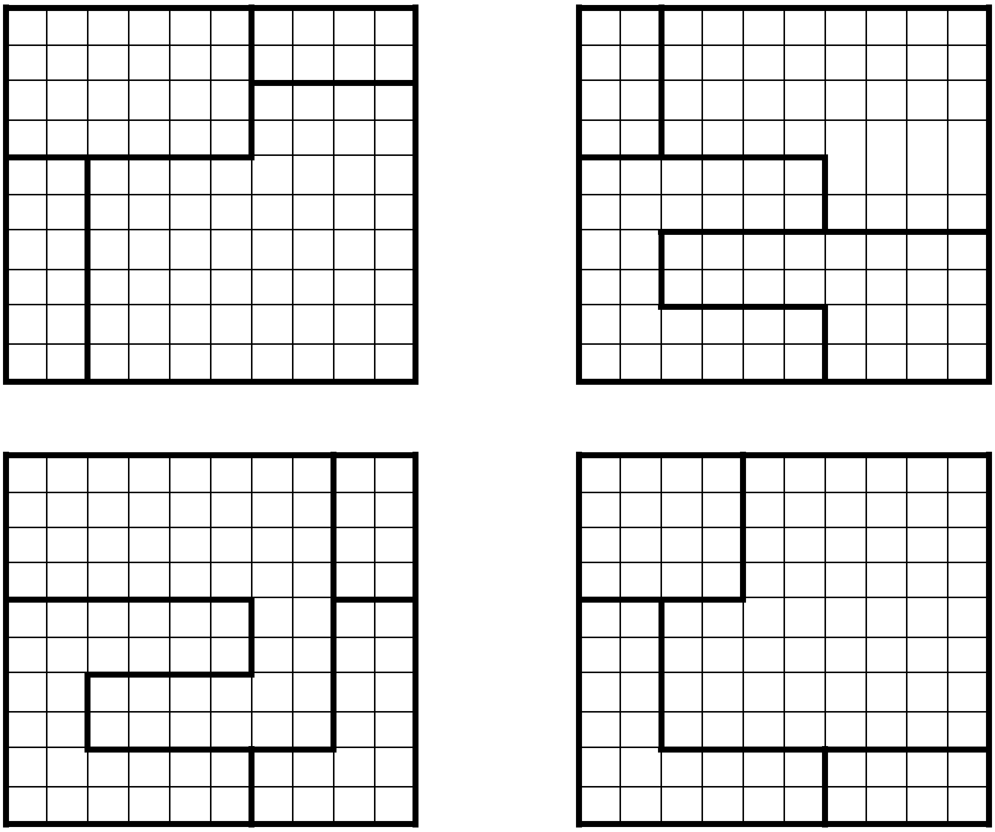
VIII. FEJEZET

ÖSSZEFOGLALÓ FELADATOK

VIII.1. Versenyre előkészítő feladatok (337. oldal)

1. *Két sakkmintás*, 60x60 *illetve* 80x80-*cm nagyságú szőnyegdarab (minden mező* 10x10 *cm nagyságú) segítségével le kell fedni egy* 100x100 *cm nagyságú négyzetet úgy, hogy a lefödés is sakktáblamintás legyen, továbbá egyik szőnyeget se vágjuk kettőnél több darabra és egyetlen mezőt se vágjunk ketté. Tervezz ilyen szétvágásokat!*
Megoldás. A mellékelt ábrán ilyen szétvágások láthatók.



2. *Egy labirintus folyosói egy n oldalú konvex sokszög oldalai és átlói. Legalább hány mécsest kell elhelyeznünk ahhoz, hogy minden folyóson legyen legalább egy lámpa?*
Megoldás. Nyilvánvaló, hogy egy lámpa akkor világít be a legtöbb folyosót, ha a konvex sokszög valamely csúcsában van (itt $n-1$ folyosó találkozik, máshol legfeljebb $\left[\frac{n}{2}\right]$ folyosó találkozhat).

Igazolni fogjuk, hogy $n-1$ lámpa szükséges is és elégséges is minden folyosó bevilágításához. Ha egy csúcs kivételével minden csúcsba helyezünk lámpát, akkor a konvex sokszög minden átlójának illetve oldalának legalább egyik végpontjában van lámpa, tehát minden folyosó meg van világítva. Így $n-1$ lámpa elégséges. Ha $n-2$ lámpát helyezünk el, akkor a konvex sokszög két csúcsában nincs lámpa. Az egyik ilyen csúcsból kiinduló $n-1$ diszjunkt folyosót nem lehet megvilágítani $n-2$ lámpával, tehát $n-2$ lámpa nem elégséges a folyosók megvilágításához.

3. a) *Egy 12x56-os téglalap alakú négyzetrács átlója hány egységnégyzetet érint?*
b) *Egy mxn-es téglalap alakú négyzetrács átlója legfeljebb hány egységnégyzetet érinthet? Fogalmazz meg egy térbeli analóg feladatot majd oldd is meg!*

Megoldás. a) Először vizsgáljuk meg, hogy az *OC* átló hány rácsponton megy át és melyek ezek. Tekintsünk egy derékszögű koordináta rendszert, és legyenek $O(0,0)$, $A(56,0)$, $B(0,12)$ illetve $C(56,12)$ a téglalap csúcspontjai. Meg akarjuk határozni, hogy az $[OC]$ szakasz hány egész koordinátájú ponton halad át. Az OC egyenes egyenlete: $y=\frac{12}{56}x$, azaz $14y=3x$. Meg kell határoznunk az $(x,y)\in[0,56]\times[0,12]\cap(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ párokat, melyek teljesítik a fenti egyenletet. Világos, hogy $3\mid y$ és $14\mid x$, mert $(3,14)=1$. Tehát $y=3d_1$ és $x=d_2$. Ebből következik, hogy $42d_1=42d_2 \Rightarrow d_1=d_2$. Továbbá $3d_1\in[0,12]\cap\mathbb{Z} \Rightarrow d_1\in\{0,1,2,3,4\}$. Tehát $(x,y)\in\{(0,0),(14,3),(28,6),(42,9),(56,12)\}$, vagyis öt rácsponton megy át az $[OC]$ szakasz. Világos, hogy ez a szakasz négy 3×14-es téglalapon halad át. Tehát elégséges meghatározni, hogy egy ilyen téglalapban hány egységnégyzetet érint. Az előbbiek alapján, ezekben a téglalapokban egyetlen belső rácsponton sem halad át az $[OC]$ átló. Tekintsünk egy bogarat, amely elindul a 3×14-es téglalap bal alsó sarkából és eljut a jobb felső sarkába úgy, hogy csak azokon az egységnégyzeteken halad át, amelyeken a téglalap átlója. Mivel ez az átló nem halad át rácspontokon, a bogár kényelmesen átmehet ezeken a négyzeteken. Sőt, az is világos, hogy csak jobbra és felfele léphet. Ahhoz, hogy felérjen a jobb felső sarokba, $14-1$-et kell lépjen jobbra és $3-1$-et felfele. Tehát összesen $13+2=15$ lépést tesz meg. A 15 lépés alatt 16 egységnégyzetet érint, tehát az $[OC]$ átló $4\times16=64$ egységnégyzetet érint.

b) Hasonló gondolatmenet alapján meg kell határoznunk, hogy a derékszögű koordináta rendszer $O(0,0)$ és $M(m,n)$ pontjait összekötő szakasz hány egész koordinátájú pontot tartalmaz. Az *OM* egyenes egyenlete $y=\frac{n}{m}x$, tehát meg kell határozzuk azon $(x,y)\in\{0,1,2,\ldots,m\}\times\{0,1,2,..,n\}$ párokat, amelyekre $my=nx$. Legyen $d=(m,n) \Rightarrow m=m_1d$ és $n=n_1d$ úgy, hogy $(m_1,n_1)=1$. Tehát $m_1y=n_1x$ és $(m_1,n_1)=1$, következik ,hogy $m_1\mid x$ és $n_1\mid y$, sőt $y=n_1k$ és $x=m_1k$, $k\in\{0,1,2,\ldots,d\}$. Eszerint $d+1$ rácsponton megy át az $[OM]$ szakasz (beleértve az *O* és *M* pontokat is), azaz *d* darab $m_1\times n_1$-es téglalapon halad át. Egy-

Tartalomjegyzék

egy ilyen téglalap belsejében m_1+n_1-1 egységnégyzetet érint, tehát az átló összesen $d\left(m_1+n_1-1\right)=m+n-(m,n)$ egységnégyzetet érint.

4. *Határozd meg a legnagyobb páros számot, amely nem írható fel két páratlan összetett szám összegeként!*

Megoldás. Egy páros természetes szám hattal való osztási maradéka 0, 2 vagy 4, tehát a szám $6k$, $6k+2$, vagy $6k+4$ alakban írható fel.

I. Ha $k>2$, akkor $6k=6k-9+9=3(2k-3)+3\cdot 3$. $2k-3>1$, tehát $6k$ felírható két páratlan összetett szám összegeként $k>2$ esetben. Ha $k=2$, akkor $6\cdot 2=12$ nem írható fel két páratlan összetett szám összegeként.

II. Ha $k>6$, akkor $6k+2=6k-33+35=3(2k-11)+5\cdot 7$ és $2k-11>1$, tehát $6k+2$ felírható két páratlan összetett szám összegeként $k>6$ esetben. Ha $k=6$, akkor $6k+2=38$ nem írható fel két páratlan összetett szám összegeként.

III. Ha $k>4$, akkor $6k+4=6k-21+25=3(2k-7)+5\cdot 5$ és $2k-7>1$. Tehát $6k+4$ felírható két páratlan összetett szám összegeként, ha $k>4$. Ha $k=4$, akkor $6k+4=28$ nem írható fel két páratlan összetett szám összegeként.

A fentiek alapján 38 a legnagyobb páros szám, amely nem írható fel két páratlan összetett szám összegeként.

5. *Hány olyan n-nél nem nagyobb pozitív egész szám van, amelynek minden prímosztója legalább kétjegyű? Vizsgáld meg az $n=10000$ sajátos esetet is!*

Megoldás. Tulajdonképpen azokat az n-nél kisebb vagy n-nel egyenlő természetes számokat keressük, amelyek nem oszthatóak 2-vel, 3-mal, 5-tel illetve 7-tel. Keressük meg azokat, amelyek oszthatóak ezek valamelyikével. Az $M_p^n=\left\{k\in\mathbb{N}^*\;\middle|\; k\,\vdots\, p \text{ és } k\le n\right\}$ jelöléssel az $M_2^n\cup M_3^n\cup M_5^n\cup M_7^n$ halmaz számosságát kell meghatároznunk.

$$N=\left|M_2^n\cup M_3^n\cup M_5^n\cup M_7^n\right|=\left|M_2^n\right|+\left|M_3^n\right|+\left|M_5^n\right|+\left|M_7^n\right|-$$
$$-\left|M_2^n\cap M_3^n\right|-\left|M_2^n\cap M_5^n\right|-\left|M_2^n\cap M_7^n\right|-\left|M_3^n\cap M_5^n\right|-\left|M_3^n\cap M_7^n\right|-\left|M_5^n\cap M_7^n\right|+$$
$$+\left|M_2^n\cap M_3^n\cap M_5^n\right|+\left|M_2^n\cap M_3^n\cap M_7^n\right|+\left|M_2^n\cap M_7^n\cap M_5^n\right|+\left|M_7^n\cap M_3^n\cap M_5^n\right|-$$
$$-\left|M_2^n\cap M_3^n\cap M_5^n\cap M_7^n\right|.$$

Tudjuk, hogy ha m_1, m_2, …, m_k páronként relatív prímek, akkor $M_{m_1}\cap M_{m_2}\cap\ldots\cap M_{m_k}=M_{m_1\cdot m_2\cdot\ldots\cdot m_k}$, ez pedig magával vonja az *n*-nél kisebb többszörösök esetében is a tulajdonságot. Mivel 2, 3, 5, és 7 prímszámok, páronként relatív prímek is, tehát

$$N=\left|M_2^n\right|+\left|M_3^n\right|+\left|M_5^n\right|+\left|M_7^n\right|-\left|M_6^n\right|-\left|M_{10}^n\right|-\left|M_{14}^n\right|-\left|M_{15}^n\right|-$$
$$-\left|M_{21}^n\right|-\left|M_{35}^n\right|+\left|M_{30}^n\right|+\left|M_{42}^n\right|+\left|M_{70}^n\right|+\left|M_{105}^n\right|-\left|M_{210}^n\right|.$$

Tartalomjegyzék

Másrészt az n-nél kisebb vagy vele egyenlő, k-val osztható pozitív egészek $k,\ 2k,\ 3k,\ \ldots,\ \left[\frac{n}{k}\right]\cdot k$, tehát $\left[\frac{n}{k}\right]$ darab ilyen szám van. Ebből következik, hogy $\left|M_k^n\right| = \left[\frac{n}{k}\right]$. Tehát

$$N = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n}{5}\right] + \left[\frac{n}{7}\right] - \left[\frac{n}{6}\right] - \left[\frac{n}{10}\right] - \left[\frac{n}{14}\right] - \left[\frac{n}{15}\right] - \left[\frac{n}{21}\right] - \left[\frac{n}{35}\right] + \\ + \left[\frac{n}{30}\right] + \left[\frac{n}{42}\right] + \left[\frac{n}{70}\right] + \left[\frac{n}{105}\right] - \left[\frac{n}{210}\right]$$

az n-nél kisebb vagy vele egyenlő, a 2, 3, 5, 7 prímek valamelyikével osztható pozitív egészek száma. Következésképpen az n-nél nem nagyobb olyan pozitív egészek száma, amelyeknek minden prímosztója legalább kétjegyű $n - N$.
Az $n = 10000$ esetben ez a szám $10000 - 5000 - 3333 - 2000 - 1428 +$
$+1666 + 1000 + 714 + 666 + 476 + 285 - 333 - 238 - 142 - 95 + 47 = 2285$.

6. *Egy 3×5-ös téglalap alakú négyzetrácson találomra kiválasztunk három pontot. Mi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott pontok által meghatározott háromszög belsejében vagy az oldalain van legalább egy további rácspont?*

Megoldás. A 3×5-ös téglalap $4\times 6 = 24$ rácspontot tartalmaz. Tehát a lehetséges esetek száma $C_{24}^3 = 2024$. Számoljuk meg azokat az eseteket, amikor a háromszög belsejében, vagy oldalain nincs további rácspont. Egy ilyen háromszög oldalai egy-egy téglalap átlói (esetleg elfajult téglalap). A 3. feladat alapján ahhoz, hogy ezen átlón ne legyen további rácspont, az oldalhosszainak legnagyobb közös osztója 1 kell legyen. Ilyen $(m,n) \in \{0,1,2,3\} \times \{0,1,2,3,4,5\}$ párok az

$$A = \{(0,1),(1,0),(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,3), \\ (2,5),(3,1),(3,2),(3,4),(3,5)\}$$

halmazban vannak. Vizsgáljuk azokat az eseteket, amikor a háromszög leghosszabb oldala $m\times n$-es téglalap átlója, ahol $(m,n)\in A$. (az (m,n) és (n,m) eseteket nem kell külön vizsgálni).

1. $(m,n) = (0,1)$. Ebben az esetben nincs olyan háromszög, amelynek ez legyen a leghosszabb oldala.
2. $(m,n) = (1,1)$. Egy 1×1-es téglalapban 4 ilyen háromszög létezik. A 3×5-ös téglalap $3\cdot 5 = 15$ 1×1-es téglalapot tartalmaz, tehát $4\cdot 15 = 60$ ilyen háromszög van a téglalapban.
3. $(m,n) = (1,2)$. Egy 1×2-es téglalapban 4 ilyen háromszög létezik. A 3×5-ös téglalap pedig $3\cdot 4 + 5\cdot 2 = 22$ darab 1×2-es vagy 2×1-es téglalapot tartalmaz. Tehát $4\cdot 22 = 88$ ilyen háromszög van a téglalapban.
4. $(m,n) = (1,3)$. Egy 1×3-mas téglalapban 4 ilyen háromszög van. A 3×5-ös téglalap tehát $3\times 3 + 5\times 1 = 14$ darab 1×3-mas vagy 3×1-es téglalapot tartalmaz, vagyis $4\cdot 14 = 56$ ilyen háromszög van a téglalapban.

5. $(m,n)=(1,4)$. Ismét 4 ilyen háromszög található egy 1×4-es téglalapban, a 3×5-ös téglalap pedig 6 darab 1×4-es téglalapot tartalmaz, tehát $4\times 6=24$ ilyen háromszög van a téglalapban.
6. $(m,n)=(1,5)$. Egy 1×5-ös téglalap 4 ilyen háromszöget tartalmaz, míg a 3×5-ös téglalap 3 darab 1×5-ös téglalapot tartalmaz, tehát $4\cdot 3=12$ ilyen háromszöget tartalmaz.
7. $(m,n)=(2,3)$. Egy 2×3-mas téglalap 4 ilyen háromszöget tartalmaz. Ebben az esetben a 3×5-ös téglalapban 40 ilyen háromszög található.
8. $(m,n)=(2,5)$. A 3×5-ös téglalap 8 ilyen háromszöget tartalmaz.
9. $(m,n)=(3,4)$. A 3×5-ös téglalap 8 ilyen háromszöget tartalmaz.
10. $(m,n)=(3,5)$. A téglalap 4 ilyen háromszöget tartalmaz.

Tehát összesen $60+88+56+24+12+40+8+8+4=300$ esetben a háromszög oldalain és belsejében nincs rácspont. Következésképpen $2024-300=1724$ esetben van további rácspont a háromszög oldalain vagy belsejében. Tehát a keresett valószínűség $P=\dfrac{1724}{2024}=\dfrac{431}{506}$.

7. *Oldd meg a* $z^{n-1}=\overline{z}$ *egyenletet (*$n\in\mathbb{N}^*$*)!*

Megoldás. Szorozzuk az egyenlet mindkét oldalát z-vel. $z\cdot\overline{z}=|z|^2$, tehát az egyenlet a $z^n=|z|^2$ alakban írható. Ha kiszámítjuk mindkét oldal modulusát a $|z|^n=|z|^2$ egyenlőséghez jutunk. Ha $n=1$, akkor az egyetlen megoldás a $z=1$. Ha $n=2$, akkor minden valós szám megoldása az egyenletnek, tehát feltételezhetjük, hogy $n\geq 3$. Ebben az esetben a $|z|^n=|z|^2$ egyenlőségből következik, hogy $|z|^{n-2}=1$, tehát $|z|=1$ és így $z^n=1$. Tehát a megoldáshalmaz

$$M=\left\{\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\ \middle|\ k=\overline{0,\ n-1}\right\}.$$

8. *Határozd meg* $|z|$ *legkisebb és legnagyobb lehetséges értékét ha* $\left|z+\dfrac{1}{z}\right|=a$ *és* a *egy szigorúan pozitív valós szám.*

Megoldás. A modulusfüggvény tulajdonságaiból következik, hogy $|z|-\dfrac{1}{|z|}\leq\left|z+\dfrac{1}{z}\right|$. Tehát, ha $|z|=r$, akkor $r-\dfrac{1}{r}\leq a\ \Leftrightarrow\ r^2-ar-1\leq 0\ \Rightarrow$ $r\in\left[\dfrac{a-\sqrt{a^2+4}}{2},\dfrac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}\right]$. Sőt, $\dfrac{a-\sqrt{a^2+4}}{2}<0\Rightarrow r\in\left(0,\ \dfrac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}\right]$.

Tehát a $|z|$ lehetséges legnagyobb értéke $\dfrac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}$, és ezt fel is veszi, mert a $z=\dfrac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}i$ számra igaz a feladatbeli összefüggés.

Mivel z-ben és $\frac{1}{z}$-ben a $\left|z+\frac{1}{z}\right|=a$ összefüggés szimmetrikus, és $|z|$ akkor a legkisebb, ha $\frac{1}{|z|}$ a legnagyobb, következik, hogy a $|z|$ legkisebb lehetséges értékét akkor veszi fel, ha $\frac{1}{|z|}=\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}$, azaz $|z|=\frac{2}{a+\sqrt{a^2+4}}=\frac{-a+\sqrt{a^2+4}}{2}$.

Ezt az értéket $z=-\frac{-a+\sqrt{a^2+4}}{2}i$ esetén veszi fel.

9. *Oldd meg a természetes számok halmazában a* $2^n-n^2=\log_2\sin\frac{n\pi}{8}$ *egyenletet!*

Megoldás. Mivel $\sin\frac{n\pi}{8}\le 1$, $\forall n\in N \Rightarrow \log_2\sin\frac{n\pi}{8}\le 0$, amikor a logaritmus értelmezett (azaz $\sin\frac{n\pi}{8}>0$). Indukcióval igazolható, hogy $2^n-n^2>0, \quad \forall n\ge 5$ esetén, tehát n csak a $\{0,1,2,3,4\}$ halmazból veheti fel értékeit. Ezek közül csak az $n=4$ megoldás.

10. *Oldd meg az* $x\cdot 2^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}\cdot 2^x=4$ *egyenletet a valós számok halmazában!*

Megoldás. Az egyenletnek nem lehet negatív megoldása, mert $x<0$ esetén az egyenlet bal oldalán álló kifejezés negatív. Ha $x>0$ a számtani és a mértani középarányosok közötti egyenlőtlenség alapján $x\cdot 2^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}\cdot 2^x\ge 2\cdot\sqrt{2^{x+\frac{1}{x}}}$. De $x+\frac{1}{x}\ge 2$, $\forall x>0$ esetén, tehát $x\cdot 2^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}\cdot 2^x\ge 2\sqrt{4}=4$. Az egyenlőtlenségekben akkor és csak akkor áll fenn egyenlőség, ha $x=1$. Tehát ez az egyenlet egyetlen megoldása.

11. *Oldd meg az* $\left(\sqrt[5]{2}\right)^{\frac{4}{x}+3}+\left(\sqrt[5]{3}\right)^{3x+4}=11$ *egyenletet a valós számok halmazában!*

Megoldás. A feladatbeli egyenlet a $2^{\frac{3x+4}{5x}}+3^{\frac{3x+4}{5}}=11$ alakban is írható. Észrevesszük, hogy $x_1=\frac{1}{3}$ és $x_2=2$ megoldások, majd bizonyítjuk, hogy több megoldása nincs az egyenletnek. Belátható, hogy $x>0$, mert ha $x\le 0$, akkor $2^{\frac{3x+4}{5x}}+3^{\frac{3x+4}{5}}\le 2^{\frac{3}{5}}+3^{\frac{4}{5}}<2+3=5$. Az f_1, g_1, f_2 $g_2:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f_1(x)=2^x$, $g_1(x)=\frac{3}{5}+\frac{4}{5x}$, $f_2(x)=3^x$ és $g_2(x)=\frac{3x+4}{5}$ függvények konvexek, tehát az $f_1\circ g_1$ és $f_2\circ g_2$ függvények is konvex függvények. A feladatbeli egyenletünk pedig

$$\left(f_1\circ g_1\right)(x)+\left(f_2\circ g_2\right)(x)=11.$$

Mivel $f_1 \circ g_1$ és $f_2 \circ g_2$ konvex függvények, $f_1 \circ g_1 + f_2 \circ g_2$ is konvex függvény, tehát az egyenletnek legtöbb két megoldása lehet. A gyökök tehát $x_1 = \frac{1}{3}$ és $x_2 = 2$.

12. *Oldd meg az* $(1+3\cdot 2^x)^n + (1+3\cdot 2^{-x})^n = 32$ *egyenletet! (*$x \in \mathbb{R}$ *és* $n \in \mathbb{N}$*)*

Megoldás. Ha $x \geq 0$, akkor $(1+3\cdot 2^x)^n + (1+3\cdot 2^{-x})^n > (1+3\cdot 2^x)^n \geq 4^n$ és, ha $x \leq 0$, akkor $(1+3\cdot 2^x)^n + (1+3\cdot 2^{-x})^n > (1+3\cdot 2^{-x})^n \geq 4^n$, tehát az egyenletnek csak akkor lehet megoldása, ha $32 \geq 4^n$. Eszerint $n \in \{0,1,2\}$.

I. eset. Ha $n = 0$, akkor $1+1 = 32$ és nincs megoldás.

II. eset. Ha $n = 1$, akkor $(1+3\cdot 2^x) + (1+3\cdot 2^{-x}) = 32 \Leftrightarrow 3\cdot 2^x + 3\cdot 2^{-x} - 30 = 0$ $\Leftrightarrow (2^x)^2 - 10\cdot 2^x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = \log_2\left(5+2\sqrt{6}\right)$ és $x_2 = \log_2\left(5-2\sqrt{6}\right)$.

III. eset. Ha $n = 2$, akkor $(1+3\cdot x)^2 + (1+3\cdot 2^{-x})^2 = 32 \Leftrightarrow 2(2^x + 2^{-x}) +$ $+3\left(2^{2x} + 2^{-2x}\right) = 10$. Az $y = 2^x + 2^{-x}$ jelöléssel $3y^2 + 2y - 16 = 0$. Ebből $y_1 = 2$ és $y_2 = -\frac{8}{3}$, tehát csak $2^x + 2^{-x} = 2$ teljesülhet, ahonnan $x_3 = 0$.

13. *Határozd meg az* $a^x + b^x = 2c^x$ *egyenlet valós megoldásait ha a, b és c pozitív valós számok és* $a + b = 2c$.

Megoldás. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left(\frac{a}{c}\right)^x + \left(\frac{b}{c}\right)^x$ függvény szigorúan konvex, tehát az eredeti egyenletnek kettőnél több megoldása nem lehet. Másrészt az $x_1 = 0$ és $x_2 = 1$ számok megoldásai az egyenletnek, tehát $M = \{0,1\}$.

Megjegyzés. Igazolható, hogy $a + b = c + d$ (*a, b, c* és *d* páronként különböző) esetén az $a^x + b^x = c^x + d^x$ egyenletnek is csak az $x_1 = 0$ és $x_2 = 1$ számok a megoldásai.

14. *A természetes számok halmazában oldd meg a* $3^x + 4^y = 5^z$ *egyenletet!*

Megoldás. $3^x + 4^y = 5^z \Leftrightarrow 3^x + (3+1)^y = (6-1)^z$. $(3+1)^y = 3M + 1$, $M \in \mathbb{N}$. $(6-1)^z = 6P + (-1)^z$, $P \in \mathbb{N}$. Tehát $3^x + 3M + 1 = 6P + (-1)^z$ (1). Ha $x = 0$, akkor $3M + 2 = 6P + (-1)^z \Rightarrow z$ páratlan. Ebben az esetben $1 + 4^y = 5^z$ $\Leftrightarrow 1 + (5-1)^y = 5^z - (5-1)^y = 5K + (-1)^y$, $K \in \mathbb{N}$. Tehát $1 + 5M + (-1)^y = 5^z$. Ebből következik, hogy *y* páratlan (mert $z > 0$, páratlan). Másrészt $4^y = 5^z - 1 = (5-1)\left(5^{z-1} + ... + 1\right)$ és $5^{z-1} + ... + 1$ páratlan, mert páratlan számú páratlan szám összege, tehát $z = 1$ és $y = 1$ kell legyen ebben az esetben. Következésképpen egy megoldás $x = 0$, $y = 1$ és $z = 1$.

Ha $x \neq 0$, akkor (1) alapján *z* páros. Tehát $z = 2z_1$ és $z_1 \in \mathbb{N}$. Másrészt $(4-1)^x + 4^y = (4+1)^z$, innen $4L + (-1)^x + 4^y = 4P + 1$, ahol L, $P \in \mathbb{N}$. Tehát x is páros $\Rightarrow x = 2x_1$ és $x_1 \in \mathbb{N}$. Az egyenletünk a következőképpen alakul

Tartalomjegyzék

$$3^{2x_1}+2^{2y}=5^{2z_1} \Leftrightarrow 3^{2x_1}=\left(5^{z_1}-2^y\right)\left(5^{z_1}+2^y\right) \Rightarrow$$

(2) $\begin{cases} 5^{z_1}-2^y=3^a \\ 5^{z_1}+2^y=3^b \end{cases}$ $a,b\in\mathbb{N}$, ahol $a<b$ és $a+b=2x$. A fenti két egyenletet összeadva, kapjuk, hogy $2\cdot 5^{z_1}=3^a+3^b \Leftrightarrow 2\cdot 5^{z_1}=3^a\left(1+3^{b-a}\right)$. De $2\cdot 5^{z_1}$ nem osztható 3-mal, így $a=0$ és $b=2x_1$, tehát $2\cdot 5^{z_1}=1+9^{x_1}$. Ha $z_1=0$, akkor $x_1=0 \Rightarrow 5^0+2^y=3^0$, ami lehetetlen. Következésképpen z_1 nem lehet 0, tehát $x_1=0$ és $2\cdot 5^{z_1}$ osztható 10-zel, tehát $\left(1+9^{x_1}\right)\vdots 10 \Rightarrow x_1$ páratlan. Ha a (2) két egyenletét kivonjuk egymásból, kapjuk, hogy: $2^{y+1}=3^b-3^a \Leftrightarrow 2^{y+1}=9^{x_1}-1 \Rightarrow 2^{y+1}=(9-1)\left(9^{x_1}+...+1\right)$. Mivel x_1 páratlan, következik, hogy $9^{x_1-1}+9^{x_1-2}+...+1$ is páratlan, tehát $x_1=1$ és $y+1=3$ kell legyen, vagyis $x=2$ és $y=2 \Rightarrow z=2$. Tehát a második megoldás $x=2$, $y=2$ és $z=2$.

15. *Határozd meg azt az* $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *természetes számsorozatot, amelyre* $a_n\neq 0$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ *és* $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}\right)^2=\sum_{k=1}^{n}k\cdot a_k$, $\forall\ \ n\in\mathbb{N}^*$.

Megoldás. $n=1$ esetén $a_1^2=a_1$, tehát $a_1=1$.

$n=2$ esetén az $\left(1+\frac{a_2}{2}\right)^2=1\cdot 1+2\cdot a_2$ egyenlethez jutunk, tehát $a_2^2=4a_2$ és így $a_2=4$. $n=3$ esetén az $\left(1+2+\frac{a_3}{3}\right)^2=1\cdot 1+2\cdot 4+3\cdot a_3$ egyenlethez jutunk, tehát $a_3^2=9a_3$ és így $a_3=9$. A matematikai indukció módszerével igazoljuk, hogy $a_k=k^2$, $\forall k\in\mathbb{N}^*$. Tekintjük a következő állítást: $P(n)$: $a_k=k^2$, ha $k\leq n$.

Az előbbiek alapján $P(1)$, $P(2)$ és $P(3)$ igaz. Ha feltételezzük, hogy $P(n)$ igaz, akkor a feladatban szereplő egyenlőség alapján

$$\left(1+2+3+...+n+\frac{a_{n+1}}{n+1}\right)^2=1^3+2^3+3^3+...+(n+1)a_{n+1},$$

tehát $\left(\frac{n(n+1)}{2}+\frac{a_{n+1}}{n+1}\right)^2=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2+(n+1)a_{n+1}$. Ebből következik, hogy $a_{n+1}^2=(n+1)^2a_{n+1}$, tehát $a_{n+1}=(n+1)^2$. Így $P(n)$-ből következik $P(n+1)$, tehát a matematikai indukció elve alapján $a_n=n^2$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ esetén.

16. *Határozd meg azokat az* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *függvényeket, amelyekre*

$$f(x+y)\geq f(x)\cdot f(y)\geq a^{x+y},\ \forall x,y\in\mathbb{R},\ \textit{ha}\ a>0\ \textit{és}\ a\neq 1.$$

Megoldás. Ha az egyenlőtlenségbe $y=0$-t helyettesítünk, akkor az $f(x)\geq f(x)\cdot f(0)\geq a^x$ egyenlőtlenségekhez jutunk. $a^x>0$, $\forall x\in R \Rightarrow f(x)>0$, $\forall x\in R$. A fentiek alapján $f(0)\geq 1$ és ugyanakkor az $f(x)\geq f(x)\cdot f(0)$

Tartalomjegyzék

egyenlőtlenségből következik, hogy $f(0) \le 1$, tehát $f(0) = 1$. A továbbiakban, ha az eredeti egyenlőtlenségekbe $y = -x$ -et helyettesítünk, akkor $f(0) \ge f(x)f(-x) \ge 1$, $\forall x \in R$. Tehát $f(x)f(-x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Másrészt $1 = f(x)f(-x) \ge a^x \cdot a^{-x} = 1$, ebből következik, hogy $f(x) = a^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

17. *Bizonyítsd be, hogy ha az a, b, c és d valós számok teljesítik a* $4a + 3b = 12$ *és* $-4c + 3d = 12$ *egyenlőségeket, akkor*

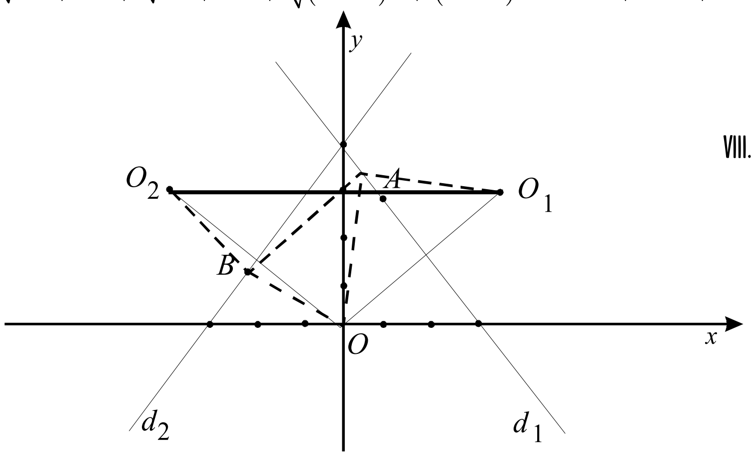
$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} + \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2} \ge 7,68.$$

Megoldás. Tekintsünk egy O középpontú derékszögű koordinátarendszert. Azonnal belátható, hogy az $A(a,\ b)$ és $B(c,\ d)$ pontok a $d_1 : 4x + 3y = 12$, illetve a $d_2 : -4x + 3y = 12$ egyeneseken vannak, és a feladatbeli egyenlőtlenség egyenértékű az $OA + OB + AB \ge 7,68$ egyenlőtlenséggel. Ha O_1 és O_2 az O pont szimmetrikusa a d_1 és d_2 egyenesekre nézve, akkor $OA = O_1A$ és $OB = O_2B$, tehát $OA + OB + AB = O_1A + O_2B + AB$. Másrészt $O_1A + O_2B + AB \ge O_1O_2$, tehát $OA + OB + AB \ge O_1O_2$. A továbbiakban határozzuk meg az O_1O_2 hosszúságát! Ha O_1 koordinátái x_1 és y_1, akkor az O_2 koordinátái $-x_1$ és y_1 (mert szimmetrikusak az Oy tengelyre nézve) és $O_1O_2 = 2x_1$. OO_1 egyenlete $y = mx$ és $OO_1 \perp d_1 \Rightarrow m = \frac{3}{4}$. Tehát OO_1 egyenlete $y = \frac{3}{4}x$. Ha $\{M\} = OO_1 \cap d_1$, és az M pont koordinátái x_2 és y_2, akkor $x_1 = 2x_2$ és $y_1 = 2y_2$, mert M az OO_1 felezőpontja.

$$\{M\} = OO_1 \cap d_1 \Rightarrow \begin{cases} 3x_2 + 4y_2 = 12 \\ y_2 = \frac{3}{4}x_2 \end{cases} \Rightarrow x_2 = \frac{48}{25} \text{ és } y_2 = \frac{3}{4}\cdot\frac{48}{25}. \text{ Tehát } x_1 = \frac{96}{25}$$

$\Rightarrow O_1O_2 = \frac{192}{25} = 7,68$. Tehát

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} + \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2} = OA + OB + AB \ge 7,68.$$



VIII. 1. ábra

Tartalomjegyzék

18. *Bizonyítsd be, hogy ha* $a,b,c\in\mathbb{R}_+$, *akkor*

$$\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{a^2-ac+c^2}\geq\sqrt{b^2-bc+c^2}$$

Megoldás. Ha $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$, $m(BOA\angle)=60^\circ$ és $m(COA\angle)=60^\circ$, akkor a BOA háromszögben a koszinusz tétel alapján $AB=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos 60^\circ}=\sqrt{a^2+b^2-ab}$. A COA háromszögben a koszinusz tétel alapján $AC=\sqrt{a^2+c^2-2ac\cos 60^\circ}=\sqrt{a^2+c^2-ac}$ és a BOC háromszögben $BC=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos 120^\circ}=\sqrt{b^2+c^2+ac}$. Másrészt az ABC háromszögben a háromszög egyenlőtlenség alapján $AB+AC\geq BC$, tehát $\sqrt{a^2-ab+b^2}+\ +\sqrt{a^2-ac+c^2}\geq\sqrt{b^2-bc+c^2}$.

19. *Jelöljük* f_n*-nel az* $f:[0,1]\to[0,1]$ $f(x)=\begin{cases}2x & x\in\left[0,\ \frac{1}{2}\right)\\ 2-2x & x\in\left[\frac{1}{2},\ 1\right]\end{cases}$ *függvény n-edik iteráltját* $\left(f_n=\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{n}\right)$. *Hány darab megoldása van az* $f_n(x)=x$ *egyenletnek?*

Megoldás. A matematikai indukció módszerével igazoljuk, hogy

$$f_n(x)=\begin{cases}2^n x-2k, & ha\quad x\in\left[\frac{2k}{2^n},\frac{2k+1}{2^n}\right]\\ -2^n x+2k+2, & ha\quad x\in\left[\frac{2k+1}{2^n},\frac{2k+2}{2^n}\right]\end{cases}$$

Így az $f_n(x)=x$ egyenletnek 2^n megoldása van.

20. *Az* $f_1:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ *és* $f_2:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ *függvényekre a* $g(n)=\max\left(f_1(n),f_2(n)\right)$ *bármely* $n\in\mathbb{N}$ *függvény szürjektív és a* $h(n)=\min\left(f_1(n),f_2(n)\right)$ *összefüggéssel értelmezett függvény injektív. Bizonyítsd be, hogy az* f_1 *és* f_2 *függvények bijektívek és* $f_1=f_2$.

Megoldás. A g függvény szürjektív, tehát létezik $n_0\in\mathbb{N}$ úgy, hogy $g(n_0)=0\Rightarrow f_i(n_0)\leq 0$. De $f_i(n_0)\in\mathbb{N}$, tehát $f_i(n_0)=0, i=\overline{1,2}$. A g szürjektivitásából következik, hogy $\exists n_1\in\mathbb{N}$, amelyre $g(n_1)=1$. Ha valamelyik *i*-re $f_i(n_1)<1$, akkor $h(n_1)=0=h(n_0)$ és ez ellentmondana h injektivitásának, tehát $f_i(n_1)=1, i=\overline{1,2}$. Ezt a gondolatmenetet megismételve igazolható, hogy $f_i(n_j)=j,\forall j\in\mathbb{N}$, ahol $h_1(n_j)=j$, tehát $f_1=f_2$.

21. *Jelöljük* $f(n)$*-nel az* $\left[n^2,2n^2\right]$ *intervallumban levő teljes négyzetek számát. Tanulmányozd az* $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ *függvény injektivitását és szürjektivitását!*

Tartalomjegyzék

Megoldás. $n^2 \leq (n+k)^2 \leq 2n^2 \Leftrightarrow n \leq n+k \leq \sqrt{2}n$, azaz $0 \leq k \leq n\left(\sqrt{2}-1\right)$. Az előbbi egyenlőtlenségek alapján $f(n) = 1 + \left[n(\sqrt{2}-1)\right]$, $\forall\ n \geq 1$. $f(1) = 1 + \left[\sqrt{2}-1\right] = 1$ és $f(1) = 1 + \left[2\sqrt{2}-2\right] = 1$, tehát f nem injektív. Az $f(n) = k$ egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $1 + \left[n(\sqrt{2}-1)\right] = k$, vagyis ha $n \in \left[\frac{k-1}{\sqrt{2}-1}, \frac{k}{\sqrt{2}-1}\right)$. Mivel az előbbi intervallum hossza $\frac{k}{\sqrt{2}-1} - \frac{k-1}{\sqrt{2}-1} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1 > 2$, legalább két természetes számot tartalmaz. Így az *f* függvény szürjektív.

Megjegyzés. Általában $f(2n-1) = f(2n) = n$, $\forall n \geq 1$.

22. *Bizonyítsd be, hogy ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ egy tetszőleges függvény, akkor létezik olyan $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre $(g \circ g)(x) = f(x)$ bármely $x \in [a,b]$-re!*

Megoldás. Legyen $[c,d]$ egy olyan intervallum, amelynek nincs $[a,b]$-vel közös pontja ($c > b$) és $g : [a,b] \to [c,d]$, $g(x) = \frac{d-c}{b-a}x - \frac{ad-bc}{b-a}$ (ez az elsőfokú függvény az $[a,b]$ intervallumot a $[c,d]$ intervallumba transzformálja és bijektív). Értelmezzük az $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt a következőképpen:

$$r(x) = \begin{cases} g(f(x)), & \text{ha } x \in [a,b] \\ g^{-1}(x), & \text{ha } x \in [c,d] \\ [b,c] - n & \text{elsőfokú} \\ \text{egyébként} & \text{konstans} \end{cases}$$

Látható, hogy

$$r^2(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \in [a,b] \\ (g \circ f \circ g^{-1})(x), & \text{ha } x \in [c,d] \\ h(x) & \text{ha } x \in [b,c] \\ \text{konstans} & \text{egyébként} \end{cases},$$

tehát az így szerkesztett függvény teljesíti a kért feltételt.

23. *Ha az A és B véges halmazok elemeinek száma m illetve n. Határozd meg*

a) *Az $f : A \to B$ függvények számát!*

b) *Az $f : A \to B$ injektiv függvények számát! (ha $m \leq n$)*

c) *Az $f : A \to B$ szürjektív függvények számát! (ha $m \geq n$)*

Megoldás. a) Minden $f(x)$ érték megválasztására *n* lehetőségünk van, tehát a függvények száma n^m.

Tartalomjegyzék

b) Az f-et értelmezzük pontonként. Ha $\mathbf{A} = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ akkor $f(x_1)$ megválasztásánál n lehetőség van, $f(x_2)$ megválasztásánál már csak (n-1). Mivel az $f(x_1)$ minden értékéhez $f(x_2)$-t (n-1) féleképpen választhatjuk az első két függvényérték megválasztását n(n-1) különböző módon végezhetjük. Minden ilyen megválasztás után $f(x_3)$ megválasztására (n-2) lehetőség marad, tehát az első három értéket n(n-1)(n-2) különböző módon lehet megválasztani. Hasonló gondolatmenet alapján az első k darab függvényértéket n(n-1)(n-2)...(n-k+1) különböző módon rögzíthetjük. k-nak m-et választva az $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ injektív függvények száma

$$V_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1).$$

c) Az összes $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ függvények száma n^m mert az $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_m)$ értékek közül mindegyik megválasztására n lehetőségünk van és ezek a választások egymástól függetlenek. Legyen $A_i = \{f : \mathbf{A} \to \mathbf{B} \mid y_i \notin \operatorname{Im} f\}$, ahol $B = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$. Világos, hogy az $A_0 = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ halmaz éppen a nem szürjektív függvényeket tartalmazza, tehát a szürjektív függvények száma $n^m - |A_0|$. Másrészt

$$|A_0| = \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - ...$$
$$+ (-1)^{n-1} \cdot \left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right|$$

(a logikai szitaformula alapján). Mivel a $\sum\limits_{1\le i_1<i_2<...<i_k\le n} A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}$ összeg C_n^k tagot tartalmaz és minden tag értéke $(n-k)^m$ (ennyi azoknak a függvényeknek a száma, amelyek A-t a $B \setminus \{i_1, i_2, ..., i_k\}$ halmazba képezik) írhatjuk, hogy

$$|A_0| = C_n^1 \cdot (n-1)^m - C_n^2 \cdot (n-2)^m + C_n^3 \cdot (n-3)^m - ... + (-1)^m \cdot C_n^{n-1}.$$

Ebből következik, hogy a szürjektív függvények száma

$$n^m - C_n^1 (n-1)^m + C_n^2 (n-2)^m - C_n^3 (n-3)^m + ... + (-1)^{n-1} C_n^{n-1}.$$

24. *Értelmezzük az* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) = \dfrac{\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n\right]^2 - 16}{48}$ *függvényt.*

Bizonyítsd be, hogy

a) $f(n) \in \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}$*!* **b)** $f(n)$ *pontosan akkor természetes szám ha n páratlan!*

Megoldás. $f(n) = \dfrac{(7+4\sqrt{3})^n + (7-4\sqrt{3})^n - 14}{48}$. Newton binomiális tétele alapján létezik olyan $(A_n)_{n\ge 0}$ és $(B_n)_{n\ge 0}$ természetes számsorozat, amelyre

Tartalomjegyzék

$(7+4\sqrt{3})^n = A_n + B_n\sqrt{3}$ és $(7-4\sqrt{3})^n = A_n - B_n\sqrt{3}$, $\forall n \geq 0$. Így $f(n) = \dfrac{A_n - 7}{24} \in \mathbb{Q}$. A binomiális tétel alapján

$$A_n - 7 = 7^n - 7 + C_n^2 7^{n-2} 16 \cdot 3 + C_n^4 7^{n-4} 16^2 \cdot 3^2 + \dots,$$

tehát az $A_n - 7$ számnak a 24-gyel való osztási maradéka egyenlő a $7^n - 7$ szám 24-gyel való osztási maradékával. Ha $n = 2k+1$, akkor

$$7^n - 7 = 7 \cdot \left(7^{2k} - 1\right) = 7 \cdot 48 \cdot M,$$

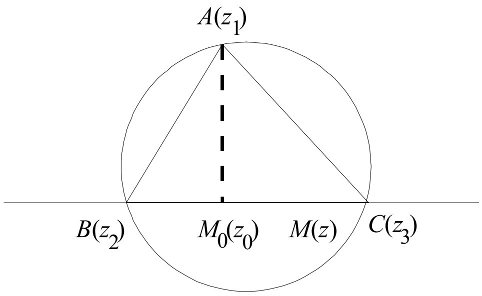
míg $n = 2k$ esetén $7^n - 7 = 7 \cdot \left((8-1)^{2k-1} - 1\right)$ és ez nem osztható 8-cal, tehát $f(n)$ pontosan akkor egész szám, ha *n* páratlan.

25. *Bizonyítsd be, hogy ha a* z_1, z_2 *és* z_3 *komplex számok modulusa r és* $z_2 \neq z_3$, *akkor* $\min\limits_{a \in R} \left|a \cdot z_2 + (1-a) \cdot z_3 - z_1\right| = \dfrac{1}{2r}\left|z_1 - z_2\right| \cdot \left|z_1 - z_3\right|$!

Megoldás. A VIII. 2. ábra jelöléseit használjuk. Ha a *a* paraméter a valós számok halmazában változik, akkor a $z = az_2 + (1-a)z_3$ komplex szám képe a z_2 és a z_3 komplex számok képei által meghatározott egyenesen mozog.

A $\left|a \cdot z_2 + (1-a) \cdot z_3 - z_1\right|$ kifejezés az $M(az_2 + (1-a)z_3)$ és az $A(z_1)$ pontok távolsága, és ez akkor minimális, ha az *AM* szakasz merőleges a *BC* egyenesre. Ebben az esetben

$$AM_0 = \frac{2T[ABC]}{BC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin(BAC)}{BC} = \frac{AB \cdot AC}{2r} = \frac{1}{2r}\left|z_1 - z_2\right|\left|z_1 - z_3\right|.$$



VIII. 2. ábra

26. Adott az XOY szög belsejében egy M pont. Határozd meg azt a d egyenest, amely átmegy M-en és az OX illetve OY egyenesekkel meghatározott háromszög területe minimális! Fogalmazz meg egy térbeli analóg feladatot és oldd is meg!

1. megoldás. Az *M* ponton át húzzunk párhuzamost Ox-szel és Oy-nal. Jelöljük A-val és B-vel az *O* pontnak az A_1-re és B_1-re vonatkozó szimmetrikusát, ahol A_1 és B_1 az előbbi párhuzamosoknak az *Ox* illetve *Oy* félegyenesekkel való metszéspontjai. A szerkesztés alapján az *A*, az *M* és a *B* pont egy egyenesen van, és *M* az $[AB]$ szakasz felezőpontja. Ha A_2B_2 az *M*-en áthaladó tetszőleges egyenes ($A_2 \in (Ox$ és $B_2 \in (Oy$) és $A \in (OA_2)$, akkor az *A*-n át az *OB*-hez húzott párhuzamos metszi az A_2M szakaszt (*N*-ben). Ebben az esetben $T[MB_2B] = T[AMN]$, tehát

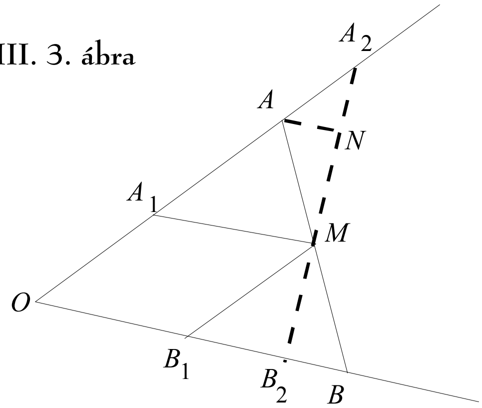
Tartalomjegyzék

$$T[OA_2B_2] = T[OAB] - T[MB_2B] + T[AA_2M] = T[OAB] + T[AA_2N] > T[OAB]$$

Hasonló egyenlőtlenséghez jutunk akkor is, ha $A_2 \in (OA)$. (a B_2-n át húzunk párhuzamost az *OA*-hoz). Az előbbiek alapján a minimális területű háromszög éppen az *OAB* háromszög.

2. megoldás. Az $OA_2 = x$, $OB_2 = y$, $OA = a$ és $OB = b$ jelölések alapján $\frac{y}{x} = \frac{b-y}{x-a}$, tehát $xy = \frac{bx^2}{2x-a}$. Ez a kifejezés akkor minimális, ha $x = a$, és ebben az esetben éppen az OAB háromszög területét kapjuk, tehát ez a keresett minimális területű háromszög.

VIII. 3. ábra



Térbeli általánosítás. Az *Oxyz* triéder belsejében fekvő M ponton átmenő síkok közül az határoz meg a legkisebb térfogatú tetraédert, amelyikre *M* a metszetháromszög súlypontja.

27. *Az ABCD ortocentrikus tetraéderben $M \in [CD]$ egy mozgó pont. Bizonyítsd be, hogy ha $AM + MB$ minimális, akkor az AMB szög szögfelezője merőleges CD-re*!

Megoldás. Vegyük fel az $A_1 \in (BCD)$ pontot úgy, hogy a CDA_1 és CDA háromszögek egybevágók legyenek. $AM + MB = A_1M + MB$, tehát az $AM + MB$ összeg akkor minimális, ha *M* a *CD* és A_1B metszéspontja. *ABCD* ortocentrikus, tehát $AB \perp CD$ és így $BM \perp CD$ és $AM \perp CD$. Ebből következik, hogy $(AMB) \perp CD$, tehát $MN \perp CD$.

Megjegyzés. $m(AMC\angle) = m(BMD\angle)$, tehát $\frac{T[ACD]}{T[BCD]} = \frac{AM}{BM}$ és így *NCD* a *CD* élhez tartozó lapszög szögfelező síkja.

28. *Az ABCD konvex négyszög síkjában létezik három nem kollineáris pont, M_1, M_2 és M_3 úgy, hogy $M_kA^2 + M_kC^2 = M_kB^2 + M_kD^2$ ha $k \in \{1,2,3\}$. Bizonyítsd be, hogy ABCD téglalap! Fogalmazz meg egy térbeli analóg feladatot és bizonyítsd is be*!

Megoldás. Ha *E* és *F* az *AC* illetve *BD* felezőpontja, akkor

$$4EM_k^2 + AC^2 = 4FM_k^2 + BD^2 = 2(M_kA^2 + M_kC^2) = 2(M_kB^2 + M_kD^2),$$

tehát $M_kE^2 - M_kF^2 = \frac{BD^2 - AC^2}{4}$. De $E \neq F$ esetén azon *M* pontok mértani helye, amelyekre az $ME^2 - MF^2$ különbség állandó egy *EF*-re merőleges egyenes. Mivel három nem kollineáris pont teljesíti az előbbi egyenlőséget, $E = F$ és így $BD = AC$. Eszerint *ABCD* téglalap.

Tartalomjegyzék

Térbeli általánosítás. Ha A, B, C, A', B' és C' pontok a térben és négy, nem egy síkban fekvő M_k pontra teljesül az

$$M_kA^2 + M_kB'^2 + M_kC'^2 = M_kB^2 + M_kA'^2 + M_kC'^2 = M_kC^2 + M_kB'^2 + M_kA'^2$$

egyenlőség, akkor $ABCA'B'C'$ egy háromoldalú hasáb.

29. *Az ABC egyenlő oldalú háromszög belsejében levő M pontnak az oldalakra eső vetületeit jelöljük M_1, M_2 és M_3-mal. Bizonyítsd be, hogy az $M_1M_2M_3$ háromszög súlypontja az OM szakasz felezőpontja, ahol O az ABC háromszög középpontja.*

Megoldás. Lásd a IV.5. paragrafus 37. feladatát.

30. *Lehet-e egy kockának és egy síknak a metszete egy szabályos*

a) *háromszög?* **b)** *négyszög?* **c)** *ötszög?* **d)** *hatszög?*

Megoldás. a) A metszet szabályos háromszög, ha a metszet síkja párhuzamos az valamelyik csúcsba összefutó élek nem közös végpontjai által meghatározott síkkal és ennek a síknak az élek közös csúcsától való távolsága nem nagyobb mint $\frac{a\sqrt{15}}{3}$.

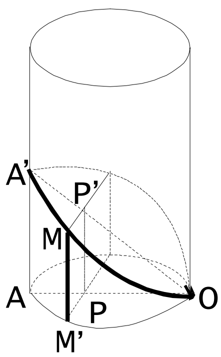
b) A metszet lehet négyzet is. Például ha a metszet síkja párhuzamos valamelyik oldallappal (de más esetben is).

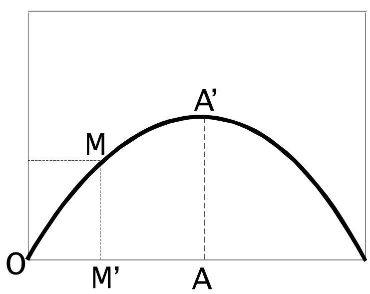
c) A metszet nem lehet szabályos ötszög, mert minden ötszög alakú metszetnek van legalább két párhuzamos oldala.

d) Válasszunk ki egy élet és két rá illeszkedő élet úgy, hogy ne legyenek egy síkban. Ennek a három élnek és a szembefekvő éleknek a felezőpontjai egy szabályos hatszög alakú síkmetszetet határoznak meg.

31. *Egy egységnyi átmérőjű hengert metszünk egy α síkkal, amely a henger tengelyével $45°$-os szöget zár be, majd a henger palástját kiterítjük a síkban úgy, hogy az origóban az O pont és az OX tengelyre az OA körív kerüljön. Így a sík és a henger metszete egy görbét származtat a síkban. Milyen függvénynek a grafikus képe ez a görbe?*

Megoldás. Az α sík alapsíkkal való metszete az alapsíkban az O pontban OA –ra állított merőleges, ez viszont merőleges az ($A'AO$) síkra, tehát merőleges az OA és OA′ egyenesekre egyaránt. Innen a két sík által meghatározott szög mértéke egyenlő az AOA' szög mértékével. $\Rightarrow m\left(\widehat{AOA'}\right) = 45°$.





Legyen M egy pont a síkmetszeten és legyen M' az M pont vetülete az alapsíkra. Ekkor az M pont kiterítés utáni $(x, f(x))$ koordinátái az OM' körív x hossza és az $[MM']$ szakasz $f(x)$ hossza. (Nyilvánvaló, hogy $x \in [0, \pi]$). Tulajdonképpen meg kell határozzuk az $[MM']$ szakasz hosszát x függvényében. Legyen P az M' pont vetülete az $[AO]$ szakaszra. Az $(MM'P)$ sík az OA' egyenest a P' pontban metszi.

$$\left.\begin{array}{l}(AA'O) \perp (AM'O) \\ M'P \perp AO \\ (AA'O) \cap (AM'O) = AO\end{array}\right\} \Rightarrow M'P \perp (AA'O) \Rightarrow M'P \perp PP'$$

$$\left.\begin{array}{l}(AM'O) \cap (M'PP') = M'P \\ (A'MO) \cap (MPP') = MP'\end{array}\right\} \Rightarrow M'P \| MP'$$

A fenti eredményekből azonnal következik, hogy $MM'PP'$ téglalap. Tehát $PP' = MM' = f(x)$, de az OPP'_{Δ} egyenlőszárú és derékszögű, következik, hogy $PP' = OP$. Tehát meg kell határoznunk egy körben egy körív átmérőre eső vetületének hosszát a körív hosszának függvényében. Legyen O' az alapkör középpontja. $OP = r - y = \frac{1}{2} - y$, ahol y az $O'P$ szakasz irányított hossza (O felé pozitív, A felé negatív). Tulajdonképpen $y = r\cos\left(\widehat{MO'O}\right) = \frac{\cos\left(\widehat{M'O'O}\right)}{2}$. Tudjuk, hogy $m\left(\widehat{MO'O}\right) = \frac{x}{r} = 2x$. Tehát $OP = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \sin^2 x$. Következésképpen a keresett függvény: $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin^2 x$.

32. *Az ABCD tetraéderben* $\overrightarrow{S_A}$, $\overrightarrow{S_B}$, $\overrightarrow{S_C}$ *és* $\overrightarrow{S_D}$*-vel jelöljük az A, B, C és D pontokból a szembefekvő lapokra bocsátott merőleges vektorokat, amelyek nagysága a megfelelő szembefekvő lap területének mérőszámával egyenlő. Bizonyítsd be, hogy* $\overrightarrow{S_A} + \overrightarrow{S_B} + \overrightarrow{S_C} + \overrightarrow{S_D} = 0$. *(sündisznó tétel)*

Megoldás. Bizonyítjuk, hogy az $\overrightarrow{S_A} + \overrightarrow{S_B} + \overrightarrow{S_C} + \overrightarrow{S_D}$ vektorösszeg merőleges az $\overrightarrow{S_A}$, $\overrightarrow{S_B}$, $\overrightarrow{S_C}$ és $\overrightarrow{S_D}$ vektorokra.

$$\left(\overrightarrow{S_A} + \overrightarrow{S_B} + \overrightarrow{S_C} + \overrightarrow{S_D}\right)\overrightarrow{S_A} = S_A^2 + \overrightarrow{S_A}\overrightarrow{S_B} + \overrightarrow{S_A}\overrightarrow{S_C} + \overrightarrow{S_A}\overrightarrow{S_D} = S_A^2 - S_A S_B \cos AB -$$

$$-S_A S_C \cos AC - S_A S_D \cos AD = S_A\left(S_A - S_B \cos AB - S_C \cos AC - S_D \cos AD\right) = 0$$

. Az indexeket felcserélgetve állíthatjuk, hogy az $\overrightarrow{S_A} + \overrightarrow{S_B} + \overrightarrow{S_C} + \overrightarrow{S_D}$ vektorösszeg merőleges az $\overrightarrow{S_A}$, $\overrightarrow{S_B}$, $\overrightarrow{S_C}$ és $\overrightarrow{S_D}$, nem egy síkban levő vektorokra, tehát $\overrightarrow{S_A} + \overrightarrow{S_B} + \overrightarrow{S_C} + \overrightarrow{S_D} = \vec{0}$

Tartalomjegyzék

33. *Az ABCD tetraéder lapjainak súlypontját jelöljük rendre G_A, G_B, G_C és G_D-vel. Határozd meg azokat a G pontokat a térben, amelyekre a $\frac{GA}{GG_A}$, $\frac{GB}{GG_B}$, $\frac{GC}{GG_C}$ és $\frac{GD}{GG_D}$ arányok egyike sem kisebb mint 3.*

Megoldás. $GA \geq 3GG_A$, tehát $AG^2 \geq 9GG_A^2$. Hasonló egyenlőtlenségek érvényesek a *B*, *C* és *D* pontokra is, tehát

$$AG^2 + BG^2 + CG^2 + DG^2 \geq 9\left(GG_A^2 + GG_B^2 + GG_C^2 + GG_D^2\right)$$

De $3GG_A^2 = GB^2 + GC^2 + GD^2 - \frac{BC^2 + CD^2 + DA^2}{3}$ (Leibniz tétel) és így

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 \leq \frac{AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 + AC^2 + BD^2}{4}$$

Másrészt a térbeli Leibniz tétel alapján (V. 8. 2. feladat)

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 \geq \frac{AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 + AC^2 + BD^2}{4},$$

tehát éppen egyenlőség áll fenn és így *G* a tetraéder súlypontja.

Megjegyzés. Az AG_A, BG_B, CG_C és DG_D szakaszok 3 arányú Apolóniusz gömbjei a *G*-ben metszik egymást, tehát a külső tartományaik metszete üres. Így *G*-n kívül más pont nem teljesítheti a feltételeket.

34. *A teljes valószínűség tételét használva bizonyítsd be a Newton binomiális tételt!*

Megoldás. Egy kísérlet során az *A* esemény valószínűsége legyen *p,* és az $\overline{A}$ esemény valószínűsége $q = 1 - p$. Annak a valószínűsége, hogy a kísérlet *n*-szeri ismétlése után az *A* esemény pontosan *k*-szor következik be $p_k = C_n^k p^k q^{n-k}$. A teljes valószínűség tétele alapján $\sum_{k=0}^{n} p_k = 1$, tehát $\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = 1$. Ha *a* és *b* tetszőleges valós számok, akkor a $p = \frac{a}{a+b}$ és $q = \frac{b}{a+b}$ számokra az előbbi egyenlőségből következik, hogy $\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} = (a+b)^n$.

35. *Milyen n és k természetes számok esetén alkotnak a C_n^{k-1}, C_n^k és C_n^{k+1} számok számtani haladványt? Négy egymás utáni kombinációs együttható alkothat-e egy számtani haladványt*?

Megoldás. A C_n^{k-1}, C_n^k és C_n^{k+1} számok pontosan akkor alkotnak számtani haladványt, ha $4k^2 - 4nk + n^2 - n - 2 = 0$. Az egyenlet diszkriminánsa $\Delta = 16(n+2)$ és a gyökök $k = \frac{n \pm \sqrt{n+2}}{2}$. Ezek a gyökök pontosan akkor természetes számok, ha $n+2$ teljes négyzet, azaz ha létezik olyan $l \in N$ szám,

Tartalomjegyzék

amelyre $n = l^2 - 2$. Ebben az esetben $k = \frac{l^2 + l - 2}{2}$ vagy $k = \frac{l^2 - l - 2}{2}$. Tehát a C_n^{k-1}, C_n^k és C_n^{k+1} számok pontosan akkor alkotnak számtani haladványt, ha $n = l^2 - 2$ és $k = \frac{l^2 + l - 2}{2}$ vagy $k = \frac{l^2 - l - 2}{2}$ valamilyen l természetes szám esetén. Eszerint négy, egymás utáni kombinációs együttható nem alkothat számtani haladványt, mert az $\frac{l^2 - l - 2}{2} + 1 = \frac{l^2 + l - 2}{2}$ egyenlőség csak $l = 1$ esetén teljesülhet, és erre az értékre $l^2 - 2$ nem természetes szám.

36. a) *Bizonyítsd be, hogy az $x^2 - 5y^2 = 4$ egyenletnek végtelen sok megoldása van a természetes számok halmazában!*

b) *Bizonyítsd be, hogy a $C_n^{k-1} + C_n^k = C_n^{k+1}$ egyenletnek végtelen sok megoldása van a természetes számok halmazában!* $(0 \le k \le n - 1)$

Megoldás. a) Matematikai indukcióval igazolható, hogy ha $(x,\ y)$ megoldása az egyenletnek, akkor az $\left(\frac{5}{2}y + \frac{3}{2}x,\ \ \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}x\right)$ is természetes számpár és megoldása az egyenletnek. Mivel a $(3,\ 2)$ számpár megoldása az egyenletnek, az előbbi tulajdonság alapján végtelen sok megoldás szerkeszthető.

Megjegyzés. Bizonyítható, hogy az egyenlet összes megoldása $\left(L_{2m},\ \ F_{2m}\right)$ alakú, ahol L_{2m} és F_{2m} a páros rendű Lucas- illetve Fibonacci-számok.

b) A $C_n^{k-1} + C_n^k = C_n^{k+1}$ egyenlet az $n - k = a$ helyettesítés után $k^2 + (a + 2)k + 1 - a^2 = 0$ alakban írható. Ennek a kifejezésnek a diszkriminánsa telejs négyzet kell legyen, tehát az $5a^2 + 4a - x^2 = 0$ egyenlet megoldásait keressük. Ennek a diszkriminánsa is teljes négyzet kell legyen, tehát az $x^2 - 5y^2 = 4$ egyenlethez jutunk. Mivel ennek az egyenletnek végtelen sok megoldása van, az eredeti egyenletnek is végtelen sok megoldása van.

37. *Egy szabályos p-szög csúcsai közt egy körutat tervezünk úgy, hogy minden csúcson pontosan egyszer menjünk keresztül. Ezt hányféleképpen tehetjük meg ha az elforgatással egymásba vihető utakat nem tekintjük különbözőknek és p prímszám? Bizonyítsd be, hogy ha p prímszám, akkor* $p \mid (p - 1)! + 1$.

Megoldás. Lásd az András Szilárd és Kovács Lajos által írt "Függvényegyenletek" című könyv függelékének második részét (186.-193. oldal, Ábel Kiadó 2000.)

38. *Legyen P_1, P_2, P_3,... P_{n-1} és P_n egy véges számsorozat.* $\left(P_k \in \mathbb{N}, k = \overline{1,n}\right)$. *A sorozat hosszúságát a következő lépés segítségével csökkenthetjük:*

A P_1 és P_n számok közül a kisebbet kivonjuk mindkettőből és hozzáadjuk a két középsőhöz (ha két szám van középen) vagy a kétszeresét adjuk hozzá a középsőhöz (ha egy szám van középen). A következő táblázatban két ilyen példát mutatunk be:

1	2	3	4	5	6		1	1	17	3
	2	4	5	5	5			2	18	2
		4	9	5	3				22	
		1	12	8						
		14	7							

Látható, hogy juthatunk két számból álló illetve egy számot tartalmazó sorozathoz. (a széleken megjelenő 0-kat minden lépésben elhagyjuk) Mitől függ az, hogy egy vagy két szám marad a végén?

Megoldás. Egy lépés során a $\dfrac{\sum_{k=1}^{n} k\cdot p_k}{\sum_{k=1}^{n} p_k}$ kifejezés értéke nem változik (ez a rendszer súlypontjának abszcisszája), tehát pontosan akkor kapunk egy számot végeredménynek, ha a $\dfrac{\sum_{k=1}^{n} k\cdot p_k}{\sum_{k=1}^{n} p_k}$ tört értéke egész szám.

39. *Az* $ax^2+bx+c=0$, $bx^2+cx+a=0$ *és* $cx^2+ax+b=0$ *egyenletek mindegyikének van egy egész gyöke. Bizonyítsd be, hogy ha* a, b, $c\in R^*$, *akkor a három egyenletnek van legalább egy közös gyöke*!

Megoldás. Jelöljük az egyenletek gyökeit rendre x_1-gyel, x_2-vel és x_3-mal. Az $\begin{cases} ax_1^2+bx_1+c=0 \\ a+bx_2^2+cx_2=0 \\ ax_3+b+cx_3^2=0 \end{cases}$, *a*-ban, *b*-ben és *c*-ben lineáris egyenletrendszernek pontosan akkor van nullától különböző megoldása (ekkor összeférhető a rendszer), ha teljesül az $x_1^2x_2^2x_3^2+x_1x_2x_3+1=x_1^2x_2+x_2^2x_3+x_3^2x_1$ egyenlőség. Ebből következik, hogy az x_1, x_2 és x_3 számok páronként relatív prímek és $\left(x_1^2x_2-1\right)\vdots x_3$, $\left(x_2^2x_3-1\right)\vdots x_1$ és $\left(x_3^2x_1-1\right)\vdots x_2$. Tehát léteznek olyan k_1, k_2 és k_3 egész számok, amelyekre $x_1^2x_2=k_3x_3+1$, $x_2^2x_3=k_1x_1+1$ és $x_3^2x_1=k_2x_2+1$.

Így $(k_3x_3+1)x_3^2x_2=x_1^2x_2^2x_3^2=(k_1x_1+1)x_1^2x_3$, tehát létezik olyan $v\in Z$ szám, amelyre $(k_1x_1+1)v=x_2x_3$ és $(k_3x_3+1)v=x_1^2$. Innen következik, hogy $(k_3x_3+1)=x_1^2x_2=(k_3x_3+1)vx_2$, tehát $x_2\in\{-1,1\}$. Hasonló meggondolások alapján

$x_1\in\{-1,1\}$ és $x_3\in\{-1,1\}$. Mivel az *a*, a *b* és a *c* számok nullától különböznek csak az $x_1=x_2=x_3$ eset lehetséges, tehát az egyenleteknek van közös gyöke.

Tartalomjegyzék

40. *Bizonyítsd be, hogy ha az x és y pozitív valós számokra* $[nx]\,|\,[ny]$ *bármely* $n \in \mathbb{N}$*-re, és* $x \neq y$*, akkor x, y és* $\frac{y}{x}$ *egész számok*!

Megoldás. Az $f(n) = \frac{[ny]}{[nx]}$ függvény aszimptotikusan közeledik a $g(n) = \frac{y}{x}$ konstans függvényhez. A feladat feltétele alapján az *f* értékkészletében csak egész számok vannak, tehát $\frac{y}{x}$ is egész szám kell legyen, az *f* egy n_0-nál nagyobb értékekre konstans és éppen $\frac{y}{x}$-szel egyenlő. Ha az előbbi arány értékét *k*-val jelöljük, írhatjuk, hogy $[nkx] = k[nx]$, $\forall n \geq n_0$ és $\forall k \geq 1$ esetén. Ha $nx = [nx] + \alpha_n$, akkor $nkx = k[nx] + k\alpha_n$, tehát az $[nkx] = k[nx]$ egyenlőség csak akkor teljesülhet minden *k* esetén, ha $\alpha_n = 0$, $\forall$ $n \geq n_0$. Hasonló gondolatmenet alapján az utóbbi összefüggés csak akkor teljesülhet, ha *x* egész része nulla. Így $x,\ y \in N$ és $x|y$.

41. *Bontsd tényezőkre a* $P^2 + PQ + Q^2$ *polinomot ha* $P = X^2Y + Y^2Z + Z^2X$ *és* $Q = Y^2X + Z^2Y + X^2Z$!

Megoldás. $P^2 + PQ + Q^2 = \frac{P^3 - Q^3}{P - Q} = \frac{\left(x^3 - y^3\right)\left(y^3 - z^3\right)\left(z^3 - x^3\right)}{(x - y)(y - z)(z - x)} =$

$$\left(x^2 + xy + y^2\right)\left(y^2 + yz + z^2\right)\left(z^2 + zx + x^2\right)$$

42. *Bizonyítsd be, hogy ha* $a, b \in \mathbb{Z}$*,* $n \in \mathbb{N}^*$ *és* $a \neq b$*, akkor*

$$\frac{2^{2n-1}\left(a^{2n} + b^{2n}\right) - (a + b)^{2n}}{(a - b)^2} \in \mathbb{Z}$$

Megoldás. A $P(X) = 2^{2n-1}\left(X^{2n} + b^{2n}\right) - (X + b)^{2n}$ polinomról kell igazolni, hogy osztható az $(X - b)^2$ polinommal. Másrészt $P(b) = 2^{2n-1}\left(b^{2n} + b^{2n}\right) - (b + b)^{2n} = 0$ és $P'(X) = n \cdot 2^{2n} b^{2n-1} - 2n(2b)^{2n-1} = 0$, tehát a *P* polinom osztható az $(X - b)^2$ polinommal. A hányados egész együtthatós polinom (megkapható a Horner-séma segítségével), tehát a feladatban szereplő kifejezés értéke egész szám.

43. *Az* $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ *halmaz nem üres részhalmazait jelöljük* $R_1, R_2, \ldots, R_{2^n-1}$*-el és tetszőleges* $j \in \{1, 2, 3, \ldots, 2^n - 1\}$ *esetén legyen* P_j *az* R_j *elemeinek a szorzata. Számítsd ki a* $\sum_{j=1}^{2^n-1} P_j$ *összeget*!

Megoldás. Tekintsük az $(X + 1)(X + 2)\ldots(X + n)$ szorzatot. A Viéte-összefüggések alapján X^{n-k} együtthatója éppen a *k* elemű részhalmazokhoz tartozó R_j-k összege, tehát $1 + \sum_{j=1}^{2^n-1} P_j$ az előbbi polinom együtthatóinak összege. Másrészt az együtthatók összege a polinom 1-ben számolt behelyettesítési értéke, tehát $\sum_{j=1}^{2^n-1} P_j = (n+1)! - 1$.

44. *Bizonyítsd be, hogy ha a* $P(x)=0$ *egyenlet* $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ *és* x_n *gyökeire teljesülnek az* $\operatorname{Im}(x_k) \geq 0$ *egyenlőtlenségek, akkor a* $P'(x)=0$ *egyenlet gyökeinek is pozitív a képzetes része.*

Megoldás. A $P'(x)=0$ egyenlet $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x-x_k} = 0$ alakban írható. Ha $z_k = a_k + ib_k$ a $P(x)=0$ egyenlet gyökei és $z = a+ib$ a $P'(x)=0$ egyenlet egyik gyöke, akkor

$$0 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(a-a_k)+i(b-b_k)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(a-a_k)-i(b-b_k)}{(a-a_k)^2+(b-b_k)^2}, \text{ tehát}$$

$$b \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(a-a_k)^2+(b-b_k)^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{(a-a_k)^2+(b-b_k)^2}$$

Ebből az egyenlőségből következik, hogy ha $b_k \geq 0$, akkor $b \geq 0$.

Megjegyzés. Általában, ha *P* gyökei egy tartományban vannak, akkor P' gyökei is ugyanabban a tartományban vannak.

45. *Bizonyítsd be, hogy*

a) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n+1} \cdot \operatorname{tg}\frac{2\pi}{2n+1} \cdot \operatorname{tg}\frac{3\pi}{2n+1} \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg}\frac{n\pi}{2n+1} = \sqrt{2n+1}$;

b) $\cos\frac{\pi}{n} \cdot \cos\frac{2\pi}{n} \cdot \cos\frac{3\pi}{n} \cdot \ldots \cdot \cos\frac{n\pi}{n} = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^{n-1}}$;

c) $\sin\frac{\pi}{2n} \cdot \sin\frac{2\pi}{2n} \cdot \sin\frac{3\pi}{n} \cdot \ldots \cdot \sin\frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$, *ha n páros.*

Megoldás. a) A $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{2n+1}$ kifejtéséből következik, hogy

$$\sin((2n+1)\alpha) = \sin^{2n+1}\alpha \cdot \left(C_n^1 \operatorname{ctg}^{2n}\alpha - C_n^3 \operatorname{ctg}^{2n-2}\alpha + \ldots\right), \text{ tehát}$$

az $x_k = \operatorname{ctg}^2 \frac{k\pi}{2n+1}$ számok gyökei a

$$C_n^1 x^n - C_n^3 x^{n-1} + C_n^5 x^{n-2} - \ldots + (-1)^n C_{2n+1}^{2n+1} = 0$$

egyenletnek. A Viéte-összefüggések alapján $\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \frac{k\pi}{2n+1}} = \frac{1}{2n+1}$.

b) Az $x^n - 1 = 0$ egyenlet gyökei $x_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$, ahol $k = \overline{0,\ n-1}$.

Így

Tartalomjegyzék

$$\frac{1}{1+x_k}=\frac{1}{2\cos\frac{k\pi}{n}\left(\cos\frac{k\pi}{n}+i\sin\frac{k\pi}{n}\right)},\quad \text{tehát}\quad \prod_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+x_k}=\frac{1}{2^n\cdot(-1)^{\frac{n-1}{2}}\prod_{k=0}^{n-1}\cos\frac{k\pi}{n}}.$$

Másrészt az $y_k=\dfrac{1}{1+x_k}$ számok az $y^n\left(\left(\dfrac{1}{y}-1\right)^n-1\right)=0$ egyenlet gyökei, tehát a Viéte-összefüggések alapján $\prod_{k=1}^{n-1}\cos\dfrac{k\pi}{n}=\dfrac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^{n-1}}$.

c) $\dfrac{x^{2n}-1}{x^2-1}=x^{2n-2}+x^{2n-4}+\ldots x^2+1\Rightarrow\sum_{k=0}^{n-1}x^{2k}=\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\dfrac{k\pi}{n}+1\right)$.

$x=1$ esetén az $n=\prod_{k=1}^{n-1}4\sin^2\dfrac{k\pi}{2n}$ egyenlőséghez jutunk, ahonnan következik, hogy $\prod_{k=1}^{n-1}\sin\dfrac{k\pi}{2n}=\dfrac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$.

46. *Bizonyítsd be, hogy ha* $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ldots,\ \varepsilon_{n-1}$ *és* ε_n *az n-ed rendű egységgyökök valamint* $P\in\mathbb{C}[X]$ *egy* $(n-1)$*-ed fokú polinom, akkor a P j-ed fokú tagjának együtthatója* $\dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{\varepsilon_k^j}\cdot P(\varepsilon_k)$.

Megoldás. Alkalmazzuk a VI. 9. paragrafus 15. feladatát.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\varepsilon_k^j}P(\varepsilon_k)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\varepsilon_k^j}\sum_{l=0}^{n}a_{n-l}\varepsilon_k^l=\frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n}a_{n-l}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\varepsilon^{l-j}\right)^k=a_{n-j}.$$

47. *Bizonyítsd be, hogy ha* $P\in\mathbb{C}[X]$, *akkor bármely* $z_0\in\mathbb{C}$ *és* $r\in\mathbb{R}_+$ *esetén létezik olyan* $z_*\in C(z_0,r)$, *amelyre* $\max\limits_{|z-z_0|=r}|P(z)|=|P(z_*)|$.

Megoldás. A $\max\limits_{|z-z_0|=r}|P(z)|$ kifejezés létezik és *P*-nek valamilyen z_1 pontban számolt behelyettesítési értéke. Azt kell tehát igazolni, hogy z_1 nem belső pontja a $|z-z_0|\le r$ körlapnak. Tételezzük fel, hogy ez nincs így, tehát $|z_1-z_0|<r$. Ebben az esetben létezik olyan $\omega>0$ valós szám, hogy a z_1 középpontú ω sugarú kör érinti a $|z-z_0|=r$ kört. $|P(z_1)|=\dfrac{1}{n}\left|\sum_{k=0}^{n-1}P(z_1+\omega_1\cdot\varepsilon_k)\right|\le\dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|P(z_1+\omega_1\cdot\varepsilon_k)|\le|P(z_1)|$, tehát $|P(z_1+\omega_1\cdot\varepsilon_k)|=|P(z_1)|$. Az ω_1 komplex számot úgy választjuk, hogy a modulusa ω legyen és a $z_1+\omega_1$ komplex szám képe a $|z-z_0|=r$ körön helyezkedjen el. Az előbbiek alapján a $\max\limits_{|z-z_0|=r}|P(z)|$ értéket *P* a $|z-z_0|=r$ körön is felveszi.

48. *Rögzített* $n \in \mathbb{N}^*$*-ra jelöljük* S_n*-nel a* $P(X) = X^n + a_1X^{n-1} + ... + a_{n-1}X + 1$ *alakú polinomok halmazát* $(P(X) \in \mathbb{C}[X])$. *Bizonyítsd be, hogy* $\min\limits_{P \in S_n}\left(\max\limits_{|z|=1}|P(z)|\right) = 2$

Megoldás. A $P(X) = X^n + 1$ polinomra $\max\limits_{|x|=1}|P(x)| = 2$, tehát $\min\limits_{P \in S_n}\left(\max\limits_{|z|=1}|P(z)|\right) \le 2$. Ha az előbbi egyenlőtlenség szigorú, akkor létezik olyan $P \in S_n$ polinom, amelyre $-2 < \mathrm{Re}(P(\varepsilon_k)) < 2$, bármely $k \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ esetén. Másrészt (lásd VI. 9. 15.) a feladatbeli polinom osztály tagjaira $\sum\limits_{k=1}^{n} P(\varepsilon_k) = n(1+1) = 2n$, tehát $\min\limits_{P \in S_n}\left(\max\limits_{|z|=1}|P(z)|\right) = 2$.

49. *Bizonyítsd be, hogy ha* x_0 *a* $P(X) = X^n + a_1X^{n-1} + ... + a_{n-1}X + a_n$ *komplex együtthatós polinom gyöke, akkor*

$$|x_0| \le |a_1| + \sqrt{|a_2|} + \sqrt[3]{|a_3|} + ... + \sqrt[n]{|a_n|}$$

Megoldás. Ha $M = |a_1| + \sqrt{|a_2|} + \sqrt[3]{|a_3|} + ... + \sqrt[n]{|a_n|}$ és $|x| > M$, akkor

$$P(x) \ge |x|^n\left(1 - \frac{|a_1|}{M} - \frac{|a_2|}{M^2} - \frac{|a_3|}{M^3} - ... - \frac{|a_n|}{M^n}\right), \text{ tehát}$$

$$P(x) \ge \left(\frac{|x|}{M}\right)^n\left(M^n - M^{n-1}|a_1| - M^{n-2}|a_2| - ... - |a_n|\right)$$

Másrészt $M^n = M^{n-1}\left(|a_1| + \sqrt{|a_2|} + \sqrt[3]{|a_3|} + ... + \sqrt[n]{|a_n|}\right) > \sum\limits_{k=1}^{n} M^{n-k} \cdot |a_k|$, mert $M^{n-1} = M^{k-1} \cdot M^{n-k} \ge \left(\sqrt[k]{|a_k|}\right)^{k-1} M^{n-k}$ és így $M^{n-1}\sqrt[k]{|a_k|} > M^{n-k}|a_k|$. Az előbbi egyenlőtlenségek alapján $P(x) > 0$, ha $x > 0$.

50. *Bizonyítsd be, hogy ha* $1 \ge a_n > a_{n-1} > a_{n-2} > ... > a_1 > a_0 > 0$, *akkor a* $P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0$ *polinom gyökeinek modulusa 1-nél kisebb. (Kakeya tétele)*

Megoldás. $(X-1)P(X) = a_nX^{n+1} - (a_n - a_{n-1})X^n - (a_{n-1} - a_{n-2})X^{n-1} ... - a_0$, tehát $|(x-1)P(x)| \ge a_n|x|^{n+1} - (a_n - a_{n-1})|x|^n - (a_{n-1} - a_{n-2})|x|^{n-1} ... - a_0$ és így $|x| > 1$ esetén

$|(x-1)P(x)| \ge |x|^{n+1}\left(a_n - (a_n - a_{n-1})|x|^{-1} - (a_{n-1} - a_{n-2})|x|^{-2} ... - a_0|x|^{-n-1}\right) > 0$.

Ha $|x| = 1$, akkor $a_n - (a_n - a_{n-1})|x|^{-1} - (a_{n-1} - a_{n-2})|x|^{-2} ... - a_0|x|^{-n-1} = 0$, de az első egyenlőtlenségben akkor és csak akkor van egyenlőség, ha a 0, a_0, x, x^2, ..., x^{n+1} komplex számoknak megfelelő pontok egy egyenesen vannak. Ebben az esetben $x \in \{-1, 1\}$ és ezek közül egyik sem gyöke az egyenletnek, tehát a *P* polinom minden gyökének egynél kisebb a modulusa.

Tartalomjegyzék

VIII.2. Összefoglaló gyakorlatok és feladatok

2.1. Sorozatok (342. oldal)

1. *Határozd meg az a_n sorozat általános tagjának képletét, ha*

$$a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}.$$

Megoldás. Az adott rekurzió $2a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ alakban írható. Ez egy lineáris rekurzió, amelynek a karakterisztikus egyenlete $2x^2 - x - 1 = 0$. A gyökök $x_1 = -\frac{1}{2}$ és $x_2 = 1$, tehát a sorozat általános tagja $a_n = \alpha\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \beta(1)^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Az α és β állandókat a $\begin{cases} a_1 = -\frac{\alpha}{2} + \beta \\ a_2 = \frac{\alpha}{4} + \beta \end{cases}$ egyenletrendszerből számíthatjuk ki. $\alpha = \frac{4}{3}(a_2 - a_1)$ és $\beta = \frac{1}{3}a_1 + \frac{2}{3}a_2$, tehát

$$a_n = \frac{4}{3}(a_2 - a_1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3}a_1 + \frac{2}{3}a_2, \text{ bármely } n \in \mathbb{N}^* \text{ esetén.}$$

2. *Bizonyítsd be, hogy ha $x_i \in (0,1)$, minden $i = \overline{1,n}$ esetén, vagy $x_i \in (1,+\infty)$ minden $i = \overline{1,n}$ esetén, akkor $\sum_{i=1}^{n} \log_{x_{i+2}} \sqrt[n]{x_i x_{i+1}} \geq 2$ (értelmezés alapján $x_{n+1} = x_1$ és $x_{n+2} = x_2$).*

Megoldás

$$\sum_{i=1}^{n} \log_{x_{i+2}} \sqrt[n]{x_i x_{i+1}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\log_{x_{i+2}} x_i + \log_{x_{i+2}} x_{i+1}\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\lg x_i}{\lg x_{i+2}} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\lg x_{i+1}}{\lg x_{i+2}}\right) \quad (1)$$

Alkalmazzuk a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenséget az $a_i = \frac{\lg x_i}{\lg x_{i+2}}$, $i = \overline{1,\, n}$ és $b_i = \frac{\lg x_{i+i}}{\lg x_{i+2}}$, $i = \overline{1,\, n}$ számokra. Ezek a számok pozitívak az $x_i \in (0,1)$, $\forall\ i = \overline{1,n}$, vagy $x_i \in (1,+\infty)$, $\forall\ i = \overline{1,n}$ feltétel alapján, tehát írhatjuk, hogy

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\lg x_i}{\lg x_{i+2}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\frac{\lg x_i}{\lg x_{i+2}}} = 1 \ (2)$$

$$\text{és } \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\lg x_{i+1}}{\lg x_{i+2}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} b_i} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\frac{\lg x_{i+1}}{\lg x_{i+2}}} = 1,\ (3)$$

Tartalomjegyzék

(a gyökök alatti szorzatokban a számláló és a nevező egyaránt tartalmazza az összes $\lg x_i$, $i = \overline{1,n}$ tényezőt). Az (1), (2) és (3) összefüggések alapján

$$\sum_{i=1}^{n} \log_{x_{i+2}} \sqrt[n]{x_i x_{i+1}} \geq 1 + 1 = 2\,.$$

3. *Legyen* $S_n = x_1^n + x_2^n$, *ahol* x_1 *és* x_2 *az* $ax^2 - 2bx + c = 0$ *egyenlet gyökei. Igazold, hogy ha az* $(S_n)_{n\geq 1}$ *sorozat számtani haladvány és* $b \neq 0$, *akkor az* a, b *és* c *számok is számtani haladványban vannak.*

Megoldás. Ha x_i gyöke az $ax^2 - 2bx + c = 0$ egyenletnek, akkor $ax_i^{n+1} - 2bx_i^n + cx_i^{n-1} = 0$, ha $i \in \{1,2\}$ és $n \geq 1$. Ezekből az összefüggésekből ($i = 1$ és $i = 2$ esetén összeadva) következik, hogy $aS_{n+1} - 2bS_n + cS_{n-1} = 0$, ha $n \geq 1$. (1)

Ha $(S_n)_{n\geq 1}$ számtani haladvány, akkor $S_n = S_{n-1} + r$ és $S_{n+1} = S_{n-1} + 2r$, ha $n \geq 2$. Így (1) alapján $(a - 2b + c)S_{n-1} + 2(a-b)r = 0$, $\forall\, n \geq 2$. Ha ezt az összefüggést felírjuk $n+1$-re is, majd a két egyenlőség megfelelő oldalait egymásból kivonjuk az $(a - 2b + c)(S_n - S_{n-1}) = 0$, $\forall\, n \geq 2$ összefüggéshez jutunk. Ha az $(S_n)_{n\geq 1}$ sorozat konstans sorozat, akkor az $aS_{n+1} - 2bS_n + cS_{n-1} = 0$ egyenlőség alapján $a - 2b + c = 0$ (ha $S_n = 0, \forall\, n \geq 1$, akkor $b = c = 0$). Ha az $(S_n)_{n\geq 1}$ sorozat nem konstans, akkor az $(a - 2b + c)(S_n - S_{n-1}) = 0$ egyenlőség alapján következik, hogy $a - 2b + c = 0$. Tehát az a, b és c számok mindkét esetben számtani haladványban vannak.

4. *Határozd meg az* x, y *és* z *számjegyeket, ha az* x, $\overline{yx}$ *és* $\overline{zyx}$ *számok mértani haladványt alkotnak.*

Megoldás. A mértani sorozat tulajdonsága alapján $\frac{x}{\overline{yx}} = \frac{\overline{yx}}{\overline{zyx}}$, ahonnan kapjuk, hogy $x(100z + 10y + x) = (10y + x)^2$. Ebből $zx - y^2 = \frac{xy}{10}$, ahonnan következik, hogy xy osztható 10-zel. Két esetet különböztetünk meg.

A triviális eset, ha $y = z = 0$, ez nem lehetséges, mert az $\overline{yx}$ jelölés alapján $y \neq 0$.

Első eset, ha $x = 5$ és $y = 2k$, ahol $k \in \{1,2,3,4\}$. Ekkor $5z - 4k^2 = k$ és $5z = k(4k+1)$, ahonnan következik, hogy $4k+1$ osztható 5-tel, tehát $k = 1$ és $z = 1$. Ebben az esetben $x = 5$, $y = 2$ és $z = 1$.

Második eset, ha $y = 5$ és $x = 2k$, ahol $k \in \{1,2,3,4\}$. Ekkor $2kz - 25 = k$ és $k(2z-1) = 25$. Tehát $2z - 1$ osztható 25,-tel, de $2z - 1 \neq 0$ és $2z - 1 < 25$, következik, hogy ebben az esetben nincs megoldás, tehát az egyetlen megoldás $x = 5$, $y = 2$ és $z = 1$.

5. *Igazold, hogy ha az* a_1 a_2, ..., a_n, ... *számok egymás utáni tagjai egy számtani haladványnak, akkor minden* $n \geq 2$ *természetes szám esetén fennáll a*

$$a_1 - C_n^1 a_2 + C_n^2 a_3 - ... + (-1)^n C_n^n a_{n+1} = 0$$

egyenlőség. Igaz-e az fordított állítás is?

Megoldás. Ha a $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat számtani haladvány, akkor $a_k = a_1 + (k-1)r$, $\forall k \geq 1$ és így $a_1 - a_2 C_n^1 + a_3 C_n^2 - \quad ... \quad (-1)^n a_{n+1} C_n^n =$

$$a_1 - (a_1 + r) C_n^1 + (a_1 + 2r) C_n^2 - \quad ... \quad (-1)^n (a_1 + nr) C_n^n =$$

$$= a_1 \left(1 - C_n^1 + C_n^2 - \quad ... \quad (-1)^n C_n^n\right) - r\left(C_n^1 - 2C_n^2 + \quad ... \quad (-1)^{n-1} nC_n^n\right) =$$

$$= a_1 \left(1 - C_n^1 + C_n^2 - \quad ... \quad (-1)^n C_n^n\right) - r \cdot n\left(1 - C_{n-1}^1 + \quad ... \quad (-1)^{n-1} C_{n-1}^{n-1}\right) = 0 .$$

Mivel $\left(1 - C_n^1 + C_n^2 - \quad ... \quad (-1)^n C_n^n\right) = (1-1)^n = 0$.

Fordítva $n = 2$ esetén következik, hogy $a_1 - 2a_2 + a_3 = 0$, tehát az a_1, a_2 és a_3 számok számtani haladványban vannak. A matematikai indukció módszerét használva igazoljuk, hogy ha az adott egyenlőség minden $n \geq 2$ esetén teljesül, akkor az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat számtani haladvány. Feltételezzük, hogy az $(a_k)_{k=\overline{1,n}}$ számok számtani haladványban vannak. Az adott összefüggésből

$$a_1 - a_2 C_n^1 + a_3 C_n^2 - \quad ... \quad (-1)^n a_{n+1} C_n^n = 0 . \ (1)$$

Másrészt ha $a'_{n+1} = a_1 + n(a_2 - a_1)$, akkor a már bizonyított egyenlőség alapján

$$a_1 - a_2 C_n^1 + a_3 C_n^2 - \quad ... \quad (-1)^{n-1} a_n C_n^{n-1} + (-1)^n a'_{n+1} C_n^n = 0 . \ (2)$$

Az (1) és (2) alapján $a_{n+1} = a'_{n+1}$, tehát az $(a_k)_{k=\overline{1,n+1}}$ számok is számtani haladványban vannak. A matematikai indukció elve alapján igaz a következő kijelentés:

Ha $a_1 - C_n^1 a_2 + C_n^2 a_3 - ... + (-1)^n C_n^n a_{n+1} = 0$, $\forall n \geq 2$, akkor $(a_n)_{n\geq 1}$ számtani haladvány.

6. *Találj 5 számtani haladványban levő prímszámot!*

Megoldás. Öt, számtani haladványt alkotó prímszám a például az $(5, 11, 17, 23, 29)$ vagy a $(37, 67, 97, 127, 157)$.

7. *Egy test szabadon esik, és az első másodpercben 4,9 m utat tesz meg. Ezután, minden következő másodpercben 9,8 m-rel nagyobb utat tesz meg, mint az azt megelőzőben.*

a) *Mekkora utat tesz meg a test 10 másodperc esés alatt?*

b) *Mennyi idő alatt ér a földre egy szabadon eső test, ha 2000 m magasról indul?*

Megoldás. I. megoldás. Fizikából felhasználjuk az egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás egyenletét ($x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$).

a) $x_0 = 0$, $v_0 = 0\frac{m}{s}$, $a = 9,8\frac{m}{s^2}$, $t = 10 \quad s$. Tehát $x = \frac{1}{2}\cdot 9,8\cdot 100 = 490m$.

b) $x_0 = 0$, $v_0 = 0\frac{m}{s}$, $a = 9,8\frac{m}{s^2}$, $x = 2000m$. Behelyettesítve az egyenletbe kapjuk, hogy $2000 = 4,9t^2$, ahonnan $t = 20,2030...s$.

II. megoldás. A számtani haladvány összegképletét használjuk.

a) $a_1 = 4,9$, $r = 9,8$, és $S_n = a_1 n + \frac{n(n-1)}{2}r$. Tehát a megtett út $S_{10} = 4,9\cdot 10 + \frac{10\cdot 9}{2}\cdot 9,8 = 490$ méter.

b) Az $S_n = 2000$ egyenlőség a $2000 = 4,9n^2$ egyenlethez vezet. Ennek az egyenletnek nincs természetes megoldása, ezért megközelítjük a megoldást. A $4,9\cdot 20^2 < 2000 < 4,9\cdot 21^2$ egyenlőtlenségek alapján a szükséges idő $t = 20 + \frac{x}{10}$ alakban írható. A feltételek alapján a test gyorsulása $9,8\frac{m}{s^2}$ és így minden tizedperc alatt $9,8cm$-rel több utat tesz meg, mint az azelőtti tizedmásodpercben. Az első $20s$ alatt $1960m$ a megtett út és az utolsó tizedmásodpercben $19,551m$ a megtett út, tehát a következő két tizedmásodpercben $2\cdot 1955,1 + 3\cdot 9.8 = 3939,6cm$-t tesz meg. Ha még egy tizedmásodpercet haladna, akkor már több mint $2000m$ lenne a megtett út, ezért $t = 20,2 + \frac{y}{100}$. Ez a közelítgetés nem ér véget, viszont mutatja, hogy tetszőleges pontossággal kiszámítható a kívánt érték.

8. *Igazold, hogy minden n és m természetes szám esetén létezik olyan n tagú és m rációjú számtani sorozat, melynek tagjai összetett egész számok.*

Megoldás. Egy, a feladat feltételeinek eleget tevő számtani haladvány a következő:

$$a_k = (n+1)! + (k+1)m \text{, ahol } k \in \{1,2,...,n\}.$$

Minden tag összetett szám, hisz $a_k = (k+1)\left(m + \frac{(n+1)!}{k+1}\right)$, ahol $k \in \{1,2,...,n\}$ azonkívül sem $(k+1)$, sem $\left(m + \frac{(n+1)!}{k+1}\right)$ nem lehet 1, mivel nagyobb vagy egyenlők 2-vel.

9. *Két egymástól 100 km távolságra levő kerékpáros A és B egymás felé indulnak $v_1 = 10$ km/h és $v_2 = 15$ km/h sebességgel. Egy madár A-tól B fele repül ingázva a két kerékpáros között, amíg ők találkoznak. Milyen távolságot repül be a madár, ha a sebessége 25 km/h?*

Megoldás. A madár annyi ideig repül, amennyi idő alatt találkozik a két kerékpáros. A két kerékpáros által a találkozásig megtett út egyenlő az eredeti távolságukkal, tehát a találkozásig eltelt idő $t = \dfrac{100km}{10km/h + 14km/h} = 4h$. Ez alatt a madár összesen $100km$ távolságot repül be.

2. megoldás. Jelöljük az eredeti távolságot d-vel és a madár sebességét v-vel. A madár a B-ből induló kerékpárost először $t_1 = \dfrac{d}{v_1 + v_2 + v}$ idő után éri el. Ez alatt az két kerékpáros közti távolság $d_1 = d - (v_1 + v_2)\dfrac{d}{v_1 + v_2 + v} = d\dfrac{v}{v_1 + v_2 + v}$-re csökken. A madár az A-ból induló kerékpárost $t_2 = \dfrac{d_1}{v_1 + v_2 + v} = \dfrac{dv}{\left(v_1 + v_2 + v\right)^2}$ idő után éri el és általában a madár k-adik és $(k+1)$-edik találkozása közt $t_{k+1} = \dfrac{dv^k}{\left(v_1 + v_2 + v\right)^{k+1}}$ idő telik el. Így a madár által megtett út az $x_k = \dfrac{v^k d}{\left(v_1 + v_2 + v\right)^k}$, $k \geq 1$ végtelen mértani haladvány összegeként is felfogható. Ez az összeg az $x = \dfrac{vd}{v_1 + v_2 + v} \cdot \dfrac{1}{1 - \dfrac{v}{v_1 + v_2 + v}} = \dfrac{vd}{v_1 + v_2}$ értékhez közeledik.

Megjegyzés. Az anekdoták szerint Neuman János egyik tanára feladta ezt a feladatot az ifjú Neuman-nak, aki néhány másodperc alatt megadta a helyes választ. A tanára megkérdezte, hogy hogyan jött rá a megoldásra, mire a válasz:

„Összegeztem egy mértani sort”

10. *Határozd meg az a_1, a_2, a_3, a_4 valós számokat tudva, hogy egy számtani sorozat egymásutáni tagjai és az $1 + a_1$, $a_2 - 1$, $a_3 - 1$, $a_4 + 3$ számok mértani sorozatot alkotnak.*

Megoldás. A feladat alapján a következő összefüggések írhatók fel:

$$a_k = a_1 + (k-1) \cdot r \text{, ha } k = \overline{1,\ 4},$$

ahol r a számtani haladvány rációja és $\dfrac{1 + a_1}{a_2 - 1} = \dfrac{a_2 - 1}{a_3 - 1} = \dfrac{a_3 - 1}{a_4 + 3} = q$, ahol q a mértani haladvány rációja. Az $\dfrac{1 + a_1}{a_2 - 1} = \dfrac{a_2 - 1}{a_3 - 1}$ egyenlőségből kapjuk, hogy

$$a_1 = \frac{(r-2)^2 - 2}{2}. \qquad (1)$$

Tartalomjegyzék

Az $\dfrac{1+a_1}{a_2-1}=\dfrac{a_3-1}{a_4+3}$ egyenlőségből kapjuk, hogy $a_1=\dfrac{(r-2)(r-1)-3}{3}$. (2)

Az (1) és (2) alapján az r -re a következő egyenlet írható fel:

$$\frac{(r-2)^2-2}{2}=\frac{(r-2)(r-1)-3}{3},$$

aminek megoldása $r=2$ vagy $r=4$. Ha $r=2$ akkor $a_1=-1$, $a_2=1$, $a_3=3$ $a_4=5$, amire nem teljesül, hogy $1+a_1$, a_2-1, a_3-1, a_4+3 számok mértani haladványt alkotnak. Ha $r=4$ akkor $a_1=1$, $a_2=5$, $a_3=9$ és $a_4=13$, ami teljesíti a feladat feltételeit.

11. *Bizonyítsd be, hogy ha* $\sin(b+c-a)$, $\sin(c+a-b)$, $\sin(a+b-c)$ *számtani haladványt alkot akkor* $\operatorname{tg} a$, $\operatorname{tg} b$ *és* $\operatorname{tg} c$ *is számtani haladványt alkot (ha léteznek ezek a számok).*

Megoldás. Mivel számtani haladványt alkotnak az egymásutáni tagok különbsége állandó:

$$\sin(c+a-b)-\sin(b+c-a)=\sin(a+b-c)-\sin(c+a-b).$$

Ez az egyenlőség a következő alakba írható, ha átírjuk a szinuszok különbségeit:

$$2\cos c\sin(b-a)=2\cos a\sin(c-b),$$

ami a következővel ekvivalens:

$$\cos c(\sin b\cos a-\sin a\cos b)=\cos a(\sin c\cos b-\sin b\cos c).$$

Mivel $\operatorname{tg} a$, $\operatorname{tg} b$, $\operatorname{tg} c$ értelmezettek, tehát $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$ közül egyik sem nulla az utolsó egyenlőség mindkét oldalát elosztjuk $\cos a\cos b\cos c$ -vel. Így a

$$\operatorname{tg} b-\operatorname{tg} a=\operatorname{tg} c-\operatorname{tg} b,$$

egyenlőséghez jutunk, ami azt jelenti, hogy $\operatorname{tg} a$, $\operatorname{tg} b$, $\operatorname{tg} c$ számok számtani haladványt alkotnak.

12. *Bizonyítsd be, hogy ha* n *számtani sorozat* r_1, r_2, ... , r_n *rációval a természetes számok egy partícióját alkotják, akkor*

a) r_1, r_2, ... , r_n *nem mind különböző,*

b) $\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_2}+\ \dots\ +\dfrac{1}{r_n}=1.$

Megoldás. Jelöljük a_j-vel $j=\overline{1,n}$ a partició j -edik halmazának első elemét és tekintsük az $S_j=\sum_{k=0}^{\infty}x^{a_j+kr_j}=\dfrac{x^{a_j}}{1-x^{r_j}}$ összegeket. Mivel az $\left(a_j+kr_j\right)_{k\geq 0}$ számtani haladványok az $\mathbb{N}$ egy partícióját alkotják, írhatjuk, hogy $\sum_{j=1}^{n}S_j=\sum_{k=0}^{\infty}x^k=\dfrac{1}{1-x}$.

Tehát $\sum_{j=1}^{n}\dfrac{x^{a_j}}{1-x^{r_j}}=\dfrac{1}{1-x}$ és így $\sum_{j=1}^{n}\dfrac{x^{a_j}}{1+x+x^2+\ldots+x^{r_j-1}}=1$. Ha x közeledik az

Tartalomjegyzék

1-hez, akkor a jobb oldal 1 és a bal oldal $\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{r_j}$-hez közeledik, tehát $\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{r_j}=1$.

Ugyanakkor ha $r=\max\{r_j \mid j=\overline{1,n}\}$, akkor legalább két olyan $j\in\{1,2,\ldots,n\}$ érték létezik, amelyre $r=r_j$. Ellenkező esetben ha x közeledik egy r-ed rendű primitív egységgyökhöz, akkor a jobb oldal 1 marad és a bal oldal ∞-hez közeledik.

13. *Bizonyítsd be, hogy végtelen sok prím tagja van az $a_n=4n-1$ sorozatnak.*

Megoldás. Feltételezzük, hogy véges sok $4n-1$ alakú prímszám van és ezek a p_1, p_2, … , p_k. Ha $m=p_1p_2...p_k$, akkor vizsgáljuk az $a_m=4p_1p_2...p_k-1$ számot. a_m nem osztható a p_1, p_2, … , p_k prímek egyikével sem, tehát vagy prímszám, vagy csak $4k+1$ alakú prímtényezői vannak. De két $4k+1$ alakú szám szorzata is ilyen alakú, tehát a_m-nek biztosan van $4k-1$ alakú osztója, ugyanakkor $a_m>p_j$ ha $j=\overline{1,k}$, tehát a_m nem prím. A feltételezésünk alapján az a_m $4k-1$ alakú prímosztója a p_1, p_2, … , p_k számok valamelyike kell legyen (mert felsoroltuk az összes ilyen alakú prímet). Ez ellentmondás, mert a_m nem osztható a p_1, p_2, … , p_k prímek egyikével sem. Az a feltételezésünk, hogy véges sok $4n-1$ alakú prímszám van hamis, tehát végtelen sok $4n-1$ alakú prímszám van.

14. *Bizonyítsd be, hogy létezik a természetes számoknak egy három osztályból álló partíciója úgy, hogy bármely n számra n, $n-50$ és $n+2003$ különböző osztályban legyenek.*

Megoldás. Csoportosítsuk a számokat a 3-mal való osztási maradékuk szerint. Ha valamilyen n esetén az n, $n-50$ és $n+2002$ számok közül kettő ugyanabban a csoportban van, akkor a különbsége osztható 3-mal. Mivel $n-(n-50)=50$, $n+2003-n=2003$ és $n+2003-(n-50)=2053$ és ezek közül egyik sem osztható 3-mal a kívánt csoportosítás elérhető.

15. *Bizonyítsd be, hogy egy háromszögben a $\operatorname{ctg}A$, $\operatorname{ctg}B$ és $\operatorname{ctg}C$ számok akkor és csak akkor alkotnak számtani sorozatot, ha a $\cos 2A$, $\cos 2B$ és $\cos 2C$ is számtani sorozatot alkot.*

Megoldás. A feladat alapján

$$\operatorname{ctg}B-\operatorname{ctg}A=\operatorname{ctg}C-\operatorname{ctg}B.$$

Az egyenlőség bal oldala a következőképpen alakítható át:

$$\operatorname{ctg}B-\operatorname{ctg}A=\frac{\cos B\sin A-\cos A\sin B}{\sin A\sin B}=\frac{\sin C\sin(A-B)}{\sin A\sin B\sin C}=$$

$$=\frac{\sin(\pi-A-B)\sin(A-B)}{\sin A\sin B\sin C}=\frac{-2\sin(A+B)\sin(B-A)}{2\sin A\sin B\sin C}=\frac{\cos 2B-\cos 2A}{2\sin A\sin B\sin C}.$$

Hasonlóan $\operatorname{ctg}B-\operatorname{ctg}A=\dfrac{\cos 2C-\cos 2B}{2\sin A\sin B\sin C}$.

Az egyenlőség a következővel ekvivalens: $\cos 2B-\cos 2A=\cos 2C-\cos 2B$.

Tehát $\cos 2A$, $\cos 2B$ és $\cos 2C$ számok is számtani haladványt alkotnak.

16. *Bizonyítsd be, hogy a következő számok egy számtani haladványt alkotnak bármely $n \geq 0$:*

$$\frac{-n^2}{(n+1)\left(n^2+n+1\right)},\ \frac{1}{n^2+n+1},\ \frac{n^2+2n+2}{(n+1)\left(n^2+n+1\right)}.$$

Megoldás. Egyik tört nevezője sem lehet nulla, mert n természetes szám. Továbbá

$$\frac{n^2+2n+2}{(n+1)\left(n^2+n+1\right)}-\frac{1}{n^2+n+1}=\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n^2+n+1}-\frac{-n^2}{(n+1)\left(n^2+n+1\right)},$$

ahonnan következik a feladat állítása.

17. *Határozd meg az m paraméter értékét úgy, hogy az $\frac{1}{x}$, $\frac{m}{x(1-x)}$, $\frac{2-2x-m}{x(1-x)}$ számok egy 3 rációjú számtani haladvány alkossanak.*

Megoldás. Ahhoz, hogy a törtek értelmezettek legyenek $x \in R \setminus \{0,1\}$.
Észrevehető, hogy

$$\frac{2-2x-m}{x(1-x)}=\frac{2}{x}-\frac{m}{x(1-x)} \text{ és } \frac{2-2x-m}{x(1-x)}-\frac{1}{x}=\frac{1}{x}-\frac{m}{x(1-x)}.$$

Ebből következik, hogy $\frac{1}{x}$ a középső tag kell legyen. Első eset, ha $\frac{1}{x}-\frac{m}{x(1-x)}=3$. A műveletek elvégzése után a $3x^2-4x+1-m=0$ egyenlethez jutunk. Ennek az egyenletnek pontosan akkor létezik valós gyöke, ha az egyenlet diszkriminánsa nem negatív. Tehát $\Delta=16-12(1-m)\geq 0$. Innen kapjuk a $16-12(1-m)\geq 0$ egyenlőtlenséget. Ennek az egyenlőtlenség megoldása $m \geq -\frac{1}{3}$. Második eset, ha $\frac{m}{x(1-x)}-\frac{1}{x}=3$. Ekkor az $3x^2-2x+m-1=0$ egyenlethez jutunk, aminek szintén kell létezzen valós megoldása. Tehát $\Delta=4-12(m-1)\geq 0$. Innen az m-re kapott egyenlőtlenség megoldásával kapjuk, hogy $m \leq \frac{4}{3}$.

18. I. *Bizonyítsd be, hogy a következő kijelentések ekvivalensek:*

a) *Az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat egy számtani sorozat.*

b) *Létezik a, $b \in R$ úgy, hogy $a_n=a\cdot n+b$, bármely $n \geq 1$-re.*

c) *Létezik c, $d \in R$ úgy, hogy $S_n=c\cdot n^2+d\cdot n$ bármely $n \geq 1$-re.*

d) $a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$ *bármely $n \geq 2$-re.*

II. *Helyettesíthető-e a* **d)** *pont az* $a_n = \dfrac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$ *bármely* $n \geq k+1$*-re kifejezéssel.*

Megoldás

a) $\Rightarrow$ **b)**

Legyen r a sorozat rációja, ekkor $a_n = a_1 + (n-1)\cdot r$ bármely $n \geq 2$-re. Ha $a = r$ és $b = a_1 - r$ akkor $a_n = a \cdot n + b$, bármely $n \geq 1$-re.

b) $\Rightarrow$ **c)**

Felírjuk az S_n értelmezését és elvégezzük a műveleteket.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (a\cdot k + b) = a\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + b\cdot n = a\cdot\frac{n(n+1)}{2} + b\cdot n = n^2\cdot\frac{a}{2} + n\cdot\left(b + \frac{a}{2}\right).$$

Tehát, ha $c = \dfrac{a}{2}$ és $d = b + \dfrac{a}{2}$ akkor $S_n = c\cdot n^2 + d\cdot n$ bármely $n \geq 1$-re.

c) $\Rightarrow$ **d)**

Az alábbi egyenlőségek ekvivalensek:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2},\ 2a_n = a_{n-1} + a_{n+1},\ 3a_n = S_{n+1} - S_{n-2}.$$

Az előző pont alapján kapjuk

$$S_{n+1} - S_{n-2} = c(n+1)^2 + d(n+1) - c(n-2)^2 - d(n-2) = 3\left[c(2n-1) + d\right].$$

Tehát $a_n = c(2n-1) + d = S_n - S_{n-1}$, ami igaz kijelentés, tehát igaz az $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ egyenlőség is bármely $n \geq 2$-re.

d) $\Rightarrow$ **a)**

Legyen $r = a_2 - a_1$, innen következik, hogy $a_2 = a_1 + r$. Az előző pont alapján $a_2 = \dfrac{a_1 + a_3}{2}$, ahonnan következik, hogy $a_3 - a_1 = 2r$, tehát $a_3 = a_1 + 2r$.

Matematikai indukcióval bizonyítjuk, hogy $a_n = a_1 + (n-1)\cdot r$. Feltételezzük, hogy ez az egyenlőség fennáll egészen $n-1$-ig és bizonyítjuk, hogy fennáll n re is. Tehát $a_{n-1} = a_1 + (n-2)\cdot r$ és $a_{n-2} = a_1 + (n-3)\cdot r$. A **d)** pont alapján $a_{n-1} = \dfrac{a_{n-2} + a_n}{2}$, ahonnan kifejezve a_n-et kapjuk, hogy

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} = 2a_1 + 2r\cdot(n-2) - a_1 - r\cdot(n-3) = a_1 + r\cdot(n-1),$$

amit bizonyítani akartunk.

II. A válasz nem. Például, ha $k = 2$ és legyen $(a_n)_{n\geq 1}$ és $(b_n)_{n\geq 1}$ két számtani haladvány és $(c_n)_{n\geq 1}$ egy sorozat úgy, hogy $c_{2l} = a_l$ és $c_{2l-1} = b_l$ bármely $l \geq 1$-re, akkor $(c_n)_{n\geq 1}$ nem számtani sorozat teljesíti a megadott feltételeket.

Tartalomjegyzék

19. *Bizonyítsd be, hogy ha* a, b, c *számtani haladvány alkot akkor a* b^2+bc+c^2, c^2ac+a^2, a^2+ab+b^2 *számok is számtani haladványt alkotnak. Bizonyítsd be, hogy ha* $a+b+c\neq 0$ *akkor az állítás fordítottja is igaz.*

Megoldás. Észrevehető, hogy

$$\left(c^2+ac+a^2\right)-\left(b^2+bc+c^2\right)=(a-b)(a+b+c)=(-r)(a+b+c), \qquad (1)$$

ahol r az a, b, c haladvány rációja. Hasonlóan

$$\left(a^2+ab+b^2\right)-\left(c^2+ca+a^2\right)=(b-c)(a+b+c)=(-r)(a+b+c). \qquad (2)$$

Az (1) és (2) alapján b^2+bc+c^2, c^2ac+a^2, a^2+ab+b^2 számok számtani haladványt alkotnak. Ugyanakkor (1) és (2) alapján

$$\left(b^2+ab+a^2\right)+\left(c^2+bc+b^2\right)-2\left(c^2+ca+a^2\right)=(2b-a-c)(a+b+c),$$

tehát ha a b^2+bc+c^2, c^2ac+a^2, a^2+ab+b^2 számok számtani haladványt alkotnak, akkor $(a+b+c)(2b-a-c)=0$. Mivel $a+b+c\neq 0$, az a, b és c számok is számtani haladványban vannak.

20. I. *Bizonyítsd be, hogy ha az* $(a_n)_{n\geq 1}$ *sorozat egy mértani haladvány, akkor* $\left(a_1a_2...a_n\right)^2=\left(a_1a_n\right)^n$, $\forall n\geq 1$.

II. *Igaz az állítás fordítottja?*

Megoldás I.

$$\left(a_1a_2...a_n\right)^2=\left(\prod_{i=0}^{n}a_i\right)^2=\left(a_1^n\cdot q^{\sum\limits_{i=0}^{n-1}i}\right)=\left(a_1\cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}\right)^2=\left(a_1^2\cdot q^{n-1}\right)^n=\left(a_1a_n\right)^n.$$

II. Az állítás fordítottja nem igaz, például ha $a_k=k-1$, bármely $k\geq 1$-re, mivel $a_1=0$ és így $\left(a_1a_2 \quad ... \quad a_n\right)^2=\left(a_1a_n\right)^n$ igaz, de a sorozat nem mértani haladvány.

21. *Határozd meg, hogy mely számtani haladvány teljesíti az alábbi feltételeket:*

$$\begin{cases}a_1+a_2+a_3=12\\ a_1a_2a_3=28\end{cases}.$$

A kapott számtani haladvány esetén határozd meg az a_7-a_5 *különbséget.*

Megoldás. Mivel $(a_n)_{n\geq 1}$ számtani haladvány az alábbi feltételrendszerek ekvivalensek:

$$\begin{cases}a_1+a_2+a_3=12\\ a_1a_2a_3=28\end{cases},\ \begin{cases}3\left(a_1+r\right)=12\\ a_1\left(a_1+r\right)\left(a_1+2r\right)=28\end{cases},\ \begin{cases}a_1+r=4\\ a_1\left(a_1+r\right)\left(a_1+2r\right)=28\end{cases},$$

$$\begin{cases}a_1+r=4\\ a_1\left(a_1+2r\right)=7\end{cases},\ \begin{cases}a_1+r=4\\ a_1(4+r)=7\end{cases},\ \begin{cases}a_1+r=4\\ r^2=9\end{cases}.$$

Mivel $r^2 = 9$ ezért két eset lehetséges. Első eset, ha $r = 3$. Ekkor $a_1 = 1$ és $a_7 - a_5 = 2r = 6$. Második eset, ha $r = -3$. Ekkor $a_1 = 7$ és $a_7 - a_5 = 2r = -6$.

22. a) *Határozd meg azon mértani haladvány első tagját és rációját, amely teljesíti a következő feltételeket:*

$$\begin{cases} a_2 - a_1 = -4 \\ a_3 - a_1 = 8 \end{cases}.$$

b) *A kapott haladványra számold ki az első* n *tag összegét.*

Megoldás. a) Átalakítással a következő ekvivalens rendszerekhez jutunk:

$$\begin{cases} a_2 - a_1 = -4 \\ a_3 - a_1 = 8 \end{cases}, \begin{cases} a_1(q-1) = -4 \\ a_1(q^2-1) = 8 \end{cases}, \begin{cases} a_1(q-1) = -4 \\ q+1 = 2 \end{cases}, \begin{cases} a_1 = 1 \\ q = -3 \end{cases}.$$

b)

$$S_n = a_1 + a_2 + \ \ldots \ + a_n =$$

$$= a_1\left(1 + q + q^2 + \ \ldots \ + q^{n-1}\right) = \frac{(-3)^n - 1}{-4} = \frac{1}{4}\left(1 - (-3)^n\right).$$

23. *Határozd meg azon* $(a_n)_{n\geq}$ *számtani haladvány első tagját és rációját amely teljesíti az alábbi feltételt:*

$$\begin{cases} a_2 - a_6 + a_4 = -7 \\ a_8 - a_7 = 2a_4 \end{cases}.$$

Megoldás. Az $\begin{cases} a_2 - a_6 + a_4 = -7 \\ a_8 - a_7 = 2a_4 \end{cases}$ rendszerbe helyettesítjük az a_2, a_4, a_6, a_7, a_8 tagokat az $a_2 = a_1 + r$, $a_4 = a_1 + 3r$, $a_6 = a_1 + 5r$ $a_7 = a_1 + 6r$, $a_8 = a_1 + 7r$ egyenlőségek alapján. Így az $\begin{cases} a_1 - r = -7 \\ 2a_1 + 5r = 0 \end{cases}$ egyenletrendszert kapjuk, amelynek a megoldása $\begin{cases} a_1 = -5 \\ r = 2 \end{cases}$.

24. *Számold ki az alábbi összeget.*

$$S_n = \frac{7}{1\cdot 8} + \frac{7}{8\cdot 15} + \ \ldots \ + \frac{7}{(7n-6)\cdot(7n+1)}.$$

Megoldás. Az általános tagot szét bontjuk két tört különbségére:

$$\frac{7}{(7k-6)(7k+1)} = \frac{1}{7k-6} - \frac{1}{7k+1}.$$

Ezt behelyettesítve az összegbe kapjuk, hogy

$$S_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{15}\right) + \ \ldots \ + \left(\frac{1}{7n-6} + \frac{1}{7n+1}\right) = 1 - \frac{1}{7n+1} = \frac{7n}{7n+1}.$$

25. *Száz millió lej összeget kölcsön adunk* 20%*-os évi kamattal. Milyen összeget kapunk vissza 4 év múlva?*

Megoldás. Legyen $a_0 = 10^8$ a kölcsön adott összeg. Az n év utáni összeg az $a_n = a_0 \left(\frac{6}{5}\right)^n$ egyenlőség alapján számítható ki. Tehát

$$a_4 = a_0 \left(\frac{6}{5}\right)^4 = (120)^4 = 207360000$$

lejt kapunk vissza.

26. *Bizonyítsd be, hogy ha az* $\frac{1}{b-a}$, $\frac{1}{2b}$, $\frac{1}{b-c}$ *számok számtani haladványt alkotnak, akkor* a, b, c *mértani haladványt alkotnak.*

Megoldás. A számtani haladvány egymásutáni tagjainak különbsége állandó, tehát

$$\frac{1}{2b} - \frac{1}{b-a} = \frac{1}{b-c} - \frac{1}{2b},$$

tehát $\frac{1}{b} = \frac{1}{b-a} + \frac{1}{b-c}$. Ebből kifejezve a b-t kapjuk, hogy $b^2 = ac$. Mivel $b \neq 0$ következik, hogy $a \neq 0$, tehát a ráció $q = \frac{b}{a}$ és az első tag a.

27. *Adjál példát olyan mértani haladványra, amelynek végtelen sok racionális és végtelen sok irracionális tagja van.*

Megoldás. Az $a_1 = 1$ első tagú és $q = \sqrt{2}$ rációjú mértani haladvány teljesíti a feladat feltételeit. A haladvány általános tagja $a_n = \left(\sqrt{2}\right)^{n-1}$. Ha n páros $(n = 2k)$ akkor $a_{2k} = \left(\sqrt{2}\right)^{2k-1} = 2^{k-1}\sqrt{2}$ irracionális, ha n páratlan $(n = 2k+1)$, akkor $a_{2k+1} = \left(\sqrt{2}\right)^{2k} = 2^k$ racionális.

28. *Bizonyítsd be, hogy ha egy számtani haladványnak van két egész tagja, akkor végtelen sok egész tagja van.*

Megoldás. Legyen a számtani haladvány $(a_n)_{n\geq 1}$ és a_k és a_l $(k < l)$ a haladvány két egész tagja. Így $a_l - a_k = r(l-k)$ is egész, ahol r a haladvány rációja. Tehát az

$$a_{p(l-k)+1} = a_k + p(l-k)\cdot r$$

tagok bármely $p \in \mathbb{N}$ esetén egész számok. Mivel végtelen sok ilyen tag van, a haladványnak végtelen sok egész tagja van.

29. *Bizonyítsd be, hogy ha egy számtani haladványnak van két racionális tagja akkor az összes tag racionális.*

Megoldás. Legyen $(a_n)_{n\geq 1}$ a feladatban szereplő számtani haladvány és a_k és a_l a két racionális tag $(l > k)$. Az $a_l - a_k = (l-k)\cdot r$ különbség racionális, tehát mivel

Tartalomjegyzék

$l-k \neq 0$ egész következik, hogy r racionális. Továbbá $a_1 = a_k - (k-1)\cdot r$ is racionális következik, hogy $a_n = a_1 + (n-1)\cdot r$ racionális bármely $n \geq 1$ -re.

30. *Határozd meg azon komplex számokat, amelyekre z, z^2, z^3 számok számtani haladványt alkotnak.*

Megoldás. Az adott számok hat különböző sorrendben alkothatnak számtani haladványt, ebből elégséges három sorrendet megvizsgálni, a középső tag szerint. A $2z^2 = z^3 + z$, $2z = z^3 + z^2$ és $2z^3 = z^2 + z$ egyenletekhez jutunk. Ezek a következőképpen írhatók:

$$z(z-1)^2 = 0,\ z(z-1)(z+2) = 0 \text{ illetve } z(2z+1)(z-1) = 0.$$

Innen következik, hogy $z \in \{-2, -1/2, 0, 1, 2\}$ esetén alkotnak számtani haladványt a z, z^2 és z^3 számok.

31. *Bizonyítsd be, hogy ha egy egész számokból álló számtani haladványnak van egy teljes négyzet tagja akkor végtelen sok teljes négyzetet tartalmaz. Igaz-e az előbbi kijelentés, ha a teljes négyzet helyett egy a^k alakú számot veszünk, rögzített k-ra.*

Megoldás. Legyen $(a_n)_{n\geq 1}$ a számtani haladvány r rációval és $a_k = b^2$ a teljes négyzet. Ha $r = 0$ akkor minden tag b^2-tel egyenlő. Ha $r \neq 0$ akkor $(b + m\cdot r)^2 = b^2 + (2mb + r)\cdot r$. Tehát $a_{k+(2mb+r+1)} = (b+mr)^2$ tagok teljes négyzetek, ahol $m \in \mathbb{N}$ és ilyen tag végtelen sok van.

Általánosan, legyen $a_l = b^k$, $k \in \mathbb{N}$ rögzített és

$$(b + m\cdot r)^k = b^k + r\left(\sum_{i=1}^{k} C_k^i b^{k-i} m^i r^{i-1}\right)$$

alapján $a_{k+n} = (b + m\cdot r)^k$, ahol $n = \left(\sum_{i=1}^{k} C_k^i b^{k-i} m^i r^{i-1}\right) + 1$.

32. *Határozd meg azt a négy számjegyű $N = \overline{abcd}$ számot, amelynek számjegyei számtani haladvány alkotnak és $\overline{abcd} + \overline{dcba}$ osztható 13-mal.*

Megoldás. $\overline{abcd} + \overline{dcba} = [(a+d)1001 + (b+c)110]$.

$13 \mid [(a+d)1001 + (b+c)110]$ és $13 \mid 1001$ alapján $13 \mid (b+c)110$. De $(13, 110) = 1$, tehát $13 \mid (b+c)$. Továbbá $b, c = \overline{0,9}$, ami alapján

$$(b,c) \in \{(0,0),(4,9),(5,8),(6,7),(7,6),(8,5),(9,4)\}.$$

Mivel a, b, c, d számtani haladványt alkot és $a,b,c,d \in \{0,\dots,9\}$ kiszámolva az a és d számokat kapjuk, hogy $N = 5678$ vagy $N = 8765$.

33. *Határozd meg azon a, b, c számokat, amelyek számtani haladványt alkotnak és a legnagyobb közös osztójuk 4 és a legkisebb közös többszörösük 240.*

Megoldás. Legyen $a = 4a_1$, $b = 4b_1$ és $c = 4c_1$. Ha a, b, c számok számtani haladványt alkotnak, akkor a_1, b_1, c_1 is számtani haladványt alkotnak. Mivel $[a,b,c] = [4a_1, 4b_1, 4c_1] = 240$, ezért $\left[a_1,\ b_1,\ c_1\right] = 60$. Mivel 60 osztói a következők:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60,$$

ellenőrizve, hogy melyik számhármas teljesíti a $2b_1 = a_1 + c_1$ $[a_1, b_1, c_1] = 60$ és $(a_1, b_1, c_1) = 1$ feltételeket kapjuk, hogy $a_1 = 4$, $b_1 = 5$ és $c_1 = 6$, ahonnan következik, hogy $a = 16$, $b = 20$, $c = 24$.

34. *Határozd meg azokat az n természetes számokat, amelyekre a $+$ és $-$ előjelek megválaszthatók úgy, hogy az $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm\ \dots\ \pm n$ összeg egyenlő legyen nullával.*

Megoldás. Bizonyítjuk, hogy csak $n = 4k - 1$ vagy $n = 4k$ alakú számra választható meg az előjel a kért módon. Mivel az összeg nulla kell legyen az 1, 2, …, n számok két olyan csoportra oszthatók, amelyekben az összeg egyenlő $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{4}$-gyel. Ha $n = 4k + 2$ vagy $n = 4k + 3$ alakú akkor ez előbbi szám nem lesz egész, tehát nem lehet megválasztani a kért módon az előjelet.

Matematikai indukcióval bizonyítjuk, hogy $n = 4k$ és $n = 4k - 1$ alakú számok esetén meg lehet választani az előjeleket. $n = 3$ és $n = 4$-re $1 + 2 - 3 = 0$ és $1 - 2 - 3 + 4 = 0$. Feltételezzük n-re megválasztható az előjel ($S_n = 0$), bizonyítjuk, hogy $n + 4$-re is megválasztható.

$$S_{n+4} = S_n + (n+1) - (n+2) - (n+3) + (n+4) = 0.$$

Tehát az első n előjelet úgy választjuk meg mint n szám esetén, a többit a fenti módon.

35. *Hány olyan n érték létezik, amelyre n páratlan természetes szám összege 13^{13}?*

Megoldás. Legyen H azon n számok halmaza, amelyre léteznek páratlan számok, amelyek összege 13^{13}. Mivel az összeg páratlan és az összeg tagjai is páratlanok, ezért páratlan sok összeadandó kell legyen. Ha $n = 1$ akkor 13^{13} a keresett páratlan szám, ha $n = 13^{13}$ akkor $\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{13^{13}} = 13^{13}$. Ha $n = 2k + 1$, ahol $0 \le k \le \left[\frac{13^{13}}{2}\right]$, akkor az $a_1 = 13^{13} - (n-1)$ és $a_2 = a_2 = \dots = a_n = 1$ számok összege 13^{13} és a_i páratlan bármely $i = \overline{1, n}$-re. Tehát a feltételt teljesítő n értékek száma $\left[\frac{13^{13}}{2}\right] + 1$.

36. *Adott a következőképpen értelmezett sorozat:* $a_1 = 10$, $a_{n+1} = \frac{5a_n + 3}{a_n + 3}$.

a) *Bizonyítsd be, hogy* $b_n = \frac{a_n - 3}{a_n + 1}$ *egy mértani haladvány.*

b) *Határozd meg az* $(a_n)_{n \ge 1}$ *sorozat általános tagját.* (Bogdan Enescu)

Megoldás

a) $b_n = \dfrac{a_n - 3}{a_n + 1}$ és $b_{n+1} = \dfrac{a_{n+1} - 3}{a_{n+1} + 1} = \dfrac{\dfrac{5a_n + 3}{a_n + 3} - 3}{\dfrac{5a_n + 3}{a_n + 3} + 1} = \dfrac{a_n - 3}{3a_n + 3}$, tehát

$\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \dfrac{1}{3}$, bármely $n \geq 1$-re. Ebből következik, $(b_n)_{n\geq 1}$ mértani haladvány $q = \dfrac{1}{3}$ rációval (az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat tagjai pozitívak, tehát b_n jól értelmezett minden $n \geq 1$ esetén).

b) $b_1 = \dfrac{7}{11}$, $q = \dfrac{1}{3}$, ebből következik, hogy $b_n = \dfrac{7}{11}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$. A $b_n = \dfrac{a_n - 3}{a_n + 1}$ egyenlőségből kifejezve a_n-et kapjuk, hogy $a_n = \dfrac{b_n + 3}{1 - b_n} = \dfrac{11 \cdot 3^n + 7}{11 \cdot 3^{n-1} - 7}$.

37. *Egy tábla csokoládét* 20000 *lejért vásárolhatunk meg. Öt csokoládés papír visszaszolgáltatásakor a vásárló egy ingyen csokoládét kap. Valójában mennyibe kerül egy csokoládé (papír nélkül)?*

Megoldás. Ha bemegyünk az üzletbe 4 csokoládés papírral, kölcsönkérünk az eladótól egyet, akkor kapunk egy újabb csokoládét. Ha ennek a papírját visszaadjuk az eladónak, akkor megadtuk az adóságot és egy csokoládéval maradtunk, tehát egy csokoládé papír nélkül pontosan annyit ér, mint négy papír. Így a papír ára az eladási ár $1/5$-öd része, tehát a csokoládé (papír nélkül) 16000 lejbe kerül.

A feladat megoldható végtelen mértani haladványok segítségével is. Ha c-vel jelöljük a csokoládé árát papír nélkül és t-vel teljes árat valamint p-vel egy papír árát, akkor írhatjuk, hogy $t = c + p$ és $5p = c + p = t$. Így rendre a következő egyenlőségeket írhatjuk fel: $t = c + \dfrac{1}{5}t$, $t = c + \dfrac{1}{5}\left(c + \dfrac{1}{5}t\right) = c + \dfrac{c}{5} + \dfrac{t}{5^2}$, és

$$t = c + \frac{c}{5} + \frac{t}{5^2} = c + \frac{c}{5} + \frac{1}{5^2}\left(c + \frac{t}{5}\right) = c + \frac{c}{5} + \frac{c}{5^2} + \frac{t}{5^3}$$

Általában a $t = \left(\sum_{k=0}^{n} \dfrac{c}{5^k}\right) + \dfrac{t}{5^{n+1}}$ egyenlőséghez jutunk. Ebből következik, hogy $t = c\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{5^k}$. Ez a megközelítés hasznos a végtelen összeg fogalmának megértésében.

38. *Számítsd ki az* $S = a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 + \ldots + a_{2k-1}^2 - a_{2k}^2$ *összeget, ha* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *egy számtani haladvány.*

Megoldás. Ha $a_i = a_1 + (i-1)\cdot r$, akkor

$$S = \sum_{i=1}^{k}\left(a_{2i-1}^2 - a_{2i}^2\right) = \sum_{i=1}^{k}\left(a_{2i-1} - a_{2i}\right)\left(a_{2i-1} + a_{2i}\right) = \sum_{i=1}^{k}(-r)\left(2a_1 + (4i-3)\cdot r\right) =$$

$$= -r\sum_{i=1}^{k}\left[2a_1 + (4i-3)r\right] = -r\left[2ka_1 + k(2k-1)r\right] = \frac{k}{2k-1}\left(a_1^2 - a_{2k}^2\right).$$

2.2. Komplex számok (345. oldal)

1. *Határozd meg azokat a z komplex számokat, amelyekre $z^2 + 2\left|z^2\right| = 2$.*

Megoldás. Ha $z = a + ib$, akkor $\left|z^2\right| = |z|^2 = a^2 + b^2$ és $z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$, tehát az $a^2 - b^2 + 2abi + 2a^2 + 2b^2 = 2$ egyenlőséghez jutunk. Ebből következik, hogy $ab = 0$ és $3a^2 + b^2 = 2$. Ha $a = 0$, akkor $b = \pm\sqrt{2}$, míg $b = 0$ esetén $a = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, tehát a megoldások $z_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ és $z_{3,4} = \pm i\sqrt{2}$.

2. *Határozd meg azokat a z komplex számokat, amelyekre $|z| = 1$ és $\left|z^2 + \overline{z}^2\right| = 1$.*

Megoldás. Ha $z = a + ib$, akkor $\overline{z} = a - ib$ és így $z^2 + \overline{z}^2 = 2a^2 - 2b^2$, tehát az adott összefüggésekből következik, hogy $a^2 + b^2 = 1$ és $a^2 - b^2 = \pm\frac{1}{2}$. Ebből következik, hogy $a_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, $a_{3,4} = \pm\frac{1}{2}$, $b_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$, $b_{3,4} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Tehát a megoldások $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$, $z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$, $z_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$, $z_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$,
$z_5 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_6 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_5 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_5 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Ugyanezt az eredményt kapjuk, ha a trigonometrikus alakot használjuk. Az első egyenlőség alapján $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$, tehát $z^2 = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi$ és $(\overline{z})^2 = \cos 2\varphi - i\sin 2\varphi$, tehát a második egyenlőség alapján $\cos 2\varphi = \pm\frac{1}{2}$. Innen ugyanazokat a megoldásokat kapjuk, mint az előbb.

3. *Határozd meg azokat a z komplex számokat, amelyekre a $(z-1)(\overline{z}+1+i)$ szorzat valós szám.*

Megoldás. Egy komplex szám pontosan akkor valós, ha egyenlő a saját konjugáltjával, tehát a $(z-1)(\overline{z}+1+i) = (\overline{z}-1)(z+1-i)$ egyenletet kell megoldanunk. A műveletek elvégzése és rendezés után a $2(z-\overline{z}) + i(z+\overline{z}) = 2i$ egyenlethez jutunk. Ha $z = a + ib$, akkor az $a + 2b = 1$ egyenlőséghez jutunk, tehát a vizsgált szorzat pontosan akkor valós szám, ha $z = a + i\frac{1-a}{2}$ alakú, ahol $a \in \mathbb{R}$. Ezeknek a komplex számoknak a geometriai képe egy egyenes.

4. *Számítsd ki:*

a) $\left(\sqrt{3}+i\right)^{24}$; **b)** $(1+i)^{40}$; **c)** $\left(1+i\sqrt{3}\right)^{12}$.

Megoldás

a) $\left(\sqrt{3}+i\right)^{24}=2^{24}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^{24}=$

$$=2^{24}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{24}=2^{24}(\cos 4\pi+\sin 4\pi)=2^{24};$$

b) $(1+i)^{40}=2^{20}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{40}=2^{20}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{40}=$

$$=2^{20}(\cos 10\pi+i\sin 10\pi)=2^{20};$$

c) $\left(1+i\sqrt{3}\right)^{12}=2^{12}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{12}=2^{12}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{12}=$

$$=2^{12}(\cos 4\pi+i\sin 4\pi)=2^{12}.$$

5. *Tanulmányozd a következő függvények injektivitását, szürjektivitását és bijektivitását:*

a) $f(z)=|z|^2$, $f:\mathbb{C}\to R_+$; **b)** $f(z)=z+3i$, $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$;

c) $f(z)=-iz$, $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$; **d)** $f(z)=z-i\bar{z}$, $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$.

Megoldás. a) Mivel $f(1+i)=f(1-i)=2$ és $1+i\neq 1-i$ a függvény nem injektív. Ugyanakkor $\forall\, y\in\mathbb{R}_+$ esetén létezik a $z=\sqrt{y}\in\mathbb{C}$ és $f(z)=|z|^2=\left|\sqrt{y}\right|^2=y$, tehát a függvény szürjektív.

b) Az $f(z_1)=f(z_2)$ egyenlőségből következik, hogy $z_1=z_2$, tehát a függvény injektív. Másrészt $\forall\, y\in\mathbb{C}$ esetén létezik a $z=y-3i\in\mathbb{C}$ és $f(z)=f(y-3i)=y$, a függvény szürjektív. Ez a függvény a komplex számsíkon egy eltolás.

c) Az $f(z_1)=f(z_2)$ egyenlőségből $-iz_1=-iz_2$ és így $z_1=z_2$, tehát a függvény injektív. Másrészt $\forall\, y\in\mathbb{C}$ esetén létezik $z=-\frac{y}{i}=iy\in\mathbb{C}$ és $f(z)=y$, tehát a függvény szürjektív is. Ez a függvény a komplex számsíkon egy $90°$-os forgatás (negatív trigonometriai irányban).

d) Az $f(z_1)=f(z_2)$ egyenlőségből $z_1-i\bar{z}_1=z_2-i\bar{z}_2$, tehát $z_1-z_2=i(\overline{z_1-z_2})$. Mivel a $z=1+i$ komplex számra teljesül a $z=i\bar{z}$ egyenlőség, az f függvény nem injektív. Elégséges két olyan komplex számot választani, amelyek különbsége $1+i$. Így például a $z_1=3+5i$ és $z_2=2+4i$ komplex számokra $f(z_1)=f(z_2)$. Ha $z=a+ib$, akkor $f(z)=a-b+i(b-a)$, tehát az $f(z)=1+2i$ egyenletnek nincs megoldása. Így a függvény nem szürjektív. A függvény képtartományának geometriai képe egy egyenes.

6. *Bizonyítsd be, hogy bármely $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ és $n\in\mathbb{N}^*$ esetén léteznek és egyértelműen meghatározottak az a_n és b_n valós számok, amelyekre*

$$z^n=a_nz+b_n.$$

Megoldás. $n=1$ esetén $a_n=1$ és $b_n=0$. A $z^{n+1}=z\cdot z^n=z(a_n z+b_n)=a_n z^2+b_n z$ egyenlőség alapján ha $n=2$-re meghatározzuk az a_n és b_n értékét, akkor felírhatjuk az $a_{n+1}=a_n a_2+b_n$ és $b_{n+1}=a_n b_2$ rekurziókat. Ha $z=a+ib$, akkor a $z^2=a^2-b^2+2abi=a_2(a+ib)+b_2$ egyenlőségből $a_2=2a$ és $b_2=-a^2-b^2$, tehát írhatjuk, hogy $a_{n+1}=b_n+2a\cdot a_n$ és $b_{n+1}=-(a^2+b^2)a_n$. Mivel $a,b\in\mathbb{R}$ a rekurzió alapján igazolható, hogy $a_n,b_n\in\mathbb{R}$, tehát a bizonyítás teljes.

7. *Határozd meg azokat a $z\in\mathbb{C}$ komplex számokat, amelyekre* $|z|-2z=3-4i$.

Megoldás. Ha $z=a+ib$, akkor $-2b=-4$, tehát $b=2$. Ha azonosítjuk a két oldal valós részét, akkor az $\sqrt{a^2+4}=2a+3$ egyenlethez jutunk, tehát $a_{1,2}=\frac{-6\pm\sqrt{21}}{3}$. Így az egyenlőséget teljesítő komplex számok a $z_1=\frac{-6+\sqrt{21}}{3}+2i$ és a $z_2=\frac{-6-\sqrt{21}}{3}+2i$.

8. *Bizonyítsd be, hogy* $|z_1+z_2|^2+\frac{1}{c}|cz_1-z_2|^2=(1+c)|z_1|^2+\left(1+\frac{1}{c}\right)|z_2|^2$, *ahol* $c\in\mathbb{R}$.

Megoldás. $|z_1+z_2|^2+\frac{1}{c}|cz_1-z_2|^2=(z_1+z_2)(\overline{z}_1+\overline{z}_2)+\frac{1}{c}(cz_1-z_2)(c\overline{z}_1-\overline{z}_2)=$

$$=z_1\overline{z}_1+z_2\overline{z}_2+z_1\overline{z}_2+\overline{z}_1z_2+cz_1\overline{z}_1+\frac{1}{c}z_2\overline{z}_2-z_1\overline{z}_2-\overline{z}_1z_2=$$

$$(1+c)|z_1|^2+\left(1+\frac{1}{c}\right)|z_2|^2.$$

Megjegyzés. $c=1$ esetén a paralelogramma egy ismert tulajdonságát kapjuk vissza (az oldalak négyzetösszege egyenlő az átlók négyzetösszegével).

9. *Oldd meg a*

$$\left(\frac{3z+1}{z-i}\right)^3+\left(\frac{3z+1}{z-i}\right)^2+\left(\frac{3z+1}{z-i}\right)+1=0$$

egyenletet. *(Felvételi, 1999)*

Megoldás. A $\frac{3z+1}{z-i}=u$ helyettesítéssel az $u^3+u^2+u+1=0$ egyenletet kell megoldanunk. Tehát $z^4=1$ és $z\neq1$. Így $u\in\{i,-i,-1,\}$, tehát a $z=\frac{1+ui}{u-3}$ egyenlőség alapján $z\in\left\{-\frac{1}{4}+\frac{i}{4},0,\frac{-3+i}{5}\right\}$.

10. *Oldd meg az*

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ xyz=1 \\ |x|+|y|+|z|=3 \end{cases}$$

egyenletrendszert a komplex számok halmazában.

Megoldás. A második egyenlet alapján $|x|\cdot|y|\cdot|z|=1$, tehát a $|x|$, $|y|$ és $|z|$ pozitív valós számokra alkalmazhatjuk a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenséget. A $\frac{|x|+|y|+|z|}{3} \geq \sqrt[3]{|x|\cdot|y|\cdot|z|}$ egyenlőtlenségben éppen egyenlőség kell álljon. Így $|x|=|y|=|z|=1$. A rendszer első egyenlete alapján következik, hogy $y=\varepsilon x$ és $z=\varepsilon^2 x$. Belátható, hogy tetszőleges $x\in\mathbb{C}$ esetén ha $|x|=1$, akkor az $\left(x,\varepsilon x,\varepsilon^2 x\right)$ számhármas megoldása a rendszernek, tehát a megoldáshalmaz $M=\left\{\left(x,\varepsilon x,\varepsilon^2 x\right)\middle| x\in\mathbb{C},|x|=1\right\}$.

11. *Határozd meg az m és n valós paraméterek értékét úgy, hogy a*

$$z^3+2z^2+mz+n=0$$

egyenletnek $1+2i$ megoldása legyen.

Megoldás. Mivel $m,n\in\mathbb{R}$ az egyenletnek gyöke az $1-2i$ is. Így a $P=Z^3+2Z^2+mZ+n$ polinom osztható a $Q=Z^2-2Z+5$ polinommal. Másrészt a P-nek Q-val való osztási maradéka $(m+3)Z+n-20$, tehát $m=-3$ és $n=20$.

12. *Oldd meg a $z^3=2+11i$ egyenletet.*

Megoldás. Ha $z=a+ib$, akkor $z^3=a^3-3ab^2+i\left(3a^2b-b^3\right)$, tehát elégséges meghatározni az

$$\begin{cases} a\left(a^2-3b^2\right)=2 \\ b\left(3a^2-b^2\right)=11 \end{cases}$$

egyenletrendszer megoldásait. A $(2,1)$ számpár egy megoldása a rendszernek, tehát az eredeti egyenlet egyik megoldása $z_1=2+i$. Másrészt a $z_2=\varepsilon z_1$ és $z_3=\varepsilon^2 z_1$ komplex számok is megoldásai az egyenletnek, ha ε harmadrendű egységgyök és az egyenletnek három komplex megoldása van, tehát a megoldások $2+i$, $\varepsilon(2+i)$ és $\varepsilon^2(2+i)$.

13. *Bizonyítsd be, hogy ha $\operatorname{Im}(az+b\bar{z})\geq 0$, minden z komplex szám esetén, akkor $b=\bar{a}$.*

Megoldás. Ha z helyett $-z$-re írjuk fel az adott egyenlőtlenséget, akkor az $\operatorname{Im}(az+b\bar{z})\leq 0$, $\forall z\in\mathbb{C}$ összefüggéshez jutunk. Mindkét egyenlőtlenség csakis akkor teljesülhet, ha $\operatorname{Im}(az+b\overline{z})=0$, $\forall z\in\mathbb{C}$. Eszerint $az+b\overline{z}=\overline{a}\cdot\overline{z}+\overline{b}\cdot z$, tehát $(a-\overline{b})(z-\overline{z})=0$, $\forall z\in\mathbb{C}$. Mivel valódi komplex számok esetén a második zárójel értéke nem lehet nulla, következik, hogy $a=\overline{b}$.

14. *Az* $az^2+bz+c=0$ *egyenlet gyökei* z_1 *és* z_2*. Bizonyítsd be, hogy ha* $|a|=|b|=|c|$ *akkor* $\left|2|z_i|-\sqrt{5}\right|\le 1$*,* $i=\overline{1,2}$.

Megoldás. Feltételezhetjük, hogy $|a|=|b|=|c|=1$. Az egyenlet gyökei $z_{1,2}=\dfrac{-b\pm\delta}{2}$, ahol $\delta^2=b^2-4ac$. Tehát $|z_i|\le\dfrac{1}{2}(|b|+|\delta|)\le\dfrac{1}{2}(1+|\delta|)$. De $|\delta|^2\le\left|b^2-4ac\right|\le|b|^2+4|a||c|\le 5$, tehát $|z_i|\le\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. A $|z_1||z_2|=\left|\dfrac{c}{a}\right|=1$ egyenlőség alapján $|z_i|=\dfrac{1}{|z_j|}\ge\dfrac{2}{1+\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ ha $\{i,j\}=\{1,2\}$, tehát $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\le|z_i|\le\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$, $i=\overline{1,2}$. Ez éppen a kívánt egyenlőtlenség.

15. *Bizonyítsd be, hogy bármely* z_1*,* z_2 *egységmodulusú komplex szám esetén*

$$|z_1+1|+|z_2+1|+|z_1z_2+1|\ge 2.$$

Megoldás. A $2=z_1z_2+1-z_1(z_2+1)+z_1+1$ egyenlőség alapján írhatjuk, hogy

$$2\le|z_1z_2+1|+|z_1||z_2+1|+|z_1+1|,$$

ami $|z_1|=1$ alapján éppen a kívánt egyenlőtlenség.

16. *Bizonyítsd be, hogy ha* $|z_1|=|z_2|=\ \dots\ =|z_n|$ *és* $z_i\neq z_j$ *bármely* $i\neq j$ *esetén, akkor*

$$\sum_{1\le i<j\le n}\left|\frac{z_i+z_j}{z_i-z_j}\right|^2\ge\frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Megoldás. A megoldás során szükségünk van a következő azonosságra (a tehetetlenségi nyomatékokra vonatkozó Lagrange-féle azonosság következménye): Ha $A_1A_2\dots A_n$ egy tetszőleges n-szög, G a súlypontja és M egy tetszőleges pont a síkjában, akkor

$$(n-2)\sum_{k=1}^{n}MA_k^2+n^2MG^2=4\sum_{1\le i<j\le n}MA_{ij}^2,$$

ahol A_{ij} az A_iA_j szakasz felezőpontja. Ha z_k-val jelöljük az A_k pont affixumát, akkor ez az azonosság $(n-2)\sum\limits_{k=1}^{n}|z-z_k|^2+\left|nz-\sum\limits_{k=1}^{n}z_k\right|^2=\sum\limits_{1\le i<j\le n}|2z-z_i-z_j|^2$ alakban írható és ez direkt számolással ellenőrizhető (például mindkét oldalon $2n(n-1)|z|^2$

Tartalomjegyzék

jelenik meg stb.). Ha $z=0$-t választunk, és használjuk a $|z_1|=|z_2|=\ ...\ =|z_n|=R$ feltételt, akkor a $A_iA_j^2=4R^2-4OA_{ij}^2$ egyenlőség alapján írhatjuk, hogy

$$\sum_{1\le i<j\le n} A_iA_j^2=4R^2\cdot C_n^2-4\sum_{1\le i<j\le n} OA_{ij}^2=4R^2\cdot C_n^2-(n-2)nR^2-n^2OG^2\le n^2R^2.$$

Másrészt $\left|\dfrac{z_i+z_j}{z_i-z_j}\right|=\dfrac{2OA_{ij}}{A_iA_j}$, tehát

$$\sum_{1\le i<j\le n}\left|\frac{z_i+z_j}{z_i-z_j}\right|^2=\sum_{1\le i<j\le n}\frac{4OA_{ij}^2}{A_iA_j^2}=\sum_{1\le i<j\le n}\frac{4R^2-A_iA_j^2}{A_iA_j^2}=4R^2\sum_{1\le i<j\le n}\frac{1}{A_iA_j^2}-C_n^2 \quad (1)$$

De $\displaystyle\sum_{1\le i<j\le n}\frac{1}{A_iA_j^2}\ge\left(C_n^2\right)^2\frac{1}{\sum\limits_{1\le i<j\le n}A_iA_j^2}\ge\frac{n^2(n-1)^2}{4n^2R^2}=\left(\frac{n-1}{2}\right)^2$ és így (1) alapján

$$\sum_{1\le i<j\le n}\left|\frac{z_i+z_j}{z_i-z_j}\right|^2\ge 4R^2\sum_{1\le i<j\le n}\frac{1}{A_iA_j^2}-C_n^2\ge(n-1)^2-\frac{n(n-1)}{2}=\frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

17. *Bizonyítsd be, hogy ha* $z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$ *és* $z^n=1$ *akkor* $\dfrac{2}{n-2}\le|1-z|\le 2$.

Megoldás. A $z^n=1$ és $z\ne 1$ feltételekből következik, hogy

$$z^{n-1}+z^{n-2}+...+z+1=0.$$

Ha mindkét oldalból kivonunk n-et, akkor a

$$\left(z^{n-1}-1\right)+\left(z^{n-2}-1\right)+...+(z-1)=-n$$

egyenlőséghez jutunk, ahonnan következik, hogy

$$(z-1)\left(z^{n-2}+z^{n-3}...+1\right)+(z-1)\left(z^{n-3}+z^{n-4}+...+1\right)+...+(z-1)=-n.$$

Vesszük mindkét oldal modulusát és használjuk, hogy a modulusok összege nem kisebb, mint az összeg modulusa valamint, hogy $|z|=1$.

$$n=|-n|\le|z-1|\left[\left(|z|^{n-2}+|z|^{n-3}...+1\right)+\left(|z|^{n-3}+|z|^{n-4}+...+1\right)+...+1\right]\le$$
$$\le|z-1|\left[(n-1)+(n-2)+(n-3)+...+1\right]=|z-1|\frac{n(n-1)}{2}.$$

Ebből az egyenlőtlenségből következik, hogy $|z-1|\ge\dfrac{2}{n-1}$. A második egyenlőtlenség triviális.

18. *Bizonyítsd be, hogy ha* $|z|=1$ *akkor* $\sqrt{3}\le|1+z|+\left|1-z+z^2\right|\le\dfrac{13}{4}$.

Megoldás. Ha $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$, akkor $1 + z = 2\cos\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$, tehát $|1+z| = 2\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|$. Másrészt $1 - z + z^2 = 1 - \cos\varphi + \cos 2\varphi + i(\sin 2\varphi - \sin\varphi)$, tehát $\left|1 - z + z^2\right|^2 = 3 - 4\cos\varphi + 2\cos 2\varphi = (2\cos\varphi - 1)^2$, és így $\left|1 - z + z^2\right| = |2\cos\varphi - 1| = \left|4\cos^2\frac{\varphi}{2} - 3\right|$. A $t = 2\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|$ jelöléssel az $f : [0,2] \to \mathbb{R}$, $f(t) = t + \left|t^2 - 3\right|$ függvényt kell megvizsgálni. De $f(t) = \begin{cases} t + t^2 - 3, \text{ ha } t \geq \sqrt{3} \\ t - t^2 + 3, \text{ ha } t < \sqrt{3} \end{cases}$ és így a maximumát $\frac{1}{2}$-ben és a minimumát $\sqrt{3}$-ban veszi fel, tehát $\sqrt{3} \leq f(t) \leq \frac{13}{4}$.

19. *Bizonyítsd be, hogy a* $P(Z) = Z^{n+1} - aZ^n - aZ + 1$ *polinom minden gyöke egységmodulusú, ha* $a \in \mathbb{R}$ *és* $|a| < 1$.

Megoldás. Ha z gyöke P-nek, akkor $z^n = \frac{az-1}{z-a}$, tehát

$$\left|z^n\right|^2 = \left|\frac{az-1}{z-a}\right|^2 = \frac{(ar\cos\varphi - 1)^2 + (ar\sin\varphi)^2}{(r\cos\varphi - a)^2 + (r\sin\varphi)^2} = \frac{a^2r^2 - 2ar\cos\varphi + 1}{r^2 - 2ar\cos\varphi + a^2},$$

ahol $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Ebből következik, hogy $r^{2n} - 1 = \frac{(r^2-1)(a^2-1)}{r^2 - 2ar\cos\varphi + a^2}$, vagyis $r = 1$ vagy $r^{2n-2} + r^{2n-4} + \ldots + r^2 + 1 = \frac{a^2 - 1}{r^2 - 2ar\cos\varphi + a^2}$. A második egyenlőség nem teljesülhet, mert a jobb oldal a $|a| < 1$ feltétel alapján negatív és a bal oldal pozitív. Tehát $r = 1$ és így minden gyök egységmodulusú.

20. *Az* $ABCDEF$ *hatszögben* M, N, P, Q, R *és* S *az* AB, BC, CD, DE, EF *és* FA *szakaszok felezőpontjai. Bizonyítsd be, hogy* $MQ \perp PS$ $\Leftrightarrow$ $RN^2 = MQ^2 + PS^2$.

Megoldás. Ha 0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 az A, B, C, D, E és F pontoknak megfelelő komplex számok akkor $\frac{z_1}{2}$, $\frac{z_1+z_2}{2}$, $\frac{z_2+z_3}{2}$, $\frac{z_3+z_4}{2}$, $\frac{z_4+z_5}{2}$, $\frac{z_5}{2}$, $u_1 = \frac{z_2+z_3-z_5}{2}$, $u_2 = \frac{z_3+z_4-z_1}{2}$ és $u_3 = \frac{z_4+z_5-z_1-z_2}{2}$ rendre az M, N, P, Q, R, S pontoknak valamint az $\overrightarrow{SP}$, $\overrightarrow{MQ}$, $\overrightarrow{NR}$ vektoroknak megfelelő komplex számok. Mivel $u_3 = u_2 - u_1$ az $\overrightarrow{SP}$, $\overrightarrow{MQ}$, $\overrightarrow{NR}$ vektorokkal egy háromszög

Tartalomjegyzék

szerkeszthető, amelyben az MQ és PS-sel párhuzamos oldalak pontosan akkor merőlegesek, ha teljesül Pitagorász tétele, azaz $\left|\overrightarrow{NR}\right|^2 = \left|\overrightarrow{MQ}\right|^2 + \left|\overrightarrow{SP}\right|^2$.

21. *Az $ABCD$ négyszög oldalaira kifele négyzeteket szerkesztünk. Ha a négyzetek középpontjai O_1, O_2, O_3, O_4 akkor bizonyítsd be, hogy $O_1O_3 \perp O_2O_4$ és $O_1O_3 \equiv O_2O_4$.*

Megoldás. $A(0)$, $B(z_1)$, $C(z_2)$ $D(z_3)$ a négyszög csúcsai, akkor $O_1\left(z_1 - \frac{z_1}{2}(1+i)\right)$, $O_2\left(z_2 + \frac{z_1 - z_2}{2}(1+i)\right)$, $O_3\left(z_3 + \frac{z_2 - z_3}{2}(1+i)\right)$, $O_4\left(\frac{z_3}{2}(1+i)\right)$ a négyzetek középpontjai. Az $\overrightarrow{O_3O_1}$ vektornak megfelelő komplex szám: $u = z_1 - z_3 + \left(\frac{-z_1 - z_2 + z_3}{2}\right)(1+i)$, az $\overrightarrow{O_4O_2}$ vektornak megfelelő komplex szám: $v = z_2 + \left(\frac{z_1 - z_2 - z_3}{2}\right)(1+i)$. Mivel $\frac{u}{v} = -i$ ezért $\overrightarrow{O_3O_1} \perp \overrightarrow{O_4O_2}$ és mivel $\frac{|u|}{|v|} = \left|\frac{u}{v}\right| = |-i| = 1$ ezért $O_3O_1 \equiv O_4O_2$.

22. *Az $ABCD$ és $BMNK$ négyzetek belseje diszjunkt. Bizonyítsd be, hogy Az AN felezőpontja, a B-ből a CK-ra húzott merőleges talppontja és a B csúcs kollineárisak.*

Megoldás. Legyen C pontnak megfelelő komplex szám $-a + i \cdot 0$. Így az A pontnak megfelelő komplex szám $-ai$. Legyen az N pontnak megfelelő komplex szám z, így a K pontnak megfelelő komplex szám iz. A P pontnak megfelelő komplex szám $\frac{1}{2}(z + ai)$. Az $PB \perp CK$ állítás ekvivalens az $\dfrac{\frac{1}{2}(z - ai)}{a + iz} \in i\mathbb{R}$, ami igaz, mert $\dfrac{\frac{1}{2}(z - ai)}{zi + a} = \frac{1}{2i} = -\frac{1}{2}i$.

23. *Az ABC háromszög AB és AC oldalaira felvesszük a D és E pontokat úgy, hogy $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{3}{4}$. A BE és CD szakaszokat meghosszabbítjuk úgy, hogy $EE' = 3BE$ és $DD' = 3CD$ Bizonyítsd be, hogy:*

a) *D', A, E' kollineárisak.* **b)** *$AD' = AE'$.*

Megoldás. Mivel $\frac{BD}{DA} = \frac{DC}{DD'} = \frac{1}{3}$ és $\frac{EC}{AE} = \frac{BE}{EE'} = \frac{1}{3}$ a BDC háromszög hasonló az ADD' háromszöggel és a BEC háromszög az $E'EA$ háromszöggel. Így $AD' \parallel BC$, $\frac{BC}{AD'} = \frac{1}{3}$ és $AE' \parallel BC$, $\frac{BC}{AE'} = \frac{1}{3}$. Mivel az A ponton át a BC-hez egyetlen párhuzamos húzható az A, D' és E' pontok egy egyenesen vannak és az arányok alapján $AD' = AE'$. Komplex számok segítségével is megoldható a feladat, mindössze ki kell fejezni a pontok affixumait. Ha az origót A-ba választjuk és a B illetve C csúcs affixuma b illetve c, akkor $d = \frac{3}{4}b$ és $e = \frac{3}{4}c$, tehát $d' = 3(b-c)$ és $e' = 3(c-b)$. Mivel $e' + d' = 0$, az A pont a $D'E'$ szakasz felezőpontja.

24. *Az $ABCDE$ konvex ötszögben M, N, P, Q, X és Y a BC CD, DE, EA, MP és NQ felezőpontjai. Bizonyítsuk be, hogy $XY \,||\, AB$.*

Megoldás. Legyenek $A(z_1)$, $B(z_2)$, $C(z_3)$, $D(z_4)$ és $E(z_5)$ az ötszög csúcsai. Ekkor a feladatban szereplő többi pont a következő: $M\left(\frac{z_2 + z_3}{2}\right)$, $N\left(\frac{z_3 + z_4}{2}\right)$, $P\left(\frac{z_4 + z_5}{2}\right)$, $Q\left(\frac{z_5 + z_1}{2}\right)$, $X\left(\frac{z_2 + z_3 + z_4 + z_5}{4}\right)$ és $Y\left(\frac{z_1 + z_3 + z_4 + z_5}{4}\right)$. Az $\overrightarrow{XY}$ vektornak megfelelő komplex szám: $\frac{z_1 - z_2}{4}$ és $\overrightarrow{AB} = z_2 - z_1$, tehát $\overrightarrow{XY} \,||\, \overrightarrow{AB}$.

25. *Számítsd ki a következő összegeket:*

a) $\sum_{k=1}^{n} kC_n^k \cos kx$; **b)** $\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos kx}{2^k}$; **c)** $\sum_{k=1}^{n} kr^k \cos kx$.

Megoldás. a) A $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$ egyenlőség alapján

$$\sum_{k=1}^{n} kC_n^k \cos kx = n\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} \cos kx.$$

Ha $z = \cos x + i\sin x$, akkor $z^k = \cos kx + i\sin kx$, tehát a kiszámítandó összeg az

$$S = n\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} z^k = nz\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} z^{k-1} = nz(1+z)^{n-1}$$

komplex szám valós része. Másrészt $1 + z = 2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2} + i\sin\frac{x}{2}\right)$, tehát

$$nz(1+z)^{n-1} = nz\left(2\cos\frac{x}{2}\right)^{n-1}\left(\cos\frac{(n-1)x}{2} + i\sin\frac{(n-1)x}{2}\right).$$

Így a valós része $n\left(2\cos\frac{x}{2}\right)^{n-1}\cos\frac{(n+1)x}{2}$, tehát

$$\sum_{k=1}^{n} kC_n^k \cos kx = n\left(2\cos\frac{x}{2}\right)^{n-1}\cos\frac{(n+1)x}{2}.$$

b) A $z = \cos x + i\sin x$ jelöléssel a kiszámítandó összeg a $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{z}{2}\right)^k$ komplex szám valós része. Másrészt $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{z}{2}\right)^k = \frac{z}{2}\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^n - 1}{\frac{z}{2} - 1}$. Ebből következik, hogy

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos kx}{2^k}=\frac{2\sin x\cdot\dfrac{\sin nx}{2^n}+\left(\dfrac{1}{2^n}\cos nx-1\right)(1-2\cos x)}{5-4\sin x}.$$

c) A $\sum_{k=1}^{n}k\cdot r^k\cos kx$ összeg a $\sum_{k=1}^{n}k\cdot z^k$ összeg valós része, ahol $z=r(\cos x+i\sin x)$. De $\sum_{k=1}^{n}k\cdot z^k=\dfrac{nz^{n+2}-(n+1)z^{n+1}+z}{(z-1)^2}$ tehát

$$\sum_{k=1}^{n}kr^k\cos kx=nr^{n+2}\left[\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\sin(n+2)x-\cos(n+2)x\right]-$$

$$-(n+1)r^{n+1}\left[\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\sin(n+1)x-\cos(n+1)x\right]+\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\sin x-\cos x.$$

26. *Bizonyítsd be, hogy ha bármely egységmodulusú z komplex számra $\left|b+az+z^2\right|=1$, ahol $a,b\in\mathbb{C}$, akkor $a=b=0$.*

Megoldás. A feltétel pontosan akkor teljesül, ha $\left(b+az+z^2\right)\left(\overline{b}+\overline{a}\cdot\overline{z}+\overline{z}^2\right)=1$ minden egységmodulusú z komplex számra. A műveletek elvégzése és egyszerűsítés után írhatjuk, hogy $|a|^2+|b|^2+\left(b\overline{a}\cdot\overline{z}+a\overline{b}z\right)+b\overline{z}^2+\overline{b}z^2+a\overline{z}+\overline{a}z=0$. Másrészt ha z modulusa 1, akkor $-z$ és iz modulusa is egy. Ebből következik, hogy $|a|^2+|b|^2+b\overline{z}^2+\overline{b}z^2=0$ és így $|a|^2+|b|^2=0$ (előbb z helyett $-z$-t helyettesítettünk, majd az utolsó előtti egyenlőségben iz-t). Ez csakis akkor teljesülhet ha $a=b=0$.

27. *Határozd meg a $z=\dfrac{1+i\cdot m}{1-i\cdot m}$ alakú számoknak megfelelő pontok mértani helyét, ha $m\in\mathbb{R}$.*

Megoldás. Az adott összefüggésből következik, hogy $m=\dfrac{z-1}{i(1+z)}$. Mivel $m\in\mathbb{R}$ írhatjuk, hogy $\dfrac{z-1}{i(1+z)}=\dfrac{\overline{z}-1}{-i(1+\overline{z})}$. A számítások elvégzése és egyszerűsítés után a $|z|=1$ egyenlőség adódik, tehát a keresett mértani hely az origó középpontú egységsugarú kör.

28. *Oldd meg a $z^3-(5-2i)z^2-8(1-i)z-2+6i=0$ egyenletet, ha van legalább egy valós gyöke.*

Megoldás. Ha z egy valós gyök, akkor az egyenlőség valós része z^3-5z^2-8z-2 és az imaginárius rész $2z^2+8z+6$. Mivel mindkettő nulla következik, hogy $z=-1$ (ez a két kifejezéshez tartozó egyenletek közös gyöke). Így az eredeti egyenlet $(z+1)(z^2-(6-2i)z-2+6i)=0$ alakban írható. Tehát a gyökei $z_1=-1$ és $z_{2,3}=3\pm\sqrt{10}-i$.

Tartalomjegyzék

29. *Bizonyítsd be, hogy ha* $\left|z^3+\frac{1}{z^3}\right|\leq 2$ *akkor* $\left|z+\frac{1}{z}\right|\leq 2$. *Igaz-e a* $\left|z^2+\frac{1}{z^2}\right|\leq 2$ $\Rightarrow \left|z+\frac{1}{z}\right|\leq 2$ *implikáció?*

Megoldás. Ha $z+\frac{1}{z}=a$, akkor $z^3+\frac{1}{z^3}=a^3-3a$. Ha $|a|>2$, akkor $\left|a^3-3a\right|=|a|\left|a^2-3\right|\geq |a|\left||a|^2-3\right|>2\cdot|4-3|=2$. Mivel ez ellentmondana a feltételnek következik, hogy $|a|\leq 2$, vagyis $\left|z+\frac{1}{z}\right|\leq 2$. Ha $|a|>2$, akkor $\left|a^2-2\right|\geq\left||a|^2-3\right|>|4-2|=2$, tehát a második kérdésre a válasz: „igen".

30. *Bizonyítsd be, hogy bármely* $z_1=a+ib$ *és* $z_2=c+id$, $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$ $z_2\neq 0$ *esetén létezik és egyértelmű a* $z_3=m+in$ *és* $z_4=p+iq$, $m,n,p,q\in\mathbb{Z}$, *amelyre* $z_1=z_2\cdot z_3+z_4$ *és* $\left|z_4\right|<\left|z_2\right|$ *(a maradékos osztás tétele* $a+ib$, $a,b\in\mathbb{Z}$ *alakú számokra).*

Megoldás. Rögzített z_1 és z_2 esetén a $\{z_1-z_2z_3 \,|\, z_3=m+in, m,n\in\mathbb{Z}\}$ halmaz egy négyzetrács, amelyben az alapnégyzet oldalhossza $\left|z_2\right|$. Tehát azt kell igazolni, hogy, ha egy négyzetrácsot ráhelyezünk a síkra, akkor az origóhoz legközelebb eső pont és az origó távolsága kisebb, mint a négyzetrácsban az alapnégyzet oldalhossza. Világos, hogy a négyzetrács valamelyik négyzete tartalmazza az origót. Így ebben a négyzetben az origóhoz legközelebb eső pont és az origó távolsága kisebb, mint a négyzet oldalhossza.

2.3. Függvények (348. oldal)

1. *Hasonlítsd össze a következő számokat:*

a) $\log_4 7+\log_4 8$ és 3; **b)** $\log_6 5$ és $\log_7 6$.

Megoldás. a) $\log_4 7+\log_4 8=\log_4 56<\log_4 64=3$;

b) $\log_6 7+\frac{1}{\log_6 7}\geq 2=\log_6 36>\log_6 35=\log_6 7+\log_6 5$.

Mivel $\log_6 7+\log_7 6>\log_6 7+\log_6 5$, következik, hogy $\log_7 6>\log_6 5$.

2. *Ha* $a=\log_5 2$ *és* $b=\log_5 3$ *számítsd ki a és b függvényében a következő számokat:*

a) $\log_5 6$; b) $\log_5 12$; **c)** $\log_5\sqrt[3]{18}$; d) $\log_{25}\sqrt[4]{54}$.

Megoldás. a) $\log_5 6=\log_5 2+\log_5 3=a+b$;

b) $\log_5 12=\log_5 4+\log_5 3=2\log_5 2+\log_5 3=2a+b$;

Tartalomjegyzék

c) $\log_5 \sqrt[3]{18} = \frac{1}{3}\log_5 18 = \frac{1}{3}\left(\log_5 2 + \log_5 9\right) = \frac{1}{3}\left(\log_5 2 + 2\log_5 3\right) = \frac{1}{3}(a+2b)$;

d) $\log_{25} \sqrt[4]{54} = \log_5 \sqrt[4]{54} \cdot \log_{25} 5 = \frac{1}{2}\log_5 \sqrt[4]{54} = \frac{1}{8}\log_5 54 = \frac{1}{8}\left(\log_5 2 + \log_5 3^3\right) =$

$= \frac{1}{8}\left(\log_5 2 + 3\log_5 3\right) = \frac{1}{8}(a+3b)$.

3. *Írd növekvő sorrendbe a következő számokat:* 2^π, $2^{\sqrt{10}}$, $\sqrt{128}$ *és* $8\sqrt[5]{2}$.

Megoldás. $\sqrt{128} = 2^{\frac{7}{2}}$ és $8\sqrt[5]{2} = 2^{\frac{16}{5}}$. Mivel az exponenciális függvény szigorúan növekvő, ha az alap nagyobb, mint 1 és $2 > 1$, tehát elég a kitevőket növekvő sorrendbe rendezni.

$$\pi < 3{,}14 < \sqrt{10} < \frac{16}{5} < \frac{7}{2}.$$

A második és harmadik egyenlőtlenségeket négyzetre emeléssel ellenőrizhetjük, tehát a helyes sorrend:

$$2^\pi < 2^{\sqrt{10}} < 8\sqrt[5]{2} < \sqrt{128}.$$

4. *Bizonyítsd be, hogy ha* $a = \dfrac{2\lg 2 + \lg 3}{\lg 3}$ *és* $b = \log_3 2$, *akkor* $3^a + 2 = 7 \cdot 3^b$.

Megoldás. Tehát $3^{\log_3 2} = 3^b = 2$ (1). Továbbá $a = 2\dfrac{\lg 2}{\lg 3} + 1 = 2\log_3 2 + 1$, tehát $3^a = 3 \cdot 2^2 = 12$, $3^a + 2 = 14$ (2). Az (1)-es és (2)-es alapján $3^a + 2 = 7 \cdot 3^b$.

5. *Oldd meg az* $\left(x^2 - 5\right)^2 = x + 5$ *egyenletet.*

Megoldás. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 5$ és $f_1 : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = x^2 - 5$, illetve $f_2 : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = x^2 - 5$ ennek két leszűkítése. $f_1^{-1}(x) = -\sqrt{x+5}$ és $f_2^{-1}(x) = -\sqrt{x+5}$. Mivel f grafikus képe az f_1^{-1} és f_2^{-1} grafikus képének egyesítését két pontban metszi és ezek a pontok az első szögfelezőn vannak elégséges megoldani az $f(x) = x$ egyenletet. Az $x_2^2 - x_2 - 5 = 0$ egyenlet gyökei $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$. Tehát $\left(x^2 - x - 5\right) \mid \left(x^2 - 5\right)^2 - x - 5$. Az osztás elvégzése után az $\left(x^2 - 5\right)^2 - x - 5 = \left(x^2 - x - 5\right)\left(x^2 + x - 4\right)$ felbontáshoz jutunk, tehát $x_{3,4} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$.

6. *Milyen* λ *esetén lesz pontosan egy valós megoldása a* $\log_{2x}(\lambda x + 1) = \dfrac{1}{2}$ *egyenletnek.*

Megoldás. Az egyenlet a következő alakra hozható $\log_2(\lambda x + 1) = \dfrac{1}{2}\log_2 2x$. A logaritmus függvény injektívitása alapján $\lambda x + 1 = \sqrt{2x}$, tehát

$\lambda^2x^2+x(2\lambda-2)+1=0$. Ennek az egyenletnek a megoldásai $x_{1,\,2}=\dfrac{2-2\lambda\pm\sqrt{-8\lambda+4}}{2\lambda^2}$. Az eredeti egyenletnek csak akkor van egy gyöke, ha az x-re kapott másodfokú egyenletnek egy gyöke van vagy csak egy pozitív gyöke van (amely nem lehet $\dfrac{1}{2}$, mert az alap nem lehet 1).

Ha $\Delta=0$ akkor $\lambda=\dfrac{1}{2}$. Ha $x_1=\dfrac{2-2\lambda-\sqrt{-8\lambda+4}}{2\lambda^2}\le 0$ akkor kapjuk, hogy $\lambda=0$, de $\lambda\neq 0$ mert erre az értékre egyetlen megoldás sem létezik. Az $x_2=\dfrac{2-2\lambda+\sqrt{-8\lambda+4}}{2\lambda^2}$ gyök mindig pozitív, mert $\Delta\ge 0$-ból következik, hogy $\lambda\le\dfrac{1}{2}$. Tehát akkor van egy gyöke az egyenletnek, ha $\lambda=\dfrac{1}{2}$.

7. *Oldd meg a* $2^{x^4+\frac{1}{x^4}}+2^{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}}=8$ *egyenletet a valós számok halmazában.*

Megoldás. $2^{x^4+\frac{1}{x^4}}\ge 2^2=4$, egyenlőség csak $x^4=1$ esetén van, tehát $x=\pm1$ esetén. $2^{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}}\ge 2^2=4$, egyenlőség csak $\sqrt{x}=1$ esetén van, tehát $x=1$-re. Az előbbi két egyenlőtlenségből következik, hogy $2^{x^4+\frac{1}{x^4}}+2^{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}}\ge 8$ és egyenlőség csak $x=1$ esetén van, tehát $x=1$ az egyetlen gyök.

8. *Oldd meg a* $2^{3^{4^x}}=4^{3^{2^x}}$ *egyenletet a valós számok halmazában.*

Megoldás. Az $2^{3^{4^x}}=4^{3^{2^x}}$ egyenlet a következő alakra hozható: $2^{3^{2^{2x}}}=2^{2\cdot 3^{2^x}}$. Az exponenciális függvény injektívitása miatt $3^{2^{2x}}=2\cdot 3^{2^x}$. Logaritmálva az egyenlet mindkét oldalát kapjuk, hogy $\left(2^x\right)^2-2^x-\log_3 2=0$. Ha $y=2^x$, akkor az egyenlet a következőképpen alakul $y^2-y-\log_3 2=0$, amely megoldásai: $y_{1,\,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+4\log_3 2}}{2}$. Mivel $y>0$ kapjuk, hogy $2^x=\dfrac{1+\sqrt{1+4\log_3 2}}{2}$, tehát $x=\log_2\left(1+\sqrt{1+4\log_3 2}\right)-1$.

9. *Oldd meg az* $1^x+4^x+9^x+16^x+25^x=2^x+6^x+12^x+20^x+5^x$ *egyenletet a valós számok halmazában.*

Megoldás. Ha $x>0$ akkor $n^x-(n-1)^x>0$ és így

$$1+2^x\left(2^x-1^x\right)+3^x\left(3^x-2^x\right)+4^x\left(4^x-3^x\right)+5^x\left(5^x-4^x\right)>$$
$$>1^x+\left(2^x-1^x\right)+\left(3^x-2^x\right)+\left(4^x-3^x\right)+\left(5^x-4^x\right)=5^x.\ (1)$$

Ha $x<0$ akkor $n^x-(n-1)^x<0$ és bármely $n>1$ esetén $n^x<1$, tehát

$$1+2^x\left(2^x-1^x\right)+3^x\left(3^x-2^x\right)+4^x\left(4^x-3^x\right)+5^x\left(5^x-4^x\right)>$$
$$>1^x+\left(2^x-1^x\right)+\left(3^x-2^x\right)+\left(4^x-3^x\right)+\left(5^x-4^x\right)=5^x.$$

Tartalomjegyzék

Ha $x = 0$ akkor $1 + 4^0 + 9^0 + 16^0 + 25^0 = 2^0 + 6^0 + 12^0 + 20^0 + 5^0$. (3)

Az (1), (2) és (3) alapján $x = 0$ az egyetlen megoldás.

10. *Oldd meg a* $2^{-2x^3+3x^2} = \dfrac{x^2+1}{x}$ *egyenletet.*

Megoldás. Az egyenlet bal oldalán álló kifejezés pozitív, tehát a jobb oldal is pozitív kell legyen. Ez csakis akkor teljesül, ha $x > 0$. Ebben az esetben a bal oldalon álló exponenciális kifejezés kitevője kisebb, mint 1.

$$-2x^3 + 3x^2 - 1 = -(2x+1)(x-1)^2 \le 0 .$$

Így $x > 0$ esetén $2^{-2x^3+3x^2} \le 2^1 \le \dfrac{x^2+1}{x}$, tehát egyenlőség csak akkor áll fenn ha $x + \dfrac{1}{x} = 2$ és $-2x^3 + 3x^2 - 1 = 0$. Ebből következik, hogy az egyenlet egyetlen megoldása $x = 1$.

11. *Oldd meg a* $\sin^n x + \cos^n x = 1$ *egyenletet, ha* $n \in \mathbb{N}$.

Megoldás. $n = 0$ esetén az egyenletnek egyetlen megoldása sincs. $n = 1$-re a $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = 1$ egyenlethez jutunk, tehát

$$M = \left\{ \frac{\pi}{4} - k\pi \mp \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Ha $n = 2$, akkor $M = \mathbb{R}$, mivel minden valós szám teljesíti az egyenletet. Ha $n \ge 3$, akkor $\sin^n x \le \sin^2 x$ és $\cos^n x \le \cos^2 x$, tehát $\sin^n x + \cos^n x \le 1$. Egyenlőség akkor és csakis akkor van, ha $\sin x = 0$ vagy $\sin^{n-2} x = 1$ illetve $\cos x = 0$ vagy $\cos^{n-2} x = 1$. Páratlan n esetén a megoldások $\{2k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{ \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$ míg páros n esetén a megoldáshalmaz $\left\{ k\dfrac{\pi}{2} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

12. *Hasonlítsd össze a* $\log_a \dfrac{a+b}{2} \cdot \log_b \dfrac{a+b}{2}$ *és* 1 *számokat, ha* $a, b \in (1, \infty)$, *és ha* $a, b \in (0, 1)$.

Megoldás. Az adott szorzat $\dfrac{\lg\frac{a+b}{2}}{\lg a} \cdot \dfrac{\lg\frac{a+b}{2}}{\lg b}$ alakban írható. Ha $a > 1$ és $b > 1$, akkor $\lg\dfrac{a+b}{2} \ge \lg\sqrt{ab} = \dfrac{\lg a + \lg b}{2} \ge \sqrt{\lg a \lg b}$, tehát $\lg^2 \dfrac{a+b}{2} \ge \lg a \lg b$.

Ugyanezt az egyenlőtlenséget kapjuk $a, b \in (0, 1)$ esetén is mert

$$\lg^2 \frac{a+b}{2} \ge \lg^2 \sqrt{ab} = \left(\frac{\lg a + \lg b}{2} \right)^2 = \left(\frac{-\lg a - \lg b}{2} \right)^2 \ge \lg a \lg b .$$

13. *Bizonyítsd be, hogy ha* $a,b,c\in(1,\infty)$, *akkor*

$$(ab)^{\sqrt{\log_a c\log_b c}}+(bc)^{\sqrt{\log_b a\log_c a}}+(ca)^{\sqrt{\log_c b\log_a b}}\geq a^2+b^2+c^2.$$

Megoldás. $(ab)^{\sqrt{\log_a c\log_b c}}=(ab)^{\frac{\lg c}{\sqrt{\lg a\lg b}}}\geq(ab)^{\frac{2\lg c}{\lg a+\lg b}}=(ab)^{\frac{\lg c^2}{\lg ab}}=(ab)^{\log_{ab}c^2}=c^2$. Ha felírjuk a másik két analóg egyenlőtlenséget és összeadjuk a kívánt egyenlőtlenséghez jutunk.

14. *Oldd meg a* $2^{x-1}\left(2^{x+1}-7\right)=\log_2\left(\frac{7+\sqrt{49+16x}}{4}\right)$ *egyenletet.*

Megoldás. Tekintsük az $f:\mathbb{R}\to\operatorname{Im}f$, $f(x)=2^{2x}-7\cdot 2^x$ függvényt. Ennek az inverze az $f^{-1}:\left(-\frac{49}{16},\infty\right)\to\mathbb{R}$, $f^{-1}(x)=\log_2\left(\frac{7+\sqrt{49+16x}}{4}\right)$ függvény, tehát az egyenlet $f(x)=f^{-1}(x)$ alakban írható. Az egyenlet egyetlen gyöke $x=2$.

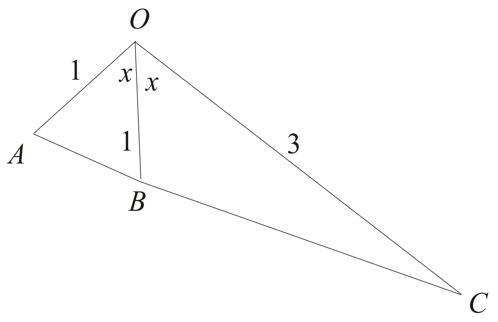
15. *Oldd meg a következő egyenleteket:*

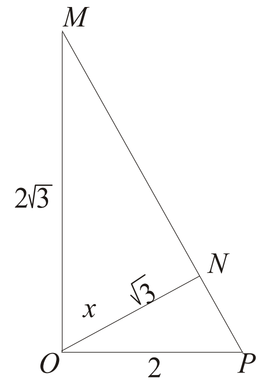
a) $\sqrt{2-2\cos x}+\sqrt{10-6\cos x}=\sqrt{10-6\cos 2x}$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

b) $\sqrt{15-12\cos x}+\sqrt{7-4\sqrt{3}\sin x}=4$, $x\in(0,\pi)$.

Megoldás. a) Az első ábrának megfelelően vegyük fel az $OA=1$, $OB=1$ és $OC=3$ hosszúságú szakaszokat úgy, hogy $m(\widehat{AOB})=m(\widehat{BOC})=x$. Az AOB, BOC és AOC háromszögekben a koszinusz-tétel alapján $AB=\sqrt{2-2\cos x}$, $BC=\sqrt{10-6\cos x}$ és $AC=\sqrt{10-6\cos 2x}$, tehát a feladatbeli egyenlőség azt fejezi ki, hogy B az AC szakaszon van. Így a szögfelező tétel alapján $\frac{AB}{BC}=\frac{1}{3}$, tehát $3\sqrt{2-2\cos x}=\sqrt{10-6\cos x}$. Ebből az egyenlőségből következik, hogy $\cos x=\frac{2}{3}$, tehát $x=\arccos\frac{2}{3}$.

b) Az MOP háromszögben $m(\widehat{MOP})=90^\circ$, $OM=2\sqrt{3}$, $OP=2$, $ON=\sqrt{3}$ és $m(\widehat{MON})=x$. Így $MN=\sqrt{15-12\cos x}$, $NP=\sqrt{7-4\sqrt{3}\sin x}$ és $MP=4$, tehát $N\in(MP)$. De az OMN háromszög O-hoz tartozó magassága éppen $\sqrt{3}$, tehát $x=\frac{\pi}{3}$.





16. *Oldd meg a* $\log_2^2 \mathrm{tg}\, x + \left(\log_2 \sin^2 x\right)\left(\log_2 \cos^2 x\right) = 1$ *egyenletet.*

Megoldás. Ha $a = \log_2 \sin x$ és $b = \log_2 \cos x$, akkor a

$$\log_2^2 \mathrm{tg}\, x + \left(\log_2 \sin^2 x\right)\left(\log_2 \cos^2 x\right) = 1$$

egyenletből következik, hogy $(b-a)^2 + 4ab = 1$, tehát $(a+b)^2 = 1$. Ez alapján $a + b = \pm 1$.

Első eset, ha $a + b = 1$. A $\log_2 \sin x \cos x = 1$ egyenletet kell megoldanunk, de ennek az egyenletnek nincs megoldása, mivel $-1 \le \sin x \cos x \le 1$ bármely x -re.

Második eset, ha $a + b = -1$. Tehát a $\log_2 \sin x \cos x = -1$ egyenletet kell megoldanunk és így $\sin x \cos x = \frac{1}{2}$. Továbbá $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ és $\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4}$, ahonnan $\sin x = \cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, tehát $x \in \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

17. *Oldd meg a* $\log_{\sin x}^2 2 < \log_{\sin x}\left(4\sin^3 x\right)$ *egyenlőtlenséget.*

Megoldás. Az egyenlőtlenség a következő alakra hozható:

$$\log_{\sin x}^2 2 < 3 + 2\log_{\sin x} 2 .$$

Ha $y = \log_{\sin x} 2$, akkor az egyenlőtlenség a következő formában írható:

$$y^2 - 2y - 3 < 0 .$$

Ennek a megoldása $y \in (1,3)$, tehát $\log_{\sin x} 2 \in (1,3)$, és így $x \in \left(2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right)$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.

18. *Bizonyítsd be, hogy ha* x, y *és* z 1*-hez viszonyítva ugyanabban az intervallumban helyezkednek el, akkor*

$$\frac{\log_y x^2}{x+y} + \frac{\log_z y^2}{y+z} + \frac{\log_x z^2}{x+z} \ge \frac{9}{x+y+z}$$

Megoldás. A egyenlőtlenség baloldala a következőképpen alakítható át:

$$\frac{\log_y x^2}{x+y}+\frac{\log_z y^2}{y+z}+\frac{\log_x z^2}{x+z}=3\frac{\frac{\log_y x}{\left(\frac{x+y}{2}\right)}+\frac{\log_z y}{\left(\frac{y+z}{2}\right)}+\frac{\log_x z}{\left(\frac{x+z}{2}\right)}}{3}\geq$$

$$\geq 3\sqrt[3]{\frac{2}{x+y}\frac{2}{y+z}\frac{2}{z+x}}\geq \frac{9}{\frac{x+y}{2}+\frac{y+z}{2}+\frac{z+x}{2}}\geq\frac{9}{x+y+z}.$$

19. *Adott az* $f:\mathbb{R}\to(0,\ \infty)$, $f(x)=\begin{cases}a^x, & x\in\mathbb{Q}\\ b^x, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$ *függvény, ahol* $a,b\in(0,\infty)\setminus\{1\}$. *Bizonyítsd be, hogy a következő állítások egyenértékűek:*

1) *f injektív*; **2)** *f szürjektív*; 3**)** *f bijektív*; **4)** $\log_a b\in\mathbb{Q}$.

Megoldás. $(1)\Rightarrow(2)$

A bizonyítás a lehetetlenre való visszavezetés módszerével történik. Feltételezzük, hogy f nem szürjektív, tehát létezik $y\in\mathbb{R}$ úgy, hogy bármely $x\in\mathbb{R}$ esetén $f(x)\neq y$. Ez azt jelenti, hogy bármely $u\in\mathbb{Q}$ esetén $a^u\neq y$, tehát $u\neq\log_a y$ bármely $u\in\mathbb{Q}$, tehát $\log_a y\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Továbbá bármely $v\in\mathbb{Q}$ esetén $b^v\neq y$, tehát $v\neq\log_b y$ bármely $v\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, tehát $\log_a y\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Tehát $\log_b a=\dfrac{\log_b y}{\log_a y}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $f\left(\log_b a\right)=a=f(1)$ és $\log_b a\neq 1$, tehát f nem injektív, ami ellentmond a kezdeti feltételünknek.

$(2)\Rightarrow(3)$

A bizonyítás a lehetetlenre való visszavezetés módszerével történik. Feltételezzük, hogy f nem bijektív és mivel f szürjektív, ez azt jelenti, hogy f nem injektív. Továbbá mivel az exponenciális függvény injektív, f csak akkor nem injektív, ha létezik $u\in\mathbb{Q}$ és $v\in\mathbb{Q}$ úgy, hogy $a^u=b^v$. $\dfrac{u}{v}=\log_a b$, tehát $\log_a b$ irracionális, ami azt jelenti, hogy bármely $u\in\mathbb{Q}$ esetén $a^u\neq b$. Továbbá bármely $v\in\mathbb{Q}$ esetén $b^v=b$ egyenlőség azt jelenti, hogy $v=\log_b b=1\in\mathbb{Q}$, tehát bármely $v\in\mathbb{Q}$ esetén $b^v\neq b$.

$(3)\Rightarrow(4)$ Az előbbi pont alapján abból, hogy f bijektív következik, hogy $\log_a b\in\mathbb{Q}$.

$(4)\Rightarrow(1)$

Tegyük fel, hogy f nem injektív, mivel az exponenciális függvény injektív, tehát létezik $u\in\mathbb{Q}$ és $v\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ úgy, hogy $a^u=b^v$. Innen következik, hogy $\log_a b=\dfrac{u}{v}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, ami ellentmond a feltevésünknek.

20. *Bizonyítsd be, hogy az* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x\cdot\cos\sqrt{3}x$ *függvény nem periódikus.*

Tartalomjegyzék

Megoldás. A bizonyítást a lehetetlenre való visszavezetés módszerével végezzük el. Legyen $T \in \mathbb{R}_+^*$ periódusa az f-nek, tehát $f(x+T) = f(x)$, partikulárisan $f(T) = f(0)$. Tehát $\cos T \cos \sqrt{3}T = 1$. De $\cos T, \cos \sqrt{3}T \in [-1,1]$, tehát $\cos T = \cos \sqrt{3}T = 1$ vagy $\cos T = \cos \sqrt{3}T = -1$, így $T = 2k\pi$ és $T\sqrt{3} = 2l\pi$, ahol k, $l \in \mathbb{N}^*$, vagy $T = (2k+1)\pi$ és $T\sqrt{3} = (2l+1)\pi$. Mindkét esetben az következne, hogy $\sqrt{3}$ racionális szám, ami ellentmondás.

21. *Jelöljük a-val, b-vel és c-vel az $f(f(f(f(x)))) = x$, $f(f(x)) = x$ és $f(x) = x$ egyenletek megoldásainak számát, ahol $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Bizonyítsd be, hogy ha a, b és c természetes számok, akkor $(a-b) \vdots 4$ és $(b-c) \vdots 2$.*

Megoldás. Legyen $F_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = x\}$, $F_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid f(f(x)) = x\}$, és

$$F_3 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid f^{(4)}(x) = f\left(f\left(f\left(f(x)\right)\right)\right) = x\right\}.$$

Az $F_2 \setminus F_1$ halmaz elemeinek száma $(b-c)$, mivel $F_1 \subset F_2$ ($f(f(x)) = f(x) = x$, bármely $x \in F_1$). Ha $y \in F_2 \setminus F_1$ akkor $f(f(y)) = y$ és $f(x) \neq x$. Továbbá $f^{(3)}(y) = f\left(f^{(2)}(y)\right) = f(y)$, tehát $f(y) \in F_2 \setminus F_1$. Tehát $F_2 \setminus F_1$ halmaz elemei párosíthatók, ezért $(b-c)$ páros. Hasonlóképpen mint az előbb az $F_3 \setminus F_2$ halmaz elemeinek száma $(a-b)$, mivel $F_3 \subset F_2$ ($f^{(4)}(x) = f^{(2)}\left(f^{(2)}(x)\right) = f^{(2)}(x) = x$, bármely $x \in F_2$). Ha $y \in F_3 \setminus F_2$ akkor $f^{(4)}(y) = y$ és $f(f(y)) \neq y$. Továbbá $f^{(5)}(y) = f\left(f^{(4)}(y)\right) = f(y)$, tehát $f(y) \in F_2 \setminus F_1$, mert $f^{(3)}(y) = f(y)$-ból következik, hogy $y = f^{(4)}(y) = f^{(2)}(y)$. Mivel $F_1 \subset F_2$ ezért $f(y) \neq y$. Ugyanakkor $f^{(6)}(y) = f^{(2)}\left(f^{(4)}(y)\right) = f^{(2)}(y)$ és $f^{(2)}(y) \neq y$, $f^{(2)}(y) \neq f(y)$. Továbbá $f^{(7)}(y) = f^{(3)}\left(f^{(4)}(y)\right) = f^{(3)}(y)$. $f^{(3)}(y) \neq y$, mert $f^{(3)}(y) = y$-ből következik, hogy $y = f^{(4)}(y) = f(y)$ és $F_1 \subset F_2$. $f^{(3)}(y) \neq f(y)$, mert $f^{(3)}(y) = y$-ból következik, hogy $y = f^{(4)}(y) = f^{(2)}(y)$. $f^{(3)}(y) \neq f^{(2)}(y)$. mert $f^{(3)}(y) = f^{(2)}(y)$-ból következik, hogy $y = f^{(4)}(y) = f^{(3)}(y)$. Tehát $F_2 \setminus F_1$ halmaz elemei négyes csoportokra oszthatók, tehát $(a-b)$ osztható 4-gyel.

22. *Bizonyítsd be, hogy nem létezik olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre teljesülne az*

$$f(f(x)) = \begin{cases} \sqrt{3}, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$ *egyenlőség.*

Megoldás. Feltételezzük, hogy létezik olyan $x \in \mathbb{Q}$, hogy $f(x) \in \mathbb{Q}$. Tehát létezik $y \in \mathbb{Q}$, $(y = f(x))$ úgy, hogy $f(y) = f(f(x)) = \sqrt{3}$, mivel $y \in \mathbb{Q}$ következik, hogy $f(f(y)) = \sqrt{3}$. Tehát $f(f(y)) = f(\sqrt{3}) = f(y) = \sqrt{3}$. De $f(f(\sqrt{3})) = f(\sqrt{3}) = \sqrt{3} \neq 1$, mivel $\sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, így ellentmondáshoz jutunk.

Tehát bármely $x \in \mathbb{Q}$ esetén $f(x) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Létezik $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $(y = f(1))$ úgy, hogy $f(y) = \sqrt{3}$. De $f(f(y)) = 1$, mert $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, tehát $f(f(y)) = f(\sqrt{3}) = 1$. Így $f(f(\sqrt{3})) = f(1) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, másrészt $f(f(\sqrt{3})) = 1 \in \mathbb{Q}$, tehát itt is ellentmondáshoz jutottunk. Tehát nem létezik ilyen függvény.

23. Bizonyítsd be, hogy ha $f : A \to B$ és $g : B \to C$ bijektív függvények, akkor $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Megoldás. Mivel $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ 1_B \circ f = 1_A$, és $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ 1_A \circ g^{-1} = 1_B$, a $g \circ f : A \to C$ és $f^{-1} \circ g^{-1} : C \to A$ függvények az inverz függvény értelmezése alapján egymás inverzei $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

24. Igazak-e a következő egyenlőségek, ha $f : A \to B$ egy függény és $A_1, A_2 \subset A$:

a) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$; **b)** $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.

Megoldás. a) Ha $y \in f(A_1 \cup A_2)$ akkor létezik $x \in A_1 \cup A_2$ úgy, hogy $f(x) = y$, tehát létezik $x \in A_1$ úgy, hogy $f(x) = y$ vagy létezik $x \in A_2$ úgy, hogy $f(x) = y$. Eszerint $y \in f(A_1)$ vagy $y \in f(A_2)$, ami azt jelenti, hogy $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$.

Fordítva, ha $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$ akkor $y \in f(A_1)$ vagy $y \in f(A_2)$, tehát létezik $x \in A_1$ úgy, hogy $f(x) = y$ vagy létezik $x \in A_2$ úgy, hogy $f(x) = y$. Ez azt jelenti, hogy létezik $x \in A_1 \cup A_2$ úgy, hogy $f(x) = y$, amiből következik, hogy $y \in f(A_1 \cup A_2)$.

b) A válasz negatív. Például az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^2$, $A_1 = [-1, 0]$ és $A_2 = [0, 1]$ esetén $f(A_1 \cap A_2) = f(\{0\}) = \{0\}$, $f(A_1) \cap f(A_2) = [0,1] \cap [0,1] = [0,1]$.

Szükséges és elégséges feltétel, hogy f injektív legyen.

Szükségesség. Feltételezzük, hogy f nem injektív, tehát létezik $x_1, x_2 \in A$ úgy, hogy $x_1 \neq x_2$ és $f(x_1) = f(x_2)$. Ha $A_1 = \{x_1\}$ és $A_2 = \{x_2\}$, akkor $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, tehát $f(A_1 \cap A_2) = \varnothing$. Továbbá $f(A_1) = f(A_2) = \{f(x_1)\} = \{f(x_2)\}$, tehát $f(A_1) \cap f(A_2) = \{f(x_1)\} = \{f(x_2)\} \neq \varnothing$.

Tartalomjegyzék

Elégségesség. Ha $y \in f(A_1 \cup A_2)$, akkor létezik $x \in A_1 \cap A_2$ úgy, hogy $f(x) = y$, tehát létezik $x \in A_1$ úgy, hogy $f(x) = y$ és létezik $x \in A_2$ úgy, hogy $f(x) = y$. Ebből következik, hogy $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$.

Fordítva, ha $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$, akkor létezik $x_1 \in A_1$ úgy, hogy $f(x_1) = y$ és létezik $x_2 \in A_2$ úgy, hogy $f(x_2) = y$, az f injektívitása miatt $x_1 = x_2$, tehát létezik $x_1 = x_2 = x \in A_1 \cap A_2$, úgy, hogy $f(x) = y$, tehát $y \in f(A_1 \cap A_2)$.

25. *Jelöljük $convA$-val az $A \subset R$ halmaz konvex burkát (azaz a legkisebb konvex halmazt, amely tartalmazza A-t). Igaz-e, hogy $f(convA) = convf(A)$, ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*

Megoldás. A válasz nem. Például az $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{ha } x < 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ 1, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$, $A = \{-1, 1\}$ esetén $f(convA) = \{-1, 0, 1\}$, $f(A) = \{-1, 1\}$ és $convf(A) = [-1, 1]$, tehát $convf(A) \neq f(convA)$.

26. *Létezik-e olyan a és b irracionális szám, amelyre a^b racionális?*

Megoldás. Ismert, hogy $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Ha $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$, akkor $a = b = \sqrt{2}$. Ha $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, akkor $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ és $b = \sqrt{2}$ esetén

$$a^b = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = 2 \in \mathbb{Q}.$$

27. *Bizonyítsd be, hogy ha $p \in \mathbb{N}$ prímszám és $r \in \mathbb{Q}$, akkor érvényes a következő ekvivalencia: $p^r \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow r \in \mathbb{Z}$.*

Megoldás. Ha $x \in \mathbb{Z}$ és n prím akkor $n^x \in \mathbb{Z}$. Feltételezzük, hogy $n^x \in \mathbb{Q}$ és $x \notin \mathbb{Z}$. Legyen $x = \frac{p}{q}$, $(p, q) = 1$, $q \notin \{0, 1\}$. Ekkor $n^{\frac{p}{q}} = \frac{a}{b}$, $(a, b) = 1$. Beszorozva b-vel és a q-adik hatványra emelve kapjuk, hogy $b^q n^p = a^q$. Mivel $n^p \mid a^q$ és n prím, $n \mid a$. Továbbá $(a, b) = 1$, ezért n nem osztja b-t, tehát b-nek a prímtényezős felbontásában nem szerepel az n. Ha n az a prímtényező felbontásában az r-edik hatványon szerepel akkor a prímfelbontás egyértelműsége miatt $p = q \cdot r$, tehát $q \mid p$ és mivel $(p, q) = 1$, következik, hogy $q = 1$ ami ellentmondás.

28. *Bizonyítsd be, hogy létezik bijektív függvény $\mathbb{Z}$-ről $\mathbb{N}$-re!*

Megoldás. Legyen $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $g(z) = \begin{cases} 2z, & \text{ha } z \geq 0 \\ -2z - 1, & \text{ha } z < 0 \end{cases}$. A függvény jól értelmezett, mert ha $z < 0$ akkor $z \leq -1$, tehát $g(z) = -2z - 1 \geq 1$.

Tartalomjegyzék

Injektívitás. Legyen $g(z_1) = g(z_2)$. Ha z_1 negatív, akkor $g(z_1)$ páratlan, ha z_1 pozitív, akkor $g(z_1)$ páros, tehát z_1 és z_2 azonos előjelű. Tegyük fel, hogy negatívak. Ekkor $g(z_1) = -2z_1 - 1 = g(z_2) = -2z_2 - 1$, tehát $z_1 = z_2$. Ha pozitívak akkor $g(z_1) = 2z_1 = g(z_2) = 2z_2$, tehát $z_1 = z_2$.

Szürjektívitás. Legyen n egy természetes szám. Ha n páratlan akkor legyen $z = -\dfrac{n+1}{2}$ és ha n páros akkor $z = -\dfrac{n}{2}$, ahol $z \in \mathbb{Z}$. Mindkét esetben $f(z) = n$, tehát a függvény szürjektív.

29. *Bizonyítsd be, hogy létezik bijektív függvény $\mathbb{Q}$-ról $\mathbb{Z}$-re!*

Megoldás. Az $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = (2p+1)2^q$, $q > 0$ függvény bijektív.

Ha $f\left(\dfrac{p_1}{q_1}\right) = f\left(\dfrac{p_2}{q_2}\right)$, akkor $(2p_1 + 1)2^{q_1} = (2p_2 + 1)2^{q_2}$. Ha $q_1 > q_2$ akkor $2^{q_1 - q_2} \mid (2p_2 + 1)$, ami ellentmondás. Hasonlóan ellentmondáshoz jutunk, ha $q_2 > q_1$. Tehát $q_1 = q_2$ és következik, hogy $2p_1 + 1 = 2p_2 + 1$, ahonnan adódik, hogy $p_1 = p_2$, ami azt jelenti, hogy $\dfrac{p_1}{q_1} = \dfrac{p_2}{q_2}$. Másrészt ha z egy nem nulla egész szám, akkor legyen q a $|z|$ prímtényezős felbontásában 2 kitevője és $2p + 1 = \dfrac{|z|}{2^q}$. Így $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = z$. Legyen $g : \mathbb{Z} \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$, $g(z) = \begin{cases} -2z - 2, & \text{ha } z < 0 \\ 2z - 1, & \text{ha } z > 0 \end{cases}$. A g függvény bijektív, mert ha $g(z_1) = g(z_2)$, akkor z_1 és z_2 azonos előjelű (ha z_1 negatív, akkor $g(z_1)$ páros, ha z_1 pozitív, akkor $g(z_1)$ páratlan). Tegyük fel, hogy negatívak. Ekkor $g(z_1) = -2z_1 - 2 = g(z_2) = -2z_2 - 2$, tehát $z_1 = z_2$. Ha pozitívak akkor $g(z_1) = 2z_1 - 1 = g(z_2) = 2z_2 - 1$, tehát $z_1 = z_2$. Tehát g injektív. Másrészt ha n egy természetes szám akkor a következő két esetünk van: ha n páratlan, akkor legyen $z = \dfrac{n+1}{2}$ és ha n páros, akkor $z = -\dfrac{n+2}{2}$. Mindkét esetben $z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ és $g(z) = n$, tehát g szürjektív is. Az előbbiek alapján az $f \circ g : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ függvény bijektív.

30. *Bizonyítsd be, hogy nem létezik bijektív függvény $\mathbb{N}$-ről $\mathbb{R}$-re!*

Megoldás. A bizonyítás a lehetetlenre való visszavezetés módszerével történik Tegyük fel, hogy létezik f bijektív megfeleltetés $\mathbb{N}$ és $\mathbb{R}$ között. Legyen $f(n) = a_n$ valós szám és a_n tört része legyen $0,a_1^n a_2^n a_3^n a_4^n \; \ldots$. Legyen $b = 0,b_1 b_2 b_3 b_4 \; \ldots$ az a valós szám melyre $b_i = 9 - a_i^i$, bármely $i \in \mathbb{N}$ esetén. Észrevehető, hogy $a_i^i \neq b_i$,

Tartalomjegyzék

bármely $i \in \mathbb{N}$ esetén. Tehát bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $f(n) \neq b$, mert ha létezne $m \in \mathbb{N}$ akkor az $f(m) = a_m = b$ szám esetén $a_m^m \neq b_m$, tehát $a_m \neq b$. Tehát nem létezik, bijektív megfeleltetés $\mathbb{N}$ és $\mathbb{R}$ között.

2.4. Kombinatorika (350. oldal)

1. *Melyek a racionális tagjai a* $\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}\right)^{2001}$ *kifejezés kifejtésének, ahol* $x \in \mathbb{Q}$.

Megoldás

$$\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}\right)^{2001} = \sum_{k=0}^{2001} C_{2001}^k \left(\sqrt[3]{x}\right)^k \left(\sqrt[3]{x^2}\right)^{2001-k} = \sum_{k=0}^{2001} C_{2001}^k x^{\frac{k}{3}+\frac{4002-2k}{3}} = \sum_{k=0}^{2001} C_{2001}^k x^{\frac{4002-k}{3}}.$$

A racionális tagoknál a $\dfrac{4002-k}{3}$ kitevő egész kell legyen. Innen következik, hogy k 3-mal osztható kell legyen, mivel $4002 = 3 \cdot 1334$. Ezért a következő tagok lesznek racionálisak: $C_{2001}^{3l} x^{1334-l}$, ahol $l \in \left\{0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 667\right\}$.

2. *Határozd meg az* a*-tól független tagokat az* $(x+a)^{10} \cdot \left(x + \dfrac{1}{a}\right)^{10}$ *kifejtésében.*

Megoldás. $(x+a)^{10} \cdot \left(x + \dfrac{1}{a}\right)^{10} = \left(\sum\limits_{k=0}^{10} C_{10}^k a^k x^{10-k}\right)\left(\sum\limits_{l=0}^{10} C_{10}^l a^{-l} x^{10-l}\right)$

Egy tag a szorzatból a következő alakú: $C_{10}^k a^k x^{10-k} \cdot C_{10}^l a^{-l} x^{10-l}$. Ahhoz, hogy ez független legyen a-tól $k - l = 0$ feltétel kell teljesüljön. Innen következik, hogy $k = l$ és mivel $k \in \left\{0,\ 1,\ \ldots,\ 10\right\}$ halmaznak 11 eleme van, így 11 tag független a-tól.

3. *Számold ki az* $n(m-n)C_m^x = m(m-1)C_{m-2}^{x-1}$ *egyenlet gyökeinek összegét.*

Megoldás. Ahhoz, hogy az egyenletnek értelme legyen C_n^x és C_{m-2}^{x-1} értelmezett kell legyen. Ez az $1 \leq x \leq m-1$-re (1) teljesül. Behelyettesítve az egyenletbe az $C_m^x = \dfrac{m!}{x!(m-x)!}$ és $C_{m-2}^{x-1} = \dfrac{(m-2)!}{(x-1)!(m-x-1)!}$ kifejezéseket kapjuk, hogy:

$$n(m-n)\frac{m!}{x!(m-x)!} = m(m-1)\frac{(m-2)!}{(x-1)!(m-x-1)!}.$$

$$(x+n-m)(x-n) = 0$$

Ebből következik, hogy az egyenlet gyökei: $(m-n)$ és n. A gyököknek teljesíteniük kell az (1) egyenlőtlenséget. Tehát, ha $m \geq 2$ és $n \in \left\{1,\ 2,\ \ldots,\ m-1\right\}$ akkor a gyökök összege m.

4. *Az asztalon n pohár van elhelyezve a szájukkal lefele. Lehetséges-e, hogy az összes pohár a talpán álljon véges lépés után, ha egy lépés pontosan $(n-1)$ pohár megfordítását jelenti?*

Megoldás. Első eset, ha n páratlan. Ekkor $(n-1)$ páros. Ahhoz, hogy egy pohár a talpán álljon páratlan sokszor kell megforduljon, azaz páratlan fent említett műveletben kell részt vegyen. Páratlan pohár esetén az összforgatások száma páratlan a kívánt állapot elérése után. De egyszerre páros sok poharat fordítunk meg, így nem lehetséges, hogy minden pohár a talpán legyen egyszerre. Második eset, ha n páros. Elvégzünk n műveletet úgy, hogy minden pohár kimarad egy műveletből és $(n-1)$ (páratlan) műveletben vesz részt. Így tehát minden pohár a talpán lesz. Összegezve, csak akkor lehet a poharakat az adott művelettel talpukra állítani, ha n páros.

5. *Határozd meg azon számok számát, amelyekben minden számjegy nagyobb az előtte lévő számjegynél.*

Megoldás. Jelöljük S_k^l-lel azon számok számát, amelyek k számjegyűek, l az első számjegy és minden számjegy nagyobb az előzőnél. Észrevehető, hogy $l+k \le 10$,ha $k \ge 2$ és $0 \le l \le 9$, ha $k=1$. Észrevehető az is, hogy $S_k^l = S_{k-1}^{l+1} + ... + S_{k-1}^{11-l}$. Ez azt jelenti, hogy az olyan számok, amelyek k számjegyűek, l az első számjegy, azok utolsó $(k-1)$ számot alkothat, amelynek $l+1$, $l+2$, … $11-k$ számok valamelyike az első számjegye. Az összes a feladat feltételeit teljesítő számok száma.

$$1+\sum_{k=1}^{9}\sum_{l=1}^{10-k} S_k^l = 1 + S_1^1 + 2\sum_{k=1}^{8}\sum_{l=2}^{10-k} S_k^l ,$$

ahol S_9^1-t, S_8^1-t, S_7^1-t, … , S_2^1-t helyettesítettük a fenti képlet szerint. Majd helyettesítve az S_8^2-t, S_7^2-t, … , S_2^2-t és utána a többit kapjuk, hogy

$$1+\sum_{k=1}^{9}\sum_{l=1}^{10-k} S_k^l = 1 + S_1^1 + 2S_1^2 + 2^2 S_1^3 + ... + 2^8 S_1^9 = 2^9 ,$$

mivel $S_1^l = 1$, minden $l = \overline{1,\, 9}$-re. A kezdeti 1-gyes a 0 szám miatt adódik hozzá.

6. *Egy gépkocsi rendszáma az ábécé három betűjéből (26 betű) és két számjegyből áll. Tudva azt, hogy két gépkocsi nem közlekedhet ugyanazzal a rendszámmal, határozd meg a maximálisan közlekedhető gépkocsik számát.*

Megoldás. Tehát az autó rendszáma $\overline{xy}abc$ alakú, ahol $\overline{xy}$ egy kétjegyű szám (kezdődhet 0-val is) és abc egy három betűből álló szó. Ilyen kétjegyű szám 100 darab van (99, ha a 00-t nem számítjuk) és 26^3 hárombetűs szó, melynek betűi egy 26 betűből álló ábécéből alkottak. Tehát a rendszámok száma $100 \cdot 26^3$.

7. *Egy $(n+1)$ elemet tartalmazó halmaz elemei nullától különböző és $2n$-nél nem nagyobb természetes számok $(n \ge 2)$. Mutasd meg, hogy a halmaz három elemű részhalmazai közt létezik olyan, amelyik egyik eleme egyenlő a másik kettő összegével.*

Megoldás. Ha létezik $\{a,\, b,\, c\}$ részhalmaz, amelyre $c = a + b$, akkor $c - a = b$.

Tartalomjegyzék

Legyenek az $(n+1)$ elemű halmaz elemei a_i, $i=\overline{1,\, n+1}$, $a_i \in \{1,\, 2,\, \dots,\, 2n\}$ és $a_i < a_j$ bármely $i<j$ esetén. Képezzük a $b_k = a_{n+1} - a_k$, $k=\overline{1,\, n}$ számokat. Ezekre teljesül, hogy $b_i \neq b_j$, bármely $i \neq j$-re és $b_i < a_{n+1}$, bármely $i=\overline{1,\, n}$ esetén. Tehát n darab b_i és $n+1$ darab a_j van amelyek az $\{1,\, 2,\, \dots,\, 2n\}$ halmaz elemei. A feltételek és a skatulya elv szerint létezik i és j úgy, hogy $b_i = a_j$, azaz $a_{n+1} - a_i = a_j$. Innen következik, hogy $a_{n+1} = a_i + a_j$, tehát az $\{a_i,\, a_j,\, a_{n+1}\}$ halmaz teljesíti a kért feltételt.

8. a) Hány nullába végződik a $2001!$?

b) Határozd meg a p prím kitevőjét az $n!$ prímtényezős felbontásában.

Megoldás. a) Az hogy $2001!$ hány nullára végződik pontosan azt jelenti, hogy 10 milyen hatványával osztható. Mivel $10 = 2 \cdot 5$ ezért 2 és 5 hatványait kell vizsgálni. A 2 kitevője $2001!$ törzstényezőkre bontásában

$$\sum_{k\geq 1} \left[\frac{2001}{2^k}\right] = 1000 + 500 + 250 + 125 + 62 + 31 + 15 + 7 + 3 + 1 = 1989.$$

A 5 kitevője $2001!$ törzstényezőkre bontásában

$$\sum_{k\geq 1} \left[\frac{2001}{5^k}\right] = 400 + 80 + 16 + 3 = 499.$$

A 10 kitevője $2001!$ törzstényezőkre bontásában $\min\{499,\, 1989\} = 499$.

b) Azon számok száma melyek oszthatók p-vel 1-től n-ig $\left[\frac{n}{p}\right]$, azok száma melyek oszthatók p^2-tel $\left[\frac{n}{p^2}\right]$, … , azok száma melyek oszthatók p^k-val $\left[\frac{n}{p^k}\right]$. A p kitevője $n!$ prímtényezős felbontásában $\sum\limits_{k\geq 1} \left[\frac{n}{p^k}\right]$. Azon számok amelyek p^2-tel oszthatók 2-vel növelik a kitevőt, de már növeltük eggyel a kitevőt, mert ezek a számok p-vel is oszthatók. Hasonlóan a p^3-nel osztható számok 3-mal növelik a kitevőt, de az összeget növeltük mikor p és p^2-tel oszthatókat számoltuk. Hasonlóan beláthatjuk, hogy magasabb p hatványokra miért szerepel $\left[\frac{n}{p^k}\right]$ az $k\left[\frac{n}{p^k}\right]$ helyett az összegzésben.

9. *Hány olyan nullától különböző és 2000-nél kisebb természetes számokból álló* $(a,\, b)$ *számpár van, amelyre* $a^2 + b^2$ *osztható legyen 49-cel?*

Megoldás. Tegyük fel, hogy $a = 7k + a_1$ és $b = 7l + b_1$ alakú, ahol $a_1, b_1 \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.

$$a^2 + b^2 = 49k^2 + 14a_1k + a_1^2 + 49l^2 + 14b_1l + b_1^2.$$

Ha $a^2 + b^2$ osztható 49-cel akkor osztható 7-tel is. Innen következik, hogy $a_1^2 + b_1^2$ osztható kell legyen 7-tel. Az a_1 és b_1 lehetséges értékei: $0, 1, 4, 9, 16$. Tehát $a_1^2 + b_1^2$ lehetséges értékei: $0, 1, 4, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, 25, 32$, amelyek közül csak 0 osztható 7-tel. Ha $a_1^2 + b_1^2 = 0$ akkor $a_1 = 0$ és $b_1 = 0$. Ekkor $a = 7k$ és $b = 7l$ alakú és $a^2 + b^2 = 49\left(k^2 + l^2\right)$.

2000-ig a 7-tel osztható számok száma $\left[\frac{2000}{7}\right] + 1 = 286$. Tehát az $\left(a, b\right)$ párok száma $286^2 = 81796$.

10. *Bizonyítsd be, hogy* $\frac{\left[(m \cdot n)!\right]^2}{\left(m!\right)^{n+1}\left(n!\right)^{m+1}} \in \mathbb{N}^*$.

Megoldás. Legyen p egy prímszám. A p hatványkitevője az $\left[(m \cdot n)!\right]^2$ prímtényezőkre bontásában: $2\sum_{k\geq 1}\left[\frac{m \cdot n}{p^k}\right]$. A p hatványkitevője az $\left(m!\right)^{n+1}$ prímtényezőkre bontásában: $(n+1)\sum_{k\geq 1}\left[\frac{m}{p^k}\right]$. A p hatványkitevője az $\left(n!\right)^{m+1}$ prímtényezőkre bontásában: $(m+1)\sum_{k\geq 1}\left[\frac{n}{p^k}\right]$.

$$2\sum_{k\geq 1}\left[\frac{mn}{p^k}\right] = \sum_{k=1}^{k_1}\left[\frac{mn}{p^k}\right] + \sum_{k\geq k_1+1}\left[\frac{mn}{p^k}\right] + \sum_{k=1}^{k_2}\left[\frac{mn}{p^k}\right] + \sum_{k\geq k_2+1}\left[\frac{mn}{p^k}\right],$$

ahol $\left[\frac{m}{p^{k_1}}\right] > 0$, $\left[\frac{n}{p^{k_2}}\right] > 0$, $\left[\frac{m}{p^{k_1+1}}\right] = 0$ és $\left[\frac{n}{p^{k_2+1}}\right] = 0$.

$$\sum_{k=1}^{k_1}\left[\frac{mn}{p^k}\right] = \sum_{k=1}^{k_1}\left(\left[\frac{m}{p^k}\right] + \left[\frac{m}{p^k} + \frac{1}{n}\right] + \ldots + \left[\frac{m}{p^k} + \frac{n-1}{n}\right]\right) \geq n\sum_{k=1}^{k_1}\left[\frac{m}{p^k}\right] = n\sum_{k\geq 1}\left[\frac{m}{p^k}\right].$$

Hasonlóan $$\sum_{k=1}^{k_2}\left[\frac{mn}{p^k}\right] \geq m\sum_{k=1}^{k_2}\left[\frac{n}{p^k}\right] = m\sum_{k\geq 1}\left[\frac{n}{p^k}\right].$$

$$\sum_{k\geq k_1+1}\left[\frac{mn}{p^k}\right] = \sum_{k\geq 1}\left[\frac{mn}{p^{k_1+k}}\right] = \sum_{k\geq 1}\left[\frac{m}{p^{k_1}} \cdot \frac{n}{p^k}\right] \geq \sum_{k\geq 1}\left[\frac{n}{p^k}\right], \text{ mivel } \frac{m}{p^{k_1}} > 1.$$

Hasonlóan $$\sum_{k\geq k_2+1}\left[\frac{mn}{p^k}\right] \geq \sum_{k\geq 1}\left[\frac{m}{p^k}\right].$$

Tartalomjegyzék

Tehát $$2\sum_{k\geq 1}\left[\frac{mn}{p^k}\right]\geq n\sum_{k\geq 1}\left[\frac{m}{p^k}\right]+\sum_{k\geq 1}\left[\frac{m}{p^k}\right]+m\sum_{k\geq 1}\left[\frac{n}{p^k}\right]+\sum_{k\geq 1}\left[\frac{n}{p^k}\right]=$$
$$=(n+1)\sum_{k\geq 1}\left[\frac{m}{p^k}\right]+(m+1)\sum_{k\geq 1}\left[\frac{n}{p^k}\right].$$

Tehát p hatvány kitevője a számlálóban nagyobb vagy egyenlő mint a nevezőben, így a számláló osztható a nevezővel, ami azt jelenti, hogy a tört egész szám és mivel pozitív természetes szám.

11. *A* $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^n$ *kifejezés kifejtésében a páratlan rangú kombinációs együtthatók összege 256. Melyik tag tartalmazza* $\frac{1}{x}$*?*

Megoldás. A páratlan együtthatók összege $2^{n-1}=256 \;\Leftrightarrow\; 2^{n-1}=2^8$. Tehát $n=9$.

$$\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^9=\sum_{k=0}^{9}C_9^k x^{\left(3-\frac{k}{3}\right)+\left(-\frac{2k}{3}\right)}=\sum_{k=0}^{9}C_9^k x^{3-k}$$
$$x^{-1}=x^{3-k}\;\Rightarrow\; k=4\,.$$

Az $\frac{1}{x}$-t tartalmazó tag $C_9^4\,\frac{1}{x}$.

12. *Az* $\left(a\sqrt[3]{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^n$ *binom kifejtésében a harmadik és a második tag együtthatójának a különbsége 35. Határozd meg az* a^6 *-t tartalmazó tag együtthatóját.*

Megoldás. A harmadik tag együtthatója C_n^2, a másodiké C_n^1.

$$C_n^2-C_n^1=35\;\Leftrightarrow\;\frac{n!}{2!\,(n-2)!}-\frac{n!}{1!\,(n-1)!}=35\;\Leftrightarrow\;\frac{(n-1)\,n}{2}-n=35\;\Leftrightarrow$$

$n^2-3n-70=0$. Megoldva az egyenletet kapjuk $n=10$.

$$\left(a\sqrt[3]{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^{10}=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k\left(a^{\frac{4}{3}}\right)^{10-k}\left(a^{-\frac{1}{2}}\right)^k=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k a^{\frac{80-11k}{6}}$$

Innen a hatodik tagra kapjuk a következő egyenletet:

$$a^6=a^{\frac{80-11k}{6}}\;\Rightarrow\;11k=44\;\Rightarrow\;k=4\,.$$

Az a^6 -t tartalmazó tag együtthatója C_{10}^4.

13. *Oldd meg a* $C_{n+1}^1+C_{n+3}^3\leq\frac{13}{6}C_{n+2}^2$ *egyenlőtlenséget.* *(Felvételi '99)*

Megoldás. Behelyettesítve a kombinációs együtthatókat az egyenlőtlenségbe kapjuk:

$$\frac{(n+1)!}{1!n!}+\frac{(n+3)!}{3!n!}\leq\frac{13}{6}\frac{(n+2)!}{2!n!}\Leftrightarrow$$

$$1+\frac{(n+2)(n+3)}{6}\leq\frac{13}{6}\frac{(n+2)}{2}\Leftrightarrow 2n^2-3n-2\leq 0\,.$$

Megoldva az egyenlőtlenséget kapjuk, hogy $n\in\left\{0,\,1,\,2\right\}$.

14. *Bizonyítsd be, hogy nem létezik olyan szám, amelyre a* $C_m^0,\,C_m^1,\,C_m^2,\,\ldots\,,\,C_m^m$ *számok fele páros, fele páratlan legyen.*

Megoldás. Ha felírjuk a Pascal-háromszöget a 2-vel való osztási maradék szerint, a II.4. paragrafus 31. feladatában kapott ábrához jutunk. Az első nyolc sorból álló háromszög úgy fog ismétlődni, mint azelőtt az első négy sorból álló háromszög. S ez az ismétlődés folytatódik az így kapott háromszögekre. Megfigyelhető, hogy az így kapott háromszögek 2^k sorból állnak és 2^k-adik sorok bármely k-ra csak 1-gyesekből állnak, 2^k 1-gyest tartalmaznak. Az n kettes számrendszerbeli alakja legyen $\overline{n_1n_2\,\ldots\,n_l}$ (ahol $n_1=1$) és jelöljük a_n-nel az n-edik sorban lévő 1-gyesek számát. Ha n_i, $i\in\left\{2,\,3,\,\ldots\,,\,l\right\}$ számok nem mind nullák, akkor $a_{\overline{n_1n_2\,\ldots\,n_l}}=2\cdot a_{\overline{n_2\,\ldots\,n_l}}$ (1) (a 0 és 1-gyesből álló háromszögek ismétlődése miatt). Ha n_i, $i\in\left\{2,\,3,\,\ldots\,,\,l\right\}$ számok mind nullák, akkor $n=2^l$ és $a_n=2^l$ (2). Tehát az n-edik sorban levő 1-gyesek száma a következőképpen számítható ki: ha l_1 az 1-gyesek száma az n kettes számrendszerbeli alakjában és l_2 az n kettes számrendszerbeli alakjának a végén levő 0-sok száma, akkor $a_n=2^{l_1-1}\cdot 2^{l_2}$. A 2^{l_2} a (2) összefüggés alapján adódik és a 2^{l_1-1} szorzótényező az (1) rekurzió alapján. Igazoljuk, hogy $a_{\overline{n_1n_2\,\ldots\,n_l}}=2\cdot a_{\frac{n}{2}}$, ha n páros, azaz $n_l=0$. Ekkor $\overline{n_1n_2\,\ldots\,n_l}=\frac{n}{2}$. Ha l_1 és l_2 megfelel a fenti jelöléseknek és n kettes számrendszerbeli alakja legalább két 1-gyest tartalmaz, akkor $a_n=2a_{\overline{n_2\,\ldots\,n_l}}=2\cdot 2^{l_1-2}\cdot 2^{l_2}=2^{l_1+l_2-1}$ és $a_{\frac{n}{2}}=2^{l_1-1}\cdot 2^{l_2-1}=2^{l_1+l_2-2}$. Ha $n=1\underbrace{0\,\ldots\,0}_{l-1}$ akkor $a_n=2^{l-1}$ és $a_{\frac{n}{2}}=2^{l-2}$. Tehát $a_n=2\cdot a_{\frac{n}{2}}$, ha n páros. Tegyük fel, hogy az n-edik sorig nem fordult elő, hogy a $C_m^0,\,C_m^1,\,C_m^2,\,\ldots\,,\,C_m^m$ számok fele páros, fele páratlan legyen és ez először az n-edik sorban fordul elő. A C_{n-1}^k, $k\in\left\{0,\,1,\,\ldots\,,\,n-1\right\}$ számok száma n páros. De ha n páros, akkor az $\frac{n}{2}$ sorban pontosan fele annyi páratlan (és páros) szám van, mint az n-edik sorban. Tehát az $\frac{n}{2}$-edik sorban levő kombinációs együtthatók fele páratlan és fele páros, ez ellentmond a feltételezésünknek.

15. *Bizonyítsd be, hogy ha* $a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k b_k$ *bármely* $n \in \mathbb{N}$ *esetén, akkor* $b_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k a_k$ *bármely* $n \in \mathbb{N}$ *esetén.*

Megoldás. Az a_n -et behelyettesítjük a bizonyítandó egyenlőtlenségbe:

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k a_k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \left(\sum_{l=0}^{n} (-1)^l C_n^l a_l \right)$$

A b_k együtthatója a fenti egyenlőség jobb oldalán a következő:

$$(-1)^k C_n^k (-1)^k C_k^k + (-1)^{k+1} C_n^{k+1} (-1)^k C_{k+1}^k + \ldots + (-1)^{n-k} C_n^n (-1)^k C_n^k =$$

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{k!}{k!0!} - \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \cdot \frac{(k+1)!}{(k+1)!0!} + \ldots + \frac{n!}{n!0!} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} =$$

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \left(\frac{(n-k)!}{0!(n-k)!} - \frac{(n-k)!}{1!(n-k)!} + \ldots + (-1)^{n-k} \frac{(n-k)!}{(n-k)!0!} \right) =$$

$$= C_n^k \left(C_{n-k}^0 - C_{n-k}^1 + \ldots + (-1)^{n-k} C_{n-k}^{n-k} \right)$$

Ha $k \neq n$ akkor b_k együtthatója nulla. Ha $k = n$ akkor b_n együtthatója 1. Tehát az egyenlőség igaz, ami azt jelenti, hogy a bizonyítandó összefüggés igaz.

16. *Bizonyítsd be, hogy a* $\dfrac{(2n)!}{n!(n+1)!}$ *természetes szám.*

Megoldás. Ha K_n^p a p prím hatványkitevője $n!$ prímtényezős felbontásában, akkor $K_{2n}^p = \sum_{k \geq 1} \left[\frac{2n}{p^k} \right]$, $K_n^p = \sum_{k \geq 1} \left[\frac{n}{p^k} \right]$ és $K_{n+1}^p = \sum_{k \geq 1} \left[\frac{n+1}{p^k} \right]$. A legkisebb prím 2, ezért $p \geq 2$. Ha $\left[\frac{n+1}{p^k} \right] = \left[\frac{n}{p^k} \right]$ akkor $\left[\frac{n+1}{p^k} \right] + \left[\frac{n}{p^k} \right] = 2 \cdot \left[\frac{n}{p^k} \right] \leq \left[\frac{2n}{p^k} \right]$. Ha $\left[\frac{n+1}{p^k} \right] > \left[\frac{n}{p^k} \right]$ akkor $\frac{n+1}{p^k} - \frac{n}{p^k} = \frac{1}{p^k} \leq \frac{1}{2}$. Ebből következik, hogy $\left[\frac{n+1}{p^k} \right] = \left[\frac{n}{p^k} \right] + 1$. Tehát

$$\left[\frac{n}{p^k} \right] + \frac{p^k - 1}{p^k} \leq \frac{n}{p^k} < \left[\frac{n}{p^k} \right] + 1 \Leftrightarrow 2\left[\frac{n}{p^k} \right] + \frac{2p^k - 2}{p^k} \leq \frac{2n}{p^k} < 2\left[\frac{n}{p^k} \right] + 2.$$

Továbbá $\frac{2p^k - 2}{p^k} = 1 + \frac{p^k - 2}{p^k} \geq 1$, mivel $p^k \geq 2$. Tehát

$$2\left[\frac{n}{p^k} \right] + 1 \leq \frac{2n}{p^k} < 2\left[\frac{n}{p^k} \right] + 2 \Leftrightarrow \left[\frac{2n}{p^k} \right] = 2\left[\frac{n}{p^k} \right] + 1 = \left[\frac{n}{p^k} \right] + \left[\frac{n+1}{p^k} \right].$$

Végül a két esetet összegezve k szerint kapjuk, hogy

$$\sum_{k\geq 1}\left[\frac{n+1}{p^k}\right]+\sum_{k\geq 1}\left[\frac{n}{p^k}\right]\leq \sum_{k\geq 1}\left[\frac{2n}{p^k}\right].$$

Ez azt jelenti, hogy a számlálóban a p hatványkitevője nem kisebb mint a nevezőben, tehát a tört egész és mivel pozitív természetes szám.

17. *Számítsd ki az* $x_n=\frac{1}{C_n^0}+\frac{1}{C_n^1}+\ldots+\frac{1}{C_n^n}$ *szám egész részét!*

Megoldás. Kiszámítva az első két tagot kapjuk: $x_1=2$ és $x_2=\frac{5}{2}$. Megvizsgáljuk az általános tagot: $\frac{1}{C_n^k}=\frac{1}{C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1}}\leq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{C_{n-1}^k}+\frac{1}{C_{n-1}^{k-1}}\right)$. Az egyenlőtlenséget a számtani-harmonikus egyenlőtlenség alapján kapjuk. Feltételezzük, hogy $2\leq x_{n-1}<3$. A matematikai indukcióval igazoljuk ezt n-re.

$$x_n=2+\ldots+\frac{1}{C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1}}+\ldots+\frac{1}{C_{n-1}^{n-1}+C_{n-1}^{n-2}}\leq 2-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{C_{n-1}^0}+\frac{1}{C_{n-1}^1}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{C_{n-1}^0}+\frac{1}{C_{n-1}^1}+\ldots+\frac{1}{C_{n-1}^{n-2}}+\frac{1}{C_{n-1}^{n-1}}\right)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}x_{n-1}.$$ Tehát

$$x_n\leq\frac{3}{2}+\frac{1}{2}x_{n-1}<\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=3.$$

Mivel $C_n^0=C_n^n=1$, ezért $x_n\geq 2$. Tehát $2\leq x_n<3$, ami azt jelenti, hogy $[x_n]=2$ bármely $n\geq 1$-re.

18. *Bizonyítsd be, hogy ha az* $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+1$ *függvény összes gyöke valós és* $a_i\geq 0$ *bármely* $i=\overline{1,\,n}$ *esetén, akkor* $f(2)\geq 3^n$.

Megoldás. Legyen $f(x)=(x-(-x_1))\cdot\ldots\cdot(x-(-x_n))=(x+x_1)\cdot\ldots\cdot(x+x_n)$.

Ha $x>0$ akkor $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+1>1$. Tehát minden gyök negatív, így $x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n$ pozitív számok. A Vieté összefüggések alapján

$$x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_n=1$$

$$\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n}x_{i_1}x_{i_2}\cdot\ldots\cdot x_{i_k}=a_k,\ \forall\, k=\overline{1,\,n-1}$$

Ilyen $x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}$ szorzat C_n^k darab van. Alkalmazva a számtani-mértani egyenlőtlenséget kapjuk:

$$\frac{\sum\limits_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n}x_{i_1}x_{i_2}\cdot\ldots\cdot x_{i_k}}{C_n^k}\geq\left(\prod_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n}x_{i_1}x_{i_2}\cdot\ldots\cdot x_{i_k}\right)^{\frac{1}{C_b^k}}$$

Mivel x_j tag C_{n-1}^{k-1} van a szorzatban, bármely $j = \overline{1,\ n}$, ezért

$$\left(\prod_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} x_{i_1} x_{i_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_k} \right)^{\frac{1}{C_b^k}} = \left(x_1 x_2 \ \ldots \ x_n \right)^{\frac{C_{n-1}^{k-1}}{C_n^k}} = 1\,.$$

Tehát $\sum\limits_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} x_{i_1} x_{i_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_k} = C_n^k$, $\forall\, k = \overline{1,\ n}$. Így ha $x > 0$, akkor

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + 1 \ge \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k = (1+x)^n\,.$$

$x = 2$-re kapjuk, hogy $f(2) \ge (1+2)^n = 3^n$.

19. *Bizonyítsd be, hogy létezik a kettes számrendszerben olyan tízjegyű szám, amely tartalmaz minden háromjegyű bináris számot.*

Megoldás. Ilyen bináris szám a 1110100011. Ellenőrizzük, hogy része-e minden háromjegyű bináris szám. A háromjegyű bináris számok a következők: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111. Ezeket tartalmazza a 1110100011 (a következő számokban aláhuztuk a megfelelő számhármasokat $11101\underline{000}11$, $111010\underline{001}1$, $111\underline{010}0011$, $1110100\underline{011}$, $1110\underline{100}011$, $11\underline{101}00011$, $1\underline{110}100011$ és $\underline{111}0100011$). Ilyen szám még az 1100010111.

20. *Egyszerűsítsd a* $\dfrac{C_n^k - C_{n-2}^k - C_{n-2}^{k-2}}{C_{n-2}^{k-1}}$ *törtet, ahol* $4 \le k+2 \le n$. *(Felvételi '99)*

Megoldás. $$\frac{C_n^k - C_{n-2}^k - C_{n-2}^{k-2}}{C_{n-2}^{k-1}} = \frac{\left(C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}\right) - C_{n-2}^k - C_{n-2}^{k-2}}{C_{n-2}^{k-1}} =$$

$$= \frac{C_{n-2}^k + 2C_{n-2}^{k-1} + C_{n-2}^{k-2} - C_{n-2}^k - C_{n-2}^{k-2}}{C_{n-2}^{k-1}} = \frac{2C_{n-2}^{k-1}}{C_{n-2}^{k-1}} = 2\,.$$

21. *Határozd meg a* b^2*-t tartalmazó tagot a* $\left(\sqrt{a} - \sqrt[3]{b}\right)^n$ *binom kifejtésében tudva, hogy* n *az a legnagyobb természetes szám, amely teljesíti a* $\log_{\frac{1}{3}} n + \log_{\frac{n}{3}} n > 0$ *egyenlőtlenséget.* *(Felvételi '99)*

Megoldás. $\log_{\frac{1}{3}} n + \log_{\frac{n}{3}} n > 0 \ \ (n \ne 3)$, $\quad \dfrac{\log_3 n}{\log_3 \dfrac{1}{3}} + \dfrac{\log_3 n}{\log_3 \dfrac{n}{3}} > 0$,

$$\left(-1 + \frac{1}{-1 + \log_3 n} \right) \log_3 n > 0\,,\ \left(\frac{2 - \log_3 n}{-1 + \log_3 n} \right) \log_3 n > 0$$

Első eset, ha $n < 3$ $\left(n \in \{1,\ 2\}\right)$. Ha $n = 1$, akkor azt kapjuk, hogy $0 > 0$, ami nem igaz, tehát $n \ne 1$. Ha $n = 2$ akkor kapjuk, hogy $\left(-2 + \log_3 2\right) \log_3 2 > 0 \ \Leftrightarrow$ $\log_3 2 \cdot \log_3 \dfrac{2}{9} > 0$. De $\log_3 2 > 0$ és $\log_3 \dfrac{2}{9} < 0$, innen $\log_3 2 \cdot \log_3 \dfrac{2}{9} < 0$, tehát $n \ne 2$. Második eset, ha $n > 3$. Szorozva az egyenlőtlenséget $-1 + \log_3 n$-nel, ami pozitív, kapjuk $\log_3 n\left(-\log_3 n+2\right)>0$ vagyis $\log_3 n\cdot\log_3\dfrac{9}{n}>0$. De $\log_3 n>0$, ezért $\log_3\dfrac{9}{n}>0$ kell teljesüljön. Tehát $n\in\left\{4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\right\}$, így a keresett érték $n=8$. Tehát $\left(\sqrt{a}-\sqrt[3]{b}\right)^8=\sum_{k=0}^{8}C_8^k a^{\frac{8-k}{2}}b^{\frac{k}{3}}$. Ahhoz, hogy egy tag tartalmazza b^2-t, a b kitevőjének 2 kell legyen, azaz $\dfrac{k}{3}=2$, tehát $k=6$. Végül a b^2-t tartalmazó tag $C_8^6ab^2$.

22. *Legyen a* $\left(\dfrac{\sqrt{2^x}}{\sqrt[16]{8}}+\dfrac{\sqrt[16]{32}}{\sqrt{2^x}}\right)^n$ *binom, ahol* $n\in\mathbb{N}^*$ *és* $x\in\mathbb{R}$.

a) *Határozd meg az* n*-et úgy, hogy* C_n^0, $\dfrac{C_n^1}{2}$, $\dfrac{C_n^2}{4}$ *egy számtani haladvány egymásutáni tagjai legyenek.*

b) *Ellenőrizzük, hogy* $n=8$*-ra létezik-e olyan* x *amelyre a hatodik és a negyedik tag különbsége a binom kifejtéséből 56 legyen.* *(Érettségire javasolt feladat '99)*

Megoldás. a) Ha C_n^0, $\dfrac{C_n^1}{2}$, $\dfrac{C_n^2}{4}$ egy számtani haladvány egymás utáni tagjai, akkor $\dfrac{C_n^1}{2}-C_n^0=\dfrac{C_n^2}{4}-\dfrac{C_n^1}{2}$. Innen $\dfrac{n}{2}-1=\dfrac{n(n-1)}{8}-\dfrac{n}{2}\Leftrightarrow n-1=\dfrac{n(n-1)}{8}\Leftrightarrow$ $(n-1)(n-8)=0$. Tehát kapjuk, hogy a gyökök $n_1=1$ és $n_2=8$, de $n\geq 2$. Így csak $n=8$ eset állhat fenn.

b) A hatodik tag: $C_8^5\left(\dfrac{\sqrt{2^x}}{\sqrt[16]{8}}\right)^3\left(\dfrac{\sqrt[16]{32}}{\sqrt{2^x}}\right)^5$, a negyedik tag $C_8^3\left(\dfrac{\sqrt{2^x}}{\sqrt[16]{8}}\right)^5\left(\dfrac{\sqrt[16]{32}}{\sqrt{2^x}}\right)^3$. Felírva a különbséget kapjuk, hogy $C_8^5\left(\dfrac{2^{\frac{3x}{2}}}{2^{\frac{9}{16}}}\cdot\dfrac{2^{\frac{25}{16}}}{2^{\frac{5x}{2}}}-\dfrac{2^{\frac{5x}{2}}}{2^{\frac{15}{16}}}\cdot\dfrac{2^{\frac{15}{16}}}{2^{\frac{3x}{2}}}\right)=56$. Elvégezve az egyszerűsítéseket $2\cdot 2^{-x}-2^x=1\Leftrightarrow 2^{2x}+2^x-2=0$. Az egyenlet gyöke $x=2$.

23. *Kiválasztunk öt rácspontot a síkból. Bizonyítsd be, hogy ezek a pontok által meghatározott szakaszok tartalmaznak még rácspontot a végpontokon kívül.*

Megoldás. Legyenek a pontok koordinátái $M_i\left(x_i,\ y_i\right)$, $i=\overline{1,\ 5}$. Az M_iM_j szakasz felezőpontja $\left(\dfrac{x_i+x_j}{2},\ \dfrac{y_i+y_j}{2}\right)$. Négy eset lehetséges a koordináták paritása szerint: 1. x_i és y_i páros; 2. x_i és y_i páratlan; 3. x_i páros és y_i páratlan; 4. x_i páratlan és y_i páros. Az öt pont közül kettő egy csoportba kerül a paritás szerint s ezek felezőpontja egész koordinátájú, tehát rács pont.

24. *Bizonyítsd be, hogy* $\sum_{k=0}^{m}(-1)^k \dfrac{1}{2k+1}\mathrm{C}_m^k = \dfrac{m!2^m}{(2m+1)!}$.

Megoldás. Ha az $\left(1-x^2\right)^m = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_m^k x^{2k}$ azonosságot integráljuk a $(0,1)$ intervallumon, akkor a $\sum_{k=0}^{m}(-1)^k \dfrac{1}{2k+1}\mathrm{C}_m^k = \int_0^1 \left(1-x^2\right)^m dx$ egyenlőséget kapjuk. Az integrált rekurzióval számíthatjuk ki és így a $\sum_{k=0}^{m}(-1)^k \dfrac{1}{2k+1}\mathrm{C}_m^k = \dfrac{m!\ 2^m}{(2m+1)!!}$ eredményhez jutunk. A feladat X. osztályos módszerrel is megoldható ha felhasználjuk az „Összefoglaló gyakorlatok és feladatok” 2.6. paragrafusának 25. feladatát és megfelelően megválasztjuk a p_k értékeket.

25. *Egy páncélszekrény kinyitható, ha az 1, 2, 3 és 4 számokat helyes sorrendbe írjuk be. A páncélszekrény zárja megjegyzi az utoljára beírt négy számjegyet, és ha ezek sorrendje helyes, akkor a páncélszekrény kinyílik. Hány számjegyet kell beírnunk, ha nem tudjuk a kódot, és ki akarjuk nyitni?*

Megoldás. Az $1, 2, 3$ és 4 számok permutációit egymásba kell fűzni úgy, hogy a lehető legkevesebb számjegyet használjunk fel. A legrövidebb ilyen sorozat 33 számjegyet tartalmaz és egy lehetőség a következő:

$$123412314231243121342132413214321.$$

26. *Bizonyítsd be, hogy* $2^{n^2} \le \left(\prod_{k=0}^{n} C_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}}\right) \le 3^{n^2}$, *ha* $n \ge 7$.

Megoldás. $a_n = \prod_{k=0}^{n} C_n^k = \dfrac{(n!)^{n-1}}{\left[1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot \ldots \cdot (n-1)!\right]^2}$. Mivel $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(n+1)^n}{n!}$ igazolható, hogy $a_{n+1} > 2^{n+1}a_n$ és $a_{n+1} < 3^n a_n$. Ezekből az egyenlőtlenségekből indukcióval igazolhatjuk, hogy $2^{\frac{n^2}{2}} < a_n < 3^{\frac{n^2}{2}}$, ami ekvivalens a bizonyítandó egyenlőtlenséggel.

2.5. Térgeometria (352. oldal)

1. *Bizonyítsd, hogy ha* e*-vel,* cs*-vel,* l*-lel rendre egy konvex poliéder éleinek, csúcsainak és lapjainak számát jelöltük, akkor* $cs - e + l = 2$.

1. megoldás. Osszuk fel a poliéder minden oldallapját háromszögekre, az átlók segítségével. A háromszögek számát jelöljük H-val, és jelölje E a háromszögek oldalainak számát. Ha a poliéder egyik lapja egy n oldalú sokszög, akkor a lap $n-2$ háromszögre osztható fel $n-3$ átló segítségével. Ha lapnak tekintjük a háromszögeket, és az oldalaikat éleknek, akkor egy n oldalú lap felbontásával $n-3$ új lap és $n-3$ él keletkezik, így $cs - e + l = cs - E + H$, mivel a lapok és az élek számának különbsége nem változik. A háromszög-lapú poliédert levetítjük egy síkba úgy, hogy ne kerüljön két csúcs egymásba. Ez a sík létezik, mivel a poliéder csúcsainak száma véges, és ezek véges számú egyenest határoznak meg. Mivel a térben végtelen sok olyan sík van, amelyek páronként nem párhuzamosak egymással, kiválasztható egy olyan, amelyik nem merőleges egyik olyan egyenesre sem amelyeket a csúcsok határoznak meg. Ezzel az eljárással két csúcs nem kerülhet egymásra a vetítés során. A vetítés során olyan konvex sokszöget kapunk, amelynek vagy a határán, vagy a belsejében vannak a csúcsok vetületei. Kettévágjuk a poliédert, és levetítjük az előbbi síkra. Így két kongruens sokszöget kapunk (ugyanazon csúcsok vetületéből származnak). A sokszögek nem metszik egymást. Legyen a sokszögek oldalszáma k, az egyik sokszög belsejében levő pontok száma b_1, míg a másik sokszög belsejében levő pontok száma b_2. Az első sokszög $(k-2)+2b_1$ háromszöget, a másik pedig $(k-2)+2b_2$ háromszöget tartalmaz.

Tehát összesen $H=2(k-2)+2b_1+2b_2=2cs-4$. A poliéderben minden él két háromszöget határoz meg, innen következik, hogy $2H=3E$, tehát $H=\frac{3}{2}E=3cs-6$, és végül $cs-E+H=cs-3cs+6+2cs-4=2$, vagyis $cs-e+l=2$.

2. Megoldás. Előbb igazoljuk a következő segédtételt:

Segédtétel. Minden egyszerű sokszöghálóban $cs-e+l=1$, ahol egyszerű sokszögháló alatt egy tetszőleges $[P]$ sokszöget értünk, konvex sokszögekre való valamely $[P]=[P_1]\cup\ldots\cup[P_l]$ felbontásával együtt. A $[P_i]$ sokszöglapokat a háló lapjainak nevezzük, és l a lapok száma, a lapok csúcsait és oldalait a háló csúcsainak, illetve éleinek nevezzük, számukat cs-vel, illetve e-vel jelöljük. Az ábrán például $cs=8$, $e=11$ és $l=4$.

Észrevesszük, hogy ha a sokszög konvex sokszöglapokra való felbontásában szerepel legalább négyoldalú sokszög, akkor ebben a sokszögben egy átló meghúzásával egy új hálót kapunk, anélkül, hogy a csúcsok száma változna, viszont a lapok és az élek száma növekszik egyel, tehát egy ilyen átló meghúzásával a $cs-e+l$ összeg értéke állandó marad. Így elégséges a tételt abban az esetben igazolni, ha minden $[P_i]$ konvex sokszög háromszög.

Matematikai indukciót alkalmazunk a lapokra nézve.

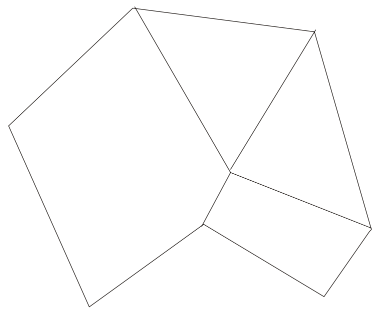
Ha $l=1$, akkor egy háromszög van, tehát $cs=3$, $e=3$ és $cs-e+l=1$, vagyis az állítás igaz.

Feltételezzük, hogy a tétel állítása igaz minden olyan hálóra, amelyben a lapok száma kisebb, mint l. Tekintjük a hálónak egy olyan háromszöglapját, amelynek egyik oldala megegyezik az eredeti $[P]$ sokszöglap egyik oldalával. Két esetet különböztetünk meg:

I. eset. Ha a háromszög harmadik csúcsa a $[P]$ sokszög belsejében helyezkedik el, akkor eltávolítva háromszöglap belsejét, és a $[P]$ sokszöggel közös élét, egy olyan hálót kapunk, amelyben $l-1$ lap van, tehát igaz az indukciós feltevés, vagyis

$$cs-(e-1)+(l-1)=1,$$

ahonnan következik az állítás l-re is.



II. eset. Ha a háromszög harmadik csúcsa a $[P]$ sokszög valamelyik oldalán található, akkor eltávolítva a háromszög belsejét, a közös oldallal együtt, két olyan, $[P']$ és $[P'']$ sokszöglapot kapunk, amelyekre igaz az indukciós feltevés, tehát

$$cs' - e' + l' = 1 \text{ és } cs'' - e'' + l'' = 1,$$

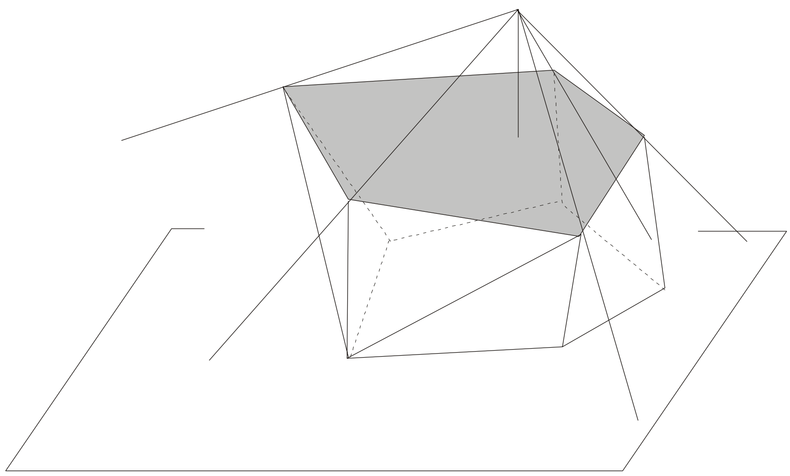
valamint

$$cs' + cs'' = cs + 2\,,\ e' + e'' = e + 1,\ l' + l'' = l\,,$$

és ezeket az összefüggéseket felhasználva, kapjuk, hogy $cs - e + l = 1$.

Ezzel a segédtételt igazoltuk.

Rátérünk a feladat igazolására. Tekintjük a poliéder egy lapját, és egy azzal párhuzamos síkot úgy, hogy a poliéder kiemelt lapja, és a sík közötti részben legyen a poliéder (lásd ábra).



Most felveszünk egy pontot a térben, a kiemelt lap "felett" úgy, hogy vetülete a lapra annak belsejében legyen. Ezt a pontot elég "közel" véve, és elkészítve a poliéder "lenyomatát" a síkra, egy olyan sokszöghálót kapunk a síkban, amelynek egyel kevesebb lapja van (a kiválasztott lapot elveszítjük), mint a poliédernek, viszont csúcsainak és éleinek száma megegyezik a poliéderével. Tehát a segédtétel szerint

Tartalomjegyzék

$$cs - e + (l - 1) = 1,$$

vagyis $cs - e + l = 2$.

2. *Határozd meg egy kocka legnagyobb területű síkmetszetének területét.*

Megoldás. A síkmetszet alakja lehet háromszög, négyszög ötszög vagy hatszög. Az esetek megvizsgálásával (és a metsző sík elmozdításával) igazolható, hogy a legnagyobb területű síkmetszetet akkor kapjuk, ha ez a metszet áthalad két szembefekvő lap egymással párhuzamos átlóján. Ebben az esetben a terület $a^2\sqrt{2}$, ahol a a kocka élének hossza.

3. *Az $ABCDA'B'C'D'$ kocka BC, DD' és $A'B'$ élein (B-től C felé, D-től D' felé és A'-től B' felé) egyszerre indul egy-egy mozgó pont, azonos sebességgel.*

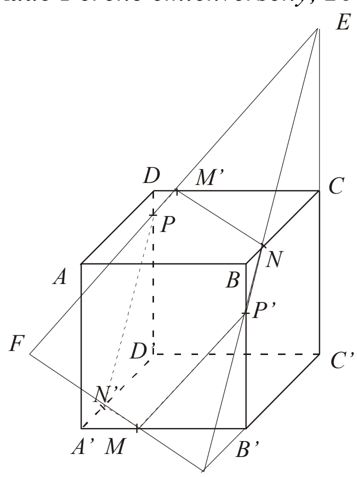
a) *Szerkeszd meg az általuk meghatározott síkmetszetet.*

b) *Bizonyítsd be, hogy a metszet szembefekvő éleinek felezőpontjait összekötő szakaszok összefutóak.*

c) *Határozd meg az előbbi összefutási pont mértani helyét.*

(Radó Ferenc emlékverseny, 2000)

Megoldás. a) Legyen $M \in A'B'$, $N \in BC$ és $P \in DD'$ a mozgó pontok. Legyenek $M' \in DC$, $N' \in A'D'$, $P' \in BB'$ úgy, hogy $DM' = DP$, $N' \in A'D'$, $BP' = BN$.



A $BCC'B'$ síkban $NP \cap B'C' = \{E\}$. Ebben az esetben $EB'P'_{\Delta} \sim NBP'_{\Delta}$, tehát

$$\frac{EB'}{BN} = \frac{B'P'}{BP'},$$

ebből következik, hogy $EB' = B'P'$. Felhasználva, hogy $MB' = EB'$, következik, hogy $m(EMB'\angle) = 45^\circ$, és mivel $m(N'MA'\angle) = 45^\circ$, az N', M és E pontok kollineárisak. Tehát $MN' \cap NP' = \{E\}$.

Hasonlóan bizonyítható, hogy $M'P \cap NP' \neq \varnothing$ és $M'P \cap MN' \neq \varnothing$, tehát M, P', N, M', P és N' egy síkban vannak, és az M, N és P pontok által meghatározott síkmetszet az $MP'NM'PN'$ hatszög.

b) Legyen $\{F\} = MN' \cap M'P$ és $\{G\} = M'P \cap NP'$. Az EFG háromszög egyenlő oldalú, valamint

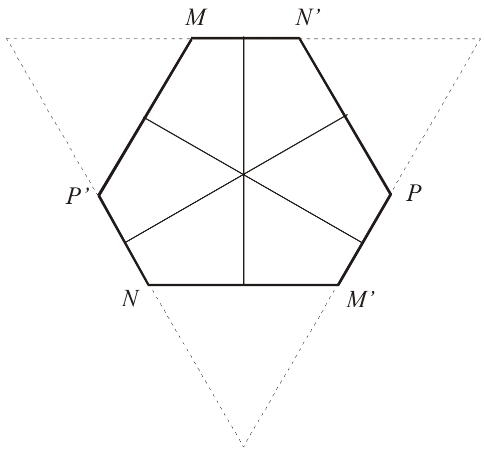
$$FN' = FP = M'G = GN = P'E = EM.$$

A szemben fekvő oldalakat összekötő egyenesek az EFG háromszög oldalfelezői, így összefutóak, és a metszéspont az EFG háromszög súlypontja.

c) Ha kifejezzük az összefutási pont helyzetvektorát, belátható, hogy a keresett mértani hely egy szakasz.

4. *Bizonyítsd be, hogy egy n oldalú konvex sokszög pontosan akkor bontható fel paralelogrammákra, ha centrálszimmetrikus.*

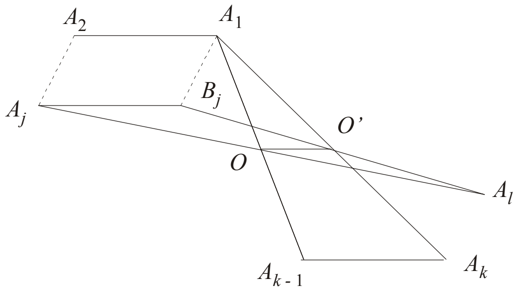
Tartalomjegyzék



Megoldás. Tegyük fel, hogy egy n oldalú konvex sokszög centrálszimmetrikus. Ekkor a sokszög oldalszáma páros.

Ha $n=4$, akkor a sokszög paralelogramma, mert az átlók felezik egymást.

Ha $n>4$, akkor a következő eljárással csökkenthetjük az oldalszámot: Mivel a sokszög centrálszimmetrikus, minden oldalnak megfelel egy másik, vele párhuzamos oldal. Az $A_1A_2...A_n$ sokszög A_1A_2 és A_2A_3 oldalaiból kiindulva, megszerkesztjük az $A_1A_2A_3B_3$ paralelogrammát, majd ugyanezt a műveletet megismételjük a B_3A_3 és A_3A_4 oldalakra. Az eljárás akkor ér véget, amikor egy B_k csúcs egybeesik egy A_k csúccsal, és ez az A_k pont az A_2 centrálszimmetrikusa. Az $A_1B_3B_4...B_kA_{k+1}...A_n$ sokszög konvex, és centrálszimmetrikus.



Legyen O az eredeti szimmetria-középpont. Az új szimmetria-középpont O', amelyre igaz, hogy $OO' \parallel A_1A_2$ és $OO' = \frac{1}{2}A_1A_2$. Az $A_lA_jB_j$ háromszögben OO' középvonal, ezért $OO' \parallel A_jB_j \parallel A_1A_2$ és $OO' = \frac{1}{2}A_jB_j = \frac{1}{2}A_1A_2$. Ez az összefüggés igaz minden $j \in \{3,...,k-2\}$ értékre. Az A_1 pontnak az O' pontra vonatkozó szimmetrikusa A_k lesz. Matematikai indukciót alkalmazva, $n=4$-re láttuk, hogy a állítás igaz, elfogadjuk, hogy n-re igaz az állítás, és igazoljuk $n+2$-re. $n+2$-re viszont elvégeztük a fenti oldalszámcsökkentést, tehát, mivel az állítás n-re igaz, $n+2$-re is igaz.

Másik irányban, ha az $A_1A_2...A_n$ konvex sokszög felbontható paralelogrammákra, akkor minden oldalnak van egy megfelelője, amellyel párhuzamos, tehát n páros. $n=4$-re paralelogrammát kapunk, ami centrálszimmetrikus. Először igazoljuk, hogy minden olyan konvex sokszög felbontható paralelogrammákra, amelynek minden oldalával létezik egy másik párhuzamos oldala. Tegyük fel, hogy n-re (n páros) elvégezhető a felbontás. $n+2$ csúcs esetén elvégezzük a fent leírt oldalszámcsökkentést, ami által olyan n oldalú sokszöget kapunk, amely konvex és megőrzi azt a tulajdonságot, hogy létezik minden oldalával párhuzamos oldal. A matematikai indukció elve szerint az $n+2$ oldalszámú sokszög is felbontható paralelogrammákra.

Most tegyük fel, hogy minden olyan n oldalú konvex sokszög, amely felbontható paralelogrammákra, centrálszimmetrikus. Igazoljuk a tulajdonság érvényességét $n+2$ -re is.

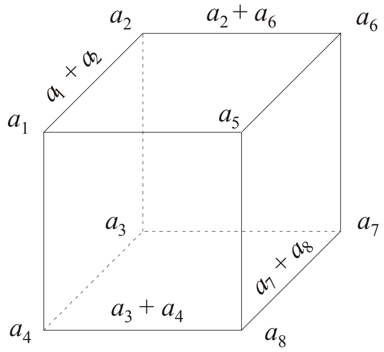
Tetszőleges $n+2$ oldalú konvex sokszög esetén (amely rendelkezik a fenti tulajdonsággal) elvégezzük az előbbi oldalszámcsökkentést. Az új, n oldalú sokszög konvex, és paralelogrammákra bontható, tehát centrálszimmetrikus. Az $n+2$ oldalú sokszög is centrálszimmetrikus, mivel a szimmetria-középpont fordított módon megszerkeszthető, mint ahogy fentebb megszerkesztettük az új szimmetria-középpontot.

5. *Fel lehet-e írni az* $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ *számok közül nyolcat egy kocka csúcsaira úgy, hogy a párhuzamos éleken ugyanaz legyen az összeg?*

Megoldás. Tegyük fel, hogy felírtunk a számok közül nyolcat a kocka csúcsaira. Ha összeadjuk a párhuzamos oldalakon keletkező összegeket, akkor a

$$4s_1 = \sum_{i=1}^{8} a_i \,,\; 4s_2 \sum_{i=1}^{8} a_i \,,\; 4s_3 = \sum_{i=1}^{8} a_i$$

összefüggéseket kapjuk. Tehát $s_1 = s_2 = s_3$, és ebből következik, hogy $a_1 + a_2 = s_1 = a_1 + a_4 = s_2$, ami az $a_2 = a_4$ egyenlőséghez vezet, ez pedig ellentmondás, mert a felírt számok páronként különbözőek. Tehát nem lehet felírni 8 különböző számot a kért módon.



6. *Bizonyítsd be, hogy ha egy gúla oldalélei kongruensek, akkor az alap körbeírható és a csúcsnak az alapsíkjára eső vetülete a köréírt kör középpontjába kerül.*

Megoldás. Legyen a gúla $VA_1A_2...A_n$, ahol $VA_1 = VA_2 = ... = VA_n$, valamint a V pont vetülete az $A_1A_2...A_n$ síkra legyen V'. Az A_iVV' háromszög a V' csúcsban derékszögű, minden $i \in \{1, ..., n\}$ esetén, tehát írható, hogy

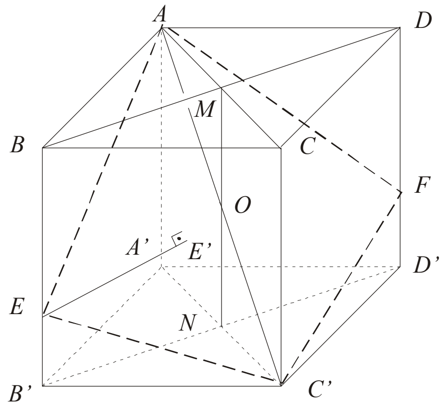
Tartalomjegyzék

$$A_iV' = \sqrt{A_iV^2 - VV'^2}\ ,\ \forall\, i \in \left\{1,\ ...,\ n\right\}.$$

Az előbbi összefüggés alapján $A_iV' = R$, minden $i \in \left\{1,\ ...,\ n\right\}$ értékre, tehát az $A_1A_2...A_n$ sokszög körbeírható, és a sokszög köré írt kör középpontja pontosan a V' pont.

7. *Egy a élhosszúságú kocka egyik testátlójára illeszkedő síkmetszetek területe közül melyik minimális?*

1. megoldás



A szimmetria miatt $T_{AEC'F} = 2T_{AEC}$. Legyen $BE = x$, valamint a B pont vetülete az AC szakaszra M, és a B' pont vetülete az $A'C'$ szakaszra N. Az $MN \cap AC' = \{O\}$ pont a kocka szimmetria-középpontja. Legyen E' az E vetülete az ACC' síkra. Az E' pontból merőlegest húzunk az AC'-re. A merőleges talppontja pontosan az M pont lesz. A három merőleges tétele alapján $EM \perp AC'$. Az $EM^2 = EE'^2 + E'M^2$ összefüggés alapján, mivel EE' állandó ($BB' \,||\, \left(ACC'\right)$), az EM akkor minimális, ha $E'M$ minimális. Viszont, ha E a BB' felezőpontja, akkor $E'M = 0$, tehát az $AEC'F$ négyszög területe akkor minimális, ha $BE = EB'$ és $DF = FD'$.

2. megoldás. Legyen E a BB' felezőpontja. Ha O az AC' felezőpontja, akkor $EO \perp BB'$ és $EO \perp AC'$. Tehát EO a BB' és AC' közös merőlegese, így az EO szakasz hossza a legrövidebb azon szakaszok közül, melyek egyik végpontja a BB' egyenesen, a másik pedig az AC' egyenesen van.

$EO \perp BB'$, mert $EO \,||\, \left(ABCD\right)$ és $BB' \perp \left(ABCD\right)$, továbbá $EO \perp AC'$, mivel $AC' \subset \left(ACC'\right)$ és $EO \perp \left(ACC'\right)$.

8. *Létezik-e olyan poliéder, amely lapjainak oldalszámai páronként különbözőek?*

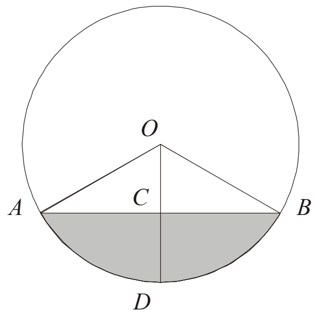
Megoldás. A legkevesebb oldallal rendelkező lapnak legalább 3 oldala van. Ha l a lapok száma, akkor a legtöbb oldallal rendelkező lapnak legalább $l+2$ oldala van.

Tartalomjegyzék

Tehát ez a lap szomszédos kellene legyen $l+2$ lappal, de a poliédernek csak l lapja van. Tehát nem létezik ilyen tulajdonságú poliéder.

9. *Tömör henger a tengelyével párhuzamosan fekve úszik a vízen úgy, hogy félsugárnyit merül a vízbe. Mekkora a sűrűsége?*

Megoldás. A feltétel alapján $CD = OC = \frac{r}{2}$, és az OBC háromszög derékszögű. Mivel $OC = \frac{1}{2}OB$, következik, hogy $m(CBO\angle) = 30°$, $m(BOC\angle) = 60°$ és $m(AOB\angle) = 120°$. Az OAB körcikk területe $\frac{1}{3}r^2\pi$, továbbá $T_{AOB_\Delta} = \frac{r}{2}\cdot r\sqrt{3} = \frac{r^2\sqrt{3}}{2}$. Ebből következik,



hogy az ABD körszelet területe $\frac{1}{3}r^2\pi - \frac{r^2\sqrt{3}}{2} = r^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

$m_{\text{henger}} = hr^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\rho_{\text{víz}}$, ahol h a henger hossza. $V_{\text{henger}} = r^2h\pi$. Az előbbiekből következik, hogy

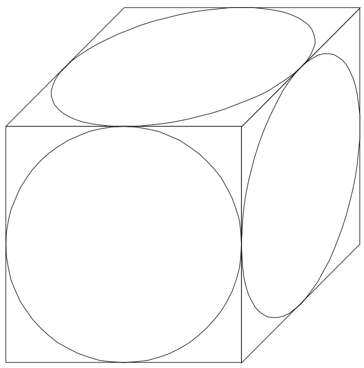
$$\rho_{\text{henger}} = \frac{m_{\text{henger}}}{V_{\text{henger}}} = \left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\right)\cdot\rho_{\text{víz}}.$$

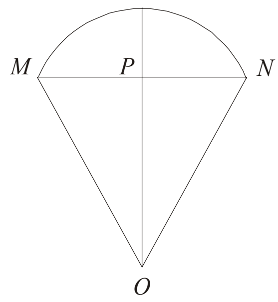
10. *Bizonyítsuk be, hogy egy 100 csúcsú konvex poliéder élei megszámozhatók a $+1$ és -1 számokkal úgy, hogy minden egyes csúcsba befutó élekre írt számok szorzata -1 legyen.*

Megoldás. Minden csúcsba írjuk a befutó élekre írt számok szorzatát. Ha összeszorozzuk a csúcsokra írt számokat, akkor 1-et kapunk, mert egy él két csúcsba fut be, így az élre írt szám a négyzeten fog szerepelni a csúcsok szorzatának számolásakor. Tehát páros sok olyan csúcs van, amelyre -1 van írva, és páros sok olyan csúcs, amelyen 1 áll. Ha létezik olyan csúcs, amire 1 van írva, akkor léteznie kell még egynek, és ez a két csúcs egy élekből álló törött vonallal. A törött vonalat alkotó számokat felcseréljük az ellentettjükre. Így a két végpontban az előjel megváltozik, és azokban a csúcsokban, ahol áthalad a törött vonal nem változik meg az előjel, mert egy élen be megy, egy élen bemegy, egyen kijön, és a változás szorzata 1. Ezzel az eljárással 2-vel csökkentettük azoknak a csúcsoknak a számát, amelyekre 1 volt írva. Az eljárást tovább lehet folytatni, amíg nem marad ilyen csúcs.

11. *Egy tömör kocka csúcsait - hogy jobban használható legyen szerencsejátékok céljára – legömbölyítették azzal a gömbbel, amelynek középpontja a kocka középpontja és amely érinti a kocka valamennyi élét. Mekkora a maradék test felszíne és térfogata?*

Megoldás. A gömb sugara $R=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. A kilógó gömbsüveg magassága $h=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}-\dfrac{a}{2}=\dfrac{a}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$. $V_{\text{gömnbsüveg}}=V_{\text{gömbcikk}}-V_{\text{kúp}}$, viszont $V_{\text{gömbcikk}}=\dfrac{2\pi r^2 h}{3}$, $V_{\text{kúp}}=\dfrac{MP^2\pi\cdot PO}{3}$. $MP=\sqrt{r^2-(r-h)^2}=\sqrt{2rh-h^2}$, $PO(r-h)$, következik, hogy $V_{\text{kúp}}=\dfrac{(2r-h)h(r-h)\pi}{3}$, és $V_{\text{gömbsüveg}}=\dfrac{\pi}{3}r^2(3r-h)$.





Másrészt, a gömbsüveg térfogata,

$$V_{\text{gömbsüveg}}=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{a^3}{4}\left(3-2\sqrt{2}\right)\frac{\left(2\sqrt{2}+1\right)}{2}=\frac{\pi}{24}\left(4\sqrt{2}-5\right)a^3,$$

valamint a lekerekített kocka térfogata

$$V_k=V_{\text{gömb}}-6V_{\text{gömbsüveg}}=\frac{a^3\pi}{12}\cdot\left(15-8\sqrt{2}\right).$$

Tehát a lekerekített kocka felülete

$$F_k=F_{\text{gömb}}-6F_{\text{süveg}}+6F_{\text{kör}}=a^2\pi\frac{\left(6\sqrt{2}-5\right)}{2}.$$

12. *Van-e olyan, a kockától különböző test, melynek ugyanannyi lapja, éle, csúcsa van mint a kockának, de nincs négyszöglapja?*

Megoldás. A kockának 6 lapja, 8 csúcsa és 12 éle van, tehát az új testnek 6 lapja kellene, hogy legyen, ezért maximum ötszög lapjai lehetnek. Egy ötszög lapja biztosan kell legyen, mert ha csak háromszög lapjai lennének, akkor az élek száma $e=\dfrac{6\cdot 3}{2}=9\neq 12$. Egy ötszöglap esetén ismét ellentmondáshoz jutunk, mert $\dfrac{5+5\cdot 3}{2}=10$. Két ötszöglap esetén $\dfrac{5+5+4\cdot 3}{2}=11$, három ötszöglap esetén $\dfrac{15+9}{2}=12$ és négy, vagy több ötszöglap esetén $e>12$. Tehát az új testnek 3 háromszöglapja és 3 ötszöglapja van. Két lapnak legfeljebb két közös csúcsa lehet, tehát a testnek legalább $15-6=9$ csúcsa kellene legyen, ami ellentmondás. Következik, hogy nincs a feltételeknek eleget tevő test.

13. *Hány szabályos test létezik?*

Megoldás. A szabályos testeket a következő két tulajdonsággal jellemezzük:

- a szabályos test minden oldallapja szabályos n-szög (n rögzített); (1)
- a szabályos test minden csúcsából ugyanannyi él indul ki.

Ha a lapokat szabályos n-szögeknek tekintjük, akkor a fentiekből következik, hogy

$$cs=\frac{nl}{k}, (2)$$

ahol k az egy csúcsból kiinduló élek számát, cs a csúcsok számát és l a lapok számát jelöli. $é$-vel jelölve az élek számát, (1)-ből következik, hogy $é=\frac{nl}{2}$. (3)

A $cs-é+l=2$ Euler összefüggésbe (2)-t és (3)-mat helyettesítve kapjuk, hogy

$$nl\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{2}\right)+l=2,$$

ami az $l\left(\frac{2n-nk+2k}{2k}\right)=2$ (*) egyenlőséggel egyenértékű. Mivel $l\in\mathbb{N}^*$, a (*) egyenlőségből következik, hogy $2n-nk+2k>0$, tehát $n<\frac{2k}{k-2}$ ($k\geq 3$, mert másként nem beszélhetünk testről). Felhasználva, hogy $n\geq 3$, az előbbi egyenlőtlenségből következik, hogy $\frac{2k}{k-2}>3$, vagyis $k\in\{3,4,5\}$. Ha $k=3$, akkor az $l(6-n)=12$ egyenletet kapjuk, ahonnan az $(l,cs,é,n)\in\{(4,4,6,3);\ (6,8,12,4);\ (12,20,30,5)\}$ megoldáshalmazt kapjuk. Ha $k=4$, akkor egy megoldás van $(l,cs,é,n)=(8,6,12,3)$. Ha $k=5$, akkor az egyedüli megoldás az $(l,cs,é,n)=(20,12,30,3)$. Tehát összesen öt szabályos test van, és a fenti megoldások rendre a szabályos tetraédert, a kockát, a szabályos dodekaédert, a szabályos oktaédert és a szabályos ikozaédert jellemzik.

14. *Bizonyítsd be, hogy a szabályos négyoldalú gúlába és a gúla köré írt gömb r illetve R sugarára* $\frac{R}{r}\geq 1+\sqrt{2}$.

Megoldás. Jelöljük a gúla magasságát h-val, oldalélét b-vel és alapélét a-val. Mivel a gúla köré írt gömb középpontja a magasságon van (a gúlába írt gömbé is), következik, hogy a körülírt gömb sugara megegyezik a VAC háromszög köré írt kör sugarával. Tehát $R=\dfrac{b\cdot b\cdot\sqrt{2}a}{4\cdot\dfrac{h\sqrt{2}a}{2}}=\dfrac{b^2}{2h}$.

Hasonló gondolatmenettel, a gúlába írt gömb sugara megegyezik a VEF háromszögbe írt kör sugarával, tehát $r = \frac{T_{VEF}}{p} = \frac{ha}{2} \cdot \frac{2}{a + 2\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}}$.

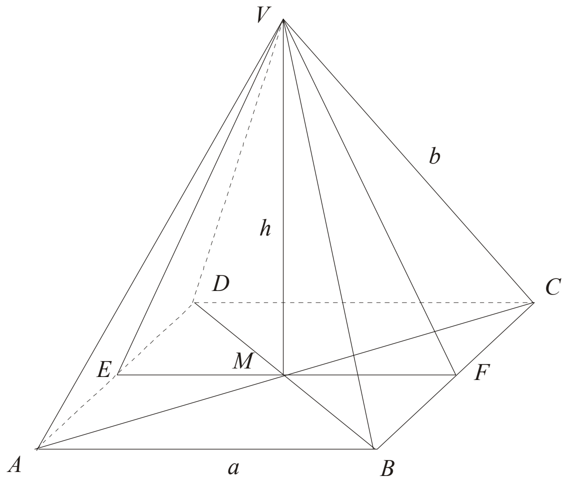
A fentiek alapján

$$\frac{R}{r} = \frac{b^2}{2h^2} \cdot \left(1 + \sqrt{4\frac{b^2}{a^2} - 1}\right).$$

Viszont a VAM derékszögű háromszögben $h^2 + \frac{a^2}{2} = b^2$, ami a

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{h^2}{b^2}}$$ összefüggéshez

vezet. Legyen $\frac{b^2}{h^2} = x > 1$. Így a következő összefüggéshez jutunk:

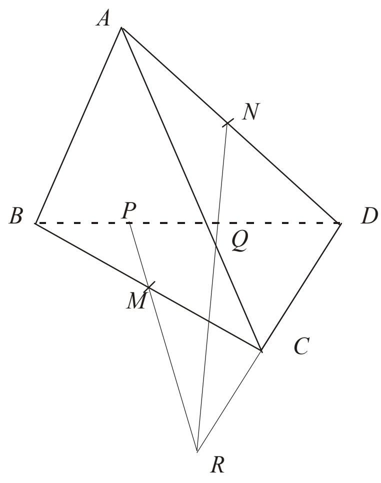


$$\frac{R}{r} = \frac{1}{2} x \left(1 + \sqrt{2\frac{x}{x-1} - 1}\right) = \frac{1}{2} x \left(1 + \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right).$$

Tehát az $x\left(1 + \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right) \geq 2 + 2\sqrt{2}$ egyenlőtlenséget kell igazoljuk, amikor $x > 1$.

15. *Bizonyítsd be, hogy a tetraéder két szembefekvő élének felezőpontján áthaladó tetszőleges sík két azonos térfogatú testekre bontja a tetraédert!*

Megoldás. Jelöljük az M és N pontokat tartalmazó egyik síkot α-val. Az α sík a BD szakaszt P-ben metszi, az AC szakaszt pedig Q-ban. Legyen $(NQ) \cap (DC) = \{R\}$. A PM és az NQ egyenesek egy síkban vannak, következik, hogy $(PM) \cap (DC) = \{R\}$. Mivel az N, Q és R pontok kollineárisak, Menelaosz tételéből következik, hogy



$$\frac{ND}{AN} \cdot \frac{AQ}{CQ} \cdot \frac{CR}{RD} = 1. \qquad (1)$$

Hasonlóan, P, M és R is kollineárisak, tehát

$$\frac{DP}{BP} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CR}{RD} = 1. \qquad (2)$$

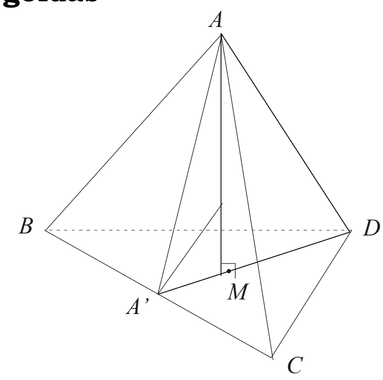
Felhasználva, hogy $AN = ND$ és $BM = MC$, valamint az (1) és a (2) összefüggések alapján következik, hogy $\frac{AQ}{QC} = \frac{DP}{PB}$, és származtatással kapjuk, hogy

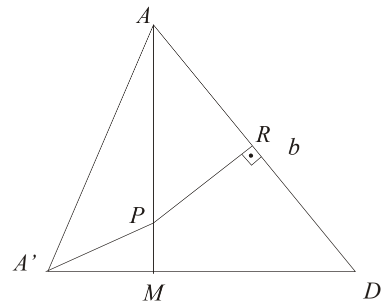
$$\frac{AQ + QC}{QC} = \frac{DP + BP}{BP} \Rightarrow \frac{AC}{QC} = \frac{DP}{BP} \Rightarrow QC = BP.$$

A fentiek alapján $(ANQMBP) \equiv (DNPMCQ)$ (mert minden szög és él kongruens), tehát a két test térfogata is megegyezik.

16. *Egy szabályos háromoldalú gúla alapéle a és oldaléle b. Mennyi annak a gömbnek a sugara amelyik érinti a gúla minden élét?*

Megoldás





Legyen $AM \perp (BCD)$ és $AA' \perp BC$. Az $AA'D$ háromszögben

$$A'M = \frac{1}{3}A'D = \frac{a\sqrt{3}}{6} \text{ és } MD = \frac{2}{3}A'D = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

A feltételben szereplő gömb középpontja az AM magasságon van, és legyen ez egy P pont. Legyen $R \in AD$ úgy, hogy $PR \perp AD$. A feladat tehát a P pont meghatározására vezetődik vissza, úgy, hogy $A'P \equiv PR$. Az $APR_\Delta \sim ADM_\Delta$ hasonlóságból következik, hogy $\frac{AP}{AD} = \frac{PR}{MD}$. Írhatjuk, hogy $A'P^2 = A'M^2 + PM^2$, $PM + AP = AM$, valamint $AM = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}$. A fenti összefüggésekből következik, hogy

$$x^2 = A'M^2 + \left(AM - \frac{AD \cdot PR}{MD}\right)^2 = A'M^2 + \left(AM - \frac{AD \cdot A'P}{MD}\right)^2,$$

ahol $x = A'P$. A megfelelő átalakítások után az előbbi egyenletből a

$$0 = A'A^2 - 2\frac{AM \cdot AD}{MD}x + \frac{AM^2}{MD^2}x^2$$

egyenletet kapjuk, melynek diszkriminánsa $\Delta = 4\frac{AM^2}{MD^2}\left(AD^2 - A'A^2\right)$, tehát

Tartalomjegyzék

$$x=\frac{MD}{AM}\left(AD\pm\sqrt{AD^2-A'A^2}\right)=$$

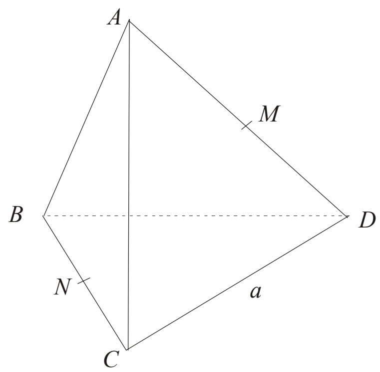
$$=\frac{a\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{3b^2-a^2}{3}}}\cdot\left(b\pm\sqrt{b^2-\left(b^2-\frac{a^2}{4}\right)}\right)=\frac{a}{\sqrt{3b^2-a^2}}\left(b\pm\frac{a}{2}\right),$$

és innen következik, hogy $x=\dfrac{a(2b-a)}{2\sqrt{3b^2-a^2}}$.

17. *Számítsd ki az $ABCD$ szabályos tetraéder két élének kitérő egyeneseken fekvő oldalfelezőjének távolságát.*

Megoldás. Felhasználva az egyenlő oldalú háromszögek tulajdonságait, írhatjuk, hogy $BM=MC=a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Továbbá, az MBC egyenlő szárú háromszögben MN oldalfelező, tehát magasság is, és innen következik, hogy

$$MN^2=\frac{3a^2}{4}-\frac{a^2}{4}=\frac{a^2}{2}\Rightarrow MN=\frac{a\sqrt{2}}{2}.$$



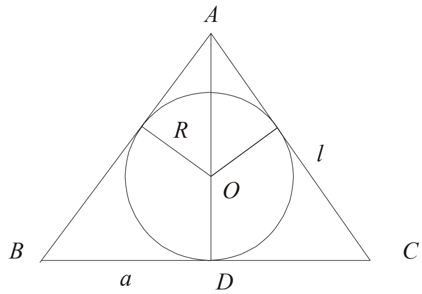
18. *Bizonyítsd be, hogy egy gömb és a köréje írt kúp térfogatának aránya egyenlő a palástfelszínének arányával.*

Megoldás. A kúp és a gömb térfogata $V_k=\dfrac{a^2\pi h}{3}$, illetve $V_g=\dfrac{4}{3}R^3\pi$, tehát

$$\frac{V_k}{V_g}=\frac{a^2h}{4R^3}.$$

A teljes felszínek aránya

$$\frac{F_k}{F_g}=\frac{al\pi+a^2\pi}{4R^2\pi}=\frac{a(l+a)}{4R^2}.$$



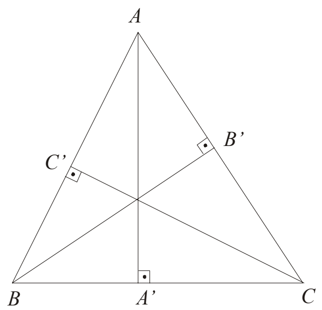
Viszont $T_{ABD}=\dfrac{ha}{2}=T_{AOB}+T_{BOD}=\dfrac{lR}{2}+\dfrac{aR}{2}$ és $ha=R(l+a)$, tehát

$$\frac{V_k}{V_g}=\frac{a^2h}{4R^3}=\frac{aR(l+a)}{4R^3}=\frac{a(l+a)}{4R^2}=\frac{F_k}{F_g}.$$

19. *Az ABC háromszöget megforgatjuk a BC, CA és AB oldal körül. Ha V_a, V_b és V_c a kapott testek térfogata, bizonyítsuk be, hogy a következő állítások egyenértékűek:*

a) $m(B\hat{A}C)=90^\circ$; **b)** $\dfrac{BC}{V_a}=\dfrac{AC}{V_b}+\dfrac{AB}{V_c}$; **c)** $\dfrac{1}{V_a^2}=\dfrac{1}{V_b^2}+\dfrac{1}{V_c^2}$.

Megoldás. Először igazoljuk az a) $\Rightarrow$ b) implikációt.



A $V_a = \frac{AA'^2\pi}{3}BC$, $V_b = \frac{h_b^2\pi}{3}AC$ és $V_c = \frac{h_c^2\pi}{3}AB$ egyenlőségekből következik, hogy $\frac{BC}{V_a} = \frac{3BC}{AA'^2\pi BC} = \frac{3}{\pi\left(\frac{AB\cdot AC}{BC}\right)^2} = \frac{3}{4}\cdot\frac{BC^2}{AB^2AC^2} =$

$$= \frac{3}{4}\cdot\frac{AB^2+AC^2}{AB^2AC^2} = \frac{3}{4}\frac{1}{AB^2} + \frac{3}{4}\frac{1}{AC^2} = \frac{3}{\pi}\frac{1}{h_b^2} + \frac{3}{\pi}\frac{1}{h_c^2} = \frac{AC}{V_b} + \frac{AB}{V_c}.$$

Igazoljuk a b) $\Rightarrow$ c) implikációt.

$$\frac{1}{V_a^2} = \frac{9}{\pi^2}\frac{1}{h_a^4BC^2} = \frac{9}{\pi^2}\frac{1}{h_a^2BC^2}\left(\frac{1}{h_b^2}+\frac{1}{h_c^2}\right).$$

Az $AA'C_\Delta \sim BB'C_\Delta$ hasonlóságból k1vetkezik, hogy $\frac{h_a}{h_b} = \frac{AC}{AB}$, ahonnan a $h_a\cdot BC = h_b\cdot AC$ azonossághoz jutunk. Hasonlóan, $h_aBC = h_cAB$. Ebből következik, hogy $\frac{1}{V_a^2} = \frac{9}{\pi^2}\cdot\frac{1}{h_b^2h_b^2AC^2} + \frac{9}{\pi^2}\cdot\frac{1}{h_c^2}\cdot\frac{1}{h_c^2\cdot AB} = \frac{1}{V_b^2} + \frac{1}{V_c^2}$.

Végül igazoljuk a c) $\Rightarrow$ a) implikációt. Az $\frac{1}{V_a^2} = \frac{1}{V_b^2} + \frac{1}{V_c^2}$ összefüggésből, az előző gondolatmenet alapján következik, hogy $\frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_c^2}$, és $1 = \frac{h_a^2}{h_b^2} + \frac{h_a^2}{h_c^2} = \frac{AC^2}{BC^2} + \frac{AB^2}{BC^2}$, ahol felhasználtuk az (1) és a (2) összefüggéseket. Ebből következik, hogy $BC^2 = AC^2 + AB^2$, tehát $m(BAC\angle) = 90^\circ$.

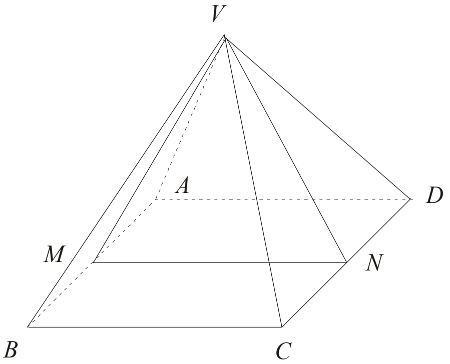
20. *A $VABC$ szabályos négyoldalú gúlában az alapél hossza a és az oldalél $a\sin 60^\circ$. Bizonyítsuk be, hogy ha M és N az AB és CD felezőpontja, akkor $VM \perp VN$.*

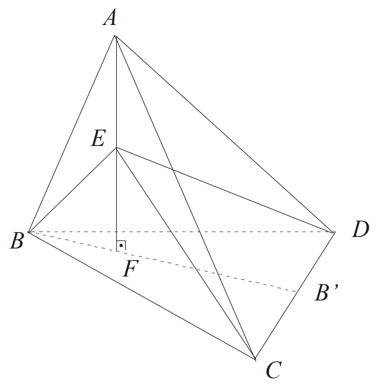
Megoldás. $VM^2 = (a\sin 60^\circ)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}$, tehát $VM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Legyen $VV' \perp (ABCD)$ és $V' \in (ABCD)$. A három merőleges tételéből következik, hogy $V' \in MN$ és $VV' \perp MN$. Tehát $VV'^2 = VA^2 - V'A^2 = \frac{3}{4}a^2 - \frac{2}{4}a^2$, és $VV' = \frac{a}{2}$. Továbbá,

$$T_{VMN} = \frac{VV'\cdot MN}{2} = \frac{a^2}{4} = \frac{MV\cdot NV}{2}\sin(MVN\angle) = \frac{a^2}{4}\sin(MVN\angle),$$

tehát $\sin(MVN\angle) = 1$, vagyis $MV \perp NV$.





21. *Az $ABCD$ szabályos tetraéder A-hoz tartozó magasságának E felezőpontját összekötjük a B, C és D pontokkal. Bizonyítsd be, hogy az EB, EC és Ed szakaszok páronként merőlegesek.*

Megoldás. Legyen F az A-ból húzott magasság talppontja. F rajta van a BDC háromszög B-ből húzott magasságán, és $BF = 2FB'$.

$$AF^2 = BA^2 - BF^2 = a^2 - \left(\frac{2}{3}BB'\right)^2 = a^2 - \left(\frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{2}{3}a^2 \quad \Rightarrow \quad AF = \frac{a\sqrt{6}}{6},$$

tehát $EF = \frac{a\sqrt{6}}{6}$, és következik, hogy $V_{EBDC} = \frac{1}{3}EF \cdot T_{BDC} = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}$. h_D-vel jelölve az $ECBD$ gúla D-ből húzott magasságát, az $ECBD$ gúla térfogatára a következő egyenlőtlenséget írhatjuk:

$$V_{ECBD} = \frac{1}{3}h_D T_{BEC} \le \frac{1}{3}h_D\frac{BE \cdot EC}{2}.$$

Viszont $h_D \le ED$, tehát az előbbi egyenlőtlenség a következőképpen alakul:

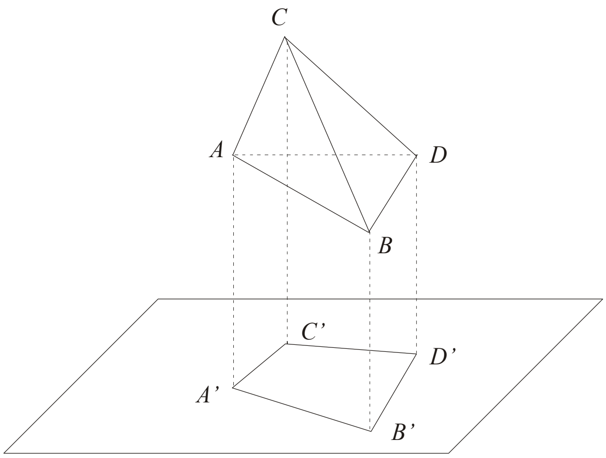
$$V_{ECBD} \le \frac{1}{3}\frac{ED \cdot BE \cdot EC}{2} = \frac{1}{6}\cdot\frac{a^3\sqrt{2}}{4} = \frac{a^3\sqrt{2}}{24} = V_{EBDC},$$

ami azt jelenti, hogy a fenti egyenlőtlenségek mindegyike egyenlőséggé válik, tehát $h_D = ED$, vagyis $ED \perp (BEC)$ és $T_{BEC} = \frac{BE \cdot EC}{2}$, tehát $BE \perp EC$.

22. *Határozd meg az a oldalú szabályos tetraéder vetületének legnagyobb lehetséges területét.*

Megoldás. Legyen a tetraéder evetület az $A'B'C'D'$ négyszög. Toljuk el a síkot, önmagával párhuzamosan úgy, hogy a tetraédernek a síkhoz legközelebb eső csúcsa a síkba kerüljön. Mivel a tetraéder szabályos, feltételezhetjük, hogy ez a csúcs mindig az A csúcs lesz. Ha $A'B' < AB$, akkor a tetraéder elforgatható az A pontba állított, a vetítési síkra merőleges tengely körül úgy, hogy B is essen a vetítési síkba. Ezáltal a

Tartalomjegyzék



23. *Egy konvex poliéder csúcsai két párhuzamos síkban helyezkednek el. Bizonyítsd be, hogy a térfogata kiszámítható a* $V = \frac{4}{3}(A_1 + A_2 + 4A_3)$ *képlet segítségével, ahol* A_1 *és* A_2 *a két síkba eső lapok területe és* A_3 *a két síktól egyenlő távolságra levő sík által meghatározott síkmetszet területe.*

Megoldás. A test felbontható olyan tetraéderekre, amelyeknek az egyik lapja a két párhuzamos sík közül az egyikben van. Mivel ezekre a tetraéderekre igaz az összefüggés és a három párhuzamos síkban a területek összeadódnak az összefüggés igaz tetszőleges testre is.

24. *A síkot felosztottuk egységnyi szélességű sávokra. El lehet-e helyezni minden sávban pontosan egy egységnyi átmérőjű kört úgy, hogy a sík egyetlen egyenese se messen kettőnél több kört?*

Megoldás. Nem lehet elhelyezni. Lásd Gabriel Sudan „Câteva probleme matematice interesante” című könyvének 50.-54. oldalát. (Technikai Kiadó, 1969, Bukarest)

25. *Egy* a *oldalú szabályos tetraéder milyen* R *sugarú körön bújtatható át?*

Megoldás. Jelöljük a tetraéder csúcsait A, B, C és D-vel. Határozzuk meg az AMN háromszög köré írható kör sugarának minimumát, ahol $M \in BC$ és $N \in BD$. A keresett gömb sugara ennél nem lehet kisebb, mert ha a tetraéder átfér a körön, akkor létezik olyan pillanat, amikor a kör síkjának egyik oldalán a tetraéder két csúcsa áll, a másik oldalán egy csúcs és a negyedik csúcs a kör síkjában van. Ha az AMN körívet megforgatjuk az AN húr körül akkor a kapott felület érinti a BC-t. Ellenkező esetben a BC-n felvehetnénk egy olyan M_1 pontot, amelyre az AM_1N háromszög köré írható kör sugara kisebb volna, mint az AMN háromszög köré írt kör sugara. Hasonlóan a BC kell érintse azt a gömbfelületet, amely tartalmazza az A, M, N pontokat és amelynek a középpontja az AMN síkban van. Hasonló állítások igazak a BD szakaszra is. Így $BM = BN = x$. Ha K az MN szakasz felezőpontja és L a B vetülete az AMN síkra, akkor $AM = AN = \sqrt{x^2 - x + 1}$. Ha

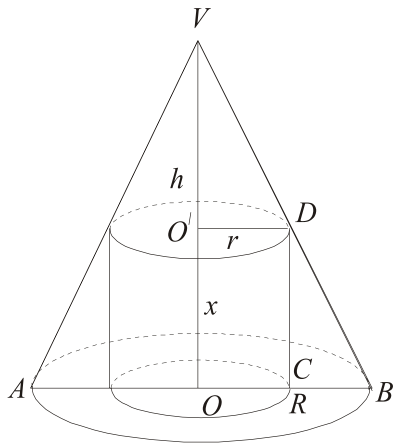
$\alpha = m(\widehat{MAN})$, akkor $\cos\alpha = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{2\left(x^2 - x + 1\right)}$ és $\sin x = \dfrac{x\sqrt{3x^2 - 4x + 4}}{2\left(x^2 - x + 1\right)}$. Így $LK = \dfrac{x^2\sqrt{3x^2 - 4x + 4}}{2\left(x^2 - 2x + 2\right)}$. Másrészt az AKB háromszögből következik, hogy

$$LK = -KB\cos\left(\widehat{AKB}\right) = \frac{3x - 2}{\sqrt{3\left(3x^2 - 4x + 4\right)}}, \quad \text{tehát} \quad 3x^3 - 6x^2 + 7x - 2 = 0.$$

Ezekkel a jelölésekkel, a keresett minimális sugár $r = \dfrac{x^2 - x + 1}{\sqrt{3x^2 - 4x + 4}}$. Közelítő számításokkal ellenőrizhető, hogy $x \approx 0,3913$ és $r \approx 0,4478$.

26. *Adott egyenes körkúpba írható egyenes körhengerek közül melyiknek a legnagyobb a térfogata?*

Megoldás. A mellékelt ábrának megfelelően $VO'D_\Delta \sim VOB_\Delta$, tehát $\dfrac{r}{R} = \dfrac{H - h}{H}$, ahol R, H a kúp alapkörének sugara illetve a kúp magassága, r, h pedig a henger alapkörének a sugara illetve a henger magassága.



Innen $h = \dfrac{H(R - r)}{R}$ és a henger térfogata $V = \pi r^2 h = \dfrac{\pi H}{R} r^2(R - r)$. Másrészt a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség alapján

$$\sqrt[3]{\frac{r^2}{4}(R - r)} \le \frac{\frac{r}{2} + \frac{r}{2} + R - r}{3} = \frac{R}{3}, \quad \text{tehát}$$

$r^2(R - r) \le \dfrac{4R^3}{27}$. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $r = \dfrac{2R}{3}$, tehát a henger maximális térfogata $V = \dfrac{4\pi H R^2}{27}$.

27. *Bizonyítsd be, hogy az ortocentrikus tetraéder lapjainak Euler körei egy gömbfelületen vannak!*

Megoldás. Az a gömb, amelynek középpontja a tetraéder G súlypontja és a sugara a kettős felezők hosszának fele (ez független a kettős felező megválasztásától) tartalmazza a lapok Euler köreit. (a középpont vetülete a lapokon az OH szakaszok felezőpontjába esik és tartalmazza az oldalak felezőpontjait)

28. *Rögzített A, B és C pontokra határozd meg azon M pontok mértani helyét, amelyekre $MA^2 + MB^2 = 2MC^2$.*

Tartalomjegyzék

Megoldás. Használjuk a következő mértani helyet: Ha X és Y rögzített pontok a térben, akkor azon M pontok mértani helye, amelyekre $MX^2 - MY^2$ állandó egy XY -ra merőleges sík. Így ha D az AB felezőpontja, akkor az oldalfelező hosszára vonatkozó tétel értelmében $MA^2 + MB^2 = \frac{1}{2}\left(4MD^2 + AB^2\right)$, tehát $MD^2 - MC^2$ állandó kell legyen. Eszerint a mértani hely egy CD -re merőleges sík.

29. *Egy $3 \times 3 \times 3$ -as kocka közepén levő kiskockát kivettük. Az egyik sarokkockából a testátlósan ellentétes sarokkockába igyekszik egy rágcsáló. Van-e olyan útvonal, amely minden kiskockát pontosan egyszer érint (a középsőt nem), ha csak lapszomszédos kiskockába mehet át a rágcsáló?*

Megoldás. Színezzük ki az egységkockákat két színnel úgy, hogy ne legyen két azonos színű (lap) szomszédos kocka. A rágcsáló így minden lépésben más színű kiskockába jut, mint ahonnan indult. Ugyanakkor a rágcsáló 25 lépés után kellene az átlósan ellentétes sarokkockába jusson. Ez nem lehetséges, mert a testátlósan ellentétes sarokkockák azonos színűek és a rágcsáló 25 lépés után a kiindulási kockától különböző színű kockán lesz.

30. *Bizonyítsd be, hogy egy egységoldalú kocka belsejében elhelyezett 82 pont közül kiválasztható négy, amelyek által meghatározott tetraéder térfogata nem nagyobb mint* $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3^3} = \frac{1}{2 \cdot 81}$.

Megoldás. Osszuk fel a kocka minden oldalélét 3 egyenlő részre. Így az osztópontok által meghatározott síkok segítségével feloszthatjuk a kockát 27 azonos méretű kockára. A skatulyaelv alapján létezik olyan kiskocka, amely a 82 pont közül legalább 4 -et tartalmaz. Ezek által meghatározott tetraéder térfogata nem nagyobb, mint a kocka egy csúcsa és a szomszédos csúcsok által meghatározott tetraéder térfogata, tehát $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3^3} = \frac{1}{2 \cdot 81}$.

2.6. Polinomok (354. oldal)

1. *Számítsd ki a $P(X) = X^{3n} - (n+7)X^{n+2} + (n+7)X^{n-1} - 1$ polinomnak az $X - 1$ -gyel való osztási maradékát.*

Megoldás. Mivel $n - 1 \geq 0$ ezért $n \in \mathbb{N}^*$.

$$P(1) = 1^{3n} - (n+7)1^{n+2} + (n+7)1^{n-1} - 1 = 0 .$$

Ebből következik, hogy $(X-1)$ osztja a $P(X)$ polinomot, tehát az osztási maradék 0, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

2. *Bizonyítsd be, hogy két $x^2 + y^2$ $(x, y \in \mathbb{N})$ alakú természetes szám szorzata is ilyen alakú.*

Megoldás. $\left(x^2 + y^2\right)\left(u^2 + v^2\right) = |x + iy||u + iv| = |(x+iy)(u+iv)| =$

$$= |(xu - yv) + i(xv + yu)| = (xu - yv)^2 + (xv + yu)^2 .$$

3. *Határozd meg a* $P(X) = (X-2)^{2n} + (X-1)^n - 1$ *polinomnak az* $X^2 - 3X + 2$ *polinommal való osztási maradékát.*

Megoldás. Legyen $P(X) = (X-2)^{2n} + (X-1)^n - 1$ és $Q(X) = X^2 - 3X + 2$. Mivel $P(1) = (-1)^{2n} - 1 = 0$ Bézout tétele alapján $(x-1)$ osztja $P(X)$-et és $P(2) = (1)^n - 1 = 0$, tehát $(X-2)$ is osztja $P(X)$-et. Továbbá $Q(X) = (X-1)(X-2)$, tehát $Q(X)$ osztja $P(X)$-et. A hányados is meghatározható a következő módon:

$$P(X) = (X-2)^{2n} + \left[(X-1)^n - 1^n\right] =$$

$$= (X-2)^{2n} + (X-2)\left[(X-1)^{n-1} + (X-1)^{n-2} + \ldots + 1\right] =$$

$$= (X-2)\left\{\left[(X-2)^{2n-1} + 1^{2n-1}\right] + \left[(X-1)^{n-1} + (X-1)^{n-2} + \ldots + (X-1)\right]\right\} =$$

$$= (X-2)(X-1)\left\{\left[(X-2)^{2n-2} - (X-2)^{2n-3} + \ldots - (X-2) + 1\right] +\right.$$

$$\left. + \left[(X-1)^{n-2} + \ldots + (X-1) + 1\right]\right\} =$$

$$= Q(X)\left\{\left[(X-2)^{2n-2} - (X-2)^{2n-3} + \ldots - (X-2) + 1\right] +\right.$$

$$\left. + \left[(X-1)^{n-2} + \ldots + (X-1) + 1\right]\right\} = Q(X)\left[\frac{(X-2)^{2n-1} + 1}{X-1} + \frac{(X-1)^{n-1} - 1}{X-2}\right].$$

4. *Határozd meg az m és p paraméter értékét úgy, hogy az* $X^{2n} - X^n + mX^4 + p$ *polinom osztható legyen* $(X-1)^2$*-gyel minden n természetes szám esetén.*

Megoldás. Legyen $P(X) = X^{2n} - X^n + mX + p$. Abból, hogy $(X-1)$ osztja $P(X)$-et Bezout tétele alapján következik, hogy $P(1) = 0$, tehát $m + p = 0$, ahonnan $m = -p$.

$P(X) = (X-1)\left(X^{2n-1} + X^{2n-2} + \ldots + X^n + mX^3 + mX^2 + mX + m\right) + (m+p)$.

Legyen $Q(X) = X^{2n-1} + X^{2n-2} + \ \ldots\ + X^n + mX^3 + mX^2 + mX + m$. Mivel $(X-1)^2$ osztja $P(X)$-et, tehát $(X-1)$ osztja $Q(X)$-et. Ebből következik, hogy $Q(1) = 0$, tehát $4m + n = 0$, ahonnan $n = -4m = 4p$. Összegezve $m = -p$ és $n = 4p$,bármely $p \in N$ esetén lesz $P(X)$ polinom osztható $(X-1)^2$-tel.

5. *Bizonyítsd be, hogy az* $X^{4n+2} - (2n+1)X^{2n+2} + (2n+1)X^{2n} - 1$ *polinom osztható az* $\left(X^2 - 1\right)^3$ *polinommal.*

Megoldás. Matematikai indukciót alkalmazzunk n szerint.

$$P_n(X) = X^{4n+2} - (2n+1)X^{2n+2} + (2n+1)X^{2n} - 1.$$

$n = 1$ esetén $P_1(X) = X^6 - 3X^4 + 3X^2 - 1 = \left(X^2 - 1\right)^3$, tehát osztható $\left(X^2 - 1\right)^3$.

Tartalomjegyzék

Tegyük fel, hogy bármely $k \le n$ esetén $P_k(X)$ osztható $\left(X^2-1\right)^3$-nel és igazoljuk, hogy ez teljesül $(n+1)$-re is.

$$P_{n+1}(X) = X^{4n+6} - (2n+3)X^{2n+4} + (2n+3)X^{2n+2} - 1.$$

$$P_n(X) = X^{4n+2} - (2n+3)X^{2n+3} + (2n+3)X^{2n} + 2X^{2n+2} - 2X^{2n} - 1$$

$$X^2P_n(X) = X^{4n+4} - (2n+3)X^{2n+4} + (2n+3)X^{2n+2} + 2X^{2n+2}\left(X^2-1\right) - X^2$$

$$X^2P_n(X) = \left[X^{4n+6} - (2n+3)X^{2n+4} + (2n+3)X^{2n+2} - 1\right] -$$

$$X^{4n+4}\left(x^2-1\right) + 2X^{2n+2}\left(X^2-1\right) - \left(X^2-1\right).$$

$$P_{n+1}(X) = X^2P_n(X) + \left(X^2-1\right)\left[X^{4n+4} - 2X^{2n+2} + 1\right] =$$

$$X^2P_n(X) + \left(X^2-1\right)\left[X^{2n+2}-1\right]^2 = X^2P_n(X) + \left(X^2-1\right)^3\left[X^{2n} + X^{2n-2} + \ldots + 1\right].$$

Az indukciós feltevés alapján $P_n(X)$ osztható $\left(X^2-1\right)^3$-nel, tehát $P_{n+1}(X)$ is osztható $\left(X^2-1\right)^3$-nel, ez azt jelenti, hogy $P_n(X)$ osztható $\left(X^2-1\right)^3$-nel bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

6. *Bizonyítsd be, hogy ha $P \in \mathbb{R}[X]$ egy harmadfokú polinom, akkor a $Q(X) = P(P(X) - P(X)$ polinom osztható a $P(X) - X$ polinommal.*

Megoldás. Ha $P(X) = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$, ahol $a_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{0,3}$, akkor

$$P(P(X)) - P(X) = a_3\left[P^3(X) - X^3\right] + a_2\left[P^2(X) - X^2\right] + a_1\left[P(X) - X\right] =$$

$$= \left[P(X) - X\right]\cdot\left[a_3\left(P^2(X) + P(X)X + X^2\right) + a_2\left(P(X) + X\right) + a_1\right]..$$

Tehát $\left[P(X) - X\right]$ osztja $\left[P(P(X)) - P(X)\right]$-et.

Általánosítás. Ha $P(X) \in \mathbb{C}[X]$, $gradP = n$, $n \in \mathbb{N}^*$ akkor $\left[P(X) - X\right]$ osztja $\left[P(P(X)) - P(X)\right]$-et.

A bizonyítás hasonlóan történik, mint az előbb és felhasználjuk, hogy

$$P^k(X) - X^k = \left[P(X) - X\right]\cdot\left[P^{k-1}(X) + P^{k-2}(X)X + \ldots + P(X)X^{k-2} + X^{k-1}\right],$$

ahol $k \in \{2, 3, \ldots, n\}$.

7. *Mi a feltétele annak, hogy az $X^{kn} + X^{(k-1)n} + \ldots + X^{2n} + X^n + 1$ polinom osztható legyen az $X^k + X^{(k-1)} + \ldots + X^2 + X + 1$ polinommal.*

Megoldás. Igazoljuk, hogy ha $n = (k+1)p + q$ alakú, ahol $p \in N$, $q \in N^*$, $1 \le q \le k$ és $(q, k+1) = 1$ akkor $\left(X^k + X^{k-1} + \ldots + X + 1\right)$ osztja $\left(X^{kn} + X^{(k-1n)} + \ldots + X^n + 1\right)$. Legyen α gyöke az $x^k + x^{k-1} + \ldots + x + 1 = 0$ egyenletnek, ekkor $\alpha^{k+1} = 1$ és $\alpha^k + \alpha^{k-1} + \ldots + \alpha + 1 = 0$. A $P_k(X) = X^k + X^{k-1} + \ldots + X + 1$ polinom pontosan akkor osztja a

$P_{kn}(X)=X^{kn}+X^{(k-1)n}+...+X^{n}+1$ polinomot ha $P_k(X)$ minden gyöke $P_{kn}(X)$-nek is gyöke.

$$\alpha^{kn}+\alpha^{(k-1)n}+...+\alpha^{n}+1=\alpha^{k[(k+1)p+q]}+\alpha^{(k-1)[(k+1)p+q]}+...+\alpha^{(k+1)p+q}+1=$$
$$=\left(\alpha^{k+1}\right)^{kp}\alpha^{kq}+\left(\alpha^{k+1}\right)^{(k-1)p}\alpha^{(k-1)q}+...+\left(\alpha^{k+1}\right)^{p}\alpha^{q}+1=$$
$$\alpha^{kq}+\alpha^{(k-1)q}+...+\alpha^{q}+1.$$

Tekintsük a következő függvényt: $m:\{1,2,...,k\}\to\{1,2,...,k\}$,

$$m(x)=xq \mod (k+1),$$

ahol $q\in\mathbb{N}^*$ és $1\le q\le k$. Vizsgáljuk ennek a függvénynek az injektívitását.
Legyen $x_1,x_2\in\{1,2,...,k\}$ és $x_1\ne x_2$ akkor

$$x_1 \mod (k+1)\ne x_2 \mod (k+1)$$

és mivel $(q,k+1)=1$ ezért $x_1q \mod (k+1)\ne x_2q \mod (k+1)$, tehát $m(x_1)\ne m(x_2)$, ami azt jelenti, hogy m injektív. Mivel az $\{1,2,...,k\}$ halmaz véges, következik, hogy m bijektív, tehát az $\alpha^{kq},\alpha^{(k-1)q},...,\alpha^{q}$ tagok az $\alpha,\alpha^2,...,\alpha^k$ értékeket veszik fel valamilyen sorrendben és mindegyiket csak egyszer, tehát

$$\alpha^{kq}+\alpha^{(k-1)q}+...+\alpha^{q}+1=\alpha^{k}+\alpha^{k-1}+...+\alpha+1=0,$$

ha $(q,k+1)=1$. Tehát $P_k(X)$ pontosan akkor osztja $P_{kn}(X)$-et, ha $n=(k+1)p+q$ alakú, ahol $p\in\mathbb{N}$, $q\in\mathbb{N}^*$, $1\le q\le k$ és $(q,k+1)=1$.

Megjegyzés. $n\ne(k+1)p$ mivel $\alpha^{kn}+\alpha^{(k-1)n}+...+\alpha^{n}+1=\dfrac{\alpha^{(k+1)n}-1}{\alpha^{n}-1}$, ahonnan $\alpha^n\ne1$ és így n nem lehet $(k+1)$ többszöröse.

8. *Határozd meg a $P\in\mathbb{R}[X]$ polinom gyökeit, ha $\sum_{k=1}^{n}P(k)=n^3$.*

Megoldás. Legyen $P(X)=a_0+a_1X+a_2X^2+ \; ... \; +a_rX^r$, $gradP=r$.

$$P(0)+P(1)+...+P(n)=$$
$$=na_0+(1+2+...+n)a_1+\left(1^2+...+n^2\right)a_2+\left(1^r+...+n^r\right)a_r=n^3.$$

Mivel $1^2+2^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ és $1^3+2^3+...+n^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$
következik, hogy $a_3=a_4= \; ... \; =a_n=0$ és

$$na_0+\left(\frac{n}{2}+\frac{n^2}{2}\right)a_1+\left(\frac{n}{6}+\frac{n^2}{2}+\frac{n^3}{3}\right)a_2=n^3.$$

Innen az együtthatók azonosításával kapjuk, hogy $a_2=3$, $a_1=-3$, $a_0=1$, tehát a polinom $P(X)=3X^2-3X+1$, amelynek a gyökei $x_{1,\,2}=\dfrac{3\pm i\sqrt{3}}{6}$.

9. *Határozd meg az X^m-1 és X^n-1 polinomok legnagyobb közös osztóját.*

Megoldás. Ha $F(X)$ a $(X^m - 1)$ és $(X^n - 1)$ polinomok ln.k.o-ja akkor $F(X)$ bármely gyöke egyúttal az $\left(X^d - 1\right)$-nek is gyöke, ahol $d = (m, n)$. (1)
Fordítva, alkalmazzuk a következő tételt: ha H ln.k.o-ja P és Q polinomoknak akkor léteznek U és V polinomok úgy, hogy $H = PU + QV$. Tehát $\left(X^d - 1\right)$ minden gyöke $F(X)$-nek is gyöke. (2) Az (1) és (2) alapján $F(X) = \left(X^d - 1\right)$.

10. *Számítsd ki az $(x_1 - x_2)\cdot(x_2 - x_3)\cdot(x_3 - x_1)$ szorzat értékét, ha x_1, x_2 és x_3 az $x^3 + px + q = 0$ egyenlet gyökei.*

Megoldás. Legyen $\Delta = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)$, a gyökökre vonatkozó Vieté képletek alapján:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = p \\ x_1x_2x_3 = -q \end{cases}.$$

A Δ kiszámításához amint látni fogjuk szükségesek az alábbi összegek értékei:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3,\ x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2,\ x_1x_3^3 + x_3x_2^3 + x_2x_1^3,$$
$$x_2x_3^3 + x_1x_2^3 + x_3x_1^3,\ x_1^3x_2^3 + x_2^3x_3^3 + x_3^3x_1^3.$$

(1) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = -2p$

(2) $\left(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3\right) + p(x_1 + x_2 + x_3) + 3q = 0$, tehát $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -3q$.

(3) $x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2 = (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)^2 - 2\left(x_1x_2^2x_3 + x_2x_3^2x_1 + x_3x_1^2x_2\right) =$
$= p^2 - 2(x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2x_3) = p^2$.

$$(4)\ \begin{cases} x_1^3 + px_1 + q = 0 & /\cdot x_2 \\ x_2^3 + px_2 + q = 0 & /\cdot x_3 \\ x_3^3 + px_3 + q = 0 & /\cdot x_1 \end{cases},$$

összeadva az egyenleteket kapjuk:

$$\left(x_1x_3^3 + x_3x_2^3 + x_2x_1^3\right) + p(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) + q(x_1 + x_2 + x_3) = 0,$$

tehát $x_1x_3^3 + x_3x_2^3 + x_2x_1^3 = -p^2$.

(5) $x_2x_3^3 + x_1x_2^3 + x_3x_1^3 = -p^2$ (hasonlóan mint az előbb).

(6) $\left(x_1^3x_2^3 + x_2^3x_3^3 + x_3^3x_1^3\right) + p\left(x_1x_2^3 + x_2x_3^3 + x_3x_1^3\right) + q\left(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3\right) = 0$, amelyet a megfelelő egyenletek x_1^3, x_2^3 és x_3^3-nel való beszorzásából és összeadásukból kapunk. Az előbbi egyenletbe behelyettesítve az eddigi eredményeket kapjuk:

$$x_1^3x_2^3 + x_2^3x_3^3 + x_3^3x_1^3 = p^3 + 3q^2.$$

$$\Delta^2 = (x_1 - x_2)^2 (x_2 - x_3)^2 (x_3 - x_1)^2 =$$
$$= \left(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2\right)\left(x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3\right)\left(x_3^2 + x_1^2 - 2x_3x_1\right) =$$
$$= \left(-2p - x_3^2 - 2x_1x_2\right)\left(-2p - x_1^2 - 2x_2x_3\right)\left(-2p - x_2^2 - 2x_3x_1\right),$$

elvégezve a műveleteket és megfelelően csoportosítva a tagokat, kapuk:

$$\Delta^2 = -8p^2 - 4p^2\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) - 8p\left(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1\right) -$$
$$-2p\left(x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2\right) + 4q\left(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3\right) + 8pq\left(x_1 + x_2 + x_3\right) -$$
$$-4p\left(x_1x_3^3 + x_3x_2^3 + x_2x_1^3\right) - 4p\left(x_2x_3^3 + x_3x_1^3 + x_1x_2^3\right) -$$
$$-2\left(x_1^3x_2^3 + x_2^3x_3^3 + x_3^3x_1^3\right) - 9\left(x_1x_2x_3\right)^2 = -p^3 - 27q^2.$$

Tehát $\Delta = \sqrt{-4p^3 - 27q^2}$.

11. *Bizonyítsd be, hogy ha p egy prímszám, akkor az* $X^3 + pX^2 + pX + p$ *irreducibilis* $\mathbb{Z}[X]$ *-ben.*

Megoldás. Alkalmazzuk az Eisenstein kritériumot.

12. *Rögzített n esetén határozd meg azt a minimális fokszámú polinomot, amelyik teljesíti a* $P(k) = \dfrac{k}{k+1}$ *egyenlőségeket* $k = \overline{0,n}$ *esetén.*

1. megoldás. Legyenek $a_0, a_1, \ldots, a_n$ páronként különböző komplex számok és $c_0, c_1, \ldots, c_n$ tetszőleges komplex számok. Ekkor egyértelműen létezik a $P \in \mathbb{C}[X]$ polinom $(gradP \leq n)$ úgy, hogy $P(a_k) = c_k$, bármely $k = \overline{0,n}$ esetén és

$$P(X) = \alpha_0 + \alpha_1(X - a_0) + \alpha_2(X - a_0)(X - a_1) + \ldots$$
$$\ldots + \alpha_n(X - a_0)(X - a_1)\cdot \ldots \cdot (X - a_n).$$

A $P(a_0) = \alpha_0$, tehát $\alpha_0 = c_0$, $P(a_1) = \alpha_0 + \alpha_1(a_1 - a_0)$, és így $\alpha_1 = \dfrac{c_1 - c_0}{a_1 - a_0}$.

Hasonlóan meghatározható a többi együttható is. Visszaérve az eredeti feladatra, egyértelműen létezik $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ úgy, hogy

$$P(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X(X-1) + \ldots + \alpha_n X(X-1)\cdot \ldots \cdot (X-n).$$

Behelyettesítve kapjuk, hogy $P(0) = \alpha_0 = 0$, $P(1) = \dfrac{1}{2} = \alpha_0 + \alpha_1$, innen $\alpha_1 = \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{(1+1)\ \ !}$.

$P(2) = \dfrac{2}{3} = \alpha_0 + 2\alpha_1 + 2\alpha_2$, innen $\alpha_2 = -\dfrac{1}{6} = (-1)^{2+1}\dfrac{1}{(2+1)\ \ !}$.

$P(3) = \dfrac{3}{4} = \alpha_0 + 3\alpha_1 + 6\alpha_2 + 6\alpha_3$, innen $\alpha_3 = \dfrac{1}{24} = (-1)^{3+1}\dfrac{1}{(3+1)\ \ !}$.

Folytatva kapjuk, hogy $\alpha_n = (-1)^{n+1}\dfrac{1}{(n+1)\ \ !}$. Tehát

$$P(X) = \frac{1}{2!}X - \frac{1}{3!}X(X-1) + \frac{1}{4!}X(X-1)(X-2) - \dots$$
$$\dots + (-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)!}X(X-1)\dots(X-n+1).$$

2. Megoldás. A $Q(X) = (X+1)P(X) - X$ polinomnak a gyökei a $0,1,\dots,n$ számok. Így $(X+1)P(X) - X = cX(X-1)(X-2)\dots(X-n)$. Ha $X = -1$-et helyettesítünk, akkor meghatározhatjuk a c értékét, és így a

$$P(X) = \frac{X + (-1)^{n+1}\dfrac{X(X-1)(X-2)\dots(X-n)}{(n+1)!}}{(X+1)}.$$

13. *Bizonyítsd be, hogy ha egy n-ed fokú polinom behelyettesítési értékei egész számok a 0, 1, 2, ..., n helyeken, akkor* $P(m) \in \mathbb{Z}$, $\forall m \in \mathbb{Z}$.

Megoldás. Legyenek $P_0, P_1, \dots, P_n \in \mathbb{C}[X]$ úgy, hogy $gradP_k = k$, bármely $0 \le k \le n$ esetén. Ha $P \in \mathbb{C}[X]$ úgy, hogy $gradP \le n$ akkor egyértelműen léteznek a $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ számok úgy, hogy $P = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n$.
(Először meghatározzuk λ_n-t, majd a $P - \lambda_n P_n = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_{n-1} P_{n-1}$ egyenlőségből meghatározzuk λ_{n-1}-et, így folytatva a szerkesztést meghatározhatjuk a $\lambda_{n-2}, \dots, \lambda_1, \lambda_0$ skalárokat is.) Visszatérve az eredeti feladatra, legyen $P_k = \dfrac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!}$, bármely $k = \overline{0,n}$ esetén. Ekkor egyértelműen léteznek $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ skalárok úgy, hogy $P = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n$ és mivel $P(0), P(1), \dots, P(n) \in \mathbb{Z}$ következik, hogy $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{Z}$.
I. eset, ha $m > 0$. Ha $m > n$ akkor $P_k(m) = C_m^k$ és következik, hogy $P(m) \in \mathbb{Z}$.
Ha $0 \le m \le n$ akkor $P_k(m) = 0$, ha $k > m$ és $P_k(m) = C_m^k$, ha $k \le m$. Tehát $P(m) \in \mathbb{Z}$.
II. eset, ha $m < 0$. Hasonló módon igazolható, hogy $P(m) \in \mathbb{Z}$.

14. *Bizonyítsd be, hogy* $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(k + \frac{1}{n \cdot n!}\right) < n! + 1$.

Megoldás. A bal oldalon ha a műveleteket elvégezzük, akkor megjelenik $n!$ és ha a többi tagot aszerint csoportosítjuk, hogy $\dfrac{1}{n \cdot n!}$ hányadik hatványát tartalmazzák, akkor minden ilyen összeg kisebb lesz, mint $\dfrac{1}{n}$. Így a szorzat kisebb, mint $n! + 1$.

15. *Bizonyítsd be, hogy ha az* $f(x) = x^2 + px + q$ *függvényre* $|f(a_i)| \le 1$ $i = \overline{0,2}$, *ahol* $p, q \in \mathbb{R}$ *és* a_0, a_1, a_2 *páronként különböző komplex számok, akkor az* $|a_0 - a_1|$,

Tartalomjegyzék

$|a_1 - a_2|$ és $|a_2 - a_0|$ számok közül legalább az egyik nem nagyobb mint $\sqrt{3}$. (Weyl 1929).

Megoldás. Az $f(a_0) = u_0$, $f(a_1) = u_1$ és $f(a_2) = u_2$ egyenlőségekből következik, hogy

$$x^2 + px + q = u_0 \frac{(x-a_1)(x-a_2)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)} + u_1 \frac{(x-a_0)(x-a_2)}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)} + u_2 \frac{(x-a_0)(x-a_1)}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)},$$

(lásd még a 25. feladatot) tehát

$$\frac{u_0}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)} + \frac{u_1}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)} + \frac{u_2}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)} = 1.$$

Ha az $|a_0 - a_1|$, $|a_1 - a_2|$ és $|a_2 - a_0|$ számok közül a legkisebb m, akkor a feltételek alapján a $\frac{3}{m^2} \geq 1$. Így $m \leq \sqrt{3}$.

16. *Oldd meg az $x(x+1)(x+2)(x+3) = y(y+1)$ egyenletet az egész számok halmazában.*

Megoldás. A fenti egyenlet a következő alakra hozható:

$$\left(x^2 + 3x + 1\right)^2 = y^2 + y + 1.$$

A továbbiakban azt vizsgáljuk, hogy mikor lesz $y^2 + y + 1$ teljes négyzet $(y \in \mathbb{Z})$.

$$y^2 \leq y^2 + y + 1 \leq (y+1)^2.$$

Ha $y^2 = y^2 + y + 1$ akkor $y_1 = -1$. Ha $y^2 = y^2 + y + 1$ akkor $y_2 = 0$. Ha $y_1 = -1$ akkor $\left(x^2 + 3x + 1\right)^2 = 1$, tehát $x^2 + 3x + 1 = \pm 1$. Tehát a gyökök a következő két egyenletből származhatnak:

$x^2 + 3x + 2 = 0$, amely gyökei $x_{11} = -2$, $x_{12} = -1$ és

$x^2 + 3x = 0$, amely gyökei $x_{13} = -3$, $x_{14} = 0$.

$$M_1 = \{(-3,-1), (-2,-1), (-1,-1), (0,-1)\}.$$

Ha $y_1 = -1$ akkor $\left(x^2 + 3x + 1\right)^2 = 1$, tehát a gyökök: $x_{21} = -2$, $x_{12} = -1$, $x_{13} = -3$ és $x_{14} = 0$. Így $M_2 = \{(-3,0), (-2,0), (-1,0), (0,0)\}$, tehát a megoldások halmaza $M = \{(-3,-1), (-2,-1), (-1,-1), (0,-1), (-3,0), (-2,0), (-1,0), (0,0)\}$.

17. *Bizonyítsd be, hogy az $\begin{cases} x + y + z = a \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a} \end{cases}$ egyenletrendszer minden (x, y, z) megoldásában legalább az egyik szám a.*

Megoldás. Az egyenletrendszer a következő alakra hozható:

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ a(xy + yz + zx) = xyz \end{cases}.$$

Legyen az $u^3 + \alpha u^2 + \beta u + \gamma = 0$ egyenlet, amely gyökei x, y és z. A Vieté összefüggések alapján:

$$\begin{cases} x + y + z = -\alpha \\ xy + yz + zx = \beta \\ xyz = -\gamma \end{cases},$$

ha $\beta = m$ akkor az egyenletrendszer alapján kapjuk, hogy $\alpha = -a$ $\beta = m$ és $\gamma = -am$. Tehát az egyenletünk $u^3 - au^2 + mu - am = 0$.

Ez $(u-a)\left(u^2 - m\right) = 0$ alakban is írható, tehát az egyik gyöke a.

18. *Oldd meg az alábbi egyenletrendszereket:*

a) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ xy + yz + zx = 11; \\ xyz = 6 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 3. \\ x^5 + y^5 + z^5 = 3 \end{cases}$

Megoldás. a) Az $u^3 - 6u^2 + 11u - 6 = 0$ egyenlet esetén felírva a Vieté összefüggéseket a rendszer egyenleteit kapjuk.

$$u^3 - 6u^2 + 11u - 6 = (u-1)(u-2)(u-3) = 0.$$

Tehát az egyenlet gyökei: $u_1 = 1$, $u_2 = 2$ és $u_3 = 3$. Mivel az egyenletrendszer szimmetrikus x, y és z-ben, az egyenletrendszer gyökeinek halmaza $M = \left\{(1,2,3),(1,3,2),(3,1,2),(3,2,1),(2,1,3),(2,3,1)\right\}$.

b) Tekintsük az $u^3 + pu^2 + qu + r = 0$ $(p,q,r \in \mathbb{R})$ harmadfokú egyenletet, amelynek a gyökei x, y és z. Ha $S_k = x^k + y^k + z^k$, $k \in \mathbb{N}^*$, akkor a Vieté összefüggések alapján $p = S_1 = -3$ és $S_2 = S_2^1 - 2(xy + yz + xz) = 9 - 2q$. De

$$S_3 + pS_2 + qS_1 + 3r = 0, \text{ tehát } 3q + r - 8 = 0.$$

$S_4 + pS_3 + qS_2 + rS_1 = 0$ alapján $S_4 = 9 - q(9 - 2q) - 3r = 2q^2 - 9q - 3r + 9$.

$S_5 + pS_4 + qS_3 + rS_2 = 0$ és $S_5 = 3$, következik, hogy

$$6q^2 - 30q - 18r + 2rq + 24 = 0.$$

Az előbbi egyenlőségek alapján a $\begin{cases} p = 3 \\ r = 8 - 3q \\ 6q^2 - 30q - 18r + 2rq + 24 = 0 \end{cases}$

egyenletrendszerhez jutunk. Így $p = 3$, $q = 3$ és $r = -1$. Tehát

$$u^3 - 3u^2 + 3u - 1 = 0,$$

innen következik, hogy $x = y = z = 1$.

19. *Bizonyítsd be, hogy két $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ alakú szám szorzata is ilyen alakú.*

Megoldás. $\left(x_1^3 + y_1^3 + z_1^3 - 3x_1y_1z_1\right)\left(x_2^3 + y_2^3 + z_2^3 - 3x_2y_2z_2\right) =$

$$= (x_1x_2 + y_1z_2 + z_1y_2)^3 + (x_1y_2 + y_1x_2 + z_1z_2)^3 + (x_1z_2 + y_1y_2 + z_1x_2)^3 -$$
$$-3(x_1x_2 + y_1z_2 + z_1y_2)(x_1y_2 + y_1x_2 + z_1z_2)(x_1z_2 + y_1y_2 + z_1x_2) =$$
$$= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc\,.$$

20. *Bizonyítsd be, hogy ha* $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ *egy másodfokú polinom négyzete, akkor* $ac^2 - 4abd + 8cd = 0$. *Ez a feltétel elégséges?*

Megoldás. Az adott polinom csak $P(X) = X^2 + \alpha X + \beta$ alakú polinomnak lehet a négyzete, tehát $d = \beta^2$, $c = 2\alpha\beta$, $b = \alpha^2 + 2\beta$ és $a = 2\alpha$. Így $ac^2 - 4abd + 8cd = 8\alpha^3\beta^2 - 8\alpha\beta^2(\alpha^2 + 2\beta) + 16\alpha\beta^3 = 0$. Ez a feltétel nem elégséges mert az $x^4 + 1$ polinom teljesíti ezt a feltételt és nem négyzetet egyetlen másodfokú polinomnak sem.

21. *Legyenek a* $P(x) = x^m (x+1)^n (x-1)^p$ *és* $Q(x) = (x+1)^p (x-1)^n (x+2)^m$ *polinomok, ahol* $m, n, p \in \mathbb{N}^*$. *Határozd meg a legkisebb közös többszöröst, hogy ha a legnagyobb közös osztó* $\left(x^2 - 1\right)^n$.

Megoldás. Legyen $D(X) = \left(X^2 - 1\right)^n$. A $D(X) \mid P(X)$ és $D(X) \mid Q(X)$ relációkból következik, hogy $p > n$, tehát, ha $M(X)$-szel jelöljük a két polinom legkisebb közös többszörösét, akkor

$$M(X) = \frac{P(X)\cdot Q(X)}{D(X)} = X^m \left(X^2 - 1\right)^p (X+2)^m\,.$$

22. *Legyen* a *és* b *két gyöke az* $x^4 + x^3 - 1$ *polinom négy gyöke közül. Bizonyítsd be, hogy* ab *gyöke az* $x^6 + x^4 + x^3 - x^2 - 1$ *polinomnak.*

Megoldás. Felírva a Viète féle összefüggéseket az $x^4 + x^3 - 1$ polinomra, kapjuk, hogy

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1\,,$$
$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = 0\,,$$
$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = 0\,,$$
$$x_1x_2x_3x_4 = -1\,.$$

Felhasználva ezeket az összefüggéseket, valamint felírva azt a polinomot, amelynek gyökei x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_2x_3, x_2x_4 és x_3x_4, kapjuk, hogy

$$Q(x) = (x - x_1x_2)(x - x_1x_3)(x - x_1x_4)(x - x_2x_3)(x - x_2x_4)(x - x_3x_4) =$$
$$= x^6 + x^4 + x^3 - x^2 - 1\,.$$

Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

23. *Bizonyítsd be, hogy a* $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$ *nem polinomiális függvény.*

Megoldás. Tegyük fel, hogy f polinomfüggvény. Mivel az $f(z) = 0$ egyenlet gyökei $-i$ és i, következik, hogy $f(z) = k(z-i)(z+i)$ alakú, ahol $k \in \mathbb{C}^*$

konstans. Így minden $z \in \mathbb{C}^*$ esetén $f(z) = k\left(z^2+1\right) = z + \frac{1}{z} = \frac{z^2+1}{z}$, ahonnan következik, hogy $k = \frac{1}{z}$ (mert z^2+1 nem lehet egyenlő zéróval, az $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ feltétel alapján), ami ellentmond annak, hogy k állandó.

24. *Határozd meg a legkisebb fokú polinomot, amelyre $P(0) = 100$, $P(1) = 90$, $P(2) = 70$, $P(3) = 40$ és $P(4) = 0$.*

Megoldás. Ha $\deg P = 1$, akkor $P(x) = a_1 x + a_0$ alakú. A $P(0) = 100$ összefüggésből következik, hogy $a_0 = 100$, és ezt felhasználva, a $P(4) = 0$ összefüggésből következik, hogy $a_1 = -25$. Tehát $P(x) = -25x + 100$, és ez a polinom nem tesz eleget a $P(1) = 90$ követelménynek. Következik, hogy nem létezik a feltételekkel rendelkező elsőfokú polinom. Ha $\deg P = 2$, akkor $P(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. A

$$\begin{cases} P(0) = a_0 = 100 \\ P(4) = 16a_2 + 4a_1 + a_0 = 0 \\ P(1) = a_2 + a_1 + a_0 = 90 \end{cases}$$

egyenletrendszert megoldva, a $P(x) = -5x^2 - 5x + 100$ polinomhoz jutunk, amely kielégíti a $P(2) = 70$ és $P(3) = 40$ feltételeket is, tehát a $P(x) = -5x^2 - 5x + 100$ polinom a legkisebb fokszámú olyan polinom, amely kielégíti a feltételeket.

25. *Bizonyítsd be, hogy a $P \in \mathbb{R}[X]$ n-ed fokú polinom, amely teljesíti a $P\left(x_k\right) = p_k$, $k = \overline{0,n}$ $P(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k \cdot l_k(x)$ alakú, ahol*

$$l_k = \frac{\left(x - x_0\right)\cdot\ldots\cdot\left(x - x_{k-1}\right)\left(x - x_{k+1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(x - x_n\right)}{\left(x_k - x_0\right)\cdot\ldots\cdot\left(x_k - x_{k-1}\right)\left(x_k - x_{k+1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(x_k - x_n\right)}.$$

Megoldás. Kimutatjuk, hogy egyetlen olyan n-edfokú valós együtthatójú polinom van, amelyre $P\left(x_k\right) = p_k$, $k = \overline{0,n}$. Valóban, ha léteznének P_1 és P_2 különböző polinomok, az előbbi feltételekkel, akkor a $Q(x) = P_1(x) - P_2(x)$ polinom legfeljebb n-edfokú lenne. Viszont $p_0, p_1, \ldots, p_n$ gyökei a $Q(x) = 0$ egyenletnek, ami ellentmondás, mert egy legfeljebb n-edfokú polinomnak nem lehet $n+1$ gyöke. Tehát egyetlen egy, a fenti feltételeknek eleget tevő polinom létezik. A

$$\sum_{k=0}^{n} p_k l_k(x) = p_0 \cdot \frac{\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)\cdot\ldots\cdot\left(x - x_n\right)}{\left(x_0 - x_1\right)\left(x_0 - x_2\right)\cdot\ldots\cdot\left(x_0 - x_n\right)} + \ldots +$$

$$+ p_n \cdot \frac{\left(x - x_0\right)\left(x - x_1\right)\cdot\ldots\cdot\left(x - x_{n-1}\right)}{\left(x_n - x_1\right)\cdot\left(x_n - x_1\right)\cdot\ldots\cdot\left(x_n - x_{n-1}\right)}$$

összeg az x_0, x_1, ..., x_n értékekre rendre a p_0, p_1, ..., p_n értékeket veszi fel, és mivel fent igazoltuk, hogy egyetlen olyan $P \in \mathbb{R}[X]$ polinom van, amely teljesíti a $P(x_k) = p_k$, $k = \overline{0,n}$ feltételeket, következik, hogy $P(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k l_k(x)$.

26. *Bontsd fel három tényezőre az*

$$x^7 + x^6y + x^5y^2 + x^4y^3 + x^3y^4 + x^2y^5 + xy^6 + y^7$$

kifejezést.

Megoldás. A kifejezés rendre a következő alakokban is írható:

$$X^6(X+Y) + X^4Y^2(X+Y) + X^2Y^4(X+Y) + Y^6(X+Y) =$$
$$=$$
$$(X+Y)\left(X^6 + X^4Y^2 + X^2Y^4 + Y^6\right) = (X+Y)\left(X^4\left(X^2+Y^2\right) + Y^4\left(X^2+Y^2\right)\right) =$$
$$= (X+Y)\left(X^2+Y^2\right)\left(X^4+Y^4\right).$$

Megjegyzés. A feladat úgy is megoldható, hogy észrevesszük, hogy a kifejezés egyenlő az $\dfrac{X^8 - Y^8}{X - Y}$ racionális törttel, a számlálót könnyen felbonthatjuk, majd a végén ismét egyszerűsítjük.

27. *Bizonyítsd be, hogy végtelen sok egész együtthatós P és Q polinom van, amelyre* $P^2 - \left(x^4 - 2x\right)Q^2 = 1$.

Megoldás. A polinomokat rekurzíven szerkeszthetjük meg.

28. *Oldd meg az* $x^4 - 10x^3 - 2(a-9)x^2 + 2(5a-2)x + 2a + a^2 = 0$ *egyenletet, ahol a valós paraméter.*

Megoldás. Csoportosítjuk az a hatványai szerint

$$a^2 - 2a(x^2 - 5x + 1) + x^4 - 10x^3 + 18x^2 - 4x = 0.$$
$$\Delta = 4\left[9x^2 - 6x + 1\right] = \left[2(3x-1)\right]^2.$$

Így $a_{1,2} = \left(x^2 - 5x + 1\right) \pm (3x-1)$, tehát az $x^2 - 2x - a = 0$ és $x^2 - 8x + 2 - a = 0$ másodfokú egyenleteket kell megoldani.

29. *Bizonyítsd be, hogy bármely $a, b, c \in \mathbb{R}$ esetén létezik $x_0 \in \mathbb{R}$ úgy, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ függvény grafikus képe egybeesik a szimmetrikusával az $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ pontra nézve.*

Megoldás. A szimmetria feltétele az $f(x_0 - \alpha) + f(x_0 + \alpha) = 2f(x_0)$ egyenlőség. Ez pontosan akkor teljesül minden $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén, ha $x_0 = -\dfrac{a}{3}$. Mivel ez minden $a \in \mathbb{R}$ esetén létezik a feladat állítását igazokltuk.

30. a) *Bizonyítsd be, hogy a* $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ *polinomhoz rendelt függvény páros pontosan akkor ha a páratlan kitevőjű tagok nullával egyenlők.*

Tartalomjegyzék

b) *Ha* $x_k = \sqrt{k^2+1}$, $k = \overline{1,n}$ *akkor képezzük az összes* $\sum \pm\sqrt{k^2+1}$ *alakú számokat. Bizonyítsd be, hogy ezen számok szorzata egész szám.*

Megoldás. a) Legyen $P(X) = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} ... + a_1 X + a_0$. A P-hez rendelt polinomfüggvény akkor és csak akkor páros, ha $P(x) - P(-x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Viszont a $P(x) - P(-x) =$

$$= a_n\left(x^n - (-x)^n\right) + a_{n-1}\left(x^{n-1} - (-x)^{n-1}\right) + ... + a_1(x - (-x)) + a_0 - a_0 = 0$$

egyenlőség akkor és csak akkor teljesülhet minden *x*-re, ha $a_1 = 0$, $a_3 = 0$, ..., $a_{2k+1} = 0$ minden *k*-ra.

b) Jelöljük a szorzatot Π-vel. $\Pi = \left(\varepsilon_{11}\sqrt{1^2+1} + \varepsilon_{21}\sqrt{2^2+1} + ... + \varepsilon_{n1}\sqrt{n^2+1}\right)\cdot ... \cdot$ $\left(\varepsilon_{12^n}\sqrt{1^2+1} + \varepsilon_{22^n}\sqrt{2^2+1} + ... + \varepsilon_{n2^n}\sqrt{n^2+1}\right)$. Tekintjük a

$$P(X_1, X_2, ..., X_n) = \left(\varepsilon_{11}X_1 + \varepsilon_{21}X_2 + ... + \varepsilon_{n1}X_n\right)...\left(\varepsilon_{12^n}X_1 + \varepsilon_{22^n}X_2 + ... + \varepsilon_{n2^n}X_n\right)$$

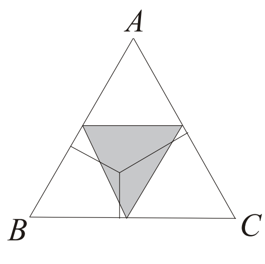
n változós polinomot. A polinomhoz rendelt függvény, ha x_k a változó és a többi x_i rögzitett, páros minden *k*-ra, mert

$P(x_1, x_2, ..., x_k, ..., x_n) = P(x_1, x_2, ..., -x_k, ..., x_n)$ bármely $k \in \{1, 2, ..., n\}$ és $x \in \mathbb{R}$. Tehát az a) pont alapján minden k-ra, ha x_k-t tekintjük változónak, a páratlan fokú tagok együtthatói nullával egyenlők. Tehát csak páros fokú tagok maradnak a polinomban, minden x_k változóra. Behelyettesítve x_k-ba $\sqrt{k^2+1}$-et, állításunkat igazoltuk.

2.7. Valószínűségszámítás (356. oldal)

1. *Ha a háromszög szögeinek mértékeit azonos valószínűségűeknek tekintjük, mennyi a valószínűsége annak, hogy egy találomra kiválasztott háromszög hegyesszögű?*

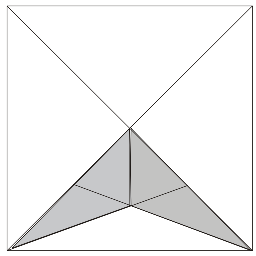
Megoldás. Tekintjük az ABC egyenlő oldalú háromszöget, amelynek magassága 180. Mivel egy belső pontra az oldalaktól való távolságok összege éppen 180, ezért minden XYZ háromszögnek megfelel egy pont az ABC háromszög belsejében (az X szög mértéke a BC oldaltól való távolság mértékével egyenlő stb.). Ezen az ábrán a hegyesszögű háromszögeknek az oldalak felezőpontjai által meghatározott háromszög belseje felel meg (minden távolság kisebb, mint 90). Így a keresett valószínűség $\frac{1}{4}$.



2. *Egy egységoldalú négyzet belsejében találomra választunk egy M pontot. (Minden pont választásának azonos a valószínűsége). Mennyi a valószínűsége annak, hogy M-nek a négyzet legközelebbi oldalától mért távolsága nagyobb, mint a közelebbi átlótól való távolsága?*

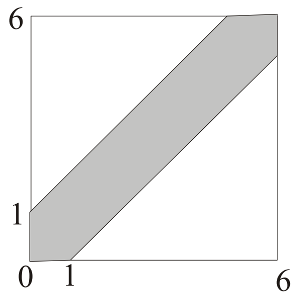
Tartalomjegyzék

Megoldás. Egy szög két szára közül ahhoz van közelebb egy belső pont, amelyiktől nem választja el a szögfelező. Így ha az átlók által meghatározott négy háromszög közül csak az egyiket tekintjük, akkor a mellékelt ábrának a satírozott részén vannak a kedvező esetek (szögfelezőket húzunk a háromszögben). Így a besatírozott rész területének és a háromszög területének aránya $\sqrt{2}-1$. Tehát a keresett valószínűség $\sqrt{2}-1$.



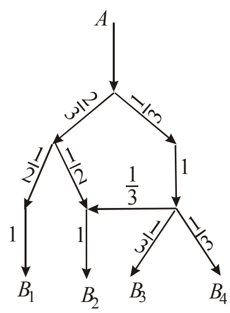
3. *Andrea és Béla délután 5 és 6 közt szeretne találkozni. Úgy egyeznek, hogy érkezéstől számítva mindegyikük 10 percet várakozik. Mennyi a valószínűsége annak, hogy találkoznak, ha érkezésük időpontja véletlenszerű?*

Megoldás. Ábrázoljuk egy koordinátarendszerben az Andrea és Béla érkezésének idejét, az egyiket az Ox tengelyen és a másikat az Oy tengelyen. Így minden lehetséges esetnek megfelel egy $M(x,y)$ pont a négyzet belsejében (x az Andrea érkezése és y a Béla érkezése, az egység 10 perc). A találkozás feltétele $-1 \le x-y \le 1$, tehát a besatírozott részen találhatók a kedvező eseteknek megfelelő pontok. Így a keresett valószínűség a két idom területének aránya azaz $\frac{1}{4}$.



4. *A mellékelt ábrán az A ponttól a nyilak mentén a B_1, B_2, B_3 és B_4 pontokba lehet eljutni. Számítsuk ki, hogy mennyi a valószínűsége annak, hogy a B_j pontba érkezzünk ($j \in \{1,2,3,4\}$), ha a nyilakra írt számok az illető út választásának valószínűségét jelentik!*

Megoldás. A B_1 pontban csak egy úton juthatunk el és ennek a valószínűsége $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$. A B_3 és B_4 pontokba szintén egy-egy út vezet és mindkettőnek a valószínűsége $\frac{1}{3}\cdot 1\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$. A B_2 pontba két úton juthatunk el. Mivel ezeknek az utaknak a valószínűsége rendre $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{3}$ illetve $\frac{1}{3}\cdot 1\cdot\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{9}$, ezért annak a valószínűsége, hogy a B_2 pontba jutunk $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{4}{9}$. Ezt úgy is kiszámíthattuk volna, hogy kivonjuk az 1-ből a többi valószínűségek összegét.



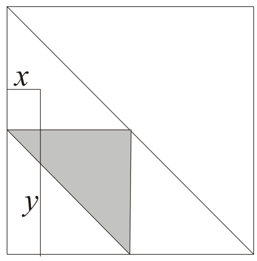
5. *Mennyi a valószínűsége annak, hogy egységnyi hosszúságnál rövidebb, találomra választott élhosszúságú téglatest átlója az egységnél kisebb?*

Megoldás. A lehetséges esetek megfelelnek az egységkocka belsejében levő pontoknak, míg a kedvező eseteknek megfelelő pontok az egyik csúcsban (mint középpontban) elhelyezett egységnyi sugarú gömb és a kocka belsejében vannak. Így a keresett valószínűség $\frac{\pi}{6}$.

Tartalomjegyzék

6. *Egy l hosszúságú szakaszon találomra felveszünk két pontot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az így keletkezett három diszjunkt szakasszal szerkeszthető háromszög?*

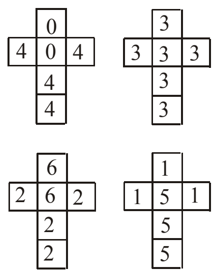
Megoldás. Ha x és y két darab hossza, akkor $l-x-y$ a harmadik darab hossza, tehát az $x+y>l-x-y$, $x+l-x-y>y$ és $y+l-x-y>x$ feltételek kell teljesüljenek. Ezek $x+y>\frac{l}{2}$, $y<\frac{l}{2}$ és $x<\frac{l}{2}$ alakban írhatók. Ezen kívül az $x+y<l$ feltétel is kell teljesüljön mert három darabra van szükségünk. Ismét megfeleltetünk az (x,y) párnak egy pontot az l oldalhosszúságú négyzet belsejében úgy, hogy x és y két szomszédos oldaltól mért távolságot jelentsen. Így a lehetséges esetek a négyzet átlója által meghatározott egyik háromszöget jelentik és kedvező eseteknek megfelelő pontok a besatírozott részen vannak, tehát a keresett valószínűség $\frac{1}{4}$.



7. *Egy zsákban rudak vannak, amelyek hossza 2, 3, 5, 7, 11, 13. Véletlenszerűen kihúzunk három rudat. Mi a valószínűsége annak, hogy ezekből háromszöget lehet összerakni?*

Megoldás. A lehetséges esetek száma $C_6^3=\frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}=20$ (nagyság szerint rendezett oldalhosszakat vizsgálunk). Ezekből a következő esetek nem felelnek meg $(2,3,5)$, $(2,3,7)$, $(2,3,11)$, $(2,3,13)$, $(2,5,7)$, $(2,5,11)$, $(2,5,13)$, $(2,11,13)$, $(3,7,11)$, $(3,7,13)$, $(3,5,11)$, $(3,5,13)$, $(5,7,13)$. Így a keresett valószínúség $\frac{7}{20}$.

8. *A mellékelt ábrán négy kocka síkbeli lefejtése látható. A kockák minden lapján egy-egy szám van. Két játékos a következő játékot játssza: Az első kiválaszt egy kockát, majd a maradékból a második is választ egy kockát és mindketten dobnak a saját kockájukkal. Az nyer, aki nagyobbat dob. Kinek van több esélye?*



Megoldás. A kockák által generált valószínűségi változók a következők $X_1\begin{pmatrix}0 & 4\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$, $X_2\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}$, $X_2\begin{pmatrix}2 & 6\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$ és $X_4\begin{pmatrix}1 & 5\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

Ezeknek a változóknak a várható értéke rendre $\frac{8}{3}$, 3, $\frac{10}{3}$ és 3, tehát úgy tűnik, hogy ha az első a harmadik kockát választja, akkor több esélye van. Ez sajnos nem igaz. Az alábbi táblázat az összes választási lehetőséget és az egyes választásokhoz tartozó nyerési valószínűségeket tartalmazza (az első játékosra nézve). Látható, hogy az első játékos tetszőleges választása esetén a második elérheti, hogy az elsőnek a nyerési esélye $\frac{1}{3}$ legyen. Ezért a második játékosnak több az esélye.

Tartalomjegyzék

I.	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4
II.	2	3	4	1	3	4	1	2	4	1	2	3
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

9. *Egy gépben 6 alkatrész $1/3$ valószínűségggel, 12 alkatrész $1/2$ valószínűségel és 36 alkatrész $1/6$ valószínűséggel romlik el.*

a) *Mennyi a valószínűsége annak, hogy a gép leáll, ha bármely alkatrész meghibásodása leállítja a gépet (és egyszerre csak egy alkatrész romlik el)*

b) *Mennyi a valószínűsége annak, hogy az első elromló alkatrész az utolsó kategóriából van?*

c) *Változik-e valami, ha egyszerre több alkatrész is elromolhat?*

Megoldás. a) A teljes valószínűség tétele alapján a keresett valószínűség

$$P(A) = \frac{6}{54}\cdot\frac{1}{3} + \frac{12}{54}\cdot\frac{1}{2} + \frac{36}{54}\cdot\frac{1}{6} = \frac{7}{27}.$$

b) A Bayes tétel értelmében annak a valószínűsége, hogy az elromlott alkatrész a harmadik kategóriából van $P(B_3) = \dfrac{\frac{1}{6}\cdot\frac{36}{54}}{\frac{7}{27}} = \dfrac{3}{7}$.

c) Ha egyszerre több alkatrész is elromolhat (akár az összes is), akkor a feladat jóval bonyolultabb, mert meg kell vizsgálni, hogy mennyi a valószínűsége annak, hogy 2, 3, …, 54 alkatrész meghibásodik.

10. *Egy pénzdarabot addig dobálunk, amíg másodszor kapunk fejet. Az X valószínűségi változó jelentse a dobások számát. Írd fel X eloszlásfüggvényét, várható értékét és szórását.*

Megoldás. Annak valószínűsége, hogy először az m-edik és másodszor az n-edik dobás után dobunk fejet $\dfrac{1}{2^n}$. Annak a valószínűsége, hogy a második fejet az n-edik dobásból kapjuk $\dfrac{n-1}{2^n}$, mert az m pontosan $n-1$ különböző értéket vehet fel. Így az eloszlásfüggvény $X\begin{pmatrix} n \\ \frac{n-1}{2^n} \end{pmatrix}$, ahol $n \geq 2$. A várható érték $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(n-1)}{2^n} = 4$, mert $\sum\limits_{k=2}^{\infty} n(n-1)x^n = \dfrac{2x^2}{(1-x)^3}$, ha $|x| < 1$. Hasonló módon $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2(n-1)}{2^n} = 20$ mert $\sum\limits_{k=2}^{\infty} n^2(n-1)x^n = \dfrac{2x^2(x+2)}{(1-x)^4}$, ha $|x| < 1$. Így $M(X^2) = 20$, tehát $\sigma(X) = \sqrt{M(X^2) - M^2(X)} = \sqrt{20-16} = 2$.

11. *Egy kockával háromszor dobunk egymás után. Az X valószínűségi változó jelentse a hatos dobások számát. Határozd meg X eloszlásfüggvényét, várható értékét és szórását. Számítsd ki annak a valószínűségét, hogy X értéke legalább annyi, mint a várható értéke.*

Megoldás. Az X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $X\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{209}{6^3} & \frac{3}{6^3} & \frac{3}{6^3} & \frac{1}{6^3} \end{pmatrix}$,

tehát a várható érték $M(X) = 1\cdot\frac{3}{216} + 2\cdot\frac{3}{216} + 3\cdot\frac{1}{216} = \frac{12}{216} = \frac{1}{18}$. Hasonló módon írhatjuk, hogy $M(X^2) = 1\cdot\frac{3}{216} + 4\cdot\frac{3}{216} + 9\cdot\frac{1}{216} = \frac{24}{216} = \frac{1}{9}$, tehát $\sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{1}{18^2}} = \frac{\sqrt{35}}{18}$. A $P(X \geq M(X))$ valószínűség $\frac{7}{216}$.

12. *Bizonyítsd be, hogy az* $X\begin{pmatrix} k+r \\ p_k \end{pmatrix}$, *ahol* $p_k = C_{k+r-1}^{r-1} p^r q^k$ *változó várható értéke* $\frac{r}{p}$ *és szórása* $\frac{\sqrt{rq}}{p}$.

Megoldás. A várható érték $M(X) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+r) C_{k+r-1}^{r-1} p^r q^k = rp^r \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+r}^{r} q^k = \frac{r}{p}$,

mert az $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ azonosság r egymásutáni deriválásával kapjuk, hogy

$$\sum_{n=r}^{\infty} n(n-1)(n-2)...(n-r+1)x^{n-r} = f^{(r)}(x), \text{ ahol } f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Mivel $f^{(r)}(x) = \frac{r!}{(1-x)^{r+1}}$ kapjuk, hogy $\sum_{k=0}^{\infty} C_{k+r}^{r} q^k = \frac{1}{(1-q)^{r+1}} = \frac{1}{p^{r+1}}$. A szórás kiszámításához előbb kiszámítjuk az $M(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+r)^2 C_{k+r-1}^{r-1} p^r q^k$ összeget. Ez az összeg $\frac{r}{p^2}(r+q)$, tehát $\sigma(X) = \frac{\sqrt{rq}}{p}$.

13. *Bizonyítsd be, hogy az* $X\begin{pmatrix} k \\ p_k \end{pmatrix}$, *ahol* $p_k = \frac{C_s^k C_{m-s}^{n-k}}{C_m^n}, k = \overline{0,n}$ $(n, m, s \in \mathbb{N}^*,$ $n \leq s \leq m-n)$ *változó várható értéke* np *(ahol* $p = \frac{s}{m}$*) és szórása*

$$\sqrt{np(1-p)\left(1 - \frac{n-1}{m+1}\right)}.$$

Megoldás. $M(X) = \sum_{k=0}^{n} k \frac{C_s^k C_{m-s}^{n-k}}{C_m^n} = \frac{s}{C_m^n} \sum_{k=0}^{n} C_{s-1}^{k-1} C_{m-s}^{n-k} = \frac{s C_{m-1}^{n-1}}{C_m^n} = \frac{ns}{m}$

$$M(X^2)=\sum_{k=0}^{n}k^2\frac{C_s^kC_{m-s}^{n-k}}{C_m^n}=\frac{s}{C_m^n}\sum_{k=0}^{n}(k-1+1)C_{s-1}^{k-1}C_{m-s}^{n-k}=$$

$$=\frac{sC_{m-1}^{n-1}}{C_m^n}+\frac{s(s-1)}{C_m^n}\sum_{k=0}^{n}C_{s-2}^{k-2}C_{m-s}^{n-k}=\frac{ns}{m}+\frac{s(s-1)n(n-1)}{m(m-1)}=\frac{ns}{m}\left[1+\frac{(s-1)(n-1)}{m-1}\right]$$

Ebből következik, hogy $\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)\left(1-\frac{n-1}{m+1}\right)}$.

14. *Számítsd ki az* $X\begin{pmatrix}k\\p_k\end{pmatrix}$ $p_k=kC_n^k, k=\overline{0,n}$ *eloszlás várható értékét és szórását.*

Megoldás. Mivel $\sum_{k=0}^{n}p_k\neq 1$, az előbbi képletek nem értelmeznek egy valószínűségi változót.

15. *Határozd meg az* $\alpha\in\mathbb{R}$ *értékét úgy, hogy az* $X\begin{pmatrix}k\\\alpha\cdot C_k^2\end{pmatrix}$, $k=\overline{2,n}$, $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$ *valószínűségi változó jól értelmezett legyen.*

Megoldás. A $\alpha\sum_{k=2}^{n}C_k^2=1$ egyenlőségnek kell teljesülnie. Mivel $\sum_{k=2}^{n}C_k^2=\sum_{k=2}^{n}\frac{k(k-1)}{2}=\frac{(n-1)n(n+1)}{6}$, $\alpha=\frac{6}{(n-1)n(n+1)}$.

16. *Számítsd ki az* $X\begin{pmatrix}k\\C_n^kp^kq^{n-k}\end{pmatrix}$, $k=\overline{0,n}$ *és* $Y\begin{pmatrix}j\\C_n^jp^jq^{n-j}\end{pmatrix}$, $j=\overline{0,n}$ *valószínűségi változók összegét és szorzatát.*

Megoldás. Mivel az $m=k+j$ egyenletnek $m+1$ megoldása van írhatjuk, hogy

$$X+Y=\begin{pmatrix}m\\\sum_{k=0}^{m}C_n^kC_n^{m-k}p^kq^{n-k}p^{m-k}q^k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m\\p^mq^{n-m}\sum_{k=0}^{m}C_n^kC_n^{m-k}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m\\C_n^mp^mq^{n-m}\end{pmatrix}.$$

17. *Az X és Y független valószínűségi változókra* $D^2(X)=5$ *és* $D^2(Y)=3$. *Mennyi* $D^2(3X-2Y)$*?*

Megoldás. $D^2(3X-2Y)=D^2(3X)-D^2(2Y)=9D^2(X)-4D^2(Y)=33$.

18. *Az X és Y független valószínűségi változókra* $M(X)=4$ *és* $M(Y)=7$. *Mennyi* $M(2X-3Y)$*?*

Megoldás. $M(2X-3Y)=M(2X)-M(3Y)=2M(X)-3M(Y)=-13$.

19. *Az* $X\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, $Y\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$ *és* $Z=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ *valószínűségi változókra számítsd ki az* $X+Z$, $Y+Z$, $X-Z$, X^3, Y^2, Z^{-1}, X^n, $n\in\mathbb{N}^*$ *valószínűségi változókat.*

Megoldás. $X+Z=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{4}{15} & \frac{2}{15} & \frac{6}{15} & \frac{3}{15} \end{pmatrix}$, $Y+Z=\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{4}{25} & \frac{4}{25} & \frac{2}{25} & \frac{6}{25} & \frac{9}{25} \end{pmatrix}$,

$X-Z=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{4}{15} & \frac{2}{15} \end{pmatrix}$, $X^3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, $Y^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$, $Z^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ és

$X^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$.

20. *Három kockát feldobunk és összeadjuk az eredményeket. Melyik összeg valószínűbb a 9 vagy a 10? (Vizsgáljuk meg mi történik azonos illetve különböző kockák esetén)*

Megoldás. Ha azonosak a kockák, akkor a 9-es összeg a következő lehetőségekből adódhat:

$$1+1+7=1+2+6=1+3+5=1+4+4,$$
$$2+2+5=2+3+4=3+3+3.$$

A 10-es összegnek megfelelő lehetőségek:

$$1+1+8=1+2+7=1+3+6=1+4+5,$$
$$2+2+6=2+3+4=2+4+4=3+3+4.$$

Tehát a 10-es valószínűsége nagyobb. Ha a kockák különböznek, akkor a 9-es esetében 3 olyan összeg van, amely 6 lehetőséget generál, 3 olyan összeg, amely 3 lehetőséget és egy olyan összeg, amely 1 lehetőséget generál. Így összesen 28 a kedvező lehetőségek száma. A 10-es esetében 4 olyan összeg van, amely 6 lehetőséget generál és 4 olyan, amely 3-at, tehát a kedvező lehetőségek száma 36. Ebben az esetben is nagyobb a 10-es összeg megjelenésének valószínűsége.

21. *Találomra kiválasztunk egy legfeljebb 10 jegyű n bináris számot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy bármely háromjegyű bináris számot kivághatjuk n-ből?*

Megoldás. Ellenőrizhető, hogy 8 darab olyan 10 jegyű bináris szám létezik, amelyből kivágható minden háromjegyű bináris szám, például az 1110100011 szám teljesíti a feltételeket. Így a keresett valószínűség $\frac{8}{2^{10}}=\frac{1}{2^7}$.

22. *Egy hatszög átlói közt nincs három összefutó. Miután meghúztuk minden átlóját, elhelyezünk 4 pontot 4 diszjunkt síkrész belsejében. Mennyi a valószínűsége, hogy a hatszög csúcsai által meghatározott tetszőleges háromszögben a 4 közül pontosan egy kerül?*

Tartalomjegyzék

Megoldás. A lehetséges esetek száma C_{25}^4, mert 25 tartomány keletkezik. Ezekből pontosan 6 felel meg a feltételeknek, tehát $\dfrac{4\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{25\cdot 24\cdot 23\cdot 22}=\dfrac{2}{6325}$

23. *Bizonyítsd be, hogy ha* $P(A)=\dfrac{4}{5}$ *és* $P(B)=\dfrac{9}{10}$, *akkor* $\dfrac{7}{9}\le P\left(A|B\right)\le\dfrac{8}{9}$.

Megoldás. $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}\le\dfrac{P(A)}{P(B)}=\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{10}{9}=\dfrac{8}{9}$. Másrészt a

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\ge P(A)+P(B)-1=\frac{7}{10}$$

egyenlőtlenség alapján $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}\ge\dfrac{\frac{7}{10}}{P(B)}=\dfrac{7}{10}\cdot\dfrac{10}{9}=\dfrac{7}{9}$.

24. *Számítsd ki* $P(A)$*-t, ha* $P\left(A|B\right)=\dfrac{3}{4}$, $P\left(B|A\right)=\dfrac{1}{8}$ *és* $P\left(A|\overline{B}\right)=\dfrac{3}{16}$.

Megoldás. Az adott egyenlőségekből következik, hogy $P(A\cap B)=\dfrac{1}{8}P(A)$,

$$P(B)=\frac{4}{3}P(A\cap B)=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{8}P(A)=\frac{1}{6}P(A)\text{ és}$$

$$P(A\cap\overline{B})=\frac{3}{16}P(\overline{B})=\frac{3}{16}(1-P(B))=\frac{3}{16}\left(1-\frac{1}{6}P(A)\right).$$

Ezek alapján a $P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B})$ egyenlőségből következik, hogy $P(A)=\dfrac{6}{29}$.

25. *Bizonyítsd be, hogy* $P\left(A\bigcup B|C\right)=P\left(A|C\right)+P\left(B|C\right)-P\left(A\bigcap B|C\right)$.

Megoldás. $P\left(A\bigcup B|C\right)=\dfrac{P((A\cup B)\cap C)}{P(C)}$. $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,

tehát $\dfrac{P((A\cup B)\cap C)}{P(C)}=\dfrac{P(A\cap C)+P(B\cap C)-P(A\cap B\cap C)}{P(C)}$. Ennek az egyenlőségnek a jobb oldalán álló törtet felbontva épp a kívánt összefüggéshez jutunk.

26. *Az* $A_1,A_2,\ldots,A_n$ *tetszőleges események egyesítését állítsd elő diszjunkt események egyesítéseként.*

Megoldás. $A_1\cup A_2=A_2\cup(A_1\setminus A_2)$,

$$A_1\cap A_2\cap A_3=A_3\cap\left(A_1\cap A_2\right)=A_3\cap\left((A_2\cap(A_1\setminus A_2))\setminus A_3\right)=$$
$$=A_3\cup(A_2\setminus A_3)\cup((A_1\setminus A_2)\setminus A_3).$$

Ebből a felírásból kiindulva induktívan megszerkeszthetjük a kívánt felbontást.

$$\bigcap_{k=1}^{n}A_k=\bigcap_{k=1}^{n}\left[A_k\setminus(\bigcup_{j=1}^{k}A_j)\right].$$

Tartalomjegyzék

27. *Hozd egyszerűbb alakra az* $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$ *eseményt!*

Megoldás. $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B) = B$ és $B \cap (A \cup \overline{B}) = B \cap A$, tehát
$$(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A \cap B.$$

28. *Igaz-e, hogy* $\overline{A \cup B} \cap C = C \setminus (C \cap (A \cup B))$*?*

Megoldás. $\overline{A \cup B} \cap C = \overline{A} \cap \overline{B} \cap C = (C \cap \overline{A}) \cap (C \cap \overline{B}) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B) =$ $= C \setminus (C \cap (A \cup B))$.

29. *Hozd egyszerűbb alakra az* $(A \cap B) \cup C \cup \left[\left(A \cap \overline{(B \cup C)}\right) \cap ((C \cap D) \cup A)\right]$ *kifejezést!*

Megoldás. A kifejezés karakterisztikus függvényének egyszerűsítésével vagy a Venn-Euler diagram vizsgálatával beláthatjuk, hogy
$$(A \cap B) \cup C \cup \left[\left(A \cap \overline{(B \cup C)}\right) \cap ((C \cap D) \cup A)\right] = A \cup C.$$

30. *Oldd meg az* $A \Delta X = B$ *egyenletet!*

Megoldás. A szimmetrikus különbség asszociativitása miatt írhatjuk, hogy
$$A \Delta B = A \Delta (A \Delta X) = (A \Delta A) \Delta X = \varnothing \Delta X = X,$$
tehát $X = A \Delta B$.

1. teszt (358. oldal)

1. *Hány darab olyan 4 tagú számtani haladvány választható ki az* $\{1, 2, \ldots, 32\}$ *halmaz elemeiből, amelynek az állandó különbsége 4?*

a) 19; **b)** 20; **c)** 21; **d)** 22; **e)** 18.

Megoldás. Ha az első tag x, akkor a haladvány tagjai $x, x+4, x+8$ és $x+32$, tehát az $1 \le x$ és $x + 12 \le 32$ egyenlőségek kell teljesüljenek. Ezeket az egyenlőtlenségeket az adott halmazból 20 szám teljesíti, tehát a helyes válasz **b)**

2. *Ha* $(a_n)_{n \ge 1}$ *egy pozitív tagú mértani haladvány, amelynek kvóciense 2, akkor a* $P = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$ *szorzat értéke*

a) $(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n)^{\frac{1}{2}}$; **b)** $a_1^n \cdot 2^n$; **c)** $a_1^n \cdot 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$; **d)** $\sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$; **e)** $a_1^n \cdot 2^{n+1}$.

Megoldás. $a_k = a_1 \cdot 2^{k-1}$, tehát $P = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = a_1^n \cdot 2^{0+1+2+\ldots+(n-1)} =$ $= a_1^n \cdot 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Ebből következik, hogy a c) válasz helyes és az e) illetve b) hamis. Ugyanakkor az a) válasz nem lehet igaz, mert általában egy kifejezés nem egyenlő a saját négyzetgyökével. Másrészt $\sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n} = \sqrt{(a_1^2 \cdot 2^{n-1})^n} = a_1^n \cdot 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$, mert pozitív tagú a haladvány. Így két helyes válasz is van a **c)** és a **d)**.

Tartalomjegyzék

3. *Hány darab 4 tagú nem konstans mértani haladvány választható ki az* $\{1,2,\dots,100\}$ *halmaz elemeiből?*

a) 16; **b)** 25; **c)** 9; **d)** 32; **e)** 17.

Megoldás. Ha x a haladvány első tagja és q a kvóciense, akkor a tagjai x, xq, xq^2 és xq^3. Tehát $q^3 \le 100$ és így $q \le 4$. Ha $q \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, akkor csak a $q=2$, $q=3$ és $q=4$ esetek maradnak. Az első esetben a $8x \le 100$ egyenlőtlenségnek 12 megoldása van az adott halmazban, a második esetben a $27x \le 100$ egyenlőtlenségnek 3 míg a harmadik esetben $64x \le 100$ egyenlőtlenségnek csak 1. Ez eddig 16 haladvány. Ha a kvóciens nem egész, akkor biztosan $\frac{a}{b}$ alakú, ahol $(a,b)=1$ és $b>1$. Így $x \vdots b^3$, tehát $x \le 100$ miatt $b \in \{2,3,4\}$. Ha valamilyen b esetén $a=1$, akkor ugyanazokat a haladványokat kapjuk, mint az előbb csak fordított sorrendben, tehát ez ismét 16 haladvány. Vizsgáljuk meg, hogy lehetséges-e az $a>1$ eset. A haladvány tagjai $x, x\frac{a}{b}, x\frac{a^2}{b^2}, x\frac{a^3}{b^3}$, tehát az $(a,b)=1$ feltétel miatt az $\frac{x}{b}$, $\frac{x}{b}a$, $\frac{x}{b}a^2$ és $\frac{x}{b}a^3$ természetes számok is haladványt alkotnak, és ebben a haladványban a kvóciens is természetes szám. Tehát az eddig talált 32 haladvány közül ki kell választanunk azokat, amelyekre az első tagnak van b^3 alakú osztója, ahol $b \in \{2,3,4\}$ és a kvóciens relatív prím ezzel az osztóval. Ez egyik esetben sem lehetséges, tehát a haladványok száma 32 és így a helyes válasz **d)**.

4. *Határozd meg annak az* $(a_n)_{n\ge 1}$ *számtani haladvány első tagját és állandó különbségét, amelyre teljesülnek az* $a_1 + a_7 = 42$ *és* $a_{10} - a_3 = 21$ *egyenlőségek.*

a) $a_1 = 0, r = 4$; **b)** $a_1 = -4, r = 1$; **c)** $a_1 = 1, r = 1$;

d) $a_1 = 12, r = 3$; **e)** $a_1 = 0, r = 3$.

Megoldás. Az adott egyenlőségekből következik, hogy $2a_1 + 6r = 42$ és $7r = 21$, tehát $r = 3$ és így $a_1 = 12$. A helyes válasz **d)**.

5. *Ha* S_1, S_2, ..., S_p *azoknak a számtani haladványoknak az első n tagjából képezett összegeket jelöli, amelyeknek az első tagja rendre 1, 2, 3, ..., p és az állandó különbségeik rendre 1, 3, 5, ...,* $2p-1$*, akkor az* $S = \sum_{k=1}^{p} S_p$ *összeg értéke*

a) $n+p+1$; **b)** $n \cdot p$; **c)** $\frac{np}{2}(np+1)$; **d)** $\frac{np}{2}$; **e)** $np(np+1)$.

Megoldás. Általában $S_k = kn + (2k-1)\frac{n(n-1)}{2}$, tehát

$$S = \sum_{k=1}^{p} S_k = n\sum_{k=1}^{p} k + \frac{n(n-1)}{2}\sum_{k=1}^{p}(2k-1) = \frac{np}{2}(np+1).$$

Tartalomjegyzék

A helyes válasz tehát a **c)**.

6. *Az 100 és 1000 közti 12-vel osztható természetes számok összege*

a) 41000; **b)** 41500; **c)** 41400; **d)** 42000; **e)** 42400.

Megoldás. A legkisebb ilyen szám a $108 = 12 \cdot 9$ és a legnagyobb a $996 = 12 \cdot 83$. Így az összegük $S = 12(9 + 10 + ... + 83) = 12\left(\frac{83 \cdot 84}{2} - \frac{8 \cdot 9}{2}\right) = 41400$, tehát a helyes válasz **c)**. A 12-vel való oszthatóság alapján azonnal látható, hogy csak a c) vagy a d) lehet helyes.

7. *Egy számtani haladvány első n tagjának összege* $S_n = n^2 - 2n$. *Az első tag és az állandó különbség értéke*

a) $a_1 = 1, \quad r = 3$; **b)** $a_1 = -1, \quad r = 2$; **c)** $a_1 = 2, \quad r = -1$;

d) $a_1 = 3, \quad r = 1$; **e)** $a_1 = -1, \quad r = 1$.

Megoldás. Az $S_1 = a_1$ egyenlőség alapján $a_1 = -1$. De $S_2 = a_1 + a_2 = 0$, tehát $a_2 = 1$ és így $r = 2$.

8. *Egy természetes számokból álló számtani haladványban az egyik tag teljes négyzet. Legalább hány ettől különböző tagja teljes négyzet?*

a) 1; **b)** 0; **c)** 3; **d)** végtelen sok; **e)** 2.

Megoldás. A helyes válasz **d)**, lásd az „Összefoglaló gyakorlatok és feladatok” fejezet 2.1. paragrafusának 31. feladatát.

9. *Egy természetes számokból álló számtani haladvány egyik tagja prímszám. Legalább hány ettől különböző tagja prímszám?*

a) 1; **b)** 0; **c)** 3; **d)** végtelen sok; **e)** 2.

Megoldás. Az $a_n = 3n$, $\forall\, n \geq 1$ számtani haladvány első tagja prímszám és nincs több prímszám a haladványban, tehát a helyes válasz **b)**.

10. *Egy számtani haladvány két tagja racionális szám. Legalább hány racionális számot tartalmaz a sorozat?*

a) 1; **b)** 0; **c)** 3; **d)** végtelen sok; **e)** 2.

Megoldás. A helyes válasz **d)**, lásd az „Összefoglaló gyakorlatok és feladatok” fejezet 2.1. paragrafusának 29. feladatát.

2. teszt (359. oldal)

1. *Hány négyjegyű különböző számjegyű számot lehet alkotni az 1, 3, 5, 7, 9 számokból?*

a) 6; **b)** 24; **c)** 120; **d)** 144; **e)** 625.

Megoldás. Az első a kezdeti 5 számjegyből választhatjuk, a másodikat a megmaradt 4-ből, a harmadikat az előző választás után maradt 3 közül, végül az utolsót 2 számjegy közül. Így $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = V_5^4 = 120$ számot alkothatunk. A helyes válasz **c)**.

2. *Hány egész szám teljesíti a* $(n+1) \mid \left(n^2 + 1\right)$ *relációt?*

a) 1; **b)** 0; **c)** 2; **d)** 3; **e)** 4.

Tartalomjegyzék

Megoldás. Az n^2+1 felbontható a következőképpen:

$$n^2+1=n^2-1+2=(n-1)(n+1)+2.$$

Így az $(n+1)\mid\left(n^2+1\right)$ feltétel ekvivalens lesz az $(n+1)\mid 2$-vel, mivel $n+1$ osztja n^2-1-et. A 2 egész osztói a -2, -1, 1, 2 s ezek az $n=-3,\ -2,\ 0,\ 1$-re állnak elő $n+1$ alakban. Tehát a felsorolt négy szám teljesíti az összefüggést. A helyes válasz **e)**.

4. *Egy n oldalú konvex sokszög belsejében felveszünk k pontot úgy, hogy az $(n+k)$ pontok közül bármely három nem kollineáris. Felbontjuk a sokszöget háromszögekre úgy, hogy a háromszögek csúcsai az $(n+k)$ pontok közül legyenek. Hány háromszög keletkezik?*

a) $n+k$; **b)** $n\cdot k$; **c)** $n+k-1$; **d)** $n+2(k-1)$; **e)** $n+2k-1$.

Megoldás. Feltételezzük, hogy felbontottuk a sokszöget a kért feltételek szerint. Meg számoljuk, hogy a keletkezett háromszögek szögei összesen hány fokot adnak. A sokszög szögei felosztódnak és részei lesznek a háromszögek szögeinek. Innen $(n-2)\cdot 180^\circ$ adódik. A belsőpontok körül 360° a szögek mértékének összege. Tehát összesen $k\cdot 360^\circ+(n-2)\cdot 180^\circ$ a háromszögek szögeinek az összege. Minden szöget egyszer számoltunk és minden háromszögben a szögek a összege 180° és a $k\cdot 360^\circ+(n-2)\cdot 180^\circ$-ból $n+2(k-1)$ háromszöget lehet alkotni.

A következő módszer a felbontás megszerkeszthetőségét bizonyítja. Felvesszük a háromszög belsejében az első pontot s felbontjuk a sokszöget háromszögekre, úgy, hogy a háromszögek egyik csúcsa a belsőpont legyen. A következő pont egy háromszög belsejébe kerül, ezt a háromszöget is felbontjuk háromszögekre. Ezt folytatva tovább, a következő pont egy háromszögbe kerül, amelyet felbontunk háromszögekre. A helyes válasz **d)**.

5. *Az $S_n=1\cdot C_1^1+2\cdot\left(C_2^1+C_2^2\right)+...+n\cdot\left(C_n^1+C_n^2+\ \ ...\ \ +C_n^n\right)$ összeg egyenlő:*

a) $\dfrac{n(n+1)}{2}+(n-1)2^{n+1}$; **b)** $(n-1)2^{n+1}+2-\dfrac{n(n+1)}{2}$;

c) $(n+1)2$; **d)** $(n-1)2^{n+1}$; **e)** $(n-1)2^{n+1}-2$.

Megoldás

$$S_n=1\cdot C_1^1+2\cdot\left(C_2^1+C_2^2\right)+3\cdot\left(C_3^1+C_3^2+C_3^3\right)+...+n\cdot\left(C_n^1+C_n^2+...+C_n^n\right)=$$
$$=1\cdot\left(2^1-C_1^0\right)+2\cdot\left(2^2-C_2^0\right)+...+n\cdot\left(2^n-C_n^0\right)=$$
$$=1\cdot 2^1+2\cdot 2^2+...+n\cdot 2^n-(1+2+...+n)=$$
$$=2\left(1+2\cdot 2^1+...+n\cdot 2^{n-1}\right)-\frac{(n+1)n}{2}$$

$$1+2\cdot 2^1+...+n\cdot 2^{n-1}=\left(1+...+2^n\right)+\left(2+2^2+...+2^n\right)+...+\left(2^{n-1}+2^n\right)=$$
$$=\left(2^n-1\right)+2\left(2^{n-1}-1\right)+2^2\left(2^{n-2}-1\right)+...+2^{n-1}(2-1)=$$

$$= n\cdot 2^n - \left(1+2+...+2^{n-1}\right) = n\cdot 2^n - 2^n + 1 = (n-1)\cdot 2^n + 1$$

$S_n = 2\left[(n-1)\cdot 2^n + 1\right] - \dfrac{n(n+1)}{2} = (n-1)\cdot 2^{n+1} + 2 - \dfrac{n(n+1)}{2}$. A helyes válasz **b)**.

6. *Az* $S = \dfrac{C_n^1}{C_n^0} + \dfrac{2C_n^2}{C_n^1} + \dfrac{3C_n^3}{C_n^2} + ... + \dfrac{nC_n^n}{C_n^{n-1}}$ *összeg egyenlő:*

a) $\dfrac{n(n+1)}{2}$; **b)** n; **c)** $\dfrac{n(n-1)}{2}$; **d)** $n+1$; **e)** $2n+1$.

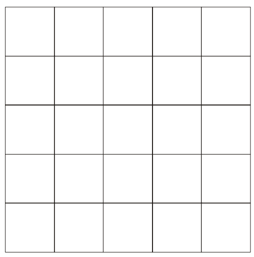
Megoldás. Kiszámoljuk az általános tagot.

$$\frac{k\cdot C_n^k}{C_n^{k-1}} = \frac{k\cdot \dfrac{n\ !}{k\ !\ (n-k)\ !}}{\dfrac{n\ !}{(k-1)\ !\ (n-k+1)\ !}} = n-k+1,\quad k\in\{1,2,...,n\}$$

$$S = \frac{C_n^1}{C_n^0} + \frac{2C_n^2}{C_n^1} + \frac{3C_n^3}{C_n^2} + ... + \frac{nC_n^n}{C_n^{n-1}} = n + (n-1) + ... + 1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

A helyes válasz **a)**.

7. *Hány négyzet látható az alábbi ábrán:*



a) 1; **b)** 25; **c)** 51; **d)** 55; **e)** 26.

Megoldás.
Az 1×1-es négyzetek száma: 25.
Az 2×2-es négyzetek száma: 16.
Az 3×3-es négyzetek száma: 9.
Az 4×4-es négyzetek száma: 4.
Az 5×5-es négyzetek száma: 1.

Összesen $1+4+9+16+25=55$ négyzet látható. A helyes válasz **d)**.

8. *Az* $\dfrac{1}{V_2^2} + \dfrac{1}{V_3^2} + \dfrac{1}{V_4^2} + ... + \dfrac{1}{V_n^2} = \dfrac{10}{11}$ *egyenlet megoldása:*

a) 13; **b)** 11; **c)** 9; **d)** 16; **e)** 22.

Megoldás. Mivel $V_n^k = \dfrac{n\ !}{(n-k)\ !}$ az egyenlet a következőképpen alakul:

$$\frac{1}{2\ !}+\frac{1\ !}{3\ !}+\frac{2\ !}{4\ !}+...+\frac{(n-2)\ !}{n\ !}=\frac{10}{11}\ \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{(n-1)\cdot n}=\frac{10}{11}\ \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+...+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=\frac{10}{11}\ \Leftrightarrow\ 1-\frac{1}{n}=\frac{10}{11}.$$

Innen $n=11$. A helyes válasz **b)**.

9. *Ha* T_n *az* n*-edik tagja a* $\left(\sqrt[3]{2}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^n$ *kifejtésének akkor a* $\frac{T_7}{T_{n-5}}=\frac{1}{6}$ *egyenlet megoldása:*

a) $n=3$; **b)** $n=6$; **c)** $n=9$; **d)** $n=36$; **e)** $n=13$.

Megoldás. $\left(\sqrt[3]{2}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\sqrt[3]{2}^{\,n-k}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^k=\sum_{k=0}^{n}C_n^k 2^{\frac{n-k}{3}}3^{-\frac{k}{3}}$.

Innen $T_7=C_n^6 2^{\frac{n-7}{3}}3^{-\frac{7}{3}}$ és $T_{n-5}=C_n^{n-6}2^{\frac{5}{3}}3^{\frac{5-n}{3}}=C_n^6 2^{\frac{5}{3}}3^{\frac{5-n}{3}}$.

Tehát $\frac{T_7}{T_{n-5}}=\frac{C_n^6 2^{\frac{n-7}{3}}3^{\frac{-7}{3}}}{C_n^6 2^{\frac{5}{3}}3^{\frac{5-n}{3}}}=2^{\frac{n}{3}-4}3^{-4+\frac{n}{3}}=6^{\frac{n}{3}-4}$, de $\frac{T_7}{T_{n-5}}=\frac{1}{6}$. Következik, hogy $6^{\frac{n}{3}-4}=\frac{1}{6}\ \Leftrightarrow\ \frac{n}{3}-4=-1$. Innen adódik, hogy $n=9$. A helyes válasz **c)**.

10. *Ha az ötödik tag a legnagyobb a* $(2+m)^m$ *binom kifejtésében akkor:*

a) $m=3$; **b)** $m=13$; **c)** $m=5$; **d)** $m=8$; **e)** $m=29$.

Megoldás. $(2+m)^m=\sum_{k=0}^{m}C_m^k 2^{m-k}m^k$. Innen $T_5=C_m^4 2^{m-4}m^4$. A feladat szerint teljesülnie kell a $T_4<T_5$ egyenlőtlenségnek. Behelyettesítve a $T_4=C_m^3 2^{m-3}m^3$-et az egyenlőtlenségbe, kapjuk, hogy $C_m^3 2^{m-3}m^3<C_m^4 2^{m-4}m^4\ \Leftrightarrow\ 2C_m^3<mC_m^4\ \Leftrightarrow\ 8<m(m-3)\ \Leftrightarrow\ m^2-3m-8>0$. Megoldva az egyenlőtlenséget kapjuk, hogy $m\geq 5$.

Ha $m>5$ akkor teljesülnie kell a $T_5>T_6$ egyenlőtlenségnek. Behelyettesítve a $T_6=C_m^5 2^{m-4}m^4$-et az egyenlőtlenségbe, kapjuk, hogy $C_m^5 2^{m-5}m^5<C_m^4 2^{m-4}m^4\ \Leftrightarrow\ mC_m^5<2C_m^4\ \Leftrightarrow\ 10>m(m-4)\ \Leftrightarrow\ m^2-4m-10<0$: megoldva az egyenlőtlenséget kapjuk, hogy $m\leq 5$. Tehát $m=5$. A helyes válasz **c)**.

11. *Az* $(a+2b-c)^{2001}$ *kifejtésében az együtthatók összege:*

a) 1; **b)** 2^{2001}; **c)** 4^{2001}; **d)** 3^{2001}; **e)** 0.

Megoldás. Az együtthatók összegét kapjuk, ha a kifejezésbe $a=b=c=1$-et helyettesítünk. Tehát $S=(1+2-1)^{2001}=2^{2001}$. A helyes válasz **e)**.

3. teszt (360. oldal)

Tartalomjegyzék

1. *Az* $f:[0,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2x^2-x+3, & x\in[0,1]\\ 2+x+\sqrt{x}, & x\in[1,2]\end{cases}$ *függvény képtartománya*

a) $\left[\frac{23}{8},4+\sqrt{2}\right]$; **b)** $\left[3,4+\sqrt{2}\right]$; **c)** $\mathbb{R}$; **d)** *Egyéb*; **e)** *f nem jól értelmezett.*

Megoldás. Legyen $f_1:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_1(x)=2x^2-x+3$.

$$\min f_1=f_1\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{23}{8},\ f_1(0)=3 \text{ és } f_1(1)=4.$$

Mivel f_1 csökkenő a $\left[0,\frac{1}{4}\right]$ és növekvő az $\left[\frac{1}{4},1\right]$ intervallumon, ezért a végpontokban éri maximumát. Tehát $f_1([0,1])=\left[\frac{23}{8},4\right]$. Ha $f_2:[1,2]\to\mathbb{R}$, $f_2(x)=2+x+\sqrt{x}$, akkor $f_2(1)=4$ és $f_2(2)=4+\sqrt{2}$. Mivel f_2 növekvő az $[1,2]$ intervallumon, ezért 2-ben éri el maximumát és 1-ben minimumát. Tehát $f_2([1,2])=\left[4,4+\sqrt{2}\right]$ és így $f([0,2])=\left[\frac{23}{8},4+\sqrt{2}\right]$. A helyes válasz az **a)**.

2. *Az* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x-a|+|x-b|$ *függvény legkisebb felvett értéke* $a\le 0\le b$ *esetén pontosan akkor* $2\sqrt{-ab}$, *ha*

a) $|a|=|b|$; **b)** $ab=-1$; **c)** $a+b=0$; **d)** $ab=0$; **e)** *egyéb.*

Megoldás. A függvény explicit alakja:

$$f(x)=\begin{cases}2(a-x)+b-a, & \text{ha} \quad x\le a\\ b-a, & \text{ha} \quad x\in(a,b)\\ 2(x-b)+b-a, & \text{ha} \quad x\ge b\end{cases}.$$

Mivel f szigorúan csökkenő a $(-\infty,a)$, állandó az (a,b), szigorúan növekvő az $[b,+\infty)$ intervallumon, az f minimuma $b-a$. Ha $b-a=2\sqrt{-ab}$, akkor kapjuk, hogy $(\sqrt{-a}-\sqrt{b})^2=0$, tehát $a+b=0$. Így a helyes válasz **c)**.

3. *Adott az* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{(x-1)^2+1}+\sqrt{(x-3)^2+1}$ *függvény. Az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak?*

a) $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=1+\sqrt{5}$; **b)** $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=2\sqrt{2}$; **c)** *Végtelen sok minimumpont létezik;* **d)** *Nincs minimumpont*; **e)** *Két maximumpontja van.*

Megoldás. Ha tekintjük az $A(x,1)$, $B(1,0)$ és $C(3,0)$ pontot, akkor az $f(x)=|AB|+|AC|$. Ennek az összegnek akkor van minimuma, ha $AB=AC$ és így $x=2$, tehát a minimális érték $f(2)=2\sqrt{2}$. A helyes válasz **b)**.

Tartalomjegyzék

4. *Az* $f:(0,\infty)\to(-1,1)$, $f(x)=\dfrac{mx-1}{x+1}$ *függvény pontosan akkor injektív, ha*

a) $m\in(-1,1]$; **b)** $m=1$; **c)** $m=-1$; **d)** $m\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$;

e) *egyéb.*

Megoldás. Ahhoz, hogy a függvény injektivitásáról beszélhessünk előbb meg kell vizsgálni, hogy jól értelmezett függvényről beszélünk-e vagy sem. Tehát meg kell vizsgálni, hogy teljesül-e az $-1\le\dfrac{mx-1}{x+1}\le 1$ egyenlőtlenség minden $x\ge 0$ valós szám esetén. Az első egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha $m\ge -1$ és a második pontosan akkor ha $m\le 1$, tehát $m\in[-1,1]$. Másrészt

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{(x_1-x_2)(m+1)}{(x_1+1)(x_2+1)},$$

tehát az injektivitás szükséges és elégséges feltétele az, hogy $m\neq 1$. Így a helyes válasz **a)**.

5. *Ha* $a,b,c>1$, *akkor az* $E=\log_a\dfrac{b+c}{2}+\log_b\dfrac{c+a}{2}+\log_c\dfrac{a+b}{2}$ *kifejezés minimuma*

a) 0; **b)** 1; **c)** 2; **d)** 3; **e)** 9.

Megoldás. A számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenség alapján írhatjuk, hogy $E\ge\log_a\sqrt{bc}+\log_b\sqrt{ca}+\log_c\sqrt{ab}$. Mivel $\log_a\sqrt{bc}=\dfrac{1}{2}(\log_a b+\log_a c)$ az $x=\log_a b$, $y=\log_b c$ és $z=\log_c a$ jelölésekkel érvényes az alábbi egyenlőtlenség:

$$E\ge\frac{1}{2}\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(y+\frac{1}{y}\right)+\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]\ge 3.$$

Mivel $a=b=c$ esetén $E=3$, az E minimuma 3. A helyes válasz a **d)**.

6. *Ha az* $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ *függvény teljesíti az* $f(1)=1$ *és* $f(m+n)=f(m)+f(n)+m+n-2$ *egyenlőséget bármely* $m,n\in\mathbb{N}$ *esetén, akkor* $f(2001)$ *értéke*

a) 2001001; **b)** 2001002; **c)** 1002001; **d)** 1001001

e) *meghatározhatatlan.*

Megoldás. Az adott összefüggés alapján $f(m+1)=f(m)+m$, tehát indukcióval igazolhatjuk, hogy $f(m)=1+1+2+3+...+(m-1)=\dfrac{(m-1)m}{2}+1$. Így a helyes válasz **a)**.

7. *Az* $f:\{1,2,3,\ldots,2002\}\to\{1,2,3,\ldots,2002\}$ *injektív függvények száma*

a) $2002\cdot 2001$; **b)** $2002!$; **c)** $1001\cdot 2001$; **d)** 2002^2; **e)** 2002.

Megoldás. Mivel az értelmezési tartomány és az értékkészlet ugyanannyi elemet tartalmaz minden injektív függvény bijektív is. Így az $\{1,2,3,\ldots,2002\}$ halmaz permutációinak számát kell meghatározni. Tehát a helyes válasz **b)**.

8. *Az* $f:\{1,2,3,\ldots,2001\}\to\{1,2,3,\ldots,2003\}$ *szigorúan növekvő függvények száma*

a) $2001\cdot 1001$; **b)** $2001+1001$; **c)** 2001^2; **d)** 2005003; **e)** 2001.

Megoldás. Ha $f(1)=3$, akkor a függvény csakis úgy lehet szigorúan növekvő, ha $f(x)=x+2$, $x=\overline{1,2001}$. Tehát ebben az esetben csak egy ilyen függvény létezik. Ha $f(1)=2$, akkor az $f(x)=x+1$ függvényhez képest valamelyik pontban lehet 2 a függvény ugrása. Így van 2001 függvény. Ha $f(1)=1$, akkor vagy egyáltalán nincs ugrás az identikushoz képest, vagy egy helyen van ugrás és ez lehet egy vagy két egység, vagy két helyen van egy-egy egységnyi ugrás. Így a lehetőségek száma $1+2001+C_{2000}^2+2000+2000+1=2005003$.

9. *Ha* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *szigorúan monoton, akkor* $f\circ f$

a) *szigorúan csökkenő*; **b)** *szigorúan növekvő;* **c)** *nem biztos, hogy monoton;* **d)** *szürjektív*; **e)** *bijektív*.

Megoldás. A helyes válasz **b)**, mert $x<y$-ból növekvő függvény esetén következik, hogy $f(x)<f(y)$ és így $f(f(x))<f(f(y))$ míg csökkenő függvény esetén $f(x)>f(y)$ de $f(f(x))<f(f(y))$.

10. *Az* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\max\left\{\sin x,\cos x\right\}$ *függvény*

a) *szigorúan növekvő* $\mathbb{R}$*-en;* **b)** *nem periodikus*; **c)** *periodikus*;

d) *csak* $\frac{\sqrt{2}}{2}$*-nél nagyobb értékeket vesz fel;* **e)** *nem vesz fel* $\frac{\sqrt{2}}{2}$*-nél nagyobb értékeket*.

Megoldás. Mivel $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\le\sqrt{2}$ és $x=\frac{\pi}{4}$ esetén $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ a d) és e) válaszok közül csak az e) helyes. Ugyanakkor $f(x+2\pi)=f(x)$, tehát a függvény periodikus is. Mivel nem konstans, nem lehet szigorúan monoton, tehát a helyes válaszok **c)** és **e)**.

4. teszt (361. oldal)

1. *Legyen* $z_1=a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}$ *és* $z_2=\dfrac{1-\overline{z_1}}{1+\overline{z_2}}$. z_1-z_2 *akkor és csak akkor valós, ha*

a) $z_1=i$; **b)** $\left|z_1+1\right|=\sqrt{2}$ *vagy* $z_1=\overline{z_1}\neq -1$; **c)** $\left|z_1+1\right|=\sqrt{2}$;

d) $z_1=1+2i$; **e)** $z_1=\overline{z_1}$.

Megoldás. $z_1 - z_2$ akkor és csak akkor valós, ha $z_1 - z_2 = \overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$.

A fentiek alapján a következő, egymással ekvivalens összefüggéseket írhatjuk:

$$z_1 - \frac{1-\overline{z_1}}{1+\overline{z_1}} = \overline{z_1} - \overline{\left(\frac{1-\overline{z_1}}{1+\overline{z_1}}\right)},\ z_1 - \frac{1-\overline{z_1}}{1+\overline{z_1}} = \overline{z_1} - \frac{1-z_1}{1+z_1},$$

$$z_1 - \overline{z_1} = \frac{\left(1-\overline{z_1}\right)\left(1+z_1\right) - \left(1-z_1\right)\left(1+\overline{z_1}\right)}{\left(1+\overline{z_1}\right)\left(1+z_1\right)},\ z_1 - \overline{z_1} = \frac{2\left(z_1 - \overline{z_1}\right)}{\left(1+\overline{z_1}\right)\left(1+z_1\right)}.$$

A fenti egyenlőség teljesül minden $z_1 = \overline{z_1}$ esetén, vagyis, ha $z_1 \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Ha $z_1 \neq \overline{z_1}$, akkor az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $1 + z_1 + \overline{z_1} + z_1\overline{z_1} = 2$, ahonnan a $z_1 = a + ib$ helyettesítéssel kapjuk, hogy $2 = (a+1)^2 + b^2$, vagyis $\sqrt{2} = \left|z_1 + 1\right|$. Következik, hogy a megoldás egy kör és egy egyenes egy pontja nélkül

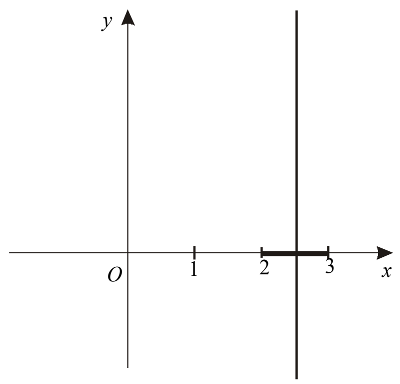
2. *A* $z^2 - 5z + 6 \le 0$ *egyenlőtlenséget teljesítő komplex számok geometriai képe*

a) *egy szakasz*; **b)** *egy szakasz és a felezőmerőlegese*; **c)** *két egymásra merőleges szakasz;* **d)** *egy kör és a belseje*; **e)** *az üreshalmaz.*

Megoldás. Ahhoz, hogy az egyenlőtlenségnek értelme legyen, a $z^2 - 5z + 6$ kifejezés valós értéket kell felvegyen. Tehát $z^2 - 5z + 6 = r \le 0$. Így $z^2 - 5z + 6 - r = 0$, tehát $z_{1,\,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{1+4r}}{2}$, ahol $r \le 0$.

I. eset. Ha $1 + 4r \ge 0$, akkor $r \in \left[0, -\dfrac{1}{4}\right]$, és z_1, z_2 valós számok, valamint $z_1 \in \left[\dfrac{5}{2}, 3\right]$, $z_2 \in \left[2, \dfrac{5}{2}\right]$. Ebben az esetben $z \in \left[\dfrac{5}{2}, 3\right] \cup \left[2, \dfrac{5}{2}\right] = [2, 3]$.

II. eset. Ha $1 + 4r < 0$, akkor $r \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{4}\right)$, és $z_{1,\,2} = \dfrac{5}{2} \pm \dfrac{u}{2} i$, ahol $u = \sqrt{-4r-1}$, $u \in (0, +\infty)$. Tehát ebben az esetben $z = \dfrac{5+iu}{2}$, ahol $u \in \mathbb{R}^*$.



A fenti esetek alapján a megoldáshalmaz a $[2,3]$ szakasz és az $\left\{z = \frac{5+iu}{2} \middle/ u \in \mathbb{R}\right\}$ felezőmerőlegese, tehát a helyes válasz a **b)**.

3. *Az* $f : \mathbb{N} \to \{-1, 1, -i, i\}$, $f(n) = i^n$ *függvény*

a) *periodikus*; **b)** *injektív*; **c)** *szürjektív*; **d)** *konstans*; **e)** *monoton.*

Megoldás. Kiszámolva a függvény első néhány értékét, rendre kapjuk, hogy $f(0) = 1$, $f(1) = i$, $f(2) = f(1) \cdot i = -1$, $f(3) = f(2) \cdot i = -i$, $f(4) = 1$, ahonnan az $f(n) = f(n-1)i$, $n \in N^*$ képzési szabály alapján következik, hogy a függvény periodikus, és főperiódusa 4. Viszont a függvény szürjektív is, tehát az **a)** és a **c)** a helyes válaszok.

4. *A* $z \cdot \overline{z} = z$ *egyenlet gyökeinek száma*

a) 0; **b)** 1; **c)** 2; **d)** 3; **e)** *végtelen sok.*

Megoldás. $z = 0$ gyöke az egyenletnek. Ha $z \neq 0$, következik, hogy $\overline{z} = 1$, vagyis $z = 1$. Tehát a helyes válasz a **c)**.

5. *A* $||z| - 1| = 1$ *egyenlőséget teljesítő komplex számok geometriai képe*

a) *egy kör*; **b)** *két egyenes*; **c)** *két kör*;
d) *egy kör és egy pont*; **e)** *egy egyenes*.

Megoldás

I. eset. Ha $|z| - 1 = 1$, akkor $|z| = 2$, tehát a megoldás egy kör.
II. eset. Ha $|z| - 1 = -1$, akkor $|z| = 0$, vagyis $z = 0$, tehát a megoldás egy pont.
A fentiek alapján a helyes válasz a **d)**.

6. *Ha* $z = 2 - 2i$, *akkor a* $H = \left\{n \in \mathbb{N}^* \middle/ z^n \in \mathbb{R}_+\right\}$ *halmaz*

a) $= \left\{4k \middle/ k \in \mathbb{N}^*\right\}$; **b)** $= \left\{8k+4 \middle/ k \in \mathbb{N}^*\right\}$; **c)** $= \left\{8k \middle/ k \in \mathbb{N}^*\right\}$;

d) $= \varnothing$; **e)** $= \left\{8k+2 \middle/ k \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Megoldás. Átírva z-t trigonometriai alakba, kapjuk, hogy

$$z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right),$$

ahonnan következik, hogy $z^n = \left(2\sqrt{2}\right)^n \left(\cos\frac{-n\pi}{4} + i\sin\frac{-n\pi}{4}\right)$.

Tehát a $z^n \in \mathbb{R}_+$ feltétel egyenértékű az $\sin\frac{-n\pi}{4} = 0$ (1) és $\cos\frac{-n\pi}{4} > 0$ (2) feltételekkel. (1)-ből következik, hogy $\frac{-n\pi}{4} = l\pi$, tehát $n = -4l$, ahol $l \in \mathbb{N}^*$.

(2) alapján $-n\dfrac{\pi}{4}=2m\pi$, tehát $n=-8m$, ahol $m\in\mathbb{N}^*$. A fentiek alapján $H=\left\{8k/k\in\mathbb{N}^*\right\}$ és a helyes válasz **c)**.

7. *A* $\dfrac{2}{z}+\dfrac{4}{\bar{z}}=3+i$ *egyenlet megoldáshalmaza*

a) $\{1+i\}$; **b)** $\{i\}$; **c)** $\{1-i\}$; **d)** $\{-i\}$; **e)** $\varnothing$.

Megoldás. A $z=a+ib$ helyettesítéssel az egyenlet a következő – az eredetivel ekvivalens – alakban is írható:

$$\frac{2(a-ib)+4(a+ib)}{a^2+b^2}=3+i,$$

ahonnan a $\dfrac{6a}{a^2+b^2}=3$ és $\dfrac{2b}{a^2+b^2}=1$ egyenletrendszert kapjuk. A rendszer egyedüli megoldása az $a=b=1$, tehát $z=1+i$, és a helyes válasz az **a)**.

8. *Adott az* $A_0=\{1,i,1+i\}$ *halmaz. Egy lépés során a halmaz egyik elemét kicseréljük a következő szabály szerint: a* $z_0\in A_k$ *számot kicseréljük a* $\left(\sum_{z\in A_k} z\right)-2z_0$ *számmal, és az így kapott halmazt* A_{k+1}*-gyel jelöljük. Ennek a lépésnek az ismétlésével legkevesebb hány lépés segítségével érhetjük el a* $B=\{0,1,i\}$ *halmazt?*

a) 8; **b)** 16; **c)** 2001; **d)** *nem érhetjük el*; **e)** 2000.

Megoldás. Ha S_k-val jelöljük az A_k halmaz elemeinek összegét, és z_{ki}-vel az A_k halmaz elemeit, ahol $i\in\{1,2,3\}$, akkor általában

$$S_{k+1}=\left[\left(\sum_{z\in A_k} z\right)-2z_{k1}\right]+\left[\left(\sum_{z\in A_k} z\right)-2z_{k2}\right]+\left[\left(\sum_{z\in A_k} z\right)-2z_{k3}\right]=z_{k1}+z_{k2}+z_{k3},$$

tehát $S_{k+1}=S_k=\ldots=S_0=2+2i$. Viszont a B halmaz elemeinek összege $S_B=1+i$, tehát a helyes válasz a **d)**.

9. *A* $2^{\frac{z-\bar{z}}{2i}}+i\cdot 3^{\frac{z+\bar{z}}{16}}=z$ *egyenlet megoldásainak száma*

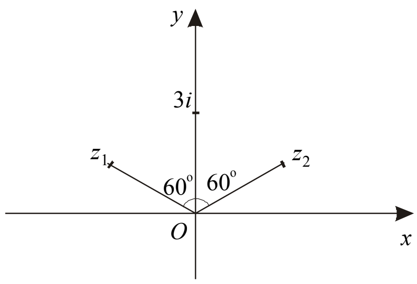
a) 0; **b)** 1; **c)** 2; **d)** 3; **e)** *végtelen sok.*

Megoldás. Ha $z=a-ib$, akkor $\dfrac{z-\bar{z}}{2i}=b$ és $\dfrac{z+\bar{z}}{2}=a$, tehát az adott egyenletből következik, hogy $2^b+i\cdot 3^{\frac{a}{8}}=a+ib$. Ez csak akkor lehetséges, ha $2^b=a$ és $3^{\frac{a}{8}}=b$. Ezekből az egyenlőségekből a $2^{3^{\frac{a}{8}}}=a$ egyenlethez jutunk. Ennek az egyik megoldása $a = 8$ és így $b = 3$. Az egyenletnek két megoldása van mivel a $2^{3^{\frac{a}{8}}}$ függvény szigorúan konvex és grafikus képe nem érinti az első szögfelezőt. Így a helyes válasz **c)**.

10. *Egy szabályos hatszög egyik csúcsának affixuma* $3i$ *és a középpontja az origóban van. A két szomszédos csúcs affixumának négyzetösszege*

a) i; **b)** 0; **c)** 1; **d)** $-3i$; **e)** $3i$.

Megoldás. A két szomszédos csúcsot, amint azt az ábra is mutatja, úgy kapjuk meg, hogy a $z = 3i$ affixumú pontot $\frac{\pi}{3}$, illetve $-\frac{\pi}{3}$ szöggel elforgatjuk az origó körül.



Tehát, mivel $z = 3i = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$, következik, hogy

$$z_1 = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right)\right),$$

$$z_2 = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right)\right),$$

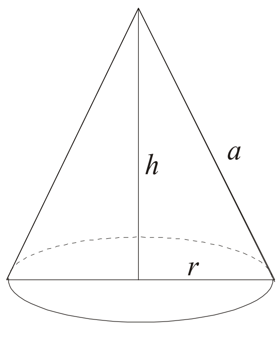
ahonnan $z_1^2 + z_2^2 = 0$, tehát a helyes válasz **b)**.

5. teszt (362. oldal

1. *Egy egyenes körkúp magassága* $\sqrt{75x^2 + 130x + 16}$ *és alapkörének sugara* $3 - 5x$, *ahol* $-\frac{1}{2} < x < \frac{3}{5}$. *A kúp palástfelszíne akkor maximális, ha*

a) $x = \frac{1}{3}$; **b)** $x = \frac{2}{3}$; **c)** $x = \frac{2}{5}$; **d)** $x = \frac{1}{20}$; **e)** $x = \frac{1}{6}$.

Megoldás. Legyen a kúp alkotója a. A feltételek szerint $a^2 = 75x^2 + 130x + 16 + 9 - 30x + 25x^2 = (10x + 5)^2$, tehát $a = |10x + 5|$.



A kúp palástfelszíne $F_p = \frac{2r\pi a}{2} = \pi \cdot |10x + 5| \cdot (3 - 5x)$.

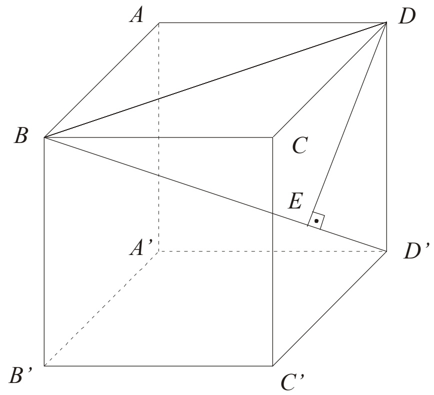
Ha $\frac{3}{5} > x > -\frac{1}{2}$, akkor $|10x + 5| = 10x + 5$, és F_p maximális, ha $x = \frac{1}{20}$, ebben az esetben $F_p = \frac{121\pi}{8}$. A helyes válasz **d)**.

2. *Az* $ABCDA'B'C'D'$ *kockában a* D *csúcs távolsága a* BD' *átlótól*:

Tartalomjegyzék

a) $\frac{a^2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$; **b)** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$; **c)** $\frac{a\sqrt{6}}{6}$; **d)** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$; **e)** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

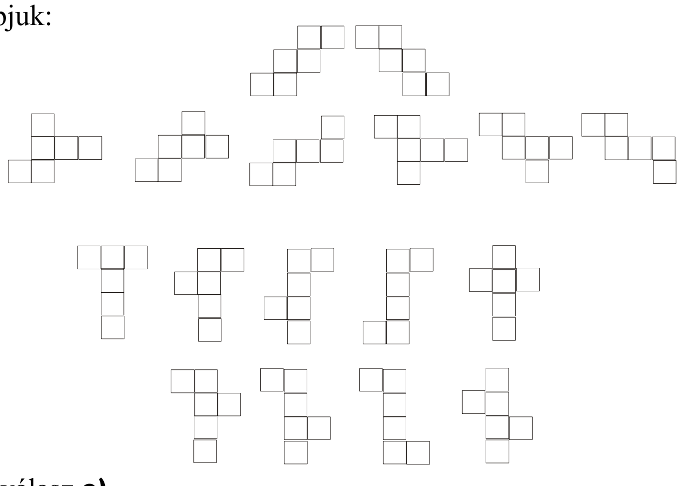
Megoldás. A BDD' háromszögben $BD = a\sqrt{2}$, $DD' = a$ és $BD' = a\sqrt{3}$. Mivel $DE = \frac{BD \cdot DD'}{BD'} = \frac{a^2\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$, következik, hogy a helyes válasz a **b)**.



3. *Egy kocka síkra való lefejtése hány különböző alakzatot eredményezhet (összefüggő kiterítéséről van szó):*

a) 4; **b)** 5; **c)** 6; **d)** 7; **e)** több mint 8.

Megoldás. A kiterítéseket aszerint osztályozzuk, hogy legtöbb hány négyzet középpontja kerülhet egy egyenesre. Ha a forgással egymásba vihető kiterítéseket azonosaknak tekintjük (de az egymás szimmetrikusait nem), akkor a következő alakzatokat kapjuk:



Tehát a helyes válasz **e)**.

4. *Az* $ABCD$ *tetraéderben* $AB = CD = 5$, $BC = DA = \sqrt{34}$, $AC = BD = \sqrt{41}$. *A tetraéder térfogata*:

a) 20; **b)** 40; **c)** 60; **d)** 10; **e)** 30.

(*Felvételi 1997*)

Megoldás. Az egyenlő oldalú tetraéderek jellemzési tétele alapján a tetraéder egyenlő oldalú és így a térfogatát a

Tartalomjegyzék

$$12V = \sqrt{2\left(a^2+b^2-c^2\right)\left(a^2-b^2+c^2\right)\left(-a^2+b^2+c^2\right)}$$

összefüggés alapján számíthatjuk ki, tehát a helyes válasz **a)**.

5. *Egy téglatest éleinek összege* L. *A teljes felszínének maximuma*

a) $\frac{L^2}{24}$; **b)** $\frac{L^2}{12}$; **c)** $\frac{2L^2}{3}$; **d)** $\frac{6L^2}{17}$; **e)** $\frac{3L^2}{4}$.

Megoldás. Legyen a, b és c a téglatest három különböző élének hossza. A téglatest éleinek összege $L = 4(a+b+c)$, teljes felszíne pedig $F = 2(ab+bc+ca)$. Írhatjuk, hogy

$$\frac{L^2}{16} = (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac) \geq 3(ab+bc+ac) = \frac{3}{2}F,$$

és a fenti egyenlőtlenségben $a = b = c = \frac{L}{3}$ esetben áll fenn egyenlőség. Tehát

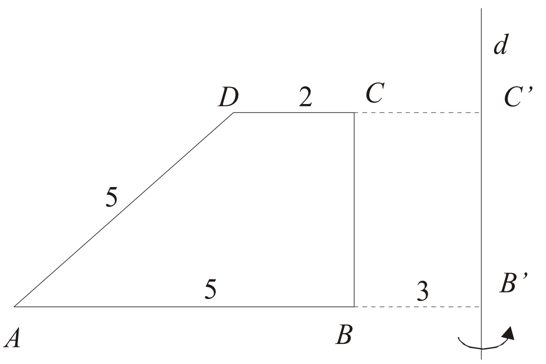
$\max\limits_{a+b+c=L} F = \frac{L^2}{24}$, és a helyes válasz az **a)**.

6. *Az* $ABCD$ *derékszögű trapézt (*$BC \perp AB$*) a* BC*-vel párhuzamos* d *egyenes körül forgatunk, amely a trapézon kívül,* BC*-től* 3 cm*-re helyezkedik el. Számítsd ki a forgástest térfogatát, ha* $AB = 5$*,* $AD = 5$ *és* $CD = 2$.

a) 256π; **b)** 36π; **c)** 225π; **d)** 136π; **e)** 144π.

(Felvételi 1997)

Megoldás. A feltétel alapján csak az $AB \| CD$ eset állhat fenn (másként $CD \geq 5$ kellene teljesüljön). Így a trapéz megforgatása után egy olyan csonka kúp keletkezik, amelynek a közepéből ki van vágva egy henger. Ennek a hengernek a térfogata $V_h = BB'^2\pi \cdot BC = 36\pi$. A teljes csonka kúp térfogata



$$V_{cs} = \frac{\pi BC}{3}\left(AB'^2 + DC'^2 + DC' \cdot AB'\right) = \frac{4\pi}{3} \cdot 129 = 172\pi,$$

tehát a keletkezett test térfogata $V = V_{cs} - V_h = 136\pi$, és a helyes válasz a **d)**.

7. *Az* ABC *derékszögű (*$m(\hat{A}) = 90^\circ$*) háromszöglapot megtűrjük az* $AD = a$ *magassága mentén úgy, hogy az* ADB *és* ADC *síkok merőlegesek legyenek. Az* $ABCD$ *tetraéder térfogata:*

a) $\frac{a^3}{2}$; **b)** $\frac{a^3}{8}$; **c)** $\frac{a^3}{6}$; **d)** a^3; **e)** $\frac{a^3}{3}$.

(Felvételi 1997)

Tartalomjegyzék

Megoldás. A feltétel szerint $(ABD) \perp (ADC)$ és $BD \perp AD$, ebből következik, hogy $BD \perp (ADC)$, tehát $BD \perp DC$. Az $ABCD$ tetraéder térfogata

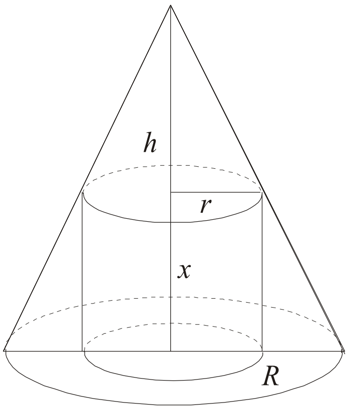
$$V = \frac{T_{BCD} \cdot AD}{3} = \frac{BD \cdot DC}{2} = \frac{AD}{3}.$$

Az $ADC_\Delta \sim BDA_\Delta$ hasonlóságból következik, hogy $\frac{BD}{AD} = \frac{AD}{DA} \Rightarrow$ $AD^2 = BD \cdot DC$, tehát $V = \frac{a^3}{6}$, és a helyes válasz a **c)**.

8. *Az R alapsugarú és h magasságú kúpba írt maximális teljes felszínű valódi henger felszíne:*

a) $\frac{\pi h R^2}{h-R}$; **b)** $\frac{\pi h^2 R}{2(h-R)}$; **c)** $\frac{\pi h^2 R}{h-R}$; **d)** $\frac{\pi h R^2}{2(h-R)}$; **e)** $\pi h R$.

Megoldás. x-szel jelölve a henger magasságát, és r-rel az alapkörének sugarát, írhatjuk, hogy $\frac{r}{R} = \frac{h-x}{h}$, ebből következik, hogy $x = \frac{(R-r)\cdot h}{R}$.



A henger teljes felszíne r függvényében: $F = F_p + 2r^2\pi = 2r\pi x + 2r^2\pi =$

$$= 2\pi\left(\frac{r(R-r)h}{R} + r^2\right) = \frac{2\pi}{R}\left((R-h)r^2 + Rh\cdot r\right).$$

Ha $R > h$, akkor az előbbi másodfokú függvény akkor maximális, ha r maximális, vagyis $r = R$, a henger elfajult (egybeesik a kúp alapkörével), és $F = 2\pi R(R-h) + Rh$.

Ha $R < h$, akkor a függvény maximális értéke

$$F\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{4\pi^2 h^2}{\frac{2\pi}{R}(R-h)} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{h^2 R}{h-R}.$$

Tehát ebben az esetben a **b)** válasz a helyes.

9. *Az R sugarú gömb köré olyan csonka kúpot írunk, amelynek a nagy alapján négyszer nagyobb sugarú kör van, mint a kisalapján. A csonka kúp térfogata:*

a) $\frac{2\pi R^3}{7}$; **b)** $\frac{7\pi R^3}{2}$; **c)** $2\pi R^3$; **d)** $7\pi R^3$; **e)** $14\pi R^3$.

(Felvételi 1997)

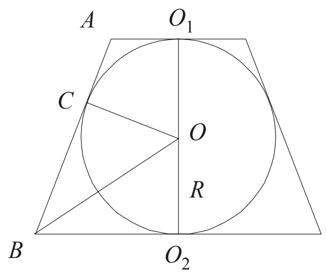
Megoldás. Az ábrán látható jelöléseket használva, a következő összefüggéseket írhatjuk:

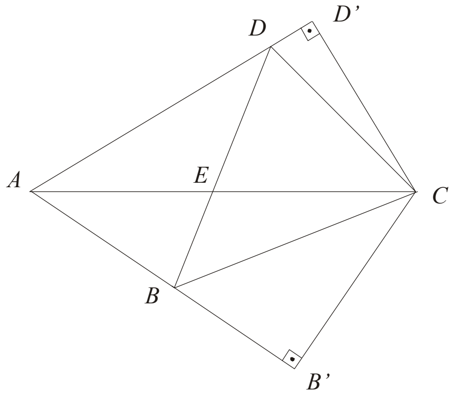
$4AO_1 = 4BO_2$, $AB = AO_1 + BO_2$ (mert $ACO_\Delta \equiv AO_1O_\Delta$ és $BCO_\Delta \equiv BO_2O_\Delta$),

$$AB^2 = (2R)^2 + \left(BO_2 - AO_1\right)^2 = 25AO_1^2,$$

Tartalomjegyzék

ahonnan kapjuk, hogy $25AO_1^2 = 4R^2 + 9AO_1^2$ és $4AO_1^2 = R^2$. Következik, hogy $V_k = \frac{2R\pi}{3}\cdot\left(AO_1^2 + BO_2^2 + AO_1BO_2\right) = \frac{2R\pi}{3}21AO_1^2 = \frac{7}{2}\cdot R^3\pi$, vagyis a helyes válasz a **b)**.





10. *Az $ABCD$ tetraéderben $m(A\hat{B}C) \geq 90°$ és $m(A\hat{D}C) \geq 90°$.*

a) $AC < BD$; **b)** $AC = BD$; **c)** $AC > BD$; **d)** $AC = \frac{1}{2}BD$; **e)** *Egyik sem.*

Megoldás. Az előbbi ábrán látható módon lefejtjük a tetraédert a síkba, így egy $ABCD$ négyszöget kapunk. Meghúzzuk a C-ből az AD-re a CD' merőlegest ($D' \in AD$), és AB-re a $B'C$ merőlegest ($B' \in AB$).

Az $AB'CD'$ négyszög körbeírható, és ennek a körnek az átmérője AC. BD a körön belül van, tehát $BD \leq AC$.

Legyen $\{E\} = AC \cap BD$. Visszahajtva a két lapot eredeti helyzetükbe, a BDE háromszögben $BD < BE + DE \leq AC$, tehát a **c)** a helyes válasz.

6. teszt (363. oldal)

1. *A b paraméter milyen értékeire van az $x^3 + a(a+1)x^2 + ax - a(a+b) - 1 = 0$ egyenletnek a-tól független gyöke.*

a) 0; **b)** 1; **c)** 2; **d)** a **e)** –1

1. megoldás. Legyen α az egyenlet azon gyöke, mely független a-tól. Ekkor

$$\alpha^3 + a(a+1)\alpha^2 + a\alpha - a(a+b) - 1 = 0, \text{ bármely } a \in \mathbb{R} \text{ esetén.}$$

Mivel a fenti egyenlőség bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén teljesül, igaz kell legyen $a = 0$-ra is, ahonnan kapjuk az $\alpha^3 = 1$ egyenletet. Ennek az egyenletnek a gyökei

$$\alpha_k = \cos\frac{k\pi}{3} + i\sin\frac{k\pi}{3}, \text{ ahol } k = 0,1,2, \text{ tehát } \alpha_0 = 1,\ \alpha_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3},$$

$$\alpha_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}.$$

Tartalomjegyzék

I. eset, ha $\alpha = 1$. Ekkor $1 + a(a+1) + a - a(a+b) - 1 = 0$, ahonnan kapjuk, hogy $a(2-b) = 0$, tehát $b = 2$.

II. eset, ha $\alpha = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$. Ekkor behelyettesítve az egyenletbe kapjuk, hogy:

$$\begin{array}{c}(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) + a(a+1)\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) + \\ +a\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) - a(a+b) - 1 = 0\end{array}.$$

A következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{cases}\cos 2\pi + a(a+1)\cos\frac{4\pi}{3} + a\cos\frac{2\pi}{3} = a(a+b) + 1 \\ \sin 2\pi + a(a+1)\sin\frac{4\pi}{3} + a\sin\frac{2\pi}{3} = 0\end{cases},$$

amely egyenértékű a következővel:

$$\begin{cases}a(3a+b+2) = 0 \\ a = 0\end{cases}.$$

Ekkor $a = 0$ és $b \in \mathbb{R}$, tehát α nem független a-tól.

III. eset, ha $\alpha = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$. Ekkor behelyettesítve az egyenletbe kapjuk, hogy: $(\cos 4\pi + i\sin 4\pi) + a(a+1)\left(\cos\frac{8\pi}{3} + i\sin\frac{8\pi}{3}\right) +$

$$+a\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) - a(a+b) - 1 = 0.$$

Innen adódik, hogy

$$\begin{cases}a(3a+2b+2) = 0 \\ a = 0\end{cases},$$

tehát $a = 0$ és $b \in \mathbb{R}$, tehát α nem független a-tól.

2. megoldás. Az a hatványai szerint rendezzük az egyenletet:

$$a^2\left(x^2 - 1\right) + a\left(x^2 + x - 2\right) + x^3 - 1 = 0.$$

Az egyenletnek pontosan akkor van a-tól független gyöke ha az előbbi egyenlőség nem egyenlet a-ra hanem azonosság. Így $x^2 - 1 = 0$, $x^2 + x - b = 0$ és $x^3 - 1 = 0$, tehát $x = 1$ és így $b = 2$.

2. *Az $x^3 + px + q = 0$ egyenlet gyökeit jelöljük x_1-gyel, x_2-vel és x_3-mal és minden természetes k esetén legyen $S_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k$. Az $E = \frac{6S_5}{5S_2S_3}$ kifejezés*

a) 1; **b)** 2; **c)** 0; **d)** függ *q*-tól **e)** függ *p*-től

Megoldás. A Vieté összefüggések alapján:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = p, \\ x_1x_2x_3 = -q \end{cases}$$

tehát $S_1 = 0$.

$$\left(x_1 + x_2 + x_3\right)^2 = \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) + 2\left(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1\right),$$

tehát $S_2 = -2p$. Mivel x_1, x_2 és x_3 gyökök:

$$(R)\ \begin{cases} x_1^3 + px_1 + q = 0 \\ x_2^3 + px_2 + q = 0, \\ x_3^3 + px_3 + q = 0 \end{cases}$$

az egyenlőségeket összeadva kapjuk, hogy $S_3 + pS_1 + 3q = 0$, tehát $S_3 = -3q$.

Továbbá, ha megszorozzuk az (R) rendszer megfelelő sorait x_1^2, x_2^2 és x_3^2-tel és összeadjuk, akkor az $S_5 + pS_3 + qS_2 = 0$ összefüggéshez jutunk, és így $S_5 = 5pq$.

Végül, tehát $E = \dfrac{6S_5}{5S_2S_3} = \dfrac{30pq}{30pq} = 1$.

3. *Ha* x_1, x_2, ..., x_n *az* $x^n + x^{n-1} + ... + x + 1 = 0$ *egyenlet gyökei, akkor az* $S = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x_k - 2}$ *összeg értéke*

a) $\dfrac{n \cdot 2^n - 1}{2^n + 1}$; **b)** $\dfrac{(n+1) \cdot 2^n + 1}{2^n - 1}$; **c)** $\dfrac{n \cdot 2^{n+1} - 2}{n+1}$;

d) $\dfrac{1 + (n-1) \cdot 2^n}{1 - 2^{n+1}}$; **e)** $\dfrac{(n+1) \cdot 2^n}{2^{n+1} - 1}$.

1. megoldás. $P(0) \neq 0$, $P(1) \neq 1$ következik, hogy $x = 0$ és $x = 1$ nem lehetnek a $P(x) = 0$ egyenlet gyökei. $x^n + x^{n-1} + ... + x + 1 = 0$ egyenlet mindkét oldalát beszorozzuk, $x - 1$-gyel, kapjuk az $x^{n+1} = 1$ egyenletet, amely gyökei $x_k = \cos\dfrac{2k\pi}{n+1} + i\sin\dfrac{2k\pi}{n+1}$, $k \in \{1, 2, ..., n\}$, mivel $x \neq 1$-gyel.

Tehát a gyökök mind különbözőek és $x_k \neq 2$ bármely $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ esetén, így S_n-nek van értelme, felírva a Vieté összefüggéseket az $x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1 = 0$ egyenletre, kapjuk:

$$\begin{cases} \sum x_1 = (-1)^1 \\ \sum x_1 x_2 = (-1)^2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum x_1 x_2 \dots x_{n-1} = (-1)^{n-1} \\ x_1 x_2 \dots x_n = (-1)^n \end{cases}$$

Matematikai indukcióval igazoljuk, hogy bármely $n \geq 2$

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{n}(x_i - 2) = \prod_{i=1}^{n} x_i - 2\left(\sum x_1 \dots x_{n-1}\right) + 2^2\left(\sum x_1 \dots x_{n-2}\right) + \dots \\ \dots + (-2)^{n-1}\left(\sum x_1\right) + (-2)^n \end{aligned} \quad (1)$$

$n = 2$ esetén $(x_1 - 2)(x_2 - 2) = x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4$.

$n = 3$ esetén

$$(x_1 - 2)(x_2 - 2)(x_3 - 2) = x_1 x_2 x_3 - 2(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1) + 4(x_1 + x_2 + x_3) - 8.$$

Feltételezzük, hogy az állítás igaz bármely $k \leq n$ természetes szám esetén és igazoljuk $(n+1)$-re.

$$\prod_{i=1}^{n+1}(x_i - 2) = (x_{n+1} - 2)\prod_{i=1}^{n}(x_i - 2) =$$

$$= (x_{n+1} - 2)\left[\prod_{i=1}^{n} x_i - 2\left(\sum x_1 \dots x_{n-1}\right) + 2^2\left(\sum x_1 \dots x_{n-2}\right) + \dots + (-2)^n\right] =$$

$$= \left[\prod_{i=1}^{n+1} x_i - 2\left(\sum x_1 \dots x_n\right) + 2^2\left(\sum x_1 \dots x_{n-1}\right) + \dots + (-2)^n\left(\sum x_1\right) + (-2)^{n+1}\right].$$

A mi esetünkben az (1)-es összefüggés és a Vieté összefüggések alapján

$$(2)\quad \prod_{i=1}^{n}(x_i - 2) = (-2)^0(-1)^n + (-2)^1(-1)^{n-1} + \dots + (-2)^{n-1}(-1)^1 + (-2) =$$

$$= \frac{(-2)^{n+1} - (-1)^{n+1}}{-2 + 1} = (-1)^{n+1}\left(1 - 2^{n+1}\right).$$

Ugyancsak indukcióval igazolható, hogy bármely $n \geq 2$ esetén

$$\begin{aligned} \left[\sum (x_1 - 2)(x_2 - 2)\dots(x_{n-1} - 2)\right] = \sum x_1 x_2 \dots x_{n-1} - 2\left(2\left(\sum x_1 x_2 \dots x_{n-2}\right)\right) + \\ + 2^2\left(3\left(\sum x_1 x_2 \dots x_{n-3}\right)\right) - \dots + (-2)^{n-2}\left((n-1)\left(\sum x_1\right)\right) + (-2)^{n-2} n. \end{aligned}$$

A (2)-es összefüggésbe helyettesítve a Vieté összefüggéseket írhatjuk, hogy

$$\left[\sum\left(x_1-2\right)\left(x_2-2\right)\ldots\left(x_{n-1}-2\right)\right]=$$
$$=(-1)^{n-1}-2\cdot 2(-1)^{n-2}+2^2\cdot 3(-1)^{n-3}+\ldots+(-1)^{n-1}n2^{n-1}=$$
$$=(-1)^{n-1}\left[1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+\ldots+(n-1)2^{n-2}+n2^{n-1}\right]=$$
$$=(-1)^{n-1}\left[1+(1+1)\cdot 2+\ldots+((n-2)+1)2^{n-2}+((n-1)+1)2^{n-1}\right]=$$
$$=(-1)^{n-1}\left[\left(1+2+\ldots+2^{n-1}\right)+2\left(1+2+\ldots+2^{n-2}\right)+\ldots+2^{n-2}(1+2)+2^{n-1}\right]=$$
$$=(-1)^{n-1}\left[\left(2^n-1\right)+2\left(2^{n-1}-1\right)+\ldots+2^{n-2}\left(2^2-1\right)+2^{n-1}(2-1)\right]=$$
$$=(-1)^{n-1}\left[n2^n-\left(1+2+\ldots+2^{n-1}\right)\right]=(-1)^{n-1}\left[1+(n-1)2^n\right].$$

Közös nevezőre hozva a törteket:

$$S_n=\frac{\left[\sum\left(x_1-2\right)\left(x_2-2\right)\ldots\left(x_{n-1}-2\right)\right]}{\prod_{i=1}^{n}\left(x_i-2\right)}=\frac{(-1)^{n-1}\left[1+(n-1)2^n\right]}{(-1)^{n-1}\left[1-2^{n+1}\right]}=\frac{1+(n-1)2^n}{1-2^{n+1}}.$$

A helyes válasz **d)**.

2. megoldás. A $P(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$ polinomra igaz a

$$\frac{P'(x)}{P(x)}=\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+\frac{1}{x-x_3}+\ldots+\frac{1}{x-x_n}$$

egyenlőség, ahol P' a P polinom (formális) deriváltja. Így

$$S_n=\frac{P'(2)}{P(2)}=\frac{\sum_{k=1}^{n}k\cdot 2^k}{\sum_{k=0}^{n}2^k}=\frac{1+(n-1)2^n}{1-2^{n+1}}.$$

4. *Ha az* $f(x)=x^3+ax^2+b$ *polinom* $(b\neq 0)$ *gyökei* x_1, x_2 *és* x_3, *akkor az*

$$S=\frac{f\left(x_2+x_3\right)}{x_1}+\frac{f\left(x_3+x_1\right)}{x_2}+\frac{f\left(x_1+x_2\right)}{x_3}$$

összeg értéke

a) a^2; **b)** $2a-b$; **c)** $-2a^2$; **d)** a^2+b^2; **e)** 1.

Megoldás. A Vieté összefüggések alapján:

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=-a\\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=0.\\ x_1x_2x_3=-b\end{cases}$$

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=\left(x_1+x_2+x_3\right)^2-2\left(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1\right)=a^2.$$

Tartalomjegyzék

$$f\left(x_1+x_3\right)=\left(x_2+x_3\right)^3+a\left(x_2+x_3\right)^2+b=-\left(a+x_1\right)^3+a\left(a+x_1\right)^2+b=$$

$$=-\left(a+x_1\right)^2x_1+b\,.$$

Tehát $\dfrac{f\left(x_2+x_3\right)}{x_1}=-\left(a+x_1\right)^2+\dfrac{b}{x_1}$.

Hasonlóan $\dfrac{f\left(x_3+x_1\right)}{x_2}=-\left(a+x_2\right)^2+\dfrac{b}{x_2}$, és $\dfrac{f\left(x_1+x_2\right)}{x_3}=-\left(a+x_3\right)^2+\dfrac{b}{x_3}$.

Tehát $S=-\left[\left(a+x_1\right)^2+\left(a+x_2\right)^2+\left(a+x_3\right)^2\right]+b\dfrac{x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1}{x_1x_2x_3}=$

$$=-\left[a^2+\left(x_1+x_2+x_3\right)+\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)\right]=-2a^2\,.$$

A helyes válasz **c)**.

5. *A*

$$P(x)=1+x+\frac{x(x+1)}{2\ !}+\frac{x(x+1)(x+2)}{3\ !}+...+\frac{x(x+1)(x+2)...(x+n-1)}{n\ !}$$

polinom gyökei

a) *valós számok*; **b)** *természetes számok*; **c)** *valódi komplex számok*;
d) *egész számok*; **e)** *nem mind valós számok*.

Megoldás. Legyen

$$f_n(x)=1+x+\frac{x(x+1)}{2\ !}+\ ...\ +\frac{x(x+1)\cdot\ ...\ \cdot(x+n-1)}{n\ !}.$$

Matematikai indukció módszerével igazoljuk, hogy f_n gyökei -1, -2, … , $-n$.

$n=1$ esetén az $1+x=0$ egyenlet gyöke -1.

$n=2$ esetén az $1+x+\dfrac{x(x+1)}{2\ !}=0$ egyenlet átalakítva $\dfrac{1}{2\ !}(x+1)(x+2)=0$,

tehát a gyökök -1 és -2. Tegyük fel, hogy bármely $k\le n$ esetén az

$$1+x+\frac{x(x+1)}{2\ !}+\ ...\ +\frac{x(x+1)\cdot\ ...\ \cdot(x+k-1)}{k\ !}=0$$

egyenlet gyökei -1, -2, …, $-k$. Bizonyítjuk, hogy az $f_{n+1}(x)=0$ egyenlet gyökei: -1, -2, … , $-n$, $-(n+1)$.

Tartalomjegyzék

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{x(x+1)\ \ldots\ (x+n)}{(n+1)\ !}.$$

Az indukciós feltétel alapján $f_n(-1) = f_n(-2) = \ \ldots\ = f_n(-n) = 0$, ugyanakkor észrevehető, hogy az $\frac{x(x+1)\ \ldots\ (x+n)}{(n+1)\ !}$ kifejezés a -1, -2, …, $-n$ értékekre szintén 0.

Ebből következik, hogy $f_{n+1}(-1) = f_{n+1}(-2) = \ \ldots\ = f_{n+1}(-n) = 0$. Továbbá

$$f_{n+1}(-n-1) = 1 - (n+1) + \frac{n(n+1)}{2!} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^k \frac{n(n+1)\ldots(n+k-1)}{k!} + \ldots + (-1)^n \frac{(n+1)!}{(n+1)!},$$

$$f_{n+1}(-n-1) = C_{n+1}^0 - C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 - \ \ldots\ + (-1)^n C_{n+1}^{n+1} = (1-1)^{n+1} = 0,$$

tehát $-(n+1)$ is gyöke az $f_{n+1}(x) = 0$ egyenletnek. Tehát az $f_{n+1}(x) = 0$ egyenlet gyökei -1, -2, … , $-n$, $-(n+1)$ s mivel az egyenlet $(n+1)$-ed fokú nem lehet ennél több gyöke. A helyes válasz **a)** és **d)**.

6. *Legyen* x_1, x_2, ..., x_{18} *a* $P(Q(x)) = 0$ *egyenlet gyökei, ahol* $P(x) = x^2 + 3x + 1$ *és* $Q(x) = x^9 - 9x^8 + 10x^7 - x - 3$.

a) $\sum_{k=1}^{18} x_k = 18$; **b)** *A gyökök egyenlők egymással;*

c) $\sum_{k=1}^{18} x_k^2 = 18$; **d)** $x_k \in \mathbb{R}_+ \ \ k = \overline{1,18}$ **e)** $x_k \notin \mathbb{R}_+ \ \ k = \overline{1,18}$.

Megoldás

$$P(X) = X^2 + 3X + 1 = \left(X + \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(X + \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right).$$

$$P(Q(X)) = Q(X)^2 + 3Q(X) + 1 = \left((QX) + \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(Q(X) + \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right).$$

$$P(Q(X)) = \left((QX) + \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(Q(X) + \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = 0$$

Ha

$$\left(Q(X) + \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = X^9 - 9X^8 + 10X^7 - X - 3 + \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 0$$

ekkor a gyökök összege a Viete-képletek alapján $\sum_{i=9}^{18} x_i = 9$.

Tehát a gyökök összege $S=\sum_{i=1}^{18}x_i=18$. Ugyanakkor $\sum_{i=1}^{9}x_i^2=81-20=61$ és $\sum_{i=9}^{18}x_i^2=81-20=61$, tehát $\sum_{i=1}^{18}x_i^2=122$. A Viéte-képletek alapján az is látható, hogy nem lehet minden gyök ugyanolyan előjelű és a gyökök nem mind egyenlők egymással, tehát a helyes válasz **a)**.

7. *Ha* a_k $k=\overline{0,\ 1998}$ *a* $P(X)=\left(1+x+x^2\right)^{999}$ *polinom együtthatói, akkor* $\sum_{k=0}^{999}a_{2k}$

a) *prímszám*; **b)** *osztható 3-mal*; **c)** *páros*; **d)** 11111; **e)** 0.

Megoldás

$$\begin{aligned}\left(1+X+X^2\right)^{999}&=C_{999}^{0}(1+X)^{999}+C_{999}^{1}X^2(1+X)^{998}+...\\&...+C_{999}^{998}X^{1996}(1+X)+C_{999}^{999}X^{1998}=\\&=C_{999}^{0}\left(C_{999}^{0}+C_{999}^{1}X+\quad...\quad+C_{999}^{999}X^{999}\right)+\\&+C_{999}^{1}\left(C_{998}^{0}+C_{998}^{1}X+...+C_{998}^{998}X^{998}\right)X^2+\\&+C_{999}^{2}\left(C_{997}^{0}+C_{997}^{1}X+...+C_{997}^{997}X^{997}\right)X^4+...\\&...+C_{999}^{998}\left(C_{1}^{0}+C_{1}^{1}X\right)X^{1996}+C_{999}^{999}X^{1998}\end{aligned}.$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{999}a_{2k}=S&=C_{999}^{0}C_{999}^{0}+\left(C_{999}^{0}C_{999}^{2}+C_{999}^{1}C_{998}^{0}\right)+\left(C_{998}^{0}C_{999}^{4}+C_{999}^{1}C_{998}^{2}+C_{999}^{2}C_{997}^{0}\right)+\\&+\left(C_{999}^{0}C_{999}^{998}+C_{999}^{1}C_{998}^{996}+...+C_{999}^{499}C_{500}^{0}\right)+\\&+\left(C_{999}^{1}C_{998}^{998}+C_{999}^{2}C_{997}^{996}+...+C_{999}^{498}C_{500}^{2}+C_{999}^{499}C_{500}^{0}\right)+\\&+\left(C_{999}^{3}C_{996}^{996}+C_{999}^{4}C_{995}^{994}+...+C_{999}^{498}C_{498}^{0}\right)+\left(C_{999}^{5}C_{994}^{994}+C_{999}^{6}C_{993}^{992}+...+C_{999}^{497}C_{497}^{0}\right)+\\&...+\left(C_{999}^{997}C_{2}^{2}+C_{999}^{998}C_{1}^{0}\right)+C_{999}^{999}=\\&=C_{999}^{0}\left(C_{999}^{0}+C_{999}^{2}+C_{999}^{4}+...+C_{999}^{998}\right)+C_{999}^{1}\left(C_{998}^{0}+C_{998}^{2}+C_{998}^{4}+...+C_{998}^{998}\right)+\\&+C_{999}^{2}\left(C_{997}^{0}+C_{997}^{2}+C_{997}^{4}+...+C_{997}^{996}\right)+...+C_{999}^{1}C_{1}^{0}+C_{999}^{999}=\\&=2^{998}C_{999}^{0}+2^{997}C_{999}^{1}+2^{996}C_{999}^{2}+...+2^{0}C_{999}^{998}+C_{999}^{999}.\end{aligned}$$

Tehát

$$S=2^{998}C_{999}^{0}+2^{997}C_{999}^{1}+2^{996}C_{999}^{2}+\quad...\quad+2^{0}C_{999}^{998}+C_{999}^{999}.$$

$$2S=\left(2^{999}C_{999}^{0}+2^{998}C_{999}^{1}+2^{997}C_{999}^{2}+\quad...\quad+2^{1}C_{999}^{998}+2^{0}C_{999}^{999}\right)+C_{999}^{999}\ \text{és így}$$

$2S=(2+1)^{999}+1=3^{999}+1$, ahonnan

$$S=\frac{3^{999}+1}{2}=\frac{3^{999}+1^{999}}{2}=\frac{(3+1)M}{2}=2M.$$

Tehát $\sum_{k=0}^{999} a_{2k} = S =$ páros szám és a helyes válasz **c)**.

Megjegyzés. $P(X) = \left(1 + X + X^2\right)^n$ kifejtésében $\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} a_{2k} = \frac{3^n + 1}{2}$ és ezt megkaphatjuk sokkal egyszerűbb módon is. A $Q(X) = P(X) + P(-X)$ polinom egyótthatóinak összeg $2\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} a_{2k}$.

8. *Az* $x^3 - ax^2 + bx + 1 = 0$ *egyenletnek a és b gyökei. Az a és b értéke*

a) a=1 *és* b=0; **b)** $a \in \mathbb{R}$ *és* $b = -1$; **c)** $a \in \mathbb{R}$ *és* $b = 1$;
d) $a = 1$ *és* $b \in \mathbb{R}$; **e)** $a = 1$ *és* $b = -1$.

Megoldás. Legyen $f(x) = x^3 - ax^2 + bx + 1 = 0$. $f(0) = 1 \neq 0$ következik, hogy $a \neq 0$ és $b \neq 0$, mert ellenkező esetben $f(0) = 0$ kellene legyen (a és b gyökök).

$$\begin{cases} f(a) = 0 \\ f(b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab + 1 = 0 \\ b^3 + (1-a)b^2 + 1 = 0 \end{cases}.$$

Következik, hogy $a = -\frac{1}{b}$ és $b^3 + (b+1)^2 + 1 = 0$. Mivel

$$b^3 + (b+1)^2 + 1 = b^3 + b^2 + 2b + 2 = (b+1)\left(b^2 + 2\right),$$

az egyetlen valós gyök $b = -1$, így $a = 1$. A helyes válasz e).

9. *A* $P(X) = X^{2n} + X^n + 1$ *polinom pontosan akkor osztható az* $X^2 - X + 1$ *polinommal ha*

a) $n = 2001$; **b)** $n = 6m$ *és* $m \in \mathbb{N}$; **c)** $n = 10^{10} + 1$;
d) $n = 6m + 5$ *és* $m \in \mathbb{N}$; **e)** $n \in \left\{6m + 2,\ 6m + 4 \middle| m \in \mathbb{N}\right\}$.

Megoldás. Ha α gyöke az $X^2 - X + 1$ polinomnak, akkor $P(\alpha) = 0$, mert $X^2 - X + 1$ osztja $P(X)$-et, másrészt $\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$, következik, hogy $\alpha^3 = -1$.
$P(\alpha) = \alpha^{2n} + \alpha^n + 1$.

Ha $n = 6m$ akkor

$$P(\alpha) = \alpha^{12m} + \alpha^{6m} + 1 = \left(\alpha^3\right)^{4m} + \left(\alpha^3\right)^{2m} + 1 = (-1)^{4m} + (-1)^{2m} + 1 = 3.$$

Ha $n = 6m + 1$ akkor

$$P(\alpha) = \alpha^{12m+2} + \alpha^{6m} + 1 + 1 = \left(\alpha^3\right)^{4m}\alpha^2 + \left(\alpha^3\right)^{2m}\alpha + 1 = \alpha^2 + \alpha + 1 \neq 0.$$

Ha $n = 6m + 2$ akkor

$$P(\alpha) = \alpha^{12m+4} + \alpha^{6m+2} + 1 + 1 = \left(\alpha^3\right)^{4m+1}\alpha + \left(\alpha^3\right)^{2m}\alpha^2 + 1 = \alpha^2 - \alpha + 1 = 0.$$

Ha $n = 6m + 3$ akkor

$$P(\alpha) = \alpha^{12m+6} + \alpha^{6m+3} + 1 + 1 = \left(\alpha^3\right)^{4m+2} + \left(\alpha^3\right)^{2m+1} + 1 = 1 - 1 + 1 = 1.$$

Ha $n = 6m + 4$ akkor

Tartalomjegyzék

$$P(\alpha) = \alpha^{12m+8} + \alpha^{6m+4} + 1 + 1 = \left(\alpha^3\right)^{4m+2} \alpha^2 + \left(\alpha^3\right)^{2m+1} \alpha + 1 = \alpha^2 - \alpha + 1 = 0.$$

Ha $n = 6m + 4$ akkor

$$P(\alpha) = \alpha^{12m+10} + \alpha^{6m+5} + 1 = \left(\alpha^3\right)^{4m+3} \alpha + \left(\alpha^3\right)^{2m+1} \alpha^2 + 1 = -\alpha^2 - \alpha + 1 \neq 0.$$

Tehát $X^2 - X + 1$ pontosan akkor osztja $P(X)$-et ha

$$n \in \left\{6m + 2, 6m + 4 \mid m \in \mathbb{N}\right\}.$$

A helyes válasz **e)**.

10. *Az* $(m+1)x^3 - \left(m^2 + 5m - 5\right)x^2 + \left(m^2 + 5m - 5\right)x - (m+1) = 0$ *egyenletnek pontosan akkor van egy háromszoros gyöke, ha*

a) $m \in \{-4, 4\}$; **b)** $m \in \{-3, 1\}$; **c)** $m \in \{2\}$; **d)** $m \in \{-4, 2\}$; **e)** $m \in \{-2, 2\}$.

Megoldás. Legyen

$$P(X) = (m+1)X^3 - \left(m^2 + 5m - 5\right)X^2 + \left(m^2 + 5m - 5\right)X - (m+1),$$

ahol $P \in R[X]$. Mivel $gradP = 3$, ez pontosan akkor tejesül, ha $m + 1 \neq 0$, tehát $m \neq -1$. Mivel $P(0) = -(m+1) \neq 0$, tehát $x = 0$ nem lehet gyöke a $P(x) = 0$ egyenletnek. A Vieté összefüggések alapján:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = \dfrac{m^2 + 5m - 5}{m+1} \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \dfrac{m^2 + 5m - 5}{m+1}, \\ x_1x_2x_3 = 1 \end{cases}$$

ahol x_1, x_2, x_3 a $P(x) = 0$ egyenlet gyökei s mivel háromszoros gyöke van az egyenletnek, ezért $x_1 = x_2 = x_3 = \alpha$, továbbá:

$$\begin{cases} 3\alpha = \dfrac{m^2 + 5m - 5}{m+1} \\ 3\alpha^2 = \dfrac{m^2 + 5m - 5}{m+1}. \\ \alpha^3 = 1 \end{cases}$$

Az első két egyenlet alapján $3\alpha = 3\alpha^2$, s mivel $\alpha \neq 0$, kapjuk, hogy $\alpha = 1$.

Tehát $\dfrac{m^2 + 5m - 5}{m+1} = 3$, ahonnan kapjuk, hogy az m paraméter -4 és 2 lehet.

Mivel mindkét esetben az $x = -1$ háromszoros gyök a helyes válasz **d)**.

Tovább