2.2. Indukció a geometriában

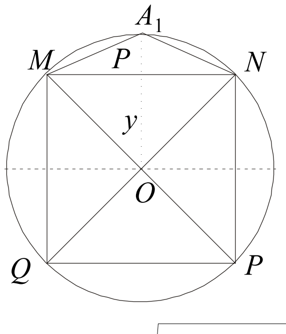
2.2.1. Számítási feladatok

2.2.1. Feladat. Határozzuk meg az R sugarú körbe írt, 2^n oldalú szabályos sokszög oldalhosszát!

Megoldás

$n=2$ esetén a $2^n=4$ oldalú szabályos sokszög a négyzet; az R sugarú körbe írt négyzet oldalhossza $a_4=R\sqrt{2}$.

$n=3$ esetén a $2^3=8$ oldalú szabályos sokszög oldalhosszát a következő ábra alapján számítjuk ki:



$$MN=a_4=R\sqrt{2},\ A_1N=a_8,\ OP=y=\sqrt{R^2-\frac{a_4^2}{4}},$$

$$A_1P=R-y=R-\sqrt{R^2-\frac{a_4^2}{4}}\ \text{ és}$$

$$A_1N=\sqrt{A_1P^2+PN^2}=\sqrt{R^2+R^2-\frac{a_4^2}{4}-2R\sqrt{R^2-\frac{a_4^2}{4}}+\frac{a_4^2}{4}},$$

tehát $a_8=\sqrt{2R^2-2R\sqrt{R^2-\frac{a_4^2}{4}}}=R\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

$n=4$ esetén az R sugarú körbe írt szabályos 16 oldalú sokszög oldalhosszát (egy) a fentihez hasonló módon számítjuk ki, és azt kapjuk, hogy $a_{16}=\sqrt{2R^2-2R\sqrt{R^2-\frac{a_{16}^2}{4}}}=R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, $n=5$ esetén az R sugarú körbe írt szabályos 32 oldalú sokszög oldalhossza: $a_{32}=\sqrt{2R^2-2R\sqrt{R^2-\frac{a_{16}^2}{4}}}=R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$.

Az $n\in\{2,3,4,5\}$-re kapott értékek alapján feltételezhetjük, hogy $a_{2^n}=R\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}_{n-2\text{ darab }2\text{–es}}}$ minden $n\geq 2$ esetén.

Feltételezésünk helyességének igazolása érdekében bizonyítanunk kell, hogy $a_{2^{n+1}}=R\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}_{n-1\text{ darab }2\text{-es}}}$, ha $a_{2^n}=R\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}_{n-2\text{ darab }2\text{-es}}}$.

$$a_{2^{n+1}}=\sqrt{2R^2-2R\sqrt{R^2-\frac{a_{2^n}^2}{4}}}=\sqrt{2R^2-2R\sqrt{R^2-\frac{R^2}{2}+\frac{R^2}{4}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}_{n-2\text{ db.}}}}$$

$$=\sqrt{2R^2-R^2\sqrt{2+\underbrace{\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}_{n-2\text{ darab}}}}=R\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}_{n-1\text{darab}}},$$

tehát $a_{2^n}=R\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}_{n-2\text{ db.}}}$, $\forall n\geq 2$-re.

Megjegyzések. 1. A fent bizonyított képlet segítségével a π számot meghatározhatjuk különböző sorozatok határértékeként.

a) Bizonyítsuk be, hogy $\pi=\lim_{n\to\infty}2^n\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n-2\text{ darab}}}$;

b) Bizonyítsuk be, hogy $\pi=\lim_{n\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\right)}\ldots}$.

Bizonyítás

a) Az R sugarú kör $2\pi R$ kerülete nem más, mint a beírt 2^n oldalhosszú szabályos sokszög kerületének határértéke, amikor n a végtelenbe tart. Tehát $2\pi R=\lim_{n\to\infty}2^n a_{2^n}=\lim_{n\to\infty}2^n R\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n-2\text{ db.}}}$, tehát

$\pi=\lim_{n\to\infty}2^{n-1}\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n-2\text{ darab}}}$.

b) Az R sugarú kör πR^2 területe nem más, mint a beírt 2^n oldalhosszú szabályos sokszög területének határértéke, amikor n végtelenhez tart. A terület: $T_{2^n}=\frac{1}{2}\cdot 2^n\cdot a_{2^n}\cdot ap_{2^n}$, ahol

$$ap_{2^n}=\sqrt{R^2-\frac{a_{2n}^2}{4}}=\frac{R}{2}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n-1\text{ darab}}$$

a sokszög apotémája. Így $T_{2^n}=2^{n-2}\cdot R^2\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n-2}}\cdot\sqrt{2+\underbrace{\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}_{n-2}}=$

$$=2^{n-2}\cdot R^2\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}_{n-3}}=2^{n-2}\cdot R\cdot a_{2^{n-1}}.$$

$\dfrac{T_{2^n}}{T_{2^{n+1}}}=\dfrac{2^{n-1}\cdot a_{2^n}\cdot ap_{2^n}}{2^{n-1}\cdot R\cdot a_{2^n}}=\dfrac{ap_{2^n}}{R}=\cos\dfrac{180^\circ}{2^n}$. Így

$$\frac{T_{2^n}}{T_4}=\frac{T_{2^n}}{T_{2^{n-1}}}\ldots\frac{T_{16}}{T_8}\cdot\frac{T_8}{T_4}=\frac{1}{\cos\frac{180^\circ}{2^{n-1}}}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{\cos\frac{180^\circ}{8}}\cdot\frac{1}{\cos\frac{180^\circ}{4}},$$

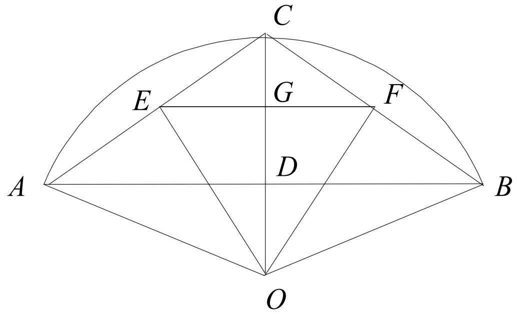
ahonnan $T_{2^n}=T_4\cdot\dfrac{1}{\cos\frac{180^\circ}{2^{n-1}}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{180^\circ}{8}\cos\frac{180^\circ}{4}}=\dfrac{2R^2}{\cos\frac{180^\circ}{2^{n-1}}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{180^\circ}{8}\cos\frac{180^\circ}{4}}$. Így a kör πR^2 területe egyenlő a $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2R^2}{\cos 45^\circ\cdot\ldots\cdot\cos\frac{45^\circ}{2^{n-4}}\cos\frac{45^\circ}{2^{n-3}}}$ határértékkel, vagyis

$$\pi=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\right)}\ldots},$$

ahol a $\cos\frac{45^\circ}{2^k}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{45^\circ}{2^{k-1}}}{2}}$ képletet használtuk.

2. Ha matematikai indukció segítségével kiszámítjuk a 2^n oldalú, p kerületű szabályos sokszögbe és a sokszög köré írt körök r_n és R_n sugarait, további sorozatokat gyárthatunk, amelyek határértéke π.

$n=2$ esetén $r_2=\frac{a}{2}=\frac{p}{8}$ és $R_2=\frac{a\sqrt{2}}{2}=\frac{p\sqrt{2}}{8}$. Most számítsuk ki a p kerületű szabályos n-szögbe és köré írt körök r_n és R_n sugarai függvényében a p kerületű szabályos $(n+1)$-szögbe és köré írt körök r_{n+1} és R_{n+1} sugarait, a mellékelt ábra segítségével.



Az ábrán $AB=a_{2^n}=\frac{p}{2^n}$, C az AB körív felezőpontja, E és F pedig az AC és BC felezőpontjai. Mivel $m(EOF\angle)=m(EOC\angle)+m(COF\angle)=$
$$=\frac{m(AOC\angle)}{2}+\frac{m(BOC\angle)}{2}=\frac{m(AOB\angle)}{2},$$
következik, hogy EF a 2^{n+1} oldalú, OE sugarú körbe írt kör oldala. Ennek a sokszögnek a kerülete:

$2^{n+1}EF=2^{n+1}\frac{AB}{2}=2^nAB=p$, így $r_{n+1}=OG$ és $R_{n+1}=OE$. Mivel $OC-OG=OG-OD$, következik, hogy $R_n-r_{n+1}=r_{n+1}-r_n$, vagyis $r_{n+1}=\frac{R_n+r_n}{2}$. Az OEC derékszögű háromszögben $OE^2=OC\cdot OG$, vagyis $R_{n+1}^2=R_n\cdot r_{n+1}$, ahonnan $R_{n+1}=\sqrt{R_n\cdot\frac{R_n+r_n}{2}}$.

Vizsgáljuk most meg az r_2, R_2, r_3, R_3, ..., r_n, R_n, ... sorozatot. A sorozat határértéke a p kerületű kör sugara, azaz $\frac{p}{2\pi}$.

$p=2$-re $r_2=\frac{1}{4}$, $R_2=\frac{\sqrt{2}}{4}$, $r_3=\frac{\sqrt{2}-1}{8}$, $R_3=\frac{\sqrt{2\sqrt{2}-4}}{8}$ stb. Ha $r_1=0$ és $R_1=\frac{1}{2}$-et választunk, akkor a
$$0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{\sqrt{2}}{4},\ \frac{\sqrt{2}-1}{8},\ \frac{\sqrt{2\sqrt{2}-4}}{8},\ \frac{\sqrt{2\sqrt{2}+4}+\sqrt{2}+1}{16},\ldots$$
sorozat (amelyet úgy képezünk, hogy az első két tagot leírjuk, majd felváltva az előző két tag számtani, majd mértani középarányosát képezzük), határértéke a 2 kerületű kör sugara, vagyis $\frac{1}{\pi}$.

2.2.2. Feladat. Legyen az R sugarú körbe írt szabályos k-szög beírt körének sugara r_k. Bizonyítandó, hogy
$$(n+1)r_{n+1}-nr_n>R.$$
(Szovjet versenyfeladat)

Megoldás. Nyilvánvalóan $k \geq 3$, így az R, r_k és a szabályos k-szög a_k oldalának fele által alkotott derékszögű háromszögből

$$r_k = R\cos\frac{\pi}{k},$$

tehát (R-rel végigosztva) azt kell bizonyítanunk, hogy

$$(n+1)\cos\frac{\pi}{n+1} - n\cos\frac{\pi}{n} > 1 = \cos 0, \quad (1)$$

más szóval, hogy

$$n\left(\cos\pi\frac{n+1}{n} - \cos\frac{\pi}{n}\right) > \cos 0 - \cos\frac{\pi}{n+1}.$$

Mindkét különbség pozitív, így ez az egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül, ha a bal és a jobb oldalának hányadosa nagyobb, mint 1. Szorzattá alakítással

$$\frac{n\left(\cos\frac{\pi}{n+1} - \cos\frac{\pi}{n}\right)}{\cos 0 - \cos\frac{\pi}{n+1}} = \frac{n\sin\frac{\frac{\pi}{2}}{n(n+1)}}{\sin\frac{\frac{\pi}{2}}{n+1}} \cdot \frac{\sin\frac{2n+1}{n}\frac{\frac{\pi}{2}}{n+1}}{\sin\frac{\frac{\pi}{2}}{n+1}}. \quad (2)$$

Itt a második tényező nagyobb 1-nél, hiszen egyrészt

$$\frac{2n+1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{4} < 1,$$

másrészt

$$\frac{\pi}{2} > \frac{2n+1}{n} \cdot \frac{\frac{\pi}{2}}{2+1} > \frac{\frac{\pi}{2}}{n+1} > 0,$$

másrészt mert a sinus függvény a $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumon monoton növekvő és pozitív. (2) első tényezője egyszerűbben így írható:

$$\frac{n\sin x}{\sin nx}, \quad (3)$$

ahol $x = \frac{\frac{\pi}{2}}{n(n+1)}$, és így $0 < x < nx < \frac{\pi}{2}$, és erről teljes indukcióval mutatjuk meg, hogy mindig nagyobb 1-nél, ha n természetes szám.

$n = 2$ esetén $0 < \cos x < 1$ alapján

$$2\sin x > 2\sin x\cos x = \sin 2x,$$

állításunk helyes. Feltéve, hogy az n természetes számra (3) értéke nagyobb 1-nél, vagyis más alakban

$$(0 <)\sin nx < n\sin x, \text{ akkor}$$

$$\sin(n+1)x = \sin nx\cos x + \cos nx\sin x < \sin nx + \sin x < n\sin x + \sin x = (n+1)\sin x,$$

tehát a tulajdonság igaz $n+1$-re is. Ezek szerint (2) mindig nagyobb 1-nél, és az előrebocsátottak szerint egyértelmű a feladat állításával.

2.2.2. Trigonometrikus azonosságok

2.2.3. Feladat. Igazoljuk, hogy $\alpha = \dfrac{\pi}{2^{n+1}-1}$, akkor

$$\frac{1}{\sin 2\alpha} + \frac{1}{\sin 4\alpha} + \ldots + \frac{1}{\sin 2^n \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha}, \quad (1)$$

(Kömal, 1978)

Megoldás:

Bizonyítsuk be első lépésként a következő állítást: Ha $2^k \alpha \neq m\pi$ $(k = 0, 1, \ldots, n;\ m \text{ egész szám})$, akkor:

$$\frac{1}{\sin 2\alpha} + \frac{1}{\sin 4\alpha} + \ldots + \frac{1}{\sin 2^n \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin(2^n - 1)\alpha}{\sin 2^n \alpha}. \quad (2)$$

A bizonyítás módszere teljes indukció, $n = 1$ esetben az állítás triviális. Tegyük fel, hogy n-re teljesül az állításunk, megmutatjuk, hogy $(n+1)$-re is igaz. Az utolsó n tagra és α helyébe 2α-t ítva alkalmazzuk az indukciós feltevésünket, és a $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, $\sin x + \sin y = 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$ azonosságokat:

$$\frac{1}{\sin 2\alpha} + \left(\frac{1}{\sin 2(2\alpha)} + \ldots + \frac{1}{\sin 2^n(2\alpha)}\right) = \frac{1}{\sin 2\alpha} + \frac{1}{\sin 2\alpha} \cdot \frac{\sin(2^n - 1)2\alpha}{\sin 2^n \cdot 2\alpha} =$$

$$= \frac{1}{\sin 2\alpha} \cdot \frac{\sin 2^n \cdot 2\alpha + \sin(2^n - 1) \cdot 2\alpha}{\sin 2^{n+1}\alpha} =$$

$$= \frac{1}{2\sin\alpha\cos\alpha} \cdot \frac{2\sin(2^{n+1} - 1)\alpha\cos\alpha}{\sin 2^{n+1}\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha} \cdot \frac{\sin(2^{n+1} - 1)\alpha}{\sin 2^{n+1}\alpha}.$$

Ezzel állításunkat igazoltuk.

Ha $\alpha = \dfrac{\pi}{2^{n+1}-1}$, akkor $(2^n - 1)\alpha = \sin 2^n \alpha$, mivel az argumentumok összege π. Az állítás feltételei teljesülnek, hiszen $0 \leq k \leq n$ esetén $0 < 2^k \alpha = \dfrac{2^k \cdot \pi}{2^{n+1} - 1} < \pi$, így (2) éppen a bizonyítandó egyenlőtlenséget adja.

2.2.4. Feladat. Igazoljuk, hogy minden n természetes szám mellett érvényes a következő összefüggés (ha α olyan, hogy a kifejezések értelmezettek):

$$\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2^n} = \frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2^n} - 2\operatorname{ctg}2\alpha. \quad (1)$$

(Kömal, 1973)

Megoldás. Teljes indukcióval bizonyítunk. $P(n)$-nel jelöljük az (1)-et kifejező kijelentést.

$n = 2$-re az állítás $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\alpha - 2\operatorname{ctg}2\alpha$, ami igaz, mivel

$$\operatorname{ctg}2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{2} - \frac{1}{2\operatorname{ctg}\alpha},$$

minden olyan α-ra, amelyre $\operatorname{ctg}2\alpha$ értelmezett.

Bizonyítjuk, hogy ha $P(n)$ igaz, akkor $P(n+1)$ is igaz. Valóban,

$$\left(\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2^n}\right) + \frac{1}{2^{n+1}}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2^n} - 2\operatorname{ctg}2\alpha + \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2^{n+1}} =$$

$$\frac{1}{2^{n+1}}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2^{n+1}}+2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2^{n}}\right)-2\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{1}{2^{n+1}}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2^{n+1}}-2\operatorname{ctg}2\alpha,$$

tehát az egyenlőség teljesül minden $n \in N$ esetén.

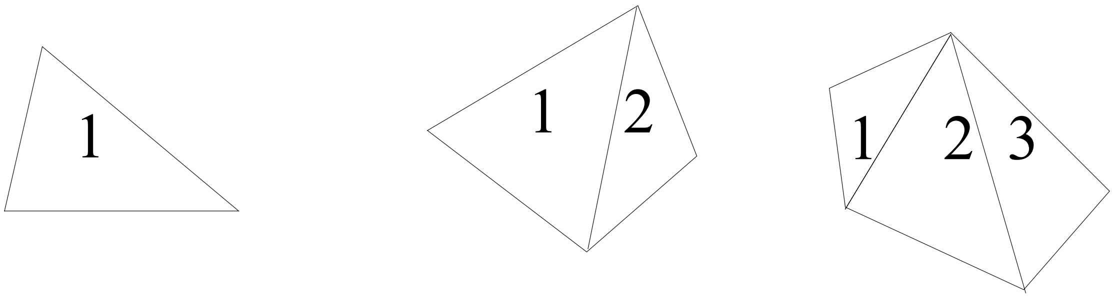
2.2.3. Kombinatorikus geometria

Felbontások

2.2.5. Feladat. Hány háromszögre bontható fel egy n oldalú sokszög az egymást nem metsző átlók segítségével?

Megoldás

$n = 3$-ra, tehát háromszög esetén ez a szám 1, négyszög esetén kettő, ötszög esetén 3.



Indukciós feltevésünk, hogy bármely n oldalú $(n \geq 3)$ sokszög $(n-2)$ háromszögre bomlik, egymást nem metsző átlók segítségével. Feltevésünk bizonyítása érdekében azt bizonyítjuk, hogy, ha állításunk igaz minden $k \leq n$ esetén, akkor igaz az n-et követő $n+1$ természetes szám esetén is. Valóban, ha az $(n+1)$ oldalú $A_1A_2...A_{n+1}$ sokszög valamely A_1A_k átlóját tekintjük $(k \geq 3)$, az a sokszöget két sokszögre bontja: a k oldalú $A_1A_2...A_k$ sokszögre és az $(n+1-k+2)$ oldalú $A_kA_{k+1}...A_{n+1}A_1$ sokszögre, ezek pedig az indukciós feltevés alapján $k-2$, illetve $n+1-k\_2-2=n+1-k$ háromszögre bomlanak, tehát az $n+1$ oldalú sokszög $(k-2)+(n+1-k)=(n+1)-2$ háromszögre bomlik.

2.2.6. Feladat. Hány, egymást nem metsző átló segítségével bontható fel egy n oldalú sokszög háromszögekre?

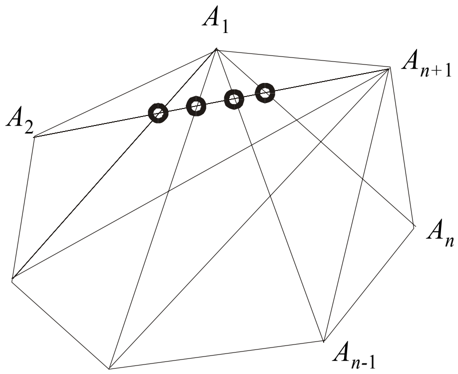
Megoldás. Az 1-es feladatban látható, hogy ezek az átlók $n-2$ háromszögre bontják a sokszöget. A sokszög oldalainak száma n, a felbontásban szereplő átlók száma pedig N. Minden oldal egyetlen háromszögnek oldala, minden átló két háromszögnek oldala. Így a háromszögek oldalainak száma: $n+2N$, másrészt, mivel $n-2$ háromszögünk van, mindegyiknek három oldala, ez a szám $3(n-2)$, ahonnan $n+2N=3(n-2)$, tehát $N=n-3$.

2.2.7. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy egy n oldalú konvex sokszöget az átlói $\frac{(n-1)(n-2)(n^2-3n+12)}{24}$ háromszögre bontanak, ha ezek az átlók olyanok, hogy hármanként összefutóak.

Megoldás. $n=3$n esetén $\frac{(3-1)(3-2)\cdot 12}{24}=1$ háromszögre bomlik a háromszög, ami igaz.

$n=4$ esetén $\frac{3 \cdot 2 \cdot 16}{24} = 4$ háromszögre bontják az átlók a négyszöget, ami igaz.

Feltételezzük, hogy a kijelentés igaz n-re. Jelöljük $P(n)$-nel az n oldalú sokszög felbontásában létrejövő háromszögek számát. Ekkor $P(n)=\frac{(n-1)(n-2)(n^2-3n+12)}{24}$. Az $(n+1)$ oldalú $A_1A_2...A_nA_{n+1}$ sokszöget az A_1A_n átlója az n oldalú $A_1A_2...A_n$ sokszögre és az $A_1A_nA_{n+1}$ háromszögre bontja. Az $A_1A_2...A_nA_{n+1}$ sokszög átlói az $A_1A_2...A_n$ átlói, illetve az A_2A_{n+1}, A_3A_{n+1}, ..., $A_{n-1}A_{n+1}$ átlók. Az $A_1A_2....A_n$ átlói $P(n)$ darab háromszöget határoznak meg. Az A_2A_{n+1} átló egyik oldalán a sokszög A_1 csúcsa, a másikon $n-2$ darab csúcs található, így az A_2A_{n+1} átló metszi az eredeti sokszög $1\cdot(n-2)$ darab átlóját, ezáltal $n-2$ darab új háromszöget hoz létre az $A_1A_2...A_n$ sokszögben. Az $A_{n+1}A_3$ átló egyik oldalán az A_1 és A_2 csúcs, a másikon $(n-3)$ darab csúcs található, így az $A_{n+1}A_3$ átló metszi az eredeti sokszög $2\cdot(n-3)$ darab átlóját, ezáltal $2\cdot(n-3)$ darab új háromszöget hoz létre stb. Végül, az $A_{n+1}A_{n-1}$ átló egyik oldalán $(n-2)$ darab csúcs: az A_1, A_2, $A_{n=2}$ csúcsok, a másik oldalán egy csúcs – A_n – található, tehát ez az átló metszi az eredeti sokszög $(n-2)\cdot 1$ átlóját, és $(n-2)$ darab új háromszöget hoz létre az $A_1A_2...A_n$ sokszögben. Ugyanakkor a fenti átlók az $A_1A_nA_{n+1}$ háromszöget $(n-1)$ darab háromszögre bontják.A fentiek alapján



$$P(n+1)=P(n)+1\cdot(n-2)+2\cdot(n-3)+...+(n-2)\cdot 1+n-1\text{, vagyis}$$

$$P(n+1)=P(n)+n-1+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=$$

$$=\frac{(n-1)(n-2)(n^2-3n+12)}{24}+\frac{(n)(n-1)(n-2)}{6}+n-1=$$

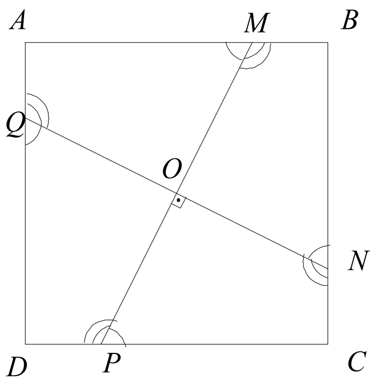
$$=\frac{(n-1)(n-2)}{6}\cdot\frac{n^2+n+12}{4}+n-1=\frac{n-1}{24}\left[(n-2)(n^2+n+12)+24\right]=$$

$$=\frac{(n-1)\cdot n(n^2-n+10)}{24}=\frac{[(n+1)-1]\cdot[(n+1)-2][(n+1)^2-3(n+1)+12]}{24},$$

tehát állításunk igaz minden $n\geq 3$ esetén.

2.2.8. Feladat. Adott n darab tetszőleges négyzet. Bizonyítsuk be, hogy ezeket fel lehet darabolni úgy, hogy a darabokból egy újabb négyzetet lehessen összerakni.

Megoldás

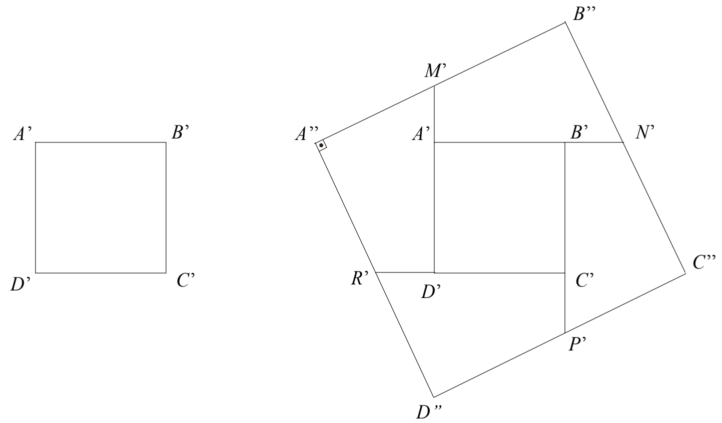


$n=1$-re a kijelentés triviális.

$n=2$ esetén jelöljük a négyzetek oldalait x-szel és y-nal ($y<x$).

Az x oldalú $ABCD$ négyzet oldalain vegyük fel az $M\in AB$, $N\in BC$, $P\in CD$ és $Q\in AD$ pontokat úgy, hogy , majd vágjuk el a négyzetet az MP és QN egyenesek mentén. Ezek a négyzet O középpontjában merőlegesek egymásra, és az elvágás után 4 darab, egymással egybevágó négyszög keletkezik. Most ezeket a darabokat helyezzük el az y oldalú

$A'B'C'D'$ négyzet oldalai mentén, amint ez a mellékelt ábrán látható.

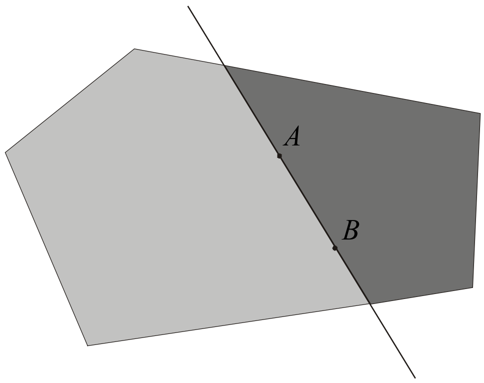


Az így kapott alakzat egy négyzet, mivel $m(A''\angle)=m(B''\angle)=m(C''\angle)=m(D''\angle)=90^\circ$, az M', N', P', Q' -ben összeillesztett szögek összege 180° és $A''B''=B''C''=C''D''=D''A''$.
Igazolni fogjuk, hogy ha n darab négyzet esetén igaz az állítás, akkor $n+1$ darab négyzet esetén is igaz. Valóban, ha $N_1, N_2, ..., N_n, N_{n+1}$ -gyel jelöljük a négyzeteket, akkor kiválasztunk közülük kettőt: N_n -et és N_{n+1} -et, és a fent mutatott módon egy N_n négyzetet hozunk létre belőle. Így az $N_1, N_2, ..., N_{n-1}, N_n'$ négyzeteink maradnak, és az indukciós feltevés alapján ezekből lehet egy újabb négyzetet létrehozni.

2.2.9. Feladat. Egy konvex sokszög belsejében tekintünk $2n$, $n \geq 1$ különböző pontot. Akkor a sokszög felbontható $n+1$ konvex sokszögre úgy, hogy mind a $2n$ pont csak sokszögek oldalain található.

Megoldás

$n=1$ esetén a sokszög belsejében található két pontot összekötő egyenes két sokszögre bontja a sokszöget:



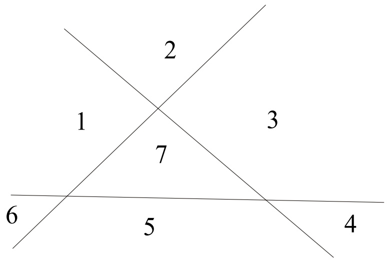
Be kell látnunk, hogy ha $2n$ pont esetén elvégezhető a felbontás, akkor $2(n+1)$ pont esetén is elvégezhető. Ezt a következőképpen fogjuk igazolni: Tekintsünk egy olyan d egyenest, amelynek a sokszöggel nincs közös pontja, és a sokszög belsejében levő pontok közül válasszuk ki azt , amely a d -től a legkisebb távolságra helyezkedik el (ha több ilyen pont is van, akkor az egyik ilyent). Ha legalább két ilyen pont van, akkor a rajtuk átmenő egyenes párhuzamos d -vel, és a megmaradt $2n$ pont közül egy sem helyezkedik el az egyenes által meghatározott két konvex sokszög közül a d -hez legközelebb esőnek a belsejében, a másik belsejében pedig nincs több, mint $2n$ pont (ha kevesebb van, még hozzáteszünk tetszőlegesen

annyit, hogy $2n$ pontunk legyen). Az indukciós feltevés alapján akkor ezt a sokszöget felbonthatjuk $n+1$ sokszögre, úgy, hogy a megadott pontok az oldalaikon helyezkedjenek, tehát az eredeti sokszöget felbontottuk $n+2$ sokszögre, melyek oldalain található a $2n+2$ pont.
Ha csak egy ilyen A pont van, akkor B-vel jelöljük a megmaradt $2n+1$ pont közül azt, amelyre az AB-nek a d-vel alkotott, trigonometrikus irányban mért szöge minimális. Ekkor az AB egyenessel osztjuk a sokszöget két sokszögre, amelyek közül a d felé eső egyetlen pontot sem tartalmaz a belsejében, a másik pedig legtöbb $2n$ pontot. Az előzőhöz hasonló módon a sokszöget felbonthatjuk $n+2$ sokszögre, melyek oldalain található a $2n+2$ pont.

2.2.10 Feladat. Legtöbb hány részre osztja n egyenes a síkot?

Megoldás. $n=1$ esetén egy egyenes két részre osztja, $n=2$ esetén két egyenes a síkot négy részre osztja.

$n=3$ esetén a maximális száma a keletkezhető síkrészeknek 7, amint az a mellékelt ábrán is látható.



Általában n egyenes akkor osztja a legtöbb részre a síkot, ha nincs köztük három összefutó egyenes, és párhuzamosok sem találhatók közöttük. Jelöljük $P(n)$-nel n darab ilyen egyenes által meghatározott síkrészek számát. Vizsgáljuk meg, hogy mennyivel növekszik a meghatározott síkrészek száma, ha az egyenesek számát n-ről $(n+1)$-re emeljük. Az $(n+1)$-ik egyenes mindegyik másik egyenest pontosan egy olyan pontban metszi, amely eddig nem volt metszéspont. Így minden új metszéspont mentén. egy újabb síkrész alakul ki. Tehát $P(n+1)=P(n)+n+1$, vagyis $k=\overline{1,\, n-1}$-re:

$$P(2)=P(1)+2,$$
$$P(3)=P(2)+3,$$
$$P(4)=P(3)+4,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$P(n-1)=P(n-2)+n-1,$$
$$P(n)=P(n-1)+n.$$

A fenti összefüggéseket összegezve kapjuk, hogy

$$P(n)=2+3+\ldots+n+P(1)=\frac{n(n+1)}{2}+1=\frac{n^2+n+2}{2}.$$

Valóban, $n=1$-re $\frac{1+1+2}{2}=2$ rész, $n=2$-re $\frac{4+2+2}{2}=4$ rész, és

$$P(n+1)=P(n)+1=\frac{n^2+n+2+n+1}{2}=\frac{n^2+3n+4}{2}=\frac{(n+1)^2+(n+1)+2}{2},$$

tehát az eredmény helyességét az indukció is igazolja.

2.2.11. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy n független sík a teret $\frac{1}{6}\left(n^3+5n+6\right)$ részre osztja fel.

Megoldás. $n=1$ esetén ez $\frac{1}{6}(1+5+6)=2$ rész, ami igaz. Be kell látnunk, hogy ha n független sík a teret $\frac{1}{6}\left(n^3+5n+6\right)$ síkrészre osztja, akkor $n+1$ darab sík

$\frac{1}{6}\left((n+1)^3+5(n+1)+6\right)=\frac{n^3+3n^2+8n+12}{6}$ részre osztja a teret. Valóban, az $(n+1)$-ik sík mindegyik másik síkot metszi egy-egy egyenesben, ezek nem párhuzamosak, és csak kettőnként metszik egymást, és mindegyik az $n+1$-ik síkban található. Az előző feladat értelmében ezek az egyenesek az $n+1$-ik síkon $\frac{(n^2+n+2)}{2}$ síktartományt határoznak meg, ezen tartományok mindegyike ketté oszt egy, már meglevő, térrészt, tehát:

$$P(n+1)=P(n)+\frac{n^2+n+2}{2}=\frac{n^3+5n+6}{6}+\frac{n^2+n+2}{2}=\frac{n^3+3n^2+8n+12}{6}.$$

2.2.12. Feladat. Melyek azok az n értékek, amelyekre minden konvex n-szög felbontható fehér és fekete háromszögekre úgy, hogy fehér háromszög oldala nem esik a sokszög kerületére, és egyező színű háromszögek oldalainak nincs közös szakasza.

(Kömal,1981)

Megoldás. n szerinti teljes indukcióval bizonyítunk. $n=3$-ra a háromszöget feketére festve kapunk megfelelő megoldást.

Tegyük fel, hogy konvex n-szögre igaz az állításunk, tekintsük az $A_1A_2...A_nA_{n+1}=P_{n+1}$ konvex $(n+1)$-szöget. Jelölje B_i az A_iA_{i+1} oldal egy belső pontját, $i=2, 3, ..., n$. Ekkor az $A_1B_2B_3...B_n=Q_n$ n-szög konvex, bele van írva P_{n+1}-be, csak csúcspontjai vannak P_{n+1} kerületén. Tekintsük Q_n-nek egy, az indukciós feltevés szerint létező felbontását, de cseréljük fel benne a fekete és a fehér színt. Végül P_{n+1}-nek a Q_n által le nem fedett részét feketére festve, a $P_{n+!}$-nek egy megfelelő felbontását kapjuk.

Eszerint minden konvex sokszög felbontható a kívánt módon. (P_{n+1} leírt felbontása a Q_n felbontásához képest n új háromszöget tartalmaz.)

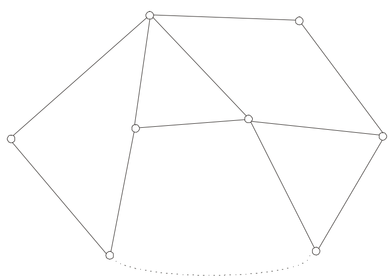
Megjegyzés. Kissé fonákul hat, hogy a teljes indukciós bizonyítás elindításában „1 részre bontunk”, amit így is lehet mondani: nem bontunk. Gyakori azonban, hogy ilyen bizonyításokban a kiindulás többé-kevésbé elfajult eset, vagy csak mesterkélt értelmezés mellett mutat példát. Az erre az $f_3=1$-re a fentiek szerint kialakított $f_4=f_3+3=4$ felbontás azonban már valódi bontás, és ilyen $n=3$-ra is van, ebben is $f_3=4$.

Euler típusú problémák

2.2.13. Euler tétel

Ha egy sokszög-gráf csúcsainak, lapjainak és éleinek száma rendre c, l és e, akkor

$$c+l-e=2.$$



Bizonyítás. A lapok száma szerinti indukciót alkalmazunk. A bizonyításhoz figyeljük meg, hogy a tétel érvényessége nem változik, ha a másodfokú csúcsokat megszüntetjük úgy, hogy ugyanabba a csúcsba futó két élt egy éllé egyesítjük. Ezzel a művelettel eggyel csökken a csúcsok és az élek száma is, így a $c+l-e$ összeg nem változik. Ugyanez igaz akkor is, ha valamely élre egy új másodfokú csúcsot iktatunk be. A bizonyításban

feltételezhetjük tehát, hogy a gráfnak nincs másodfokú csúcsa. Ha $l = 2$ akkor ez a végtelen tartományból és egy csúcshoz tartozó hurokélből áll, tehát $c = 1$, $l = 2$ és $e = 1$, vagyis $c + l - e = 2$.
Feltételezzük, hogy az összefüggés igaz minden olyan gráfra, amelyre a lapok száma kisebb l-nél. Bizonyítjuk, hogy az l lapú gráf esetén is igaz. Szüntessünk meg egy határon levő élt. Ezzel a gráf még összefüggő marad, de egybeolvad az a két lap, amelynek a megszüntetett él volt a közös határa. Az így kapott $l-1$ lappal, c csúccsal és $e-1$ éllel rendelkező gráfra az indukciós feltevés alapján $c + (l-1) + (e-1) = 2$, tehát $c + l - e = 2$

2.2.14. Euler-féle poliédertétel

Ha egy konvex poliéder csúcsainak, lapjainak és éleinek száma rendre c, l és e, akkor $c + l - e = 2$.

Bizonyítás. Helyezzük a poliédert egy elég nagy sugarú gömbbe, melynek középpontja a poliéder belsejében található. Vetítsünk a gömb középpontjából minden csúcsot a gömb felületére. A gömbön kapott gráfot vetítsük a gráf egy nem határpontjából a gömböt az átmérősen ellentett pontban érintő síkra. Az így kapott síkgráf lapjainak, éleinek és csúcsainak száma megegyezik a poliéderével, tehát az Euler tétel poliéderek esetén is érvényes.

Következmények

Bizonyítsuk be, hogy egy olyan sokszögráfban, amelyben minden csúcs legalább harmadfokú és nincs hurokélük, van olyan lap, amely legfeljebb ötoldalú.

Megoldás. Mivel minden csúcsba legalább három él fut be, az éleket a csúcsokban megszámolva kapjuk, hogy $3c$ nem haladja meg $2e$-t (mivel minden él két csúcsot köt össze), Tehát $c \le \frac{2}{3}e$ (1).

Feltételezzük, hogy minden lap legalább hatoldalú. Akkor $6l$ nem haladja meg $2e$-t (mivel minden él két lapot határol), tehát $l \ge \frac{1}{3}e$ (2).

Az (1) és (2) egyenlőtlenségből $c + l \le \frac{1}{3}e + \frac{2}{3}e = e$, vagyis $c + l - e \le 0$, ami ellentmond Euler tételének.

Megjegyzés. Minden konvex poliédernek van olyan lapja, amely legfeljebb ötoldalú.

Alkalmazások

1. Adott a síkban öt pont. Bizonyítsuk be, hogy nem köthetjük össze az öt pont mindegyikét minden más ponttal egymást nem metsző vonalak segítségével.

2. Bizonyítsuk be, hogy bármely konvex poliédernek van vagy háromszögű, vagy négyszögű, vagy ötszögű lapja.

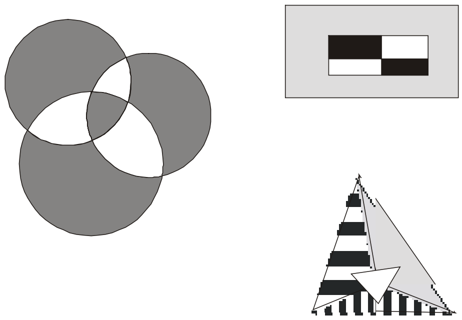
3. Bizonyítsuk be, hogy nem létezik hét élű poliéder.

4. Minden konvex poliédernek van legalább 8 élű csúcsa, ha lapjai páros oldalszámúak.

5. Milyen szabályos testek léteznek?

Színezési problémák

Adott a síkban egy tetszőleges térkép. Azt mondjuk, hogy helyesen színeztük a térképet, ha a térkép minden országát egy bizonyos színnel színeztük, úgy, hogy két közös határral rendelkező tartomány különböző színű legyen. Feltevődik a kérdés, hogy minimum hány színnel lehet kiszínezni egy térképet. A mellékelt ábrákon megjelenő térképeket rendre 2, 3, illetve 4 színnel lehet kiszínezni.



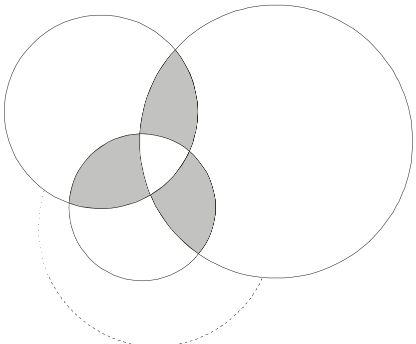
Mindeddig nem találtak egyetlen térképet sem, amit négy színnel ne lehetett volna helyesen kiszínezni. Erre Moebius német matematikus hívta fel először a figyelmet, már a XIX. században. Azóta a négyszín problémával igen sok neves matematikus foglalkozott sikertelenül, de nem eredménytelenül, mivel a vele kapcsolatos kutatások során a gráfelmélet, topológia, kombinatorika számos területét fedezték fel és dolgozták ki. A modern matematika egyik sikereként könyvelhető el a négyszín sejtés bizonyítása. Ez talán az első olyan matematikai tétel, amelynek bizonyításában a számítógép volt a fő eszköz.
A következőkben feltételezzük, hogy a térkép nem rendelkezik „belső" határokkal (vagyis olyanokkal, amelyek egy tartomány belsejében húzódnak), mert ebben az esetben nincs értelme helyes színezésről beszélni. Ugyanakkor azt is feltételezzük, hogy a térképnek nincs olyan csúcsa, amelyben csak két határ (él) találkozik. Tehát csak azon térképekkel foglalkozunk, amelyeknek minden csúcsában legalább három él fut össze, és egyetlen végtelen tartománya van.

Értelmezés

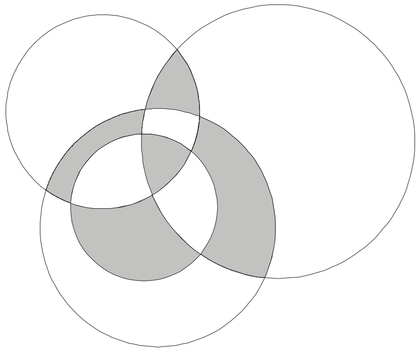
Egy olyan térképet, amelynek minden csúcsában pontosan három él fut össze, harmadfokú reguláris térképnek nevezünk.
Észrevehetjük, hogy ha egy tetszőleges térkép (**A** ábra) minden olyan csúcsa köré, amelyben több, mint 3 él fut össze megfelelően kis köröket rajzolunk, és ezeket a csúcsokkal szomszédos valamely tartományhoz csatoljuk, akkor egy normál térképet kapunk, amelyen ugyanannyi tartomány van, mint az eredeti térképen. Az így kapott térkép akkor és csak akkor színezhető ki négy színnel, ha az eredeti is.

Tekintsünk most néhány példát két színnel színezhető térképekre:

2.2.15 Feladat. Adott a síkban n darab kör. bizonyítsuk be, hogy ezek bármilyen egymáshoz viszonyított helyzete mellett az általuk alkotott térkép kiszínezhető két színnel.



A. ábra



B. ábra

Megoldás. Matematikai indukció segítségével igazoljuk állításunkat.
$n=1$ esetén az állítás nyilvánvalóan igaz.

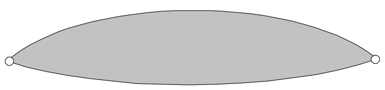
Feltételezzük, hogy állításunk igaz bármely n kör által alkotott térképre. Tekintsünk egy $n+1$ kör által alkotott térképet. Távolítsunk el egy kört. Az így megmaradt n körből álló térkép kiszínezhető két színnel. Végezzük el a színezést (**A** ábra).
Ezután húzzuk meg az $(n+1)$-ik kört, és a kör belső tartományában található minden egyes tartományt fessük át ellenkező színűre. Így egy helyesen színezett térképet kapunk.

2.2.16. Kétszín-tétel

Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy egy térkép két színnel színesíthető legyen az, hogy minden csúcsában. páros számú él találkozzon.

Bizonyítás. A feltétel szükségessége nyilvánvaló, hiszen ha a térképen van olyan csúcs, amelyben páratlan számú él fut össze, akkor a csúccsal szomszédos tartományok nem színezhetők helyesen.

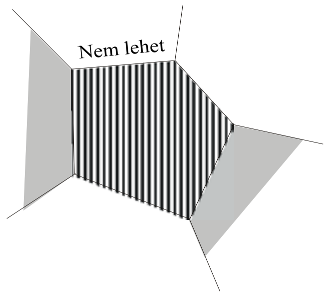
A feltétel elégséges voltát a térkép éleinek száma szerinti indukcióval bizonyítjuk.
$n=2$ esetén, a két éllel rendelkező térkép esetén, amint azt az ábra is mutatja, az állítás nyilvánvaló.



Feltételezzük, hogy állításunk igaz minden olyan $n+1$-nél kevesebb élű térkép esetén, és tekintsünk egy $n+1$ élű, a feltételeket teljesítő térképet. Induljunk ki egy tetszőleges A csúcsból, és egy kiválasztott irányban járjunk körbe a határok mentén.
Mivel véges számú csúcs van, visszatérünk valamely, már érintett csúcsba, és így egy zárt vonalat határozunk meg, amelyet eltávolítunk a térképről. Az eltávolítás után nyert térkép élszáma kisebb, és minden csúcsban páros számú él fut össze, mivel az eredeti térkép minden csúcsából 0 vagy 2 élet távolítottunk el. Az indukciós feltevés alapján az így nyert térkép két színnel színezhető. Színezzük ki az így kapott térképet, majd tegyük vissza az eltávolított zárt vonalat. A zárt vonal belső tartományában található tartományok színét a másik színre változtatva az eredeti térképet két színnel színeztük.

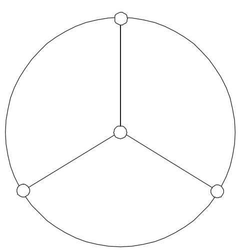
2.2.17. Háromszín-tétel

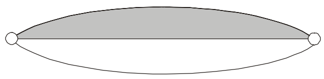
Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy egy térkép három színnel színezhető legyen az, hogy az összes tartománynak páros számú éle legyen.

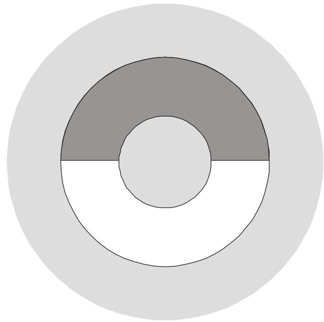


Bizonyítás. A feltétel szükségessége nyilvánvaló, hiszen ha a térképnek lenne egy olyan tartománya, amelynek páratlan határa van, akkor ezt a tartományt, és a vele szomszédos tartományokat nem lehetne helyesen színezni három színnel (ha az adott tartományt az egyik színnel színezzük, a megmaradt páratlan számú szomszédos tartományt a megmaradt két színnel nem tudnánk kiszínezni).

A feltétel elégségességét a térkép tartományainak a száma szerinti indukcióval bizonyítjuk. Egy 3 tartományt tartalmazó reguláris térkép esetén (**A** ábra) az állítás evidens. Négy tartományból álló reguláris térkép esetén (**B** ábra) szintén színezhető három színnel, ha a „belső" tartományt a „külsővel" azonos színűre színezzük. A másik típusú négy tartományból álló reguláris térkép nem teljesíti a páros számú határral való rendelkezés feltételét. Tehát $n=3$ és $n=4$ esetén az állítás igaz. Feltételezzük, hogy a tétel igaz minden olyan reguláris térképre, amelynek minden tartománya páros számú határral rendelkezik, és tartományainak száma $n-1$ vagy n. Vizsgáljunk meg egy hasonló feltételekkel rendelkező, $n+1$ tartományból álló térképet.

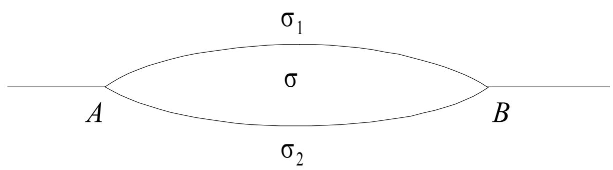



A. ábra


B. ábra

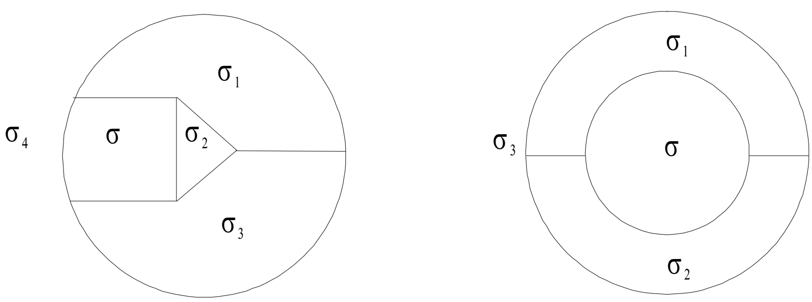
Amint azt már megmutattuk, a térképen található egy legtöbb 5 határral rendelkező tartomány. Ennek határszáma az adott feltételek mellett vagy 2 vagy 4. Ha σ határszáma 2, jelöljük A-val és B-vel a csúcsait, és σ_1-gyel és σ_2-vel a szomszédos tartományokat (**C** ábra).

Eltávolítjuk a σ_1 és σ közti határt, így egy újabb reguláris térképet kapunk, mivel A és B megszűnik ezáltal csúcs lenni, a többi csúcsba pedig ugyanannyi él fut be, mint az eredeti térképen. Az új térkép minden tartományának páros számú határa lesz, mivel σ_1 és σ_2 határainak száma kettő-kettővel csökken, a többi tartomány határainak száma pedig nem változik.



Mivel az új térkép tartományainak száma n, az indukciós feltétel értelmében kiszínezhető az α, β, γ színekkel. Legyen α, illetve β az a két szín, amivel a $\sigma_1' = \sigma + \sigma_1$ és a $\sigma_2' = \sigma_2$ tartományokat színeztük. Visszarajzolva a határt és γ-val színezve a σ tartományt, az S térkép egy helyes színezését kapjuk.

Ha a σ határainak száma 4, akkor megtörténhet, hogy a σ-val szomszédos, ellentétes oldalain elhelyezkedő két tartománynak legyen közös határa, vagy egybeessenek (**D** és **E** ábrák).



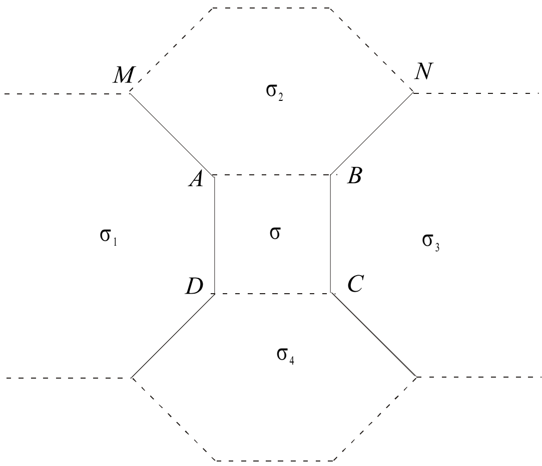
D. ábra

Ebben az esetben viszont létezik két olyan σ-val szomszédos tartomány, amelyeknek nincs közös határa, és nem is esnek egybe. Legyen az **E** ábrán σ_2 és σ_4 két ilyen tartomány.

Adjuk a σ_2 és a σ_4 tartományokat a σ tartományhoz, az AB és a CD élek eltávolításával. Egy olyan új térképet kapunk, amely reguláris, és minden tartomány határainak száma páros.

Tartalomjegyzék

Valóban, ha rendre a σ_1, a σ_2, a σ_3 és a σ_4 határainak a száma $2k_1$, $2k_2$, $2k_3$ és $2k_4$, akkor a $\sigma' = \sigma + \sigma_2 + \sigma_4$ tartomány határainak száma $2k_2 + 2k_4 - 4$, a $\sigma_1' = \sigma_1$ határainak száma $2k_1 - 2$, a $\sigma_3' = \sigma_3$ határainak száma pedig $2k_3 - 2$, a többi tartomány határainak száma pedig változatlan marad. Ha a σ_1 és a σ_2 tartományok egybeesnek, akkor ennek a tartománynak az új térképen 4-gyel kevesebb határa lesz, mint az eredeti térképen.



E. ábra

Mivel az új térképnek $n-1$ tartománya van, helyesen színezhető 3 színnel: $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ -val.

Bizonyítsuk be, hogy ebben az esetben a $\sigma_1$és a $\sigma_3$tartományok azonos színnel színezettek. Ha a σ' -tet α -val, a σ_1' -tet β -val színeztük, mivel az MN mentén σ' -tel páratlan számú $(2k_3 - 3)$ tartomány határos, és ezek színeinek váltakoznia kell: $\gamma,\ \beta,\ \gamma,\ \beta,\ ...,\gamma$, a σ_3' színe β lesz.

Most visszarajzolva a σ határait, és γ -val színezve, az eredeti térkép egy jó színezését kapjuk.

Feladatok

1. **Volinski tétele.** Egy reguláris térkép akkor és csak akkor színezhető ki négy színnel, ha a határai számozhatók 3 számjeggyel
2. **Ötszíntétel.** Minden reguláris térkép színezhető 5 színnel.
3. Adott a síkban n kör, és a körök mindegyikében meghúzunk egy húrt. Bizonyítsuk be, hogy az így létrejött térkép színezhető 3 színnel.

Tovább