

10. Bizonyítsd be, hogy az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ függvény esetén nem lehet az $|f(0) - 1|, |f(1) - 3|$ és $|f(2) - 9|$ számok mindegyike 1-nél kisebb.

Megoldás. Ha $|b - 1| < 1, |a + b - 3| < 1, |2a + b - 9| < 1$, akkor írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} 4 &= |(2a + 2b - 6) - (2a + b - 9) - (b - 1)| \leq \\ &\leq 2|a + b - 3| + |2a + b - 9| + |b - 1| < 2 + 1 + 1 = 4. \end{aligned}$$

Ez ellentmondás, tehát az $|f(0) - 1|, |f(1) - 3|, |f(2) - 9|$ számok közül legalább az egyik nagyobb vagy egyenlő egynél.

11. Bizonyítsd be, hogy ha $f: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1], f(x) = ax^2 + bx + c$, akkor

a) $|a| + |b| + |c| \leq 3$;

b) $a^2 + b^2 + c^2 \leq 5$.

Megoldás. a) Az $f(1) = a + b + c$, $f(0) = c$, $f(-1) = a - b + c$ egyenlőségekből

$$a = \frac{f(1) + f(-1) - 2f(0)}{2}, \quad b = \frac{f(1) - f(-1)}{2}, \quad c = f(0), \text{ így}$$

$$|a| + |b| + |c| = \frac{|f(1) + f(-1) - 2f(0)|}{2} + \frac{|f(1) - f(-1)|}{2} + |f(0)| \leq$$

$$\leq \frac{|f(1) + f(-1)| + |f(1) - f(-1)|}{2} + 2|f(0)|.$$

De $|x + y| + |x - y| = 2 \cdot \max\{x, y\}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, tehát

$$|a| + |b| + |c| \leq \max\{f(1), f(-1)\} + 2|f(0)| \leq 1 + 2 = 3, \text{ mert}$$

$$f(-1), f(1), f(0) \in [-1, 1].$$

Egyenlőség az $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \pm(2x^2 - 1)$ függvényre teljesül.

b) $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{4}[2f(1)^2 + 2f(-1)^2 + 4f(0)^2 - 4f(0)f(1) - 4f(0)f(-1)] +$

$$+ f^2(0) \leq \frac{1}{4}(2 + 2 + 4 + 4 + 4) + 1 = 5.$$

Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $f(-1), f(1), f(0) \in \{-1, 1\}$ úgy, hogy $f(0)f(1) = -1$, $f(0)f(-1) = -1$. Ezekből a feltételekből az $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \pm(2x^2 - 1)$ függvényt kapjuk.

12. Bizonyítsd be, hogy az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = [x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \dots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] - [nx]$$

függvény periodikus, majd igazold, hogy

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \dots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx], \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Megoldás. Igazoljuk, hogy $T = \frac{1}{n}$ periódusa f -nek. Valóban,

$$f\left(x + \frac{1}{n}\right) = \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \dots + \left[x + \frac{n}{n}\right] - \left[nx + \frac{n}{n}\right] =$$

$$= \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \dots + [x] + 1 - [nx] - 1 = f(x)$$

(felhasználtuk, hogy $[m + \alpha] = m + [\alpha]$, $\forall m \in \mathbb{Z}, \alpha \in \mathbb{R}$). Az azonosság igazolásához felhasználjuk az előbbi függvényt: bebizonyítjuk, hogy $f(x) = 0$. Mivel f periodikus, elégséges igazolni, hogy $f(x) = 0$, $\forall x \in \left[0, \frac{1}{n}\right)$. Tetszőleges

$x \in \left[0, \frac{1}{n}\right)$ -re $0 \leq x + \frac{k}{n} < \frac{n}{n}$, $\forall k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, $0 \leq nx < 1$, tehát $\left[x + \frac{k}{n}\right] = 0$ és $[nx] = 0$, innen pedig $f(x) = 0$.

13. Bizonyítsd be, hogy ha p prímszám és $q = \left\lfloor \frac{2p-1}{3} \right\rfloor$, valamint

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{q-1} \frac{1}{q} = \frac{a}{b}, \text{ akkor } a \vdots p.$$

Megoldás. A X.2. fejezet 44. feladata alapján

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

Mivel $p \geq 5$ prímszám, két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy $p = 6k + 1$ vagy $p = 6k - 1$. Ha $p = 6k + 1$, akkor $q = 4k$ és így

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} + \dots + \frac{1}{4k} = \\ &= \left(\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{4k} \right) + \left(\frac{1}{2k+2} + \frac{1}{4k-1} \right) + \dots + \left(\frac{1}{3k} + \frac{1}{3k+1} \right) = \frac{(6k+1)M}{N}. \end{aligned}$$

Mivel N prímtényezői $(6k+1)$ -nél kisebbek és $6k+1$ prímszám, következik, hogy

$$\begin{aligned} a \vdots p. \text{ Ha } p = 6k - 1, \text{ akkor } q = 4k - 1 \text{ és } \frac{a}{b} &= \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \dots + \frac{1}{4k-1} = \\ &= \left(\frac{1}{2k} + \frac{1}{4k-1} \right) + \left(\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{4k-2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{3k-1} + \frac{1}{3k} \right) = \frac{(6k-1)M}{N}, \end{aligned}$$

ahol N prímtényezői p -nél kisebbek. Így $a \vdots p$ ebben az esetben is.

14. Bizonyítsd be, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik n egymásutáni összetett szám.

Megoldás. Az $1 \cdot 2 \cdots n \cdot (n+1) + k$, $k = \overline{2, n+1}$ számok egymásutániak és mind összetettek.

15. Határozd meg a $4 \cdot 3^{50} + 5 \cdot 4^{30}$ szám utolsó három számjegyét.

Megoldás. Mivel $3^{10} = 59049$ és $2^{10} = 1024$, a vizsgált szám utolsó három számjegye megegyezik a $4 \cdot 49^5 + 5 \cdot 24^6$ szám utolsó három számjegyével. Ennek meghatározásánál nyilvánvalóan elégséges mindig csak utolsó három számjegyet vizsgálni. $49^2 = 2401$, $24^2 = 576$, $401^2 = 160801$, $576^2 = 331776$.

$4 \cdot 801 \cdot 49 + 5 \cdot 776 \cdot 576$ utolsó három számjegye 876, tehát ezek a keresett számjegyek.

16. Bizonyítsd be, hogy ha $a, b \in \mathbb{N}^*$, akkor $(a, b)[a, b] = a \cdot b$. Általánosítás!

Megoldás. Ha $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \cdots q_l^{\beta_l}$ és $b = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \cdots p_k^{\gamma_k} r_1^{\delta_1} r_2^{\delta_2} \cdots r_j^{\delta_j}$, akkor

$$(a, b) = p_1^{\min\{\alpha_1, \gamma_1\}} p_2^{\min\{\alpha_2, \gamma_2\}} \cdots p_k^{\min\{\alpha_k, \gamma_k\}} \text{ és}$$

$$\begin{aligned} [a, b] &= p_1^{\max\{\alpha_1, \gamma_1\}} p_2^{\max\{\alpha_2, \gamma_2\}} \cdots p_k^{\max\{\alpha_k, \gamma_k\}} q_1^{\beta_1} \cdots q_l^{\beta_l} r_1^{\delta_1} \cdots r_j^{\delta_j}, \text{ innen pedig } (a, b)[a, b] = \\ &= p_1^{\min\{\alpha_1, \gamma_1\} + \max\{\alpha_1, \gamma_1\}} p_2^{\min\{\alpha_2, \gamma_2\} + \max\{\alpha_2, \gamma_2\}} \cdots p_k^{\min\{\alpha_k, \gamma_k\} + \max\{\alpha_k, \gamma_k\}} q_1^{\beta_1} \cdots q_l^{\beta_l} r_1^{\delta_1} \cdots r_j^{\delta_j} = \end{aligned}$$

$$= p_1^{\alpha_1 + \gamma_1} p_2^{\alpha_2 + \gamma_2} \dots p_k^{\alpha_k + \gamma_k} q_1^{\beta_1} \dots q_l^{\beta_l} r_1^{\delta_1} \dots r_j^{\delta_j} = a \cdot b.$$

Három szám esetén a következő összefüggés írható fel $[a, b, c] = \frac{abc \cdot (a, b, c)}{(a, b)(b, c)(c, a)}$.

17. Az $\alpha \in \mathbb{R}$ szám pontosan akkor irracionális, ha végtelen sok olyan $\frac{p}{q}$ racionális

szám létezik, amelyre $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$. (Dirichlet tétele)

Megoldás. Ha n egy rögzített szám és tekintjük a $\{\alpha\}, \{2\alpha\}, \dots, \{(n+1)\alpha\}$ számokat ($\{\cdot\}$ a törtrészt jelöli), akkor a skatulya-elv alapján létezik ezek között kettő különböző, amelyek különbsége kisebb, mint $\frac{1}{n}$. Legyenek ezek $\{k_1\alpha\}$ és $\{k_2\alpha\}$.

Tehát $0 < |k_1\alpha - [k_1\alpha] - k_2\alpha + [k_2\alpha]| < \frac{1}{n}$, ahonnan a $k_1 - k_2 = q$ és $[k_1\alpha - k_2\alpha] = p$

jelölésekkel a $0 < \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{nq} < \frac{1}{q^2}$ egyenlőtlenséghez jutunk. Ha $\frac{p}{q}$ rögzített

szám, akkor létezik olyan n_1 , amelyre $\frac{1}{n_1^2} < \left| \alpha - \frac{p}{q} \right|$, tehát n_1 -re megismételve a

gondolatmenetet más $\frac{p_1}{q_1}$ törtet is szerkeszthetünk, amelyre $0 < \left| \alpha - \frac{p_1}{q_1} \right| < \frac{1}{q_1^2}$. Tehát

ha α irracionális, akkor végtelen sok $\frac{p}{q}$ létezik, amelyre $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$. Ha α

racionális, $\alpha = \frac{a}{b}$, akkor $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| = \frac{|aq - bp|}{bq} \geq \frac{1}{bq}$, tehát ha $\frac{1}{q^2} > \left| \alpha - \frac{p}{q} \right|$, akkor

$b \geq q$ és így nem létezik végtelen sok különböző tört a kért tulajdonsággal.

18. Számítsd ki az $\frac{1}{1, \underbrace{000\dots 0}_{99} 1}$ szám első 200 tizedesjegyét.

Megoldás. Ha $a = 0, \underbrace{00\dots 0}_{99} 1$, akkor

$$\begin{aligned} \frac{1}{1, \underbrace{00\dots 0}_{99} 1} &= \frac{1}{1+a} = \frac{1+a-a}{1+a} = 1 - \frac{a}{1+a} = 1 - \frac{a+a^2-a^2}{1+a} = 1 - a + \frac{a^2}{1+a} = \\ &= 1 - a + a^2 - \frac{a^3}{1+a} = 0, \underbrace{99\dots 9}_{100} \underbrace{00\dots 0}_{99} 1 - \frac{a^3}{1+a}. \end{aligned}$$

Másrészt $0 < \frac{a^3}{1+a} < a^3 = \frac{1}{10^{300}}$ és így $\frac{1}{1+a} = 0, \underbrace{99\dots 9}_{100} \underbrace{00\dots 0}_{100} \dots$.

19. Bizonyítsd be, hogy

$$p+1 = \sqrt{1+p\sqrt{1+(p+1)\sqrt{1+\dots+(p+r)\sqrt{1+(p+r+1)(p+r+3)}}}}$$

Megoldás. Az $1+x(x+2) = (x+1)^2$ azonosság alapján bentről kifele haladva írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{1+p\sqrt{1+(p+1)\sqrt{1+\dots+(p+r)\sqrt{1+(p+r+1)(p+r+3)}}}} = \\ &= \sqrt{1+p\sqrt{1+(p+1)\sqrt{1+\dots+(p+r-1)\sqrt{1+(p+r)(p+r+2)}}}} = \\ &= \dots = \sqrt{1+p(p+2)} = p+1. \end{aligned}$$

20. Oldd meg az

$$\begin{cases} x+y=a \\ xy-z^2=a^2 \end{cases}$$

egyenletrendszert a valós számok halmazában, ha $a \in \mathbb{R}$.

Megoldás. A rendszer alapján $x+y=a$ és $xy=a^2+z^2$, tehát x és y az $u^2-au+a^2+z^2=0$ egyenlet valós gyökei. Az egyenlet diszkriminánsa viszont $\Delta = a^2 - 4(a^2+z^2) = -3a^2 - 4z^2 \leq 0$, tehát csak $a=z=0$ esetén van megoldás, és ekkor $x=y=0$.

21. Oldd meg az

$$\begin{cases} ax+by+cz+dt=0 \\ bx-ay+dz-ct=0 \\ cx-dy-az+bt=0 \\ dx+cy-bz-at=0 \end{cases}$$

egyenletrendszert a valós számok halmazában, ha $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ és nem mind nullák (azaz $a^2+b^2+c^2+d^2 \neq 0$).

Megoldás. Ha az egyenletrendszert alkotó egyenletek mindkét oldalát rendre a -val, b -vel, c -vel, illetve d -vel szorozzuk, majd az így kapott egyenlőségek mindkét oldalait összeadjuk, az $(a^2+b^2+c^2+d^2)x=0$ egyenlethez jutunk, ahonnan $x=0$. Hasonlóan igazoljuk, hogy $y=z=t=0$.

22. Bizonyítsd be, hogy ha ABC egyenlő oldalú és P egy pont a síkjában, akkor érvényesek a következő tulajdonságok:

a) $PA+PB \geq PC$, $PB+PC \geq PA$ és $PA+PC \geq PB$; (Pompeiu)

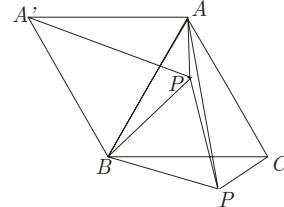
b) az előbbi egyenlőtlenségek közül egyszerre egyben lehet egyenlőség és ebben az esetben P az ABC köré írt körön van; (Van Schooten)

c) ha P_1 , P_2 és P_3 a P vetületei a BC , CA és AB oldalakra, akkor a $P_1P_2P_3$ háromszög hasonló az AP , BP és CP szakaszokkal szerkeszthető háromszöghöz.

(Sajátosan P_1 , P_2 és P_3 pontosan akkor kollineárisak, ha P az ABC háromszög köré írt körön van (Simson tétele).)

Megoldás. a)

Forgassuk el az ABC háromszöget a P ponttal együtt 60° fokkal. Ekkor a C pont az A pontba transzformálódik és így $CP = AP'$, $AP = A'P'$, $BP = B'P'$. Ez utóbbi egyenlőség alapján, mivel $m(\widehat{PBP'}) = 60^\circ$, következik,



hogy a BPP' háromszög egyenlő oldalú, ahonnan $BP = PP'$. Az APP' háromszögben $AP' + P'P \geq AP$, vagyis $CP + BP \geq AP$. Hasonlóan igazolható a többi egyenlőtlenség is.

b) Tételezzük fel, hogy $PA + PB = PC$ és $PB + PC = PA$, összeadva e két egyenlőséget kapjuk, hogy $PB = 0$, vagyis $P = B$. Tehát akkor áll fenn két egyenlőség, ha P az ABC háromszög valamely csúcsával egybeesik.

Tegyük fel, hogy $B \in \{A, B, C\}$ és $PB + PC = PA$. Ekkor az előző pont alapján $P - P' - A$ kollineárisak, tehát AP átló az $ABPC$ négyszögben. Az ABP' és CBP háromszögek kongruensek, innen pedig $m(\widehat{BPC}) = m(\widehat{BP'A}) = 120^\circ$. Tehát

$$m(\widehat{BAC}) + m(\widehat{BPC}) = 180^\circ, \text{ vagyis az } ABPC$$

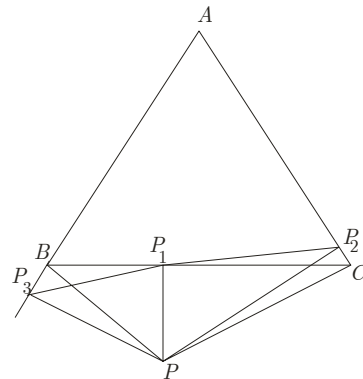
négyszög körbeírható.

c) Mivel $m(\widehat{AP_3P_1}) = m(\widehat{AP_2P_1}) = 90^\circ$, az AP_3P_2

háromszög köré írható körben AP átmérő, tehát a szinusztétel alapján $AP \sin \hat{A} = P_2P_3$,

$$BP \sin \hat{B} = P_1P_3, \quad CP \sin \hat{C} = P_1P_2.$$

Ebből következik, hogy $\frac{AP}{P_2P_3} = \frac{BP}{P_1P_3} = \frac{CP}{P_1P_2}$, tehát az



AP , BP , CP szakaszokkal szerkeszthető háromszög

és ez hasonló a $P_1P_2P_3$ háromszöghöz.

Másrészt $m(\widehat{P_3P_1B}) = m(\widehat{BPP_3})$, $m(\widehat{P_2P_1C}) = m(\widehat{P_2PC})$, tehát $P_3 - P_1 - P_2$

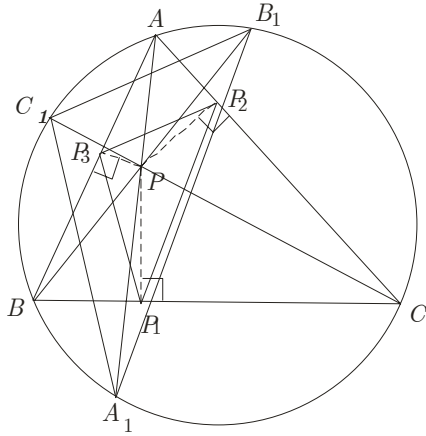
pontosan akkor egyenes, ha $m(\widehat{P_3PB}) = m(\widehat{P_2PC})$. De ez ekvivalens a

$m(\widehat{PBP_3}) = m(\widehat{PCP_2})$ egyenlőséggel és ez annak szükséges és elégséges feltétele, hogy az $ABPC$ négyszög körbeírható legyen.

23. Ha P egy pont az ABC_Δ síkjában és P_1 , P_2 és P_3 a P vetületei a BC , CA

illetve AB oldalakra, akkor $\frac{T[P_1P_2P_3]}{T[ABC]} = \frac{|OP^2 - R^2|}{4R^2}$.

Megoldás. A $m(\widehat{PP_2P_1}) = m(\widehat{PCB}) = m(\widehat{PB_1C_1})$, és



$$m(\widehat{PP_2P_3}) = m(\widehat{PAB}) = m(\widehat{PB_1A_1})$$

összefüggések alapján

$$m(\widehat{P_1P_2P_3}) = m(\widehat{A_1B_1C_1}).$$

Hasonlóan igazoljuk, hogy

$$m(\widehat{P_2P_3P_1}) = m(\widehat{B_1C_1A_1}), \text{ tehát a } P_1P_2P_3 \text{ és}$$

$A_1B_1C_1$ háromszögek hasonlóak.

$$\frac{T[P_1P_2P_3]}{T[ABC]} = \frac{T[P_1P_2P_3]}{T[A_1B_1C_1]} \cdot \frac{T[A_1B_1C_1]}{T[ABC]}.$$

Az $R = \frac{abc}{4T}$ összefüggés alapján

$$\begin{aligned} \frac{T[A_1B_1C_1]}{T[ABC]} &= \frac{A_1B_1 \cdot B_1C_1 \cdot C_1A_1}{AB \cdot BC \cdot CA} = \frac{PB_1}{PA} \cdot \frac{PC_1}{PB} \cdot \frac{PA_1}{PC} = \\ &= \frac{(PB \cdot PB_1) \cdot (PC \cdot PC_1) \cdot (PA \cdot PA_1)}{(PA \cdot PB \cdot PC)^2} = \frac{(R^2 - OP^2)^3}{(PA \cdot PB \cdot PC)^2} \end{aligned} \quad (1)$$

Másrészt $K = \frac{T[P_1P_2P_3]}{T[ABC]} = \left(\frac{P_1P_2}{A_1B_1} \right)^2 = \left(\frac{PC \cdot AB}{A_1B_1 \cdot 2R} \right)^2$, tehát

$$K^3 = \frac{PA^2 \cdot PB^2 \cdot PC^2}{(8R^3)^2} = \frac{(PA \cdot PB \cdot PC)^2}{(R^2 - OP^2)^6} \text{ és így } K = \frac{(PA \cdot PB \cdot PC)^2}{4R^2 \cdot (R^2 - OP^2)^2}. \quad (2)$$

Az (1) és (2) összefüggések alapján $\frac{T[P_1P_2P_3]}{T[ABC]} = \frac{|R^2 - OP^2|}{4R^2}.$

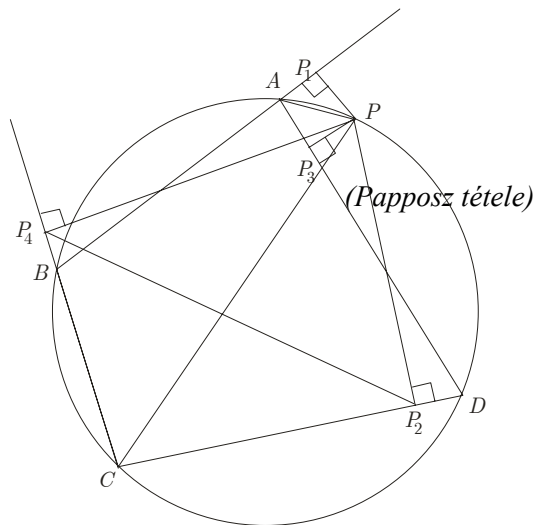
24. Bizonyítsd be, hogy ha P egy tetszőleges pont az $ABCD$ négyszög köré írt körön, akkor az AB és CD oldalaktól mért távolságainak szorzata egyenlő a BC és AD oldalaktól mért távolságainak szorzatával.

Megoldás. Az ábra jelölései alapján

$$\frac{PP_1}{PP_3} = \frac{\sin(\widehat{PP_3P_1})}{\sin(\widehat{PP_1P_3})} = \frac{\sin(\widehat{PAP_1})}{\sin(\widehat{PAP_3})} \text{ és}$$

$$\frac{PP_2}{PP_4} = \frac{\sin(\widehat{PP_4P_2})}{\sin(\widehat{PP_2P_4})} = \frac{\sin(\widehat{PCP_2})}{\sin(\widehat{PCP_4})}$$

(felhasználtuk, hogy a PP_1AP_3 és



PP_2CP_4 négyszögek körbeírhatóak). Másrészt $\sin(\widehat{PAP_1}) = \sin(\widehat{PCP_2})$ és $\sin(\widehat{PAP_3}) = \sin(\widehat{PCP_2})$, ahonnan $\frac{PP_1}{PP_3} = \frac{PP_4}{PP_2} \Rightarrow PP_1 \cdot PP_2 = PP_3 \cdot PP_4$.

25. Az ABC háromszög BC oldalán felvettünk egy olyan M pontot, amelyre az AMB és AMC háromszögekbe írt körök sugara kongruens. Bizonyítsd be, hogy $AM = \sqrt{p(p-a)}$.

Megoldás. Jelölje p_1 és p_2 az ABM , illetve AMC háromszög félkerületét, r_0 a körök sugarát. Ekkor

$$T[ABM] = p_1 r_0, \quad T[AMC] = p_2 r_0,$$

$$\text{ahonnan } T[ABC] = (p_1 + p_2) r_0 = \\ = (p + AD) r_0 = pr.$$

$$I_1 I_2 \parallel BC \Rightarrow \frac{I_1 I_2}{BC} = \frac{r - r_0}{r}.$$

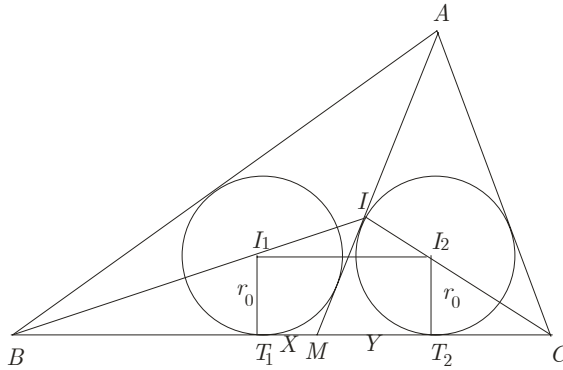
De $I_1 I_2 = T_1 T_2 = x + y$, ahol

$$x = p_1 - c \quad \text{és} \quad y = p_2 - b. \quad \text{Így}$$

$$x + y = p + AM - b - c, \quad \text{tehát}$$

$$\frac{p + AM - b - c}{a} = \frac{r - r_0}{r}. \quad \text{Ebből következik, hogy} \quad \frac{p - AM}{a} = \frac{r_0}{r} \quad \text{és}$$

$$\frac{p + AM}{p} = \frac{r}{r_0} \quad \text{alapján} \quad p^2 - AM^2 = a \cdot p, \quad \text{ahonnan} \quad AM = \sqrt{p(p-a)}.$$



26. (Erdős-Mordell egyenlőtlenség) Bizonyítsd be, hogy ha az ABC háromszög belső pontjának az oldalaktól mért távolságai d_a, d_b, d_c és a csúcsoktól való távolságai R_a, R_b, R_c , akkor

$$R_a + R_b + R_c \geq 2(d_a + d_b + d_c).$$

Megoldás. Előbb egy segédtevélt igazolunk.

Ha ABB_2A_1 és ACC_1A_2 tetszőleges paralelogrammák és a BCC_2B_1 paralelogramma CC_2 oldala egyenlő AM -mel és párhuzamos is vele, akkor

$$T[ABB_2A_1] + T[ACC_1A_2] = T[BCC_2B_1].$$

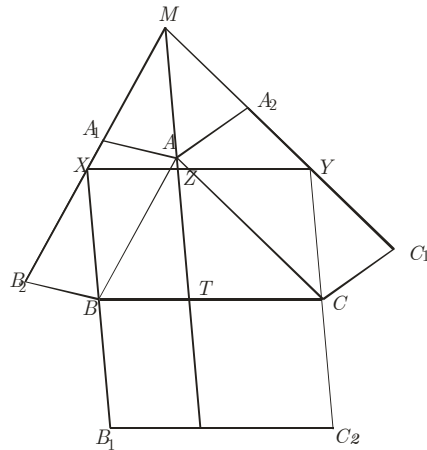
Valóban,

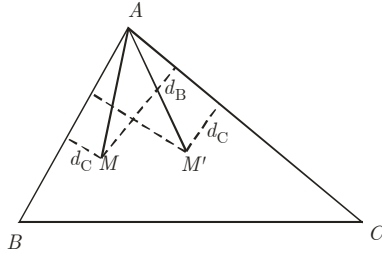
$$T[ABB_2A_1] = T[ABXM] = T[BXZT],$$

$$T[ACC_1A_2] = T[ACYM] = T[ZTCY] \quad \text{és}$$

$$T[XBTZ] + T[YCTZ] = T[XBCY] = T[BCC_2B_1]. \quad \text{A segédtevélt alapján}$$

$$c \cdot d_c + b \cdot d_b = aR_a \sin \alpha \leq aR_a.$$





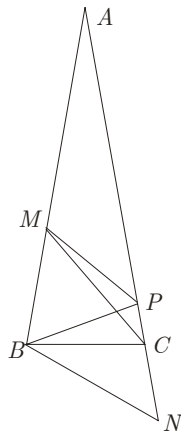
Ha M -et tükrözzük az A szög szögfelezőjére a d_c és d_b szerepe megcserélődik, tehát $c \cdot d_b + b \cdot d_c \leq aR_a$. Hasonló gondolatmenet alapján $c \cdot d_a + a \cdot d_c \leq bR_b$ és $a \cdot d_b + b \cdot d_a \leq cR_c$. Tehát $R_a + R_b + R_c \geq$

$$\geq \left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right)d_a + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right)d_b + \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right)d_c \geq \geq 2(d_a + d_b + d_c).$$

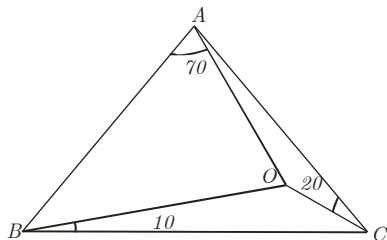
27. a) Az ABC háromszögben $m(\widehat{BAC}) = 20^\circ$, $AB = AC$, $M \in (AB)$, $N \in AC$ úgy, hogy $m(\widehat{MCA}) = m(\widehat{NBC}) = 30^\circ$ és $C \in (AN)$. Számítsd ki a BNM szög mértékét.

b) Az ABC háromszögben $AB = AC$, $O \in \text{Int}(ABC)$, $m(\widehat{OBC}) = 10^\circ$, $m(\widehat{OCA}) = 20^\circ$ és $m(\widehat{OAB}) = 70^\circ$. Bizonyítsd be, hogy $m(\widehat{BAC}) = 80^\circ$.

Megoldás



a) Felveszük a $P \in (AC)$ pontot úgy, hogy $m(\widehat{MBP}) = 60^\circ$. A BPC háromszögben $m(\widehat{BCP}) = 80^\circ$ és $m(\widehat{PBC}) = 20^\circ$, tehát $BP = BC$. Ugyanakkor $m(\widehat{MBC}) = 80^\circ$ és $m(\widehat{MCB}) = 50^\circ$ alapján $m(\widehat{BMC}) = 50^\circ$, tehát $BM = MC$. Így a BMP háromszög egyenlő oldalú. Másrészt a PNB háromszögben $m(\widehat{PBN}) = 50^\circ$ és $m(\widehat{BNC}) = 50^\circ$, tehát $BP = PN$ és így az MPN háromszög is egyenlő szárú. Mivel $m(\widehat{MPC}) = 60^\circ + 80^\circ = 140^\circ$, következik, hogy $m(\widehat{MNP}) = 20^\circ$, tehát $m(\widehat{BNM}) = 30^\circ$.



b) Előbb oldjuk meg a fordított feladatot. Az ABC egyenlő szárú háromszögben $m(\widehat{BAC}) = 80^\circ$ és felvesszük az $O \in \text{int}(ABC)$ pontot úgy, hogy $m(\widehat{OBC}) = m(\widehat{OCA}) = 10^\circ$.

Számítsuk ki az $\widehat{OCA}$ szög mértékét!

Ceva tételének trigonometrikus alakja szerint

$$\frac{\sin 70^\circ}{\sin 10^\circ} \cdot \frac{\sin x}{\sin(50^\circ - x)} \cdot \frac{\sin 10^\circ}{\sin 40^\circ} = 1,$$

tehát $\frac{\sin x}{\sin(50^\circ - x)} = \frac{\sin 40^\circ}{\sin 70^\circ}$. Származtatással a

$$\frac{\sin x - \sin(50^\circ - x)}{\sin x + \sin(50^\circ - x)} = \frac{\sin 40^\circ - \sin 70^\circ}{\sin 40^\circ + \sin 70^\circ}$$

egyenlőséget kapjuk, ahonnan $\frac{\operatorname{tg}(x - 25^\circ)}{\operatorname{tg} 25^\circ} = -\frac{\operatorname{tg} 15^\circ}{\operatorname{tg} 55^\circ}$. Másrészt $\frac{\sin 20^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\sin 40^\circ}{\sin 70^\circ}$

és így $\frac{\operatorname{tg} 15^\circ \cdot \operatorname{tg} 25^\circ}{\operatorname{tg} 55^\circ} = \operatorname{tg} 5^\circ$, tehát $\operatorname{tg}(x - 25^\circ) = \operatorname{tg}(-5^\circ)$, ahonnan következik,

hogy $x = 20^\circ$.

Az eredeti feladat megoldása. Az OBA és OBC háromszögekben felírva a szinusz-tételt:

$$\left. \begin{aligned} \frac{OB}{\sin 70^\circ} &= \frac{l}{\sin(120^\circ - x)} \\ \frac{OB}{\sin(x - 20^\circ)} &= \frac{BC}{\sin(190^\circ - x)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\sin(x - 20^\circ)}{\sin 70^\circ} = \frac{l}{BC} \frac{\sin(x - 10^\circ)}{\sin(120^\circ - x)}$$

Az OCA és OBC háromszögekből:

$$\left. \begin{aligned} \frac{OB}{\sin 70^\circ} &= \frac{l}{\sin(120^\circ - x)} \\ \frac{OB}{\sin(x - 20^\circ)} &= \frac{BC}{\sin(190^\circ - x)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\sin(x - 20^\circ)}{\sin 70^\circ} = \frac{l}{BC} \frac{\sin(x - 10^\circ)}{\sin(120^\circ - x)}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{l}{\sin(50^\circ + 2x)} &= \frac{OC}{\sin(110^\circ - 2x)} \\ \frac{BC}{\sin(190^\circ - x)} &= \frac{OC}{\sin 10^\circ} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\sin 10^\circ}{\sin(110^\circ - 2x)} = \frac{BC}{l} \frac{\sin(50^\circ + 2x)}{\sin(x - 10^\circ)}$$

Az OCA és OBA háromszögekből:

$$\left. \begin{aligned} \frac{l}{\sin(50^\circ + 2x)} &= \frac{OA}{\sin 20^\circ} \\ \frac{l}{\sin(120^\circ - x)} &= \frac{OA}{\sin(x - 10^\circ)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\sin(120^\circ - x)}{\sin(50^\circ + 2x)} = \frac{\sin(x - 10^\circ)}{\sin 20^\circ},$$

ahonnan kapjuk, hogy $\sin(x - 10^\circ) \sin(50^\circ + 2x) = \sin 20^\circ \sin(120^\circ - x)$. Mivel $20^\circ \leq x \leq 55^\circ$, a bal oldali kifejezés szigorúan növekvő, míg a jobb oldali kifejezés szigorúan csökkenő, az egyenletnek tehát egyetlen megoldása van, ez az $x = 50$ (a fordított tulajdonság alapján). Innen kapjuk, hogy $m(\widehat{BAC}) = 180^\circ - 2 \cdot 50^\circ = 80^\circ$.

28. Bizonyítsd be, hogy az

$$a_1x^2 + 2a_2x + a_3 = 0$$

$$a_2x^2 + 2a_3x + a_4 = 0$$

$$a_3x^2 + 2a_4x + a_5 = 0$$

$$\dots\dots\dots$$

$$a_{n-1}x^2 + 2a_nx + a_1 = 0$$

$$a_nx^2 + 2a_1x + a_2 = 0$$

egyenletek közül legalább az egyiknek van valós gyöke, ha $a_k \in R$, bármely $k = \overline{1, n}$ esetén! Adjál példát olyan $a_1, a_2, \dots, a_n$ számokra, amelyekre az előbbi egyenletek közül pontosan egynek van valós gyöke!

Megoldás. Feltételezzük, hogy egyik egyenletnek sincs valós gyöke. Következik, hogy $\frac{\Delta_k}{4} = a_{k+1}^2 - a_k a_{k+2} < 0$, bármely $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ esetén, ahol $a_{n+1} = a_1$ és $a_{n+2} = a_2$.

Összeadjuk a diszkriminánsokra kapott egyenlőtlenségeket:

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 - a_1 a_3 - a_2 a_4 - \dots - a_{n-2} a_n - a_{n-1} a_1 - a_n a_2 < 0 \quad / \cdot 2$$

$$\Updownarrow$$

$$(a_1^2 - 2a_1 a_3 + a_3^2) + (a_2^2 - 2a_2 a_4 + a_4^2) + \dots + (a_n^2 - 2a_n a_2 + a_2^2) < 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(a_1 - a_3)^2 + (a_2 - a_4)^2 + \dots + (a_{n-1} - a_1)^2 + (a_n - a_2)^2 < 0.$$

Az utóbbi egyenlőtlenség ellentmondás, tehát van olyan egyenlet amelynek a diszkriminánsa pozitív, és így ennek az egyenletnek van valós gyöke. A továbbiakban megadunk egy szerkesztést, amellyel elérhető, hogy pontosan egy egyenletnek legyen valós gyöke. Legyen $a_1 = a_2 = 1$ és $a_3 = 2$. Belátható, hogy így az első egyenletnek

nincs valós gyöke. A második egyenletben legyen $a_4 \in N$, és $a_4 > \frac{a_3^2}{a_2}$. Ezzel a

választással a második egyenletnek sincs valós gyöke. Általában a_k -t úgy választjuk

meg, hogy teljesüljön az $a_k > \frac{a_{k-1}^2}{a_{k-2}}$ egyenlőtlenség, ha $k = \overline{3, n}$. Így

$a_n > a_{n-1} > \dots > a_3 > a_2 = a_1 = 1$, és csak az $a_{n-1}x^2 + 2a_nx + a_1 = 0$ egyenlet diszkriminánsa lesz pozitív, tehát az $n-1$ -edik egyenletnek van valós gyöke. Az utolsó egyenlet diszkriminánsa negatív, mert $a_1^2 - a_n a_2 = 1 - a_n < 0$.

Tehát csak az $n-1$ -edik egyenletnek van valós gyöke.

29. Bizonyítsd be, hogy n darab n -nel nem osztható természetes szám közül kiválasztható néhány, amelyek összege osztható n -nel!

Megoldás. Legyenek a számok $a_1, a_2, \dots, a_n$. Képezzük az

$$s_1 = a_1,$$

$$\begin{aligned}s_2 &= a_1 + a_2, \\s_3 &= a_1 + a_2 + a_3, \\&\dots\dots\dots \\s_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n\end{aligned}$$

összegeket. Ha az s_i , $i = \overline{1, n}$ összegek közül az egyik osztható n -nel, akkor készen vagyunk. Ellenkező esetben az n -nel való osztási maradékaik az $\{1, 2, \dots, n-1\}$ halmazban kell legyenek. Mivel pontosan n összeg van, és a halmazban $n-1$ elem van, következik, hogy az összegek között szerepel kettő, s_k és s_l , $k < l$, amelyeknek az n -nel való osztási maradéka megegyezik. Innen következik, hogy $s_l - s_k$ osztható n -nel. $s_l - s_k = a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_l$ és a feltételek alapján $l - k \geq 2$, tehát az a_{k+1} , a_{k+2} , ..., a_l számok összege osztható n -nel.

30. Az ABC háromszög köré írt körön felvesszük az $A' \in (\widehat{BC})$, $B' \in (\widehat{AC})$ és $C' \in (\widehat{BA})$ pontokat úgy, hogy az ABC és $A'B'C'$ háromszögek kongruensek legyenek. Bizonyítsd be, hogy az A' , B' és C' pontokon át BC -vel, CA -val illetve AB -vel húzott párhuzamosoknak ugyanezen pontokon át egy tetszőleges d egyenessel húzott párhuzamosokra vonatkozó szimmetrikusai összefutó egyenesek és az összefutási pont a háromszög köré írt körön van.

Megoldás. Legyen M az A' és C' pontokból induló egyenesek metszéspontja. A M akkor és csak akkor van rajta a körön, ha az $MA'C'B'$ négyszög körbeírható. Ez pontosan akkor teljesül, ha $m(\widehat{MA'B'}) = m(\widehat{MC'B'})$.

$$\begin{aligned}m(\widehat{MA'B'}) &= m(\widehat{B'A'A_1}) - m(\widehat{MA'A_1}) = m(\widehat{B'A'A_1}) - m(\widehat{A_1A'G}) = \\&= m(\widehat{B_1B'A'}) - m(\widehat{A_1A'G}) = (m(\widehat{C'B'A'}) - m(\widehat{B_1B'C'})) - m(\widehat{A_1A'G}) = \\&= (m(\widehat{C'B'A'}) - m(\widehat{B'\hat{C}'C_1})) - m(\widehat{A_1A'G}) = \\&= (m(\widehat{C'B'A'}) - m(\widehat{A_1A'G})) - m(\widehat{B'\hat{C}'C_1}).\end{aligned}$$

Felhasználjuk, hogy $m(\widehat{A'B'C'}) = m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{EFG})$ (párhuzamos szárú szögek), és $m(\widehat{EC'C_1}) + m(\widehat{A_1A'G}) = m(\widehat{EFG})$. Az eddigi összefüggések alapján

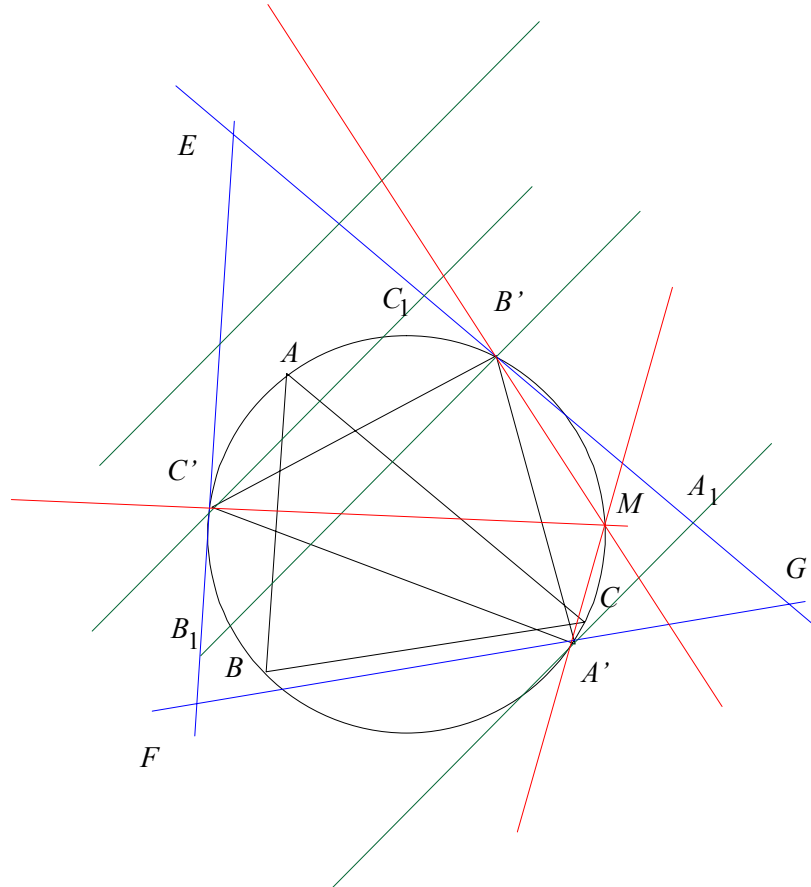
$$m(\widehat{EC'C_1}) = m(\widehat{EFG}) - m(\widehat{A_1A'G}) = m(\widehat{C'B'A'}) - m(\widehat{A_1A'G}).$$

Tehát

$$m(\widehat{MA'B'}) = m(\widehat{EC'C_1}) - m(\widehat{B'\hat{C}'C_1}) = m(\widehat{C_1\hat{C}'M}) - m(\widehat{B'\hat{C}'C_1}) = m(\widehat{MC'B'}).$$

Következik, hogy M a körön van. Hasonlóképpen, ha N a B' és C' pontokból induló egyenesek metszéspontja, igazolható, hogy N rajta van a körülírt körön. Viszont a B' -ből induló egyenes az M , N , B' pontokban metszené a kört, és

$M \neq B'$, valamint $N \neq B'$, tehát csak az $M = N$ eset lehetséges, ami azt jelenti, hogy a három egyenes összefut és a metszéspont a körülírt körön van.

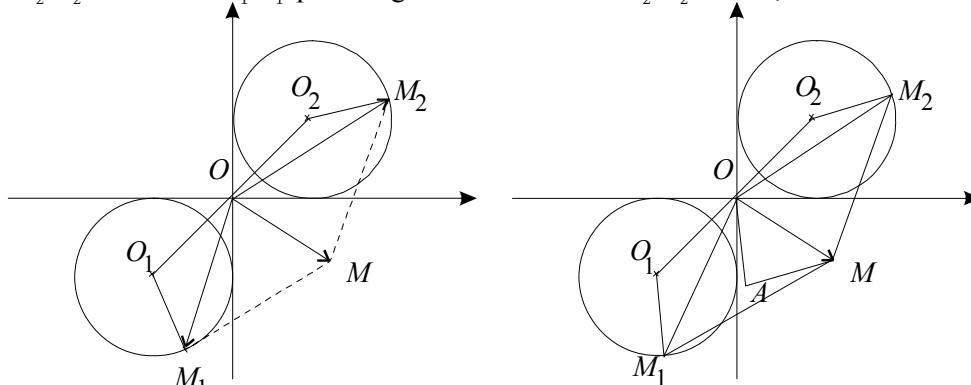


31. A $C(O_1, R)$ és $C(O_2, R)$ körök közös belső érintője merőlegesek és az $O \in (O_1O_2)$ pontban metszik egymást. Határozd meg az $\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$ kötött vektor végpontjának a mértani helyét, ha $M_1 \in C(O_1, R)$ és $M_2 \in C(O_2, R)$ változó pontok.

Megoldás. Legyen $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$. $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M_1} + \overrightarrow{OO_2} + \overrightarrow{O_2M_2} =$
 $= (\overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{OO_2}) + \overrightarrow{O_1M_1} + \overrightarrow{O_2M_2} = \overrightarrow{O_1M_1} + \overrightarrow{O_2M_2} \Rightarrow$
 $\Rightarrow |\overrightarrow{OM}| = |\overrightarrow{O_1M_1} + \overrightarrow{O_2M_2}| \leq |\overrightarrow{O_1M_1}| + |\overrightarrow{O_2M_2}| = 2R,$

tehát az M pont a $C(O, 2R)$ körlapon helyezkedik el. Igazoljuk, hogy a keresett mértani hely a $C(O, 2R)$ körlap. Legyen M egy tetszőleges pont a körlapról. Mivel $OM \leq 2R$, létezik egy A pont úgy, hogy $OA = AM = R$. Szerkesszük meg az

OO_2M_2A és a MAO_1M_1 paralelogrammákat! Ekkor $\overrightarrow{O_2M_2} = \overrightarrow{OA}$,



$|\overrightarrow{O_2M_2}| = R \Rightarrow M_2 \in C(O_2, R)$ és $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{O_1M_1}$, $M_1 \in C(O, R)$.

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{O_2M_2} + \overrightarrow{O_1M_1} = \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_1}$, tehát létezik M_1 és M_2 úgy, hogy $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$. Ezzel igazoltuk, hogy minden ilyen M pont a körlapon van (beleértve a határát is), és minden pont a körlapról a mértani helyhez tartozik.

32. Legalább hány lépés szükséges ahhoz, hogy egy 10×10 -es tábla bal alsó sarkából a jobb felső sarkába jussunk lólépésben?

Megoldás. Megvizsgáljuk, hogy melyik mezőkre juthatunk el 1, 2, ... lépésben.

	1								
		1							
0									

	2		2						
		2		2					
	2	1			2				
			1	2					
0			2		2				

5	6	5	6	5	6	5	6	7	6
4	5	4	5	4	5	6	5	6	7
5	4	5	4	5	4	5	6	5	6
4	3	4	3	4	5	4	5	6	5
3	4	3	4	3	4	5	4	5	6
2	3	2	3	4	3	4	5	4	5
3	2	3	2	3	4	3	4	5	6
2	1	4	3	2	3	4	5	4	5
3	4	1	2	3	4	3	4	5	6
0	3	2	3	2	3	4	5	4	5

33. Bizonyítsd be, hogy $4 \sin 20^\circ \cdot \cos^2 10^\circ = \sqrt{3} \sin 50^\circ$.

Megoldás. Felhasználva a $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ és $\sin x = \cos(\pi - x)$ valamint

$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \quad \forall x, y \in \mathbf{R}$ azonosságokat következik, hogy:

$$4 \sin 20^\circ \cdot \cos^2 10^\circ = \sqrt{3} \sin 50^\circ \Leftrightarrow 2 \sin 20^\circ (1 + \cos 20^\circ) = \sqrt{3} \cos 40^\circ \Leftrightarrow$$

$$2 \sin 20^\circ + 2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ = \sqrt{3} \cos 40^\circ \Leftrightarrow \sin 20^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 40^\circ - \frac{1}{2} \sin 40^\circ \Leftrightarrow$$

$$\sin 20^\circ = \cos 30^\circ \cos 40^\circ - \sin 30^\circ \sin 40^\circ \Leftrightarrow \sin 20^\circ = \cos 70^\circ.$$

Ez utóbbi egyenlőség pedig nyilvánvaló, mert $20^\circ + 70^\circ = 90^\circ$.

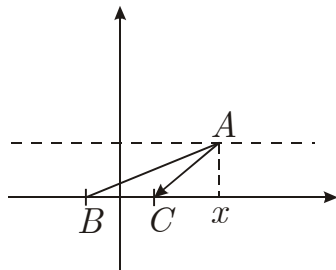
34. Oldd meg és tárgyald a $\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} = m$, ($x \in \mathbf{R}$) egyenletet az m valós paraméter függvényében.

Megoldás. A gyök alatti kifejezések szigorúan pozitívak minden valós x -re, mert

diszkriminánsuk negatív. Észrevehető, hogy $\sqrt{x^2 \pm x + 1} = \sqrt{\left(x \pm \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$,

tehát a $d_{1,2}(x) = \sqrt{x^2 \pm x + 1}$ pozitív valós számok az $A\left(x, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ és $B\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ illetve

az $A\left(x, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ és $C\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ pontok távolsága.



Az ABC háromszögben felírva a háromszög egyenlőtlenségeket, kapjuk: $-1 < d_1(x) - d_2(x) < 1$ (Az egyenlőtlenségek szigorúak, mert a háromszög nem elfajult). Tehát m -nek teljesíteni kell az $m \in (-1, 1)$ feltételt. Észrevehető az is, hogy az m és az x előjele megegyező kell legyen. (1)

Ha a $\sqrt{x^2 + x + 1} = \sqrt{x^2 - x + 1} + m$ egyenletet négyzetre emeljük (megtehetjük, mert mindkét oldal pozitív) és rendezzük a $2x - m^2 = 2m\sqrt{x^2 - x + 1}$ (2) egyenlethez jutunk. Ez utóbbi egyenlőség teljesüléséhez a $2x - m^2$ és az m előjele azonos kell legyen, azaz kell teljesülnön a $(2x - m^2)m \geq 0$ egyenlőtlenség.

Tehát ha $m < 0 \Rightarrow x \leq \frac{m^2}{2}$ és ha $m > 0 \Rightarrow x \geq \frac{m^2}{2}$.

A (2) egyenletet négyzetre emelve és rendezve, kapjuk: $x^2 = \frac{m^2(4 - m^2)}{4(1 - m^2)}$, ez utóbbi

pedig nyilvánvalóan nagyobb, mint $\frac{m^4}{4} \left(x^2 \geq \frac{m^4}{4} \Leftrightarrow \frac{4 - m^2}{1 - m^2} \geq 1 \right)$, ez utóbbi pedig

igaz, mert $m \in (-1, 1)$. Tehát az (1) megjegyzést figyelembe véve, ha $m < 0$, akkor

$$x = -\sqrt{\frac{m^2(4-m^2)}{4(1-m^2)}} = \frac{m}{2} \sqrt{\frac{4-m^2}{1-m^2}} \text{ és ha } m \geq 0, \text{ akkor}$$

$$x = \sqrt{\frac{m^2(4-m^2)}{4(1-m^2)}} = \frac{m}{2} \sqrt{\frac{4-m^2}{1-m^2}}.$$

Következésképpen $\forall m \in (-1, 1)$, $x = \frac{m}{2} \sqrt{\frac{4-m^2}{1-m^2}}$.

35. Az ABC háromszög BC , CA és AB oldalain felvesszük az M , N és P pontokat úgy, hogy $\frac{BM}{MC} = \frac{CN}{NA} = \frac{AP}{PB} = k$.

Bizonyítsd be, hogy az AM , BN és CP szakaszokkal szerkeszthető egy H háromszög. Számítsd ki a H és az ABC háromszögek területének arányát k függvényében!

Megoldás. Mivel ABC egy háromszög, következik, hogy $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 0$ és $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} = 0$. Igazolni fogjuk, hogy az $[AM]$, $[BN]$ és $[CN]$ szakaszokkal irányuk megőrzésével szerkeszthető háromszög. Azaz, hogy $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = 0$. Ehhez kiszámoljuk az M , N és P pontok helyzetvektorait az A , B és C pontok helyzetvektorainak függvényében. Tudjuk, hogy $\frac{BM}{MC} = \frac{CN}{NA} = \frac{AP}{PB} = k$, tehát

$$m = \frac{b + kc}{1 + k}, \quad n = \frac{c + ka}{1 + k}, \quad \text{és } p = \frac{a + kb}{1 + k} \Rightarrow$$

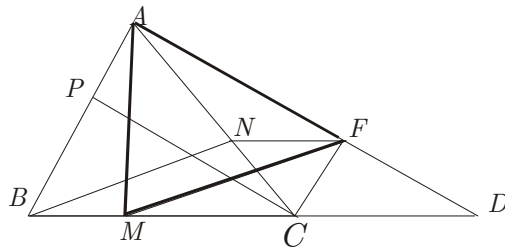
$$\overrightarrow{AM} = \frac{b + kc}{1 + k} - a = \frac{b + kc - a - ka}{1 + k} = \frac{\overrightarrow{AB} + k \overrightarrow{AC}}{1 + k}.$$

Hasonlóan $\overrightarrow{BN} = \frac{\overrightarrow{BC} + k \overrightarrow{BA}}{1 + k}$ és $\overrightarrow{CP} = \frac{\overrightarrow{CA} + k \overrightarrow{CB}}{1 + k}$. Tehát $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} =$

$$\frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + k(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB})}{1 + k} = 0$$

Szintetikus megoldás

Az $[PC]$ szakaszt párhuzamosan eltoljuk úgy, hogy a P pont az A -ba kerüljön. Ekkor a C pont egy F pontba kerül. Igazolni fogjuk, hogy az AMF_Δ pontosan az a keresett H háromszög. Ehhez igazolni kell, hogy $[FM] \equiv [BN]$ (sőt



párhuzamos is). Legyen az AF és BC egyenesek metszéspontja D . Mivel $PC = AF$ és $PC \parallel AF$, következik, hogy $APCF$ paralelogramma. Tehát $FC \parallel AP$ és $FC = AP$. Az ABD_{Δ} -ben Thalész tételét alkalmazva, kapjuk $\frac{FC}{AB} = \frac{DF}{AD} = \frac{CD}{DB}$, de $FC = AP \Rightarrow$

$$\frac{FC}{AB} = \frac{DF}{AD} = \frac{CD}{DB} = \frac{AP}{AB} = \frac{k}{k+1}.$$

Észrevehető hogy az ACD_{Δ} -ben $\frac{DF}{AD} = \frac{CN}{AC} = \frac{k}{k+1} \Rightarrow NF \parallel CD$ (1) $\Rightarrow$

$$\frac{NF}{CD} = \frac{AN}{AC} = \frac{1}{k+1}. \text{ Tudjuk, hogy } \frac{CD}{BD} = \frac{k}{k+1} \Rightarrow \frac{CD}{BC} = k \Rightarrow$$

$$\frac{NF}{BC} = \frac{NF}{CD} \cdot \frac{CD}{BC} = \frac{1}{k+1} \cdot k = \frac{k}{k+1} = \frac{BM}{BC} \Rightarrow NF = MB \text{ (2).}$$

(1), (2) $\Rightarrow BMFN$ paralelogramma $\Rightarrow MF \parallel BN$ és $MF = BN$.

Jelöljük T_0 illetve T -vel a H illetve ABC háromszögek területét.

$$\begin{aligned} \frac{T_0}{T_{AMD_{\Delta}}} &= \frac{AF}{AD} = \frac{AN}{AC} = \frac{1}{k+1}, \quad \frac{T_{AMD_{\Delta}}}{T} = \frac{MD}{BC} = \frac{BD - BM}{BC} = \frac{BD}{BC} - \frac{k}{k+1} = \\ &= \frac{AD}{AF} - \frac{k}{k+1} = k+1 - \frac{k}{k+1} = \frac{k^2 + k + 1}{k+1}. \end{aligned}$$

$$\text{Tehát } \frac{T_0}{T} = \frac{T_0}{T_{AMD_{\Delta}}} \cdot \frac{T_{AMD_{\Delta}}}{T} = \frac{1}{k+1} \cdot \frac{k^2 + k + 1}{k+1} = \frac{k^2 + k + 1}{k^2 + 2k + 1}.$$

36. Bizonyítsd be, hogy ha $a, b > 0$ és $a + b = 1$, akkor

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \geq 3\sqrt{2}.$$

Megoldás. A feladatbeli egyenlőtlenség bal oldala felírható az alábbi módon:

$$\begin{aligned} \sqrt{a} + \sqrt{b} + \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} &= \sqrt{a} + \sqrt{b} + \frac{1}{2\sqrt{a}} + \frac{1}{2\sqrt{b}} + \frac{1}{2\sqrt{a}} + \frac{1}{2\sqrt{b}} = \\ &= \left(\sqrt{a} + \frac{1}{2\sqrt{a}} \right) + \left(\sqrt{b} + \frac{1}{2\sqrt{b}} \right) + \left(\frac{1}{2\sqrt{a}} + \frac{1}{2\sqrt{b}} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

A számtani és mértani középátlósok közti egyenlőtlenséget használva, kapjuk:

$$\sqrt{a} + \frac{1}{2\sqrt{a}} \geq 2\sqrt{\sqrt{a} \cdot \frac{1}{2\sqrt{a}}} \Leftrightarrow \sqrt{a} + \frac{1}{2\sqrt{a}} \geq \sqrt{2} \quad (2).$$

$$\text{Hasonlóan } \sqrt{b} + \frac{1}{2\sqrt{b}} \geq \sqrt{2} \quad (3).$$

$$\text{A továbbiakban igazoljuk, hogy } \frac{1}{2\sqrt{a}} + \frac{1}{2\sqrt{b}} \geq \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{2}{\sqrt{ab}} \geq 8 \Leftrightarrow$$

$$\frac{a+b}{ab} + \frac{2}{\sqrt{ab}} \geq 8 \Leftrightarrow \frac{1}{ab} + \frac{2}{\sqrt{ab}} \geq 8 \text{ (mert } a+b=1).$$

Nyilvánvaló, hogy $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \Leftrightarrow a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{\sqrt{ab}} \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{ab} \geq 4. \text{ Tehát } \frac{1}{ab} + \frac{2}{\sqrt{ab}} \geq 8 \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{a}} + \frac{1}{2\sqrt{b}} \geq \sqrt{2} \quad (4).$$

Az (1), (2), (3) és (4) összefüggésekből következik, hogy $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \geq 3\sqrt{2}.$

37. Oldjátok meg az $x^2 + y^2 = xy + 2000$ egyenletet az egész számok halmazában!

Megoldás. Ha x és y páratlan lenne, akkor az egyenlet bal oldala páros, jobb oldala pedig páratlan lenne. Tehát nem lehet mindkét ismeretlen páratlan. Ha x páros, akkor y is páros. Hasonló gondolatmenet alapján létezik $x_1 \in \mathbb{N}$ és $y_1 \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $x = 4x_1$ és $y = 4y_1$. Így az $x_1^2 - x_1y_1 + y_1^2 - 125 = 0$ egyenlethez jutunk, melynek diszkriminánsa $\Delta = 500 - 3y_1^2$. Ahhoz, hogy x_1, y_1 egész számok legyenek, szükséges, hogy Δ teljes négyzet legyen, vagyis $\Delta = u^2$, $u \in \mathbb{Z}$. Innen kapjuk, hogy $500 = u^2 + 3y_1^2$. Tudjuk, hogy egy teljes négyzet 3-mal való osztási maradéka 0 vagy 1 lehet, tehát a jobb oldal 3-mal való osztási maradéka 0 vagy 1 lehet, azonban 500-nak 3-mal osztva kettőt ad maradékul. Tehát ellentmondáshoz jutottunk, vagyis az egyenletnek nincs egész megoldása.

38. Az a , b és c , nullától különböző valós számok összege nulla. Bizonyítsátok be, hogy:

$$\frac{a^2}{a^2 - b^2 - c^2} + \frac{b^2}{b^2 - c^2 - a^2} + \frac{c^2}{c^2 - a^2 - b^2} = \frac{3}{2}.$$

Megoldás. Az $a = -(b + c)$ egyenlőség alapján $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc$. Innen

$$\frac{a^2}{a^2 - b^2 - c^2} = \frac{a^2}{2bc}, \text{ így az egyenlőség bal oldalán álló } S \text{ összegre}$$

$$S = \frac{a^2}{2bc} + \frac{b^2}{2ac} + \frac{c^2}{2ab} = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{2abc}.$$

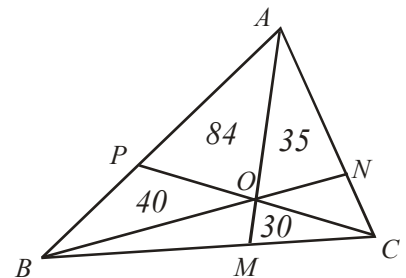
Másrészt $a + b + c = 0$ esetén $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$, tehát $S = \frac{3}{2}$.

39. Az ABC háromszöglapot az ábrán látható három összefutó egyenes hat kisebb háromszögre bontja. Közülük négy háromszög területének mérőszámát az ábrán feltüntettük. Határozzátok meg az ABC háromszög területét!

Megoldás. $\frac{BM}{MC} = \frac{T[BOM]}{T[MOC]} = \frac{T[AOB]}{T[AOC]}$, tehát

$$\frac{40}{30} = \frac{84 + x}{35 + y}, \text{ ahol } x = T[POB] \text{ és } y = T[AON]. \text{ Ebből az}$$

$$\text{egyenletből } 4y - 3x = 112. \text{ Másrészt } \frac{AP}{PB} = \frac{84}{x} = \frac{y + 35}{70}.$$

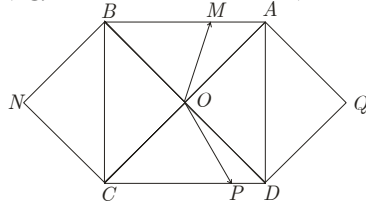


A két egyenlet alapján $x = 56$ és $y = 70$, tehát $T[ABC] = 315$.

40. Az $ABCD$ négyzet oldalain mozog az M és a P pont. Ha O a négyzet középpontja, határozzátok meg az $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP}$ összegvektor végpontjának mértani helyét, az alábbi esetekben:

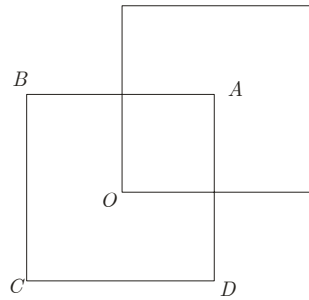
a) az M pont az $[AB]$, a P pont pedig a $[CD]$ szakaszon mozog, egymástól függetlenül;

b) a két pont a négyzet oldalain mozog, tetszőlegesen, egymástól függetlenül (egymásra is kerülhetnek).



Megoldás. a) $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP} =$
 $= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \lambda_1 \overrightarrow{BA} + \lambda_2 \overrightarrow{CD} =$
 $= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + (\lambda_1 + \lambda_2) \overrightarrow{BA}$, ahol $\lambda_1 + \lambda_2 \in [0, 2]$.
 Tehát az összegvektor végpontjainak mértani helye az NQ szakasz, ahol N és Q az O szimmetrikusai

a BC és DA oldalakra nézve.



b) Ha $m \in [AB]$ és $P \in [AD]$ akkor $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP} =$
 $= \overrightarrow{OB} + \lambda_1 \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{OD} + \lambda_2 \overrightarrow{DA} = \lambda_1 \overrightarrow{BA} + \lambda_2 \overrightarrow{DA}$. Ebben az esetben a mértani hely az A középpontú négyzet belseje, amelynek O az egyik csúcsa. Mivel M és N tetszőlegesen mozoghat a mértani hely az $A_1B_1C_1D_1$ négyzet és belseje, ahol A_1, B_1, C_1, D_1 az O pont szimmetrikusai az A, B, C, D pontokra nézve.

41. Lehet-e a $\frac{p_1}{p_2} + \frac{p_2}{p_3} + \frac{p_3}{p_4} + \dots + \frac{p_k}{p_{k+1}}$ összeg egész szám, ha $p_1, p_2, \dots, p_{k+1}$

páronként különböző prímszámok. (SZAT* miniverseny 5 perc, Szilágyi Zsolt)

Megoldás. Ha közös nevezőre hozunk a számlálóban egy tag kivételével mindegyik osztható lesz p_2 -vel. Ugyanakkor a nevező $p_2 p_3 \dots p_{k+1}$, tehát a törtet p_2 -vel nem lehet egyszerűsíteni és így az összeg nem lehet egész szám.

42. Bizonyítsd be, hogy ha $\frac{1}{30} + \frac{1}{31} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{43} = \frac{a}{b}$, ($a, b \in \mathbb{N}$) akkor a osztható 73-mal. (SZAT miniverseny 5 perc)

Megoldás. Az összeg felírható $\left(\frac{1}{30} + \frac{1}{43}\right) + \left(\frac{1}{31} + \frac{1}{42}\right) + \dots + \left(\frac{1}{36} + \frac{1}{37}\right)$ alakban, tehát

$$\frac{a}{b} = 73 \cdot \left(\frac{1}{30 \cdot 43} + \frac{1}{31 \cdot 42} + \dots + \frac{1}{36 \cdot 37} \right).$$

* Székelyudvarhelyi Matematikai Alkotótábor 2001.

Mivel a nevezőkben nem szerepel a 73 és 73 prímszám, következik, hogy a osztható 73-mal.

43. Három üres csupor van az asztalon. Micimackó, Nyuszi és Bagoly felváltva tesznek egy-egy mogorót a csuprokba. A kezdőt pénzfeldobással sorsolják ki. Micimackó csak az első két csuporba tehet, Nyuszi a másodikba és a harmadikba, Bagoly az elsőbe vagy a harmadikba. Aki valamelyik csuporba a 2001-edik mogorót teszi, az veszít. Bizonyítsd be, hogy Micimackó és Bagoly összefoghat Nyuszi ellen.
(SZAT miniverseny 5 perc)

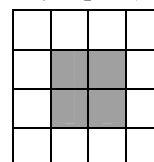
Megoldás. Micimackó addig tesz a második csuporba, amíg abban kevesebb, mint 2000 mogoró van. Bagoly addig tesz a harmadik csuporba, amíg abban kevesebb, mint 2000 mogoró van. Így leghamarabb a második vagy a harmadik csuporba kerül 2000 mogoró és az első csuporba addig egy mogoró sem kerül. A továbbiakban Nyuszi csak egy csuporba tehet (ha nem akar gyorsan veszíteni), míg az egyik ellenfele tehet ugyanabba a csuporba, mint Nyuszi, és a másik ellenfél kezdi feltölteni az első csuprot. Ezután legfeljebb 1000 mogoró bedobása után eléri, hogy a második és a harmadik csuporban 2000 mogoró legyen és az elsőben legfeljebb 1000. Így Nyuszi kénytelen valamelyik csuporba betenni a 2001-edik mogorót és ezzel veszít.

44. Legfeljebb hány huszár helyezhető el egy 4×4 -es sakktáblán úgy, hogy ne legyen közöttük kettő, amely ütné egymást. Általánosítás. (SZAT miniverseny 5 perc)

Megoldás. Az azonos színű mezőkön levő huszárok nem ütnek egymást. Így 8 huszár elhelyezhető a táblán. Másrészt, ha 9 huszár van a táblán, akkor legalább egy sorban található legalább három. Ezek közül kettő biztosan egymás mellett helyezkedik el, ezek ütnek egymást. Tehát legfeljebb 8 huszár helyezhető el. Általánosan, egy $4k \times 4k$ méretű táblára $8k^2$ huszár helyezhető el.

45. Legalább hány egymást nem ütő huszárt kell elhelyeznünk egy 4×4 -es sakktáblán ahhoz, hogy a tábla minden üres mezőjét üssék. (SZAT miniverseny 5 perc)

Megoldás. Egy huszár a 4×4 -es táblán legfeljebb 4 mezőt üt, ezért három huszár legfeljebb $3 \times 4 = 12$ mezőt üthet. Ebből következik, hogy legalább négy huszárra szükség van. A mellékelt ábrán látható, hogy négy huszár már elégséges is.



46. Számítsd ki az $\lceil \sqrt{1} \rceil + \lceil \sqrt{2} \rceil + \lceil \sqrt{3} \rceil + \dots + \lceil \sqrt{n^2 - 1} \rceil$ összeget.

Megoldás. Ha $k^2 \leq m \leq (k+1)^2 - 1$, akkor $\lceil \sqrt{m} \rceil = k$ és ez az érték $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$ -szer fog szerepelni az összegben. Mivel $\lceil \sqrt{n^2 - 1} \rceil = n-1$, az összeg így írható:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{n^2-1} \lceil \sqrt{m} \rceil &= 3 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + \dots + (2n-1)(n-1) = \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} k(2k+1) = 2 \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)(4n+1)}{6}. \end{aligned}$$

47. Az $(a_n)_{n \geq 0}$ természetes számsorozat teljesíti az $a_n = 3a_{n-1} - 2n$ összefüggést, ahol $a_0 = 3$. Számítsd ki az a_{3069} tag értékét. (SZAT miniverseny 10 perc)

Megoldás. A megadott összefüggések alapján kiszámoljuk néhány tag értékét:

$$n = 0 \text{ esetén } a_{a_0} = 3 \cdot a_0 - 2 \cdot 0, \text{ vagyis } a_3 = 9$$

$$n = 3 \text{ esetén } a_{a_3} = 3 \cdot a_3 - 2 \cdot 3, \text{ vagyis } a_9 = 21$$

Folytatva a gondolatmenetet, rendre a következőket kapjuk: $a_{21} = 45$, $a_{45} = 93$, $a_{93} = 189$, $a_{189} = 381$, $a_{381} = 765$, $a_{765} = 1533$, $a_{1533} = 3069$ és végül $a_{3069} = 6141$.

48. a) Mutassuk meg, hogy ha két természetes szám $a^2 + 3b^2$ alakú ($a, b \in \mathbb{N}$), akkor a szorzatuk is ugyanilyen alakú.

b) Bizonyítsd be, hogy ha valamilyen n természetes számra a $7n$ szám $a^2 + 3b^2$ alakú ($a, b \in \mathbb{N}$), akkor n is $a^2 + 3b^2$ alakú. (SZAT miniverseny 15 perc)

Megoldás. a) $(a^2 + 3b^2)(x^2 + 3y^2) = a^2x^2 + 3a^2y^2 + 3b^2x^2 + 9b^2y^2 =$
 $= a^2x^2 + 6axy + 9b^2y^2 + 3(a^2y^2 + b^2x^2 - 2axy) = (ax + 3by)^2 + 3(ay - bx)^2.$

b) $(a^2 + 3b^2)(x^2 + 3y^2) = (ax - 3by)^2 + 3(ay + bx)^2$

Igazolni kell, hogy ha $7n = a^2 + 3b^2$, akkor léteznek az $x, y \in \mathbb{N}$ számok úgy, hogy $n = x^2 + 3y^2$. Ekkor az egyenlőség így írható: $(2^2 + 3 \cdot 1^2)(x^2 + 3y^2) = a^2 + 3b^2$, ahonnan $(2x + 3y)^2 + (2y - x)^2 = a^2 + 3b^2 = (2x - 3y)^2 + (2y + x)^2$.

Tehát elégséges kimutatni, hogy a $\begin{cases} 2x + 3y = a \\ 2y - x = b \end{cases}$ és a $\begin{cases} 2x - 3y = a \\ 2y + x = b \end{cases}$

egyenletrendszerek valamelyikének létezik egész megoldása. Az első rendszerből $y = \frac{a+2b}{7}$, a másodikból $y = \frac{2b-a}{7}$.

De $4b^2 - a^2 = 7b^2 - (3b^2 + a^2) = 7b^2 - 7n : 7$, tehát valamelyik egyenletrendszernek van megoldása az egész számok halmazán.

49. Egy szavahihető ember a következő történetet mondta el: Egyszer egy teknőc hat percen át ment egyenesen előre. Útját többen figyelték a következő feltételek szerint:

a) a hat perc alatt mindig figyelte valaki,

b) mindenki egy percig figyelte,

c) mindenki úgy találta, hogy amíg figyelte, addig a teknőc egy métert haladt előre.

Ennek ellenére a teknőc a hat perc alatt 10 métert ment előre. Hogyan volt ez lehetséges? (TOK* Matematikaverseny 2000.)

Megoldás. Egy lehetséges megoldás a következő. Az első 1/5 perc alatt megtesz 1 métert, majd 4/5 percig pihen és a következő 1/5 perc alatt ismét megtesz 1 métert. Így

* Teleki Oktatási Központ Versenye

ha a $[0,1]$ és az $[1/5, 6/5]$ időintervallumokban két megfigyelő figyelte, akkor mindkét megfigyelőre teljesülnek a feltételek. Ha ezt a beosztást még négyszer megismétljük, akkor hat perc alatt $5 \cdot 2$ méter távolságot tesz meg úgy, hogy a feltételek teljesülnek.

50. Melyik az a legnagyobb páros szám, amely nem írható fel két páratlan összetett szám összegeként? (TOK Matematikaverseny 2000.)

Megoldás. A lehetséges felbontások közül néhány:

$$\begin{aligned} n &= (n-9) + 9 = (n-15) + 15 = (n-21) + 21 = \\ &= (n-25) + 25 = (n-27) + 27 = (n-35) + 35 \end{aligned}$$

Ha $n \geq 41$, akkor ezekben a felbontásokban minden tag legalább 6. Másrészt az $n-9$, $n-25$, $n-35$ számok közül pontosan az egyik osztható 3-mal. Így az $n = (n-9) + 9 = (n-25) + 25 = (n-35) + 35$ felbontások közül az egyik két összetett páratlan számot tartalmaz. Ugyanakkor $40=15+25$ és $n=38$ esetén minden lehetséges felbontásban van legalább egy prímszám. Tehát 38 a legnagyobb páros szám, amely nem bontható fel két páratlan összetett szám összegére.

51. Egy pingpongbajnokságon az n résztvevő közül mindenki egyszer játszott minden más résztvevővel. Az egyes versenyzők győzelmeinek és vereségeinek számát jelöljük rendre $x_1, x_2, \dots, x_n$ illetve $y_1, y_2, \dots, y_n$ -nel. Bizonyítsd be, hogy

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2.$$

Megoldás. Mivel minden játékos $n-1$ mérkőzést játszott, $x_i + y_i = n-1$.

Minden mérkőzésnek van egy győztese és egy vesztese, ezért $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i$. Az első egyenletet x_i , illetve y_i -vel beszorozva kapjuk, hogy $x_i^2 = (n-1)x_i - x_i y_i$ és $y_i^2 = (n-1)y_i - x_i y_i$.

$$\text{Ezek alapján } \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n [(n-1)x_i - x_i y_i] = (n-1) \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n x_i y_i = \sum_{i=1}^n y_i^2.$$

52. Oldd meg és tárgyald az

$$y^2 - xz = a(x+y+z)^2$$

$$z^2 - xy = b(x+y+z)^2$$

$$x^2 - yz = c(x+y+z)^2$$

egyenletrendszer ha $a, b, c \in \mathbb{R}$. (TOK Matematikaverseny 2000.)

Megoldás. Az $x(y^2 - xz) + y(z^2 - xy) + z(x^2 - yz) = 0$ azonosság felhasználásával az egyenletrendszerből kapjuk, hogy

$$(x+y+z)^2 (ax + by + cz) = 0.$$

Hasonló módon, az $z(y^2 - xz) + x(z^2 - xy) + y(x^2 - yz) = 0$ azonosság alapján

$$(x+y+z)^2 (az + bx + cy) = 0.$$

Ha $x + y + z = 0$, akkor $x = y = z = \sqrt[3]{xyz}$, tehát $x = y = z = 0$.

Ha $x + y + z \neq 0$, akkor $ax + by + cz = 0$ és $az + bx + cy = 0$.

Ha $a \neq 0$, akkor $z = \frac{y \cdot (b^2 - ac)}{a^2 - bc}$ és $x = \frac{y \cdot (c^2 - ab)}{a^2 - bc}$. Ezt visszahelyettesítve

elvégezhető a tárgyalás.

53. Egy zár, amelyen három nyomógomb van, akkor nyílik ki, ha a gombokat egy előírt sorrendben nyomjuk meg, közvetlenül egymás után. Legkevesebb hány gombnyomás szükséges ahhoz, hogy biztosan kinyílják a zár? (a megfelelő három gombnyomást esetleg megelőző gombnyomások nem befolyásolják a zár szerkezetét). Mi a válasz a feltett kérdésre ha a záron négy gomb található?

Megoldás. Jelöljük a gombokat a, b, c -vel. Olyan minimális karaktersorozatot kell szerkesztenünk, amelyből kivágható az a, b, c tetszőleges sorrendje. E permutációk a következők: $abc, acb, bac, bca, cab, cba$. Ahhoz, hogy a sorozat a lehető legrövidebb legyen, nyilvánvaló, hogy az nem fordulhat elő egymásután kétszer ugyanaz a karakter. Az $abcab$ már lefed hármat. Ha a következő karakter c , akkor ismét az abc részsorozathoz jutunk. Ha viszont a következő karakternek az a -t választjuk, akkor, folytatva a gondolatmenetet, végül az $abcabacba$ karaktersorozathoz jutunk és valóban, ez tartalmazza az összes sorrendet. Tehát kilenc gombnyomás után biztosan kinyílik az ajtó. Négy gomb esetén hasonló elgondolás alapján 33 gombot kell megnyomni.

54. Egy egymás után elhelyezünk nyolc korongot és megszámozzuk őket 1-től 8-ig. Lépés alatt azt értjük, hogy két szomszédos korongot felcserélünk. Ilyen lépések ismétlésével elérhetjük-e, hogy a korongok fordított sorrendben legyenek? Hát akkor, ha egy lépés alatt azt értjük, hogy három szomszédos korongot cserélünk fel az alábbi ábrának megfelelően:



Mi a válasz az előbbi kérdésekre ha eredetileg kilenc korongunk van?

(TOK Matematikaverseny 2000.)

Megoldás. 7 cserével az 1-es a sor végére vihető. További hat csere után elérhető, hogy a 2-es az 1-es elé kerüljön. Folytatva az eljárást, 28 csere után elérhető a fordított sorrend. Ez kilenc korong esetén is hasonlóan érhető el.

Ha három szomszédos korongot cserélünk fel, akkor a páros számot viselő korongok jobbról számolva páros helyeken maradnak, tehát 8 korong esetén nem lehetséges a sorrend megfordítása. Kilenc korong esetén az 1, 3, 5, 7, 9 és 2, 4, 6, 8 korongokat külön fordítjuk meg. Így a teljes sorrend megfordul.

55. a) Egy játékgár olyan naptárat szeretne készíteni, amelyen a dátumot (a napokat) két kockával jelzik. Mindkét kockának minden oldalára egy-egy számjegyet írnak és a két kocka megfelelő oldalainak egymás mellé helyezése jelzi a megfelelő dátumot. Például augusztus 9.-ét az *Augusztus* feliratú táblácska és a 0 illetve 9-es számjegyek jelzik. Milyen számokat kell az egyes kockákra ráfesteni, ha a 9-es 6-osnak is olvasható és fordítva?

b) Határozd meg a legnagyobb olyan n természetes számot, amelyre 1-től n -ig minden szám kirakható az előbbi módon három kocka segítségével!

Megoldás. a) A 11 és 22 csak akkor rakható ki, ha mindkét kockán szerepel az 1-es és 2-es. A 30-as dátum kiírásához az egyik kockán meg kell jelenjen a 0 és a másikon a 3. Ugyanakkor a 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09 kiírása csak úgy lehetséges, ha a 0 mindkét kockán szerepel (ellenkező esetben a másik kockán az összes többi számjegynek szerepelnie kellene). Tehát az egyik kockán kötelező a 0, 1, 2, 3, a másikon a 0, 1, 2. A 4, 5, 6, 7, 8 számjegyeket tetszőlegesen eloszthatjuk (az első kockára kettő, a másodikra három darab kerül).

b) Ha 088-ig szeretnénk mindent kirakni, akkor mindhárom kockán szerepelnie kell egy nullásnak és legalább két kockán 1-esnek. A 022, 033, 044, 055, 066, 077, 088 számok nem rakhatók ki mert ehhez legalább $7 \cdot 2 + 5 = 19$ oldala kellene legyen a három kockának. Ha a kockákra festett számok a következők:

A: 0, 1, 2, 4, 5, 7

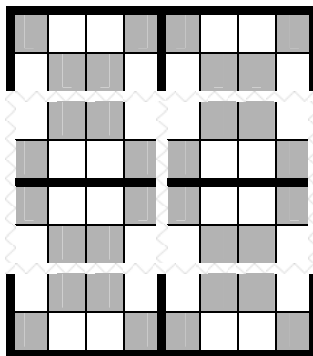
B: 0, 1, 3, 4, 6, 7

C: 0, 2, 3, 5, 6, 8,

akkor 000-tól 087-ig minden szám kirakható. Tehát a legnagyobb ilyen szám az $n = 87$.

56. Egy 8x8-as sakktáblán 42 figura áll. Bizonyítsd be, hogy létezik a táblának legalább egy 4x4-es kis résztáblája, amelynek átlós mezőin legalább négy figura áll!

Megoldás



Ha a következtetés nem igaz, akkor a szürke mezőkön legfeljebb 12 figura állhat (ellenkező esetben a négy "sarki" résztábla valamelyikének átlós mezőin legalább 4 bábu állna). Így a maradék 32 mezőn legalább 30 figura áll. Tehát a hullámos vonallal keretezett résztáblák 16 átlós mezejére legalább 14 figura jut, tehát valamelyikük átlóin van legalább 7 figura, így ellentmondáshoz jutottunk. Következik, hogy az eredeti állítás igaz.

57. Két gyerek meg kell tegyen egy 50 km hosszú utat és rendelkezésükre áll egy bicikli. Ha a biciklin egyszerre csak egyikük lehet, gyalog a sebességük 5 km/h és biciklivel 15 km/h legalább mennyi időre van szükségük a távolság megtételéhez? Hát akkor, ha hárman vannak és két bicikli áll rendelkezésükre?

Megoldás. Ha x távolságot gyalog és $d - x$ távolságot biciklivel tesz meg egy gyerek, akkor $\frac{x}{v_1} + \frac{d - x}{v_2}$ idő alatt ér célba. A másik viszont $\frac{x}{v_2} + \frac{d - x}{v_1}$ idő alatt ér

be. A két idő összege $d \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \right)$, független az x -től, tehát a két idő nagyobbika

akkor a legkisebb, ha a két idő egyforma, vagyis $\frac{x}{v_1} + \frac{d - x}{v_1} = \frac{x}{v_2} + \frac{d - x}{v_2}$, ahonnan

$x = \frac{d}{2}$. Tehát az egyik gyerek elindul biciklin és félútnál leteszi a kerékpárt. Amikor a második gyerek eléri biciklit, felül rá és továbbmegy. Így mindketten 6 óra 40 perc alatt érnek célba.

Ha hárman vannak két biciklivel, akkor két esetet különböztetünk meg.

1. eset: a biciklivel nem lehet visszafele haladni. Így összesen $3d$ utat kell megtenni, és ebből $2d$ távolságot biciklivel, tehát legalább $\frac{2d}{v_2} + \frac{d}{v_1}$ a hármuk összideje. Akkor

érnek a leghamarabb be, ha mindhárman $\frac{1}{3} \left(\frac{2d}{v_2} + \frac{d}{v_1} \right)$ időt mennek. Ez azt jelenti,

hogy $\frac{d}{3}$ távolságot megy mindenki gyalog és $\frac{2d}{3}$ -at biciklivel.

2. eset: előfordulhat, hogy az egyik gyerek biciklin megy és visszaviszi a harmadiknak

az "üres" kerékpárt. Így $t = \frac{d(3v_2 + v_1)}{v_2(v_2 + 3v_1)} = \frac{50}{9}$, vagyis 5 óra 33 perc 20 másodperc

alatt is beérhetnek.