Universitatea "Babeş-Bolyai"
Facultatea de Matematică şi Informatică
Cluj-Napoca, România

Camelia Dicu

METODE MODUL-TEORETICE ÎN STUDIUL G-ALGEBRELOR ŞI AL GRUPURILOR PUNCTATE

Teză de doctorat

Conducător ştiinţific:
Prof. Dr. Andrei Mărcuş

CLUJ-NAPOCA
- 2008 -

Cuprins

Introducere

Teoria reprezentărilor s-a ocupat iniţial cu studiul proprietăţilor grupurilor abstracte via reprezentările lor ca şi aplicaţii liniare ale unor spaţii vectoriale. Această idee a fost extinsă mai târziu pentru a include şi alte structuri matematice, ca de exemplu algebre asociative, algebre Lie sau algebre Hopf. În acest sens larg, teoria reprezentărilor oferă instrumente de bază şi metode pentru studiul "simetriilor" care apar într-o mare varietate de situaţii, de la geometria clasică până la informatică sau fizică şi chimie.

Teoria originală s-a ocupat în principal cu reprezentări peste corpul numerelor reale sau complexe. Caracterele ordinare ale grupurilor finite au fost definite de către Frobenius în anul 1896. În următorii 15 ani teoria caracterelor şi a reprezentărilor complexe a fost dezvoltată de Frobenius, Schur şi Burnside. În acest timp L.E. Dickson a considerat reprezentări ale grupurilor cu coeficienţi într-un corp finit. El a arătat că dacă corpul scalarilor spaţiului vectorial are caracteristică p şi p nu divide ordinul grupului G atunci metodele folosite pentru reprezentările complexe pot fi folosite fără schimbări esenţiale. În schimb, dacă p divide ordinul grupului G, Dickson a arătat că teoria este total diferită şi a numit aceste reprezentări *reprezentări modulare*.

Teoria reprezentărilor modulare ale grupurilor finite a fost dezvoltată în continuare de către R. Brauer care între anii 1935 şi 1977 a construit aproape în totalitate scheletul a ceea ce numim astăzi teoria clasică a reprezentărilor modulare ale grupurilor. Brauer a definit şi studiat conceptele de bază ale teoriei blocurilor, a dezvoltat multe idei importante, a demonstrat multe rezultate structurale şi a aplicat cu succes teoria în studiul structurii grupurilor finite. De exemplu, rezultatele de teoria caracterelor demonstrate de Brauer folosind teoria reprezentărilor modulare au jucat un rol foarte important în progresul spre clasificarea grupurilor finite simple. El şi-a propus studierea în amănunt a relaţiilor dintre teoria reprezentărilor în caracteristică p, teoria ordinară a caracterelor şi structura lui G, în special legate de relaţiile între p-subgrupurile acestuia. În teoria iniţiată de Brauer, legătura dintre teoria ordinară şi cea modulară este cel mai bine exemplificată considerând algebra grupală a grupului G peste un inel de valuare discretă $\mathcal{O}$ având corpul rezidual k de caracteristică p şi corpul fracţiilor $\mathcal{K}$ de caracteristică 0. Din motive tehnice, se presupune de asemenea că $\mathcal{O}$ este complet relativ la topologia $\wp$-adică, unde $\wp$ este unicul ideal maximal al lui $\mathcal{O}$. Aceasta permite ridicarea idempotenţilor de la kG la $\mathcal{O}G$ (lema lui Hensel).

Următorul pas important în dezvoltarea teoriei i se datorează lui J.A. Green, care a iniţiat în anii '60 studiul sistematic al modulelor indecompozabile peste algebre grupale şi a găsit multe dintre proprietăţile lor importante. El a introdus de asemenea concepte importante care unifică şi extind rezultatele precedente. J.A. Green a observat că poate fi folosit un concept comun pentru a aborda atât teoria blocurilor cât şi teoria modulelor. El a definit o *G-algebră* ca o $\mathcal{O}$-algebră înzestrată cu o acţiune a lui G asupra automorfismelor sale. Algebra grupală $\mathcal{O}G$ şi blocul $\mathcal{O}Gb$ sunt G-algebre în raport cu acţiunea prin conjugare. Pe de altă parte, dacă M este un $\mathcal{O}G$-modul, atunci algebra $\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(M)$ este de asemenea o G-algebră.

Un alt pas esenţial a fost realizat la sfârşitul anilor '70 prin contribuţia lui J.L. Alperin, M. Broué şi L. Puig care au pus bazele teoriei p-locale a blocurilor şi reprezentărilor. Alperin şi Broué au introdus perechile Brauer şi acestea au fost folosite de Broué şi Puig în studiul blocurilor nilpotente. Rafinând această noţiune, Puig a definit conceptul de *grup punctat* al unei G-algebre şi a dezvoltat în anii '80 teoria generală a grupurilor punctate.

Practic, extinzând cercetările lui Green asupra G-algebrelor, Puig a dezvoltat o nouă abordare a teoriei reprezentărilor modulare ale grupurilor. A introdus noi invarianţi, a dat un nou punct de vedere rezultatelor clasice, a demonstrat importante rezultate de structură şi a propus diverse probleme deschise.

În această teză ne propunem o abordare modul-teoretică a teoriei lui Puig. Vom dezvolta şi aplica metode de teoria modulelor peste algebre graduate pentru a trata diverse probleme din teoria G-algebrelor definite peste corpuri mici. Vom interpreta grupurile punctate ale unei G-algebre ca şi clase de izomorfism de anumite module şi vom caracteriza în aceşti termeni diverse relaţii între grupuri punctate. Ca şi aplicaţii, vom deduce anumite rezultate din teoria lui Puig asupra grupurilor punctate din rezultate mai generale din teoria modulelor peste algebre graduate. Astfel, vom formula versiunile graduate ale unor proprietăţi existente în literatură legate de grupuri punctate pe care le vom demonstra folosind metode directe, modul-teoretice. Proprietăţile referitoare la grupuri punctate se vor deduce uşor, ca şi consecinţe ale rezultatelor noastre. Avantajele unei astfel de abordări constă nu doar în caracterul de generalitate al acestor rezultate ci şi în faptul că demonstraţiile noastre folosind tehnici din teoria modulelor sunt directe, mai scurte şi simplificate.

O altă direcţie de cercetare este legată de studiul blocurilor cu defect grup normal peste corpuri arbitrare. Structura acestora este binecunoscută. Folosind tehnici din teoria modulelor peste algebre graduate vom descrie modulele sursă ale acestor blocuri. În cazul în care o defect-pereche Brauer a unui bloc este normalizată, vom arăta că există o echivalenţă Morita graduată între bloc şi algebra sa sursă.

Prezentăm în continuare conţinutul lucrării.

În *Capitolul 1* dezvoltăm metode de teoria modulelor peste algebre graduate pentru a trata diverse probleme din teoria lui Puig.

§1.1. Prezentăm pe scurt noţiunile de bază ale teoriei G-algebrelor care vor fi folosite intens în continuare. Astfel, definim noţiunile fundamentale de G-algebră şi grup punctat al unei G-algebre precum şi diverse obiecte şi morfisme asociate acestora. Dăm de asemenea exemple importante de G-algebre şi grupuri punctate.

§1.2. Fie G un grup finit, A o G-algebră şi L un subgrup al lui G. Asociem unui grup punctat L_α al lui A clase de izomorfism de anumite bimodule peste algebre G-interioare, care au şi o structură G-graduată, într-un mod similar lui Alperin *et al.* [4]. De fapt vom considera pentru început cazul mai general al H-algebrelor care sunt interioare în raport cu un subgrup normal K al lui H. Această ipoteză va fi irelevantă totuşi în paragrafele următoare. Corespondenţa între punctele unei H-algebre K-interioare şi clase de izomorfism de anumite module este dată în Teorema 1.2.8, care este rezultatul central al acestui paragraf. Acest rezultat ne permite o abordare în termeni de teoria modulelor a unor rezultate legate de grupuri punctate.

§1.3. Astfel, în al treilea paragraf vom caracteriza în aceşti termeni relaţia de incluziune între grupuri punctate (subparagraful 1.3.1) şi relaţia de proiectivitate relativă (subparagraful 1.3.3). De asemenea, în cazul unei proiectivităţi relative între grupuri punctate punem în evidenţă în Propoziţia 1.3.10 o echivalenţă Morita indusă de nişte bimodule G-graduate. Aşa cum am menţionat anterior, în aceste paragrafe nu considerăm ipoteza de interioritate. În această abordare, algebra graduată care intră în discuţie este $R = A * G$, algebra grupală strâmbă a lui A şi G.

§1.4. Caracterizăm în termeni de module relaţia de libertate relativă între grupuri punctate şi facem observaţia că această interpretare ne permite să considerăm inducţie de grupuri punctate fără a mai trebui să trecem la o G-algebră inductiv completă ca în Puig [39, Capitolul 5]. Tot aici prezentăm conform [39] definirea restricţiei şi inducţiei pentru divizorii unei G-algebre, noţiuni care vor fi folosite în capitolul al treilea.

§1.5. Acest paragraf este dedicat teoriei defectului grupurilor punctate. Teorema 1.5.4 dă interpretarea în termeni modul-teoretici a noţiunii de defect grup punctat şi, ca o aplicaţie, arătăm în subparagraful 1.5.5 că versiunea corespondenţei Green pentru grupuri punctate poate fi dedusă din versiunea acesteia pentru algebre graduate.

Exceptând primul paragraf, în acest prim capitol expunerea se bazează pe rezultate originale obţinute de autoare singură sau în colaborare. Astfel, rezultatele prezentate în paragrafele 1.2 şi 1.3 au fost publicate în lucrarea [14] scrisă în colaborare cu prof. A. Mărcuş, iar rezultatele originale din paragrafele 1.4 şi 1.5, în lucrarea [15].

Capitolele 2 şi 3 sunt dedicate aplicaţiilor, inspirate de teoria G-algebrelor, ale rezultatelor stabilite în capitolul întâi. Vom arăta că anumite rezultate ale teoriei lui Puig pot fi deduse din rezultate mai generale din teoria modulelor peste algebre graduate. În ambele capitole vom folosi aceeaşi metodă de lucru. Vom formula versiunile graduate ale unor rezultate existente în literatură legate de grupuri punctate pe care le vom demonstra folosind metode din teoria modulelor peste algebre graduate, ca de exemplu teoria lui Green a vârfurilor şi surselor (în capitolul al doilea) sau teorie Clifford pentru module indecompozabile (în capitolul al treilea). Rezultatele iniţiale legate de grupuri punctate se vor deduce uşor ca şi consecinţe ale acestor rezultate mai generale.

În *Capitolul 2* arătăm că un rezultat al lui Zhou [44] care caracterizează libertatea relativă între grupuri punctate rezultă dintr-un rezultat mai general legat de module induse peste algebre graduate.

§2.1. Am reunit noţiunile şi rezultatele de bază ale teoriei lui Green pentru algebre graduate, ca de exemplu descompunerea lui Mackey, proiectivitate relativă, criteriul lui Higman, vârfuri şi surse şi corespondenţa Green.

§2.2. În [44], Y. Zhou dă o caracterizare a relaţiei de libertate relativă între grupuri punctate (Teorema 2.2.1). În lucrarea [15] am stabilit un rezultat mai general legat de module induse peste algebre graduate (Teorema 2.2.2). Demonstraţia ei se bazează pe teoria lui Green. Fixând A o G-algebră, această teoremă aplicată algebrei graduate $R = A{*}G$ implică rezultatul lui Zhou. Rezultatele din paragraful 2.2 sunt originale şi au fost publicate în [15].

În *Capitolul 3* aplicăm rezultate de teorie Clifford pentru a demonstra două teoreme din teoria G-algebrelor şi a generaliza noţiunea de modul de multiplicitate al unui grup punctat.

§3.1. Fixând un grup G, un inel G-graduat R şi un R-modul G-graduat finit generat M, inelul de endomorfisme E al lui M admite o G-graduare naturală şi M devine astfel un (R, E)-bimodul G-graduat. Teoria Clifford studiază în detaliu inelul E şi functorii $\mathrm{Hom}_R(M, -)$ şi $M \otimes_E -$. Rezultatele de teorie Clifford pentru module gr-indecompozabile pe care le folosim sunt sumarizate aici. Acestea au fost prezentate în limbaj categorial în Mărcuş [31].

§3.2. Arătăm că teorema de indecompozabilitate a lui Green pentru grupuri punctate rezultă din versiunea acesteia pentru algebre graduate.

§3.3. În lucrarea [22], teorema lui Fong pentru grupuri p-resolubile şi teorema lui Green pentru p-grupuri, ambele legate de module induse, sunt unificate şi extinse într-un rezultat general (Corolarul 3.3.6). Urmând lucrarea [14], formulăm în Teorema 3.3.2 versiunea graduată a acestui rezultat. Demonstraţia noastră foloseşte abordarea categorială a teoriei lui Clifford pentru module indecompozabile şi inducţie. De fapt, conform acestei teorii, teorema se reduce la o teoremă similară pentru algebre grupale răsucite peste k.

Paragrafele 3.2 şi 3.3 conţin rezultate originale obţinute în colaborare cu prof. A. Mărcuş şi au fost publicate în lucrarea [14].

§3.4. Dăm versiunea graduată a noţiunii de modul de multiplicitate al unui grup punctat. Pornind de la o algebră tare G-graduată R, un R-modul $\tilde{M}$ şi U un sumand direct al lui $\mathrm{Res}^G_H(\tilde{M})$, definim noţiunea de modul de multiplicitate al lui U (Definiţia 3.4.3). Arătăm că această construcţie aplicată algebrei G-graduate $A * G$, unde A este o G-algebră, implică în cazul algebric închis, noţiunea uzuală de modul de multiplicitate al unui grup punctat. Rezultatele prezentate în acest paragraf sunt conţinute în lucrarea [18], acceptată spre publicare.

În *Capitolul 4* abordăm unul dintre exemplele de bază de G-algebră, algebra grupală şi blocurile algebrelor grupale. Vom descrie algebrele sursă şi modulele sursă ale blocurilor cu defect grup normal peste corpuri arbitrare. În abordarea noastră folosim tehnici din teoria modulelor peste algebre graduate.

§4.1. Prezentăm pe scurt noţiuni şi rezultate generale din teoria blocurilor algebrelor grupale. Dăm definiţia modul-teoretică a defect grupului unui bloc. De asemenea definim urmând Alperin *et al.* [4] noţiunea de modul sursă şi respectiv algebră sursă a unui bloc.

§4.2. Prezentăm construcţiile şi rezultatele de teoria algebrelor graduate pe care le vom folosi în demonstraţiile rezultatelor noastre de bază. Astfel, definim produsele încrucişate şi algebrele grupale răsucite şi dăm o caracterizare a echivalenţei Morita graduate. Prezentarea urmează în principal Mărcuş [30] şi Năstăsescu [38].

§4.3. Aşa cum am menţionat, pe tot parcursul acestui capitol considerăm cazul k corp arbitrar. Spre deosebire de cazul k algebric închis, sunt necesare aici nişte noţiuni şi rezultate legate de extinderea algebrei coeficienţilor. Prezentăm aici pe scurt aceste rezultate, urmând în principal lucrarea Fan [20].

§4.4. Amintim aici câteva noţiuni şi rezultate tehnice legate de blocuri şi teorie Cliford pentru blocuri, majoritatea conţinute în Fan-Puig [23]. Acest paragraf are rolul de a introduce notaţiile necesare formulării rezultatelor noastre din paragraful următor.

§4.5. Peste corpuri mari structura blocurilor cu defect grup normal a fost descrisă în [27] de B. Külshammer şi algebra sursă a fost determinată de L. Puig în [40]. În Alperin *et al.* [4] este dată o abordare în termeni de module a rezultatelor lui Puig şi este introdusă noţiunea de modul sursă iar Mărcuş [35] aduce în discuţie o echivalenţă Morita graduată. Abordarea lui Puig a fost generalizată la corpuri arbitrare în Fan-Puig [23, Teorema 1.17]. În lucrarea [17] am considerat de asemenea corpuri arbitrare şi am generalizat [4, Teorema 13] şi [35, Teorema 3.3]. Fie G un grup, b un bloc cu defect grup D al lui $\mathcal{O}G$ şi $A = \mathcal{O}Gb$. Presupunând că G normalizează o defect b-pereche Brauer, descriem structura modulului sursă al lui b şi demonstrăm că există o echivalenţă Morita $G/C_G(D)$-graduată între A şi algebra sursă a lui b. Rezultatele centrale ale acestui paragraf sunt Teorema 4.5.3 şi corolarele sale 4.5.4 şi 4.5.5.

Rezultatele originale din paragraful 4.4 precum şi cele din paragraful 4.5 au fost publicate în lucrarea [17], scrisă în colaborare cu profesorul A. Mărcuş.

Am încheiat această teză cu un paragraf care cuprinde concluziile asupra rezultatelor obţinute şi perspective pentru cercetări ulterioare în acest domeniu, precum şi cu o listă selectivă a surselor bibliografice folosite pe parcursul elaborării acestei lucrări.

*

Sunt profund recunoscătoare domnului profesor Andrei Mărcuş pentru îndrumarea şi ajutorul pe care mi le-a acordat pe parcursul elaborării acestei teze. Îi mulţumesc pentru dedicarea sa, pentru răbdarea şi sprijinul său continuu.

Mulţumesc de asemenea domnului profesor Ioan Purdea pentru tot sprijinul şi înţelegerea sa, precum şi tuturor colegilor de la Catedra de Algebră pentru colaborarea prietenoasă şi atmosfera deosebit de caldă din cadrul catedrei.

În final, le mulţumesc părinţilor, fraţilor mei şi lui Thomas care mi-au fost alături, m-au încurajat şi m-au ajutat în toate modurile posibile în această perioadă.

Cluj-Napoca,
Februarie 2008

Preliminarii şi notaţii

Grupuri. Pe tot parcursul lucrării, prin grup vom înţelege grup finit, excepţie făcând desigur grupurile unităţilor şi grupurile automorfismelor unor algebre.

Fie G un grup finit şi H şi K subgrupuri ale sale. Notăm cu G/H mulţimea claselor gH, $g \in G$, $K\backslash G$, mulţimea claselor Kg, $g \in G$ şi $K\backslash G/H$ mulţimea claselor duble KgH, $g \in G$. Pentru orice $g \in G$ vom nota ${}^gH$ subgrupul conjugat $\{gHg^{-1} \mid g \in G\}$. Mai mult, notăm cu $N_G(H)$ normalizatorul lui H în G şi $C_G(H)$ centralizatorul lui H în G.

Algebre. Descriem pentru început inelul care va fi folosit ca inel de bază pe tot parcursul acestei lucrări. Fie $\mathcal{O}$ un inel comutativ, local şi noetherian având corpul fracţiilor $\mathcal{K}$ de caracteristică 0 şi corpul rezidual $k = \mathcal{O}/J(\mathcal{O})$ de caracteristică p. Notăm $J(\mathcal{O}) = \wp$. Din motive tehnice, presupunem de asemenea că $\mathcal{O}$ este complet în raport cu topologia $\wp$-adică. Acest lucru permite ridicarea idempotenţilor de la kG la $\mathcal{O}G$. Teoria clasică a inelelor ne asigură că un astfel de inel există.

Presupunem de asemenea că corpul rezidual k este algebric închis. Această presupunere este irelevantă în multe cazuri dar este esenţială în marea parte a teoriei reprezentărilor. Totuşi, în anumite situaţii vom renunţa la această ipoteză şi vom generaliza unele rezultate peste corpuri arbitrare.

Printr-o $\mathcal{O}$-algebră A vom înţelege întotdeauna o $\mathcal{O}$-algebră asociativă, cu unitate, care este finit generată ca şi $\mathcal{O}$-modul.

Fie A o $\mathcal{O}$-algebră. Vom nota cu $Z(A)$ centrul său, cu $U(A)$ grupul unităţilor lui A şi $J(A)$ radicalul său Jacobson.

Module. Prin modul vom înţelege modul stâng. Fie R o algebră. Un R-modul va fi privit frecvent ca un $(R, \mathrm{End}_R(M)^{\mathrm{op}})$-modul. Vom nota cu $J(M)$ radicalul Jacobson al lui M. Vom folosi notaţia ${}_RM$ şi ${}_RM_S$ dacă M este R-modul şi respectiv (R,S)-bimodul. Notăm cu R-Mod categoria R-modulelor (stângi) şi cu R-Proj categoria R-modulelor (stângi) proiective. De asemenea, notăm cu R-mod categoria R-modulelor (stângi) finit generate şi cu R-proj categoria R-modulelor (stângi) proiective finit generate.

Algebre şi module graduate. Fie G un grup şi $R = \bigoplus_{g \in G} R_g$ o $\mathcal{O}$-algebră G-graduată (adică, R_g este $\mathcal{O}$-sumand al lui R şi $R_gR_h \subseteq R_{gh}$, $\forall g, h \in G$). Un R-modul stâng M se numeşte G-graduat, dacă are o descompunere $M = \bigoplus_{x \in G} M_x$ în sumă directă de subgrupuri aditive astfel încât $R_gM_x \subseteq M_{gx}$, $\forall g, x \in G$. Un $\mathcal{O}$-morfism $f : M \to N$ între două R-module G-graduate este graduat, dacă $f(M_x) \subseteq N_x$, $\forall x \in G$. Vom nota cu R-Gr categoria R-modulelor G-graduate şi a morfismelor graduate. Considerând R şi S două algebre G-graduate, se poate construi în mod natural categoria (R,S)-bimodulelor G-graduate, pe care o vom nota cu R-Gr-S.

O algebră G-graduată R se numeşte tare G-graduată dacă $R_gR_h = R_{gh}$, $\forall g, h \in G$. Fie $R = \bigoplus_{g \in G} R_g$ o algebră tare G-graduată. Pentru o submulţime X a lui G notăm $R_X = \bigoplus_{x \in G} R_x$.

Capitolul 1

G-algebre și algebre graduate

Noţiunea de G-algebră a fost introdusă de J.A. Green ca un concept comun care oferă o abordare uniformă a reprezentărilor liniare ale grupurilor finite, pe de o parte, şi a blocurilor algebrelor grupale pe de altă parte. De exemplu, teoria G-algebrelor realizează o legătură între noţiunea de vârf din teoria reprezentărilor modulare şi cea de defect din teoria blocurilor (sau mai general, între teoria lui Green şi teoria lui Brauer).

În anii '80, L. Puig a extins rezultatele lui Green şi a dezvoltat o nouă abordare a teoriei reprezentărilor modulare ale grupurilor. A introdus noi invarianţi, a dat un nou punct de vedere rezultatelor clasice, a demonstrat importante teoreme de structură şi a formulat diverse probleme deschise.

În acest capitol vom prezenta o abordare modul-teoretică a teoriei lui Puig. Vom dezvolta metode de teoria modulelor peste algebre graduate pentru a trata diverse probleme din teoria G-algebrelor. Vom aborda principalele concepte ale acestei teorii: grup punctat, defect grup punctat, relaţia de incluziune între grupuri punctate, proiectivitate relativă, libertate relativă, inducţie de grupuri punctate şi vom da interpretările lor în termeni de module. Exceptând primul paragraf care are caracter introductiv, expunerea se bazează pe rezultate originale obţinute de autoare singură sau în colaborare. Rezultatele paragrafelor 1.2 şi 1.3 au fost publicate în lucrarea [14] scrisă în colaborare cu prof. A. Mărcuş iar rezultatele originale din 1.4 şi 1.5 în lucrarea [15].

1.1 G-algebre și grupuri punctate

În acest paragraf prezentăm pe scurt noţiunile de bază ale teoriei G-algebrelor pe care le vom folosi intens în continuare. Vom defini noţiunile fundamentale de G-algebră şi grup punctat al unei G-algebre şi vom introduce diverse obiecte şi morfisme asociate acestora. Fixăm $\mathcal{O}$ un inel comutativ, local şi noetherian având corpul rezidual k algebric închis de caracteristică p.

1.1.1. G-algebre. *O G-algebră* (sau, mai precis, o G-algebră peste $\mathcal{O}$) este o pereche (A, φ) unde A este o $\mathcal{O}$-algebră şi $\varphi : G \to \mathrm{Aut}(A)$ este un morfism de grupuri. Acţiunea $\varphi(g)$ a lui $g \in G$ pe A va fi notată întotdeauna $\varphi(g)(a) = {}^g a$, pentru orice $a \in A$. Dacă A şi B sunt G-algebre, o funcţie $f : A \to B$ se numeşte *morfism de G-algebre* dacă este morfism de $\mathcal{O}$-algebre astfel încât $f({}^g a) = {}^g(f(a))$, pentru orice $g \in G$ şi $a \in A$. Pentru orice subgrup H al lui G, vom nota cu A^H subalgebra elementelor H-fixate, adică,

$$A^H = \{a \in A \mid {}^h a = a, \forall h \in H\}.$$

O algebră G-interioară este o pereche (A, ψ) unde A este o $\mathcal{O}$-algebră şi $\psi : G \to U(A)$ este un morfism de grupuri. Deoarece există un morfism de grupuri $U(A) \to \mathrm{Aut}(A)$, care asociază lui $a \in U(A)$ automorfismul interior determinat de a, orice algebră G-interioară este în particular o G-algebră.

Exemple importante de G-algebre:

a) Algebra grupală $\mathcal{O}G$ este o G-algebră interioară împreună cu morfismul structural $G \to U(\mathcal{O}G)$, care asociază lui $g \in G$ imaginea sa naturală în $\mathcal{O}G$.

b) Fie U un $\mathcal{O}G$-modul, atunci $\mathcal{O}$-algebra $\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(U)$ devine o G-algebră interioară cu morfismul structural

$$\psi : G \to U(\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(U)) = GL_{\mathcal{O}}(U)$$

care asociază lui $g \in G$ automorfismul $\psi(g)(u) = gu$. Aşa cum s-a menţionat mai sus, $\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(U)$ este în particular o G-algebră, şi acţiunea lui $g \in G$ pe $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathcal{O}}(U)$ este dată de $({}^g\varphi)(u) = g\varphi(g^{-1}u)$, unde $u \in U$. Mai mult, pentru orice subgrup H al lui G, are loc $(\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(U))^H = \mathrm{End}_{\mathcal{O}H}(U)$.

c) Dacă A este o G-algebră interioară cu morfismul structural $\psi : G \to U(A)$, atunci pentru orice subgrup H al lui G şi orice idempotent $i \in A^H$, algebra iAi devine o algebră H-interioară cu morfismul structural $\psi' : H \to U(iAi)$, $\psi'(g) = \psi(g)i (= i\psi(g))$.

Conceptul de G-algebră a fost introdus de Green ([26]). Definiţia G-algebrei interioare i se datorează lui Puig ([40]). Se poate spune că, într-un anume mod, teoria blocurilor şi teoria modulelor sunt unificate sub acelaşi concept de G-algebră. În afară de avantajul eleganţei, această abordare are multe alte beneficii. În primul rând, toate conceptele se pot aplica şi la alte obiecte, ca de exemplu diagrame de $\mathcal{O}G$-module. Pe de altă parte, unii invarianţi sau construcţii care au fost folosiţi cu succes într-o teorie pot fi introduşi pentru G-algebre arbitrare şi aplicaţi şi la alte obiecte.

1.1.2. Morfismul lui Brauer. Fie A o G-algebră şi H şi K subgrupuri ale lui G astfel încât $K \leq H$. Atunci are loc $A^H \subseteq A^K$ şi această incluziune este în particular o aplicaţie $\mathcal{O}$-liniară, numită *aplicaţia de restricţie* şi notată res^H_K.

Există şi o aplicaţie în sens opus, numită *aplicaţia urmă*, definită astfel:

$$\mathrm{Tr}^H_K : A^K \to A^H, \quad \mathrm{Tr}^H_K(a) = \sum_{h \in [H/K]} {}^h a.$$

Vom nota $A^H_K = \mathrm{Im}(\mathrm{Tr}^H_K)$.

Introducem acum un alt concept cheie, morfismul lui Brauer. Fie P un subgrup al lui G. Surjecţia canonică $\mathrm{Br}_P^A : A^P \to \overline{A}(P)$, unde

$$\overline{A}(P) = A^P/(\sum_{Q<P} A_Q^P + J(\mathcal{O})A^P),$$

se numeşte *morfismul lui Brauer* corespunzător subgrupului P. Din construcţie, Br_P este un morfism de $N_G(P)$-algebre. În cazul algebrelor grupale conceptul de morfism al lui Brauer a fost introdus de Brauer (1956) dar folosind un alt punct de vedere. Ideea de a defini un astfel de morfism pentru G-algebre arbitrare i se datorează lui Broué şi Puig (1980).

1.1.3. Grupuri punctate. Amintim că $\alpha \in A$ este un *punct* al unei $\mathcal{O}$-algebre A dacă α este o clasă de conjugare de idempotenţi primitivi ai lui A. În [40] Puig defineşte noţiunea de *grup punctat* H_α al unei G-algebre A ca fiind o pereche (H, α) unde $H \leq G$ şi $\alpha \in \mathcal{P}(A^H)$.

Exemple:

a) Deoarece $(\mathcal{O}G)^G = Z(\mathcal{O}G)$, un punct al lui G pe $\mathcal{O}G$ (cu G acţionând prin conjugare) este de forma $\{b\}$, unde b este un un idempotent central primitiv al lui $\mathcal{O}G$ (adică un *bloc* al lui $\mathcal{O}G$).

b) Fie U un $\mathcal{O}G$-modul şi $A = \mathrm{End}_{\mathcal{O}}(U)$. Am văzut că A este o G-algebră interioară şi dacă H este un subgrup al lui G, $A^H = \mathrm{End}_{\mathcal{O}H}(U)$. Se arată uşor că, $f \in A^H$ este un idempotent primitiv dacă şi numai dacă $f(U)$ este un sumand direct indecompozabil al lui $\mathrm{Res}_H^G U$. Prin urmare, există o bijecţie între mulţimea punctelor lui H pe A şi mulţimea claselor de izomorfism de sumanzi direcţi indecompozabili ai lui $\mathrm{Res}_H^G U$.

c) Algebra de matrici $\mathcal{M}_n(\mathcal{O})$ are un unic punct. Descompunerea primitivă a lui $1_{\mathcal{M}_n(\mathcal{O})}$ este mulţimea $\{e_i \mid 1 \leq i \leq n\}$, unde e_i este matricea având 1 pe poziţia (i,i) şi zero în rest. Se verfică uşor că idempotenţii e_i sunt toţi conjugaţi.

d) Punctele unui subgrup H al lui G pe $\mathcal{O}G$ corespund bijectiv mulţimii claselor de izomorfism de $(\mathcal{O}G, \mathcal{O}H)$-sumanzi direcţi indecompozabili ai lui $\mathcal{O}G$. Mai exact, conform teoremei Krull-Schmidt, pentru orice puncte γ şi γ' ale lui H pe G, şi orice $i \in \gamma$ şi $i' \in \gamma'$, există un izomorfism de $(\mathcal{O}G, \mathcal{O}H)$-bimodule $\mathcal{O}Gi \simeq \mathcal{O}Gi'$ dacă şi numai dacă $\gamma = \gamma'$.

1.2 Module asociate grupurilor punctate

Conceptul de bază al teoriei lui Puig este noţiunea de grup punctat. În acest paragraf stabilim nişte corespondenţe între G-algebre şi algebre graduate care permit interpretarea grupurilor punctate ca şi clase de izomorfism de anumite module. Astfel, anumite rezultate din teoria lui Puig asupra grupurilor punctate pot fi deduse aplicând metode din teoria modulelor.

1.2.1. Fie G un grup, $R = \bigoplus_{g\in G} R_g$ o algebră tare G-graduată şi M un R-modul. Deoarece $R_gR_{g^{-1}} = 1, \forall g \in G$, există un număr natural $n > 0$ şi elementele $x_1, ..., x_n \in R_g$ şi $x'_1, ..., x'_n \in R_{g^{-1}}$ (numite *baze duale*) astfel încât

$$\sum_{i=1}^{n} x_i x'_i = 1.$$

Dacă $\phi \in \mathrm{End}_{R_1}(M)$, se defineşte

$${}^g\phi(m) = \sum_{i=1}^{n} x_i\phi(x'_i m), \forall m \in M,$$

această definiţie fiind independentă de alegerea bazei duale. Astfel $\mathrm{End}_{R_1}(M)$ devine o G-algebră. Mai mult, este binecunoscut faptul că

$$(\mathrm{End}_{R_1}(M))^H = \mathrm{End}_{R_H}(M), \tag{1.1}$$

pentru orice subgrup H al lui G.

În lucrarea [11], Dade a stabilit următorul rezultat:

Teorema 1.2.2. *Pentru orice G-algebră A se poate construi în mod natural un izomorfism de G-algebre $\lambda : A \to \mathrm{End}_{R_1}(M)^{op}$, unde R este o algebră tare G-graduată şi M un R-modul finit generat.*

Demonstraţie. Se consideră $R = A * G$ algebra grupală strâmbă a lui A cu G. Astfel,

$$R = \bigoplus_{g\in G} Ag,$$

este A-modulul liber având ca bază elementele lui G. Multiplicarea în R este dată de formula:

$$(ax)(by) = a^x bxy, \forall x, y \in G, a, b \in A.$$

Se observă că R este o algebră tare G-graduată, cu g-componenta Ag. Deoarece $1g \in Ag$ este un element inversabil, algebra grupală strâmbă este chiar un produs încrucişat. Observăm de asemenea că aplicaţia $a \mapsto a1_G$ este un izomorfism de algebre de la A la $R_1 = A1_G$.

Se construieşte pe grupul aditiv al lui A o structură de R-modul M astfel:

$$(ax)b = a^x b, \forall b \in M = A, x \in G, a \in A.$$

Observăm că restricţia lui M la R_1 este modulul ${}_AA$. Rezultă că M este finit generat ca şi R-modul şi că există un izomorfism natural de algebre

$$\lambda : A \to \mathrm{End}_{R_1}(M)^{\mathrm{op}}$$

definit astfel

$$\lambda(a)(b) = ba, \forall a \in A, b \in M.$$

Se demonstrează uşor că λ păstrează acţiunea lui G pe A şi pe $\mathrm{End}_{R_1}(M)^{\mathrm{op}}$. $\square$

Observaţia 1.2.3. Fie A o G-algebră, H un subgrup al lui G şi $\alpha \in \mathcal{P}(A^H)$. Conform relaţiei (1.1) şi Teoremei 1.2.2, $\lambda(\alpha)$ este un idempotent primitiv al algebrei $\mathrm{End}_{R_H}(M)^{\mathrm{op}}$. Deci, grupului punctat H_α al lui A îi corespunde prin izomorfismul λ din Teorema 1.2.2 un R_H-sumand direct indecompozabil al lui M. Astfel, există o bijecţie între grupuri punctate şi clase de izomorfism de R_H-sumanzi direcţi indecompozabili ai lui M, unde H parcurge mulţimea subgrupurilor lui G. Dacă $i \in \alpha$, atunci R_H-modulul corespunzător este Ai. Rezultă că, stabilind rezultate corespunzătoare pentru module peste algebre graduate, anumite rezultate din teoria lui Puig a grupurilor punctate pot fi deduse din acestea ca şi consecinţe.

1.2.4. O abordare similară este realizată în [14]. Aici considerăm cazul mai general al H-algebrelor care sunt interioare în raport cu un subgrup normal al lui H. Asociem unui grup punctat al unei astfel de algebre, clase de izomorfism de bimodule peste algebre H-interioare care au o structură graduată, într-un mod similar lui Alperin *et al.* în [4]. În cele ce urmează, prezentăm aceste rezultate, urmând lucrarea [14].

Fie H un grup finit, K un subgrup normal al său şi $G = H/K$. Vom privi algebra grupală $\mathcal{O}H$ ca o $\mathcal{O}$-algebră G-graduată în modul natural.

Conform [39, 4.2], *o H-algebră K-interioară* peste $\mathcal{O}$ este o $\mathcal{O}$-algebră A împreună cu două morfisme de grupuri $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(A)$ şi $\psi : K \to U(A)$ astfel încât pentru orice $x \in H$, $y \in K$ şi $a \in A$ avem

$$(y \cdot a)^x = y^x \cdot a^x$$
$$a^y = y^{-1} \cdot a \cdot y,$$

unde $y \cdot a = \psi(y)a$, $a \cdot y = a\psi(y)$ şi $a^x = \varphi(x)^{-1}(a)$.

Ca şi în [39, Cap 9], orice H-algebră K-interioară A determină o $\mathcal{O}$-algebră G-graduată $R = \bigoplus_{g\in G} R_g$ astfel:

$$R = A \otimes_{\mathcal{O}K} \mathcal{O}H = \bigoplus_{x\in[H/K]} A \otimes x,$$
$$(a \otimes x)(b \otimes y) = a^x b \otimes xy,$$

pentru orice $a, b \in A$ şi $x, y \in H$. În particular, avem

$$(1 \otimes x)(1 \otimes y) = 1 \otimes xy,$$

deci există un morfism de algebre G-graduate

$$\psi : \mathcal{O}H \to R, \quad \psi(h) = 1 \otimes h, \forall h \in H.$$

Reciproc, dacă $R = \bigoplus_{g\in G} R_g$ este o $\mathcal{O}$-algebră G-graduată astfel încât $\psi : \mathcal{O}H \to R$ este un morfism de algebre G-graduate, este uşor de verificat că $A := R_1$ este o H-algebră K-interioară, unde

$$\varphi : H \to \mathrm{AutA}, \quad \varphi(h)(a) = \psi(h)a\psi(h)^{-1},$$

$$\psi : K \to U(A) \text{ este restricţia lui } \psi.$$

Prin urmare, există o corespondenţă bijectivă între H-algebre K-interioare şi algebre G-graduate H-interioare. Vom generaliza acest rezultat în cazul algebrelor tare graduate.

1.2.5. Dacă $\psi : S \to R$ este un morfism de $\mathcal{O}$-algebre tare G-graduate, atunci R_1 devine un $\Delta(S \otimes_{\mathcal{O}} S^{\mathrm{op}})$-modul via ψ, unde

$$\Delta(S \otimes_{\mathcal{O}} S^{\mathrm{op}}) = \bigoplus_{g\in G} (S_g \otimes_{\mathcal{O}} S_g^{\mathrm{op}})$$

este subalgebra diagonală şi

$$(s_g \otimes s'_{g^{-1}})r_1 = \psi(s_g)r_1\psi(s'_{g^{-1}}),$$

pentru orice $r_1 \in R_1, s_g \in S_g, s'_{g^{-1}} \in S_g^{\mathrm{op}}$, iar $\psi_1 : S_1 \to R_1$ este un morfism de $\Delta(S \otimes_{\mathcal{O}} S^{\mathrm{op}})$-module şi de $\mathcal{O}$-algebre.

Reciproc, dacă S şi A sunt $\mathcal{O}$-algebre astfel încât S este tare G-graduată şi A este un $\Delta(S \otimes_{\mathcal{O}} S^{\mathrm{op}})$-modul şi $\psi_1 : S_1 \to A$ este un morfism de $\mathcal{O}$-algebre şi de $\Delta(S \otimes_{\mathcal{O}} S^{\mathrm{op}})$-module, atunci putem construi $\mathcal{O}$-algebra G-graduată R astfel:

$$\begin{aligned} &R = S \otimes_{S_1} A, \\ &(s_g \otimes_{S_1} a)(s_h \otimes_{S_1} b) = \sum_{i=1}^{n} s_g\sigma_{i,h} \otimes_{S_1} (\sigma'_{i,h} \otimes_{\mathcal{O}} s_h)a \cdot b, \end{aligned}$$

unde pentru orice $h \in G$, $\{\sigma_{i,h}\} \subseteq S_h$, $\{\sigma'_{i,h}\} \subseteq S_{h^{-1}}$ astfel încât $\sum_{i=1}^{n} \sigma_{i,h}\sigma'_{i,h} = 1$, sunt bazele duale corespunzătoare lui h. Prin urmare $R_1 = A$, şi

$$\psi : S \to S \otimes_{S_1} A, \qquad \psi(s_g) = s_g \otimes_{S_1} 1$$

este un morfism de algebre tare G-graduate. Conform [30, 1.6.2], au loc izomorfismele

$$(S \otimes_{\mathcal{O}} S^{\mathrm{op}}) \otimes_{\Delta(S\otimes_{\mathcal{O}} S^{\mathrm{op}})} A \simeq S \otimes_{S_1} A \simeq A \otimes_{S_1} S,$$

de (S_1, S_1)-bimodule; deci prin transport de structură, $(S \otimes_{\mathcal{O}} S^{\mathrm{op}}) \otimes_{\Delta(S\otimes_{\mathcal{O}} S^{\mathrm{op}})} A$ şi $A \otimes_{S_1} S$ devin $\mathcal{O}$-algebre G-graduate.

1.2.6. Pentru a enunţa teorema principală a acestui paragraf introducem nişte notaţii.

Fie R o algebră G-graduată împreună cu morfismul $\psi : \mathcal{O}H \to R$ de algebre G-graduate şi notăm $A = R_1$. Dacă L este un subgrup al lui H, vom nota cu

$$\overline{L} = LK/K \leq G.$$

Astfel $R_{\overline{L}}$ poate fi privită ca şi o algebră $\overline{L}$-graduată L-interioară.

R devine un $\mathcal{O}H$-modul drept via $\psi : \mathcal{O}H \to R$ şi vom considera R ca şi un $(R, \mathcal{O}H)$-bimodul G-graduat, deci un $R \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{O}H)^{\mathrm{op}}$-modul. Prin urmare, $A = R_1$ este un $\Delta(H)$-modul, unde

$$\Delta(H) = \Delta(R \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{O}H)^{\mathrm{op}}) = \bigoplus_{g\in G} (R_g \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{O}H)_g^{\mathrm{op}}).$$

În particular,

$$\Delta(L) = \bigoplus_{g\in\overline{L}} (R_g \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{O}L)^{\mathrm{op}}_g)$$

este subalgebra diagonală a lui $R\otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{O}L)^{\mathrm{op}}$, şi A devine un $\Delta(L)$-modul. Facem următoarea observaţie care va fi folosită în paragraful următor.

Observaţia 1.2.7. Există un morfism injectiv evident $\Delta(L) \to \Delta(H)_{\overline{L}}$, dar acesta nu este în general izomorfism.

Următoarea teoremă stabileşte o bijecţie între puncte ale unei H-algebre şi clase de izomorfism de anumite module. Acest rezultat ne va permite sa dăm o abordare în termeni de teoria modulelor unor rezultate legate de H-algebre şi grupuri punctate.

Teorema 1.2.8. *Există bijecţii între următoarele mulţimi:*

(1) $\mathcal{P}(A^L)$*;*

(2) *mulţimea claselor de izomorfism de* $\Delta(L)$*-sumanzi direcţi indecompozabili ai lui* A*;*

(3) *mulţimea claselor de izomorfism de sumanzi direcţi indecompozabili ca* $(R_{\overline{L}}, \mathcal{O}L)$*-bimodule* $\overline{L}$*-graduate ai lui* $R_{\overline{L}}$*;*

(4) *mulţimea claselor de izomorfism de sumanzi direcţi indecompozabili ca* $(R, \mathcal{O}L)$*-bimodule* G*-graduate ai lui* R*.*

Demonstraţie. Conform unui rezultat clasic din teoria generală a modulelor, există o bijecţie între mulţimea (2) şi mulţimea punctelor lui $\mathrm{End}_{\Delta(L)}(A)^{\mathrm{op}}$. Considerăm funcţia:

$$\Phi : \mathrm{End}_{\Delta(L)}(A)^{\mathrm{op}} \to A^L, \qquad \Phi(f) = f(1).$$

Se verifică uşor că Φ este bine definită şi că este un izomorfism de $\mathcal{O}$-algebre. Deci, funcţia care asociază lui α clasa de izomorfism a lui Ai, unde $i \in \alpha$, stabileşte o bijecţie între mulţimile (1) şi (2).

Pentru a stabili celelalte bijecţii, folosim rezultate din teoria modulelor graduate, prezentate în [30]. Se ştie că functorul:

$$R_{\overline{L}} \otimes_A - : \Delta(L)\text{-Mod} \to R_{\overline{L}}\text{-Gr-}\mathcal{O}L$$

induce o echivalenţă de categorii. Deoarece $R_{\overline{L}} \otimes_A Ai \simeq R_{\overline{L}} i$, este demonstrată deci şi bijecţia între (2) şi (3).

Privim $R_{\overline{L}} i$ ca un $(R_{\overline{L}} \otimes (\mathcal{O}L)^{\mathrm{op}})$-modul $\overline{L} \times \overline{L}/\delta(\overline{L})$-graduat şi $Ri \simeq R \otimes_{R_{\overline{L}}} R_{\overline{L}} i$ ca un $(R\otimes_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}L)^{\mathrm{op}})$-modul $(G\times\overline{L})/\delta(\overline{L})$-graduat. Conform unei teoreme a lui Dade ([30, Propoziţia 1.3.3]), functorul

$$R \otimes_{R_{\overline{L}}} - : (\overline{L} \times \overline{L}/\delta(\overline{L}), R_{\overline{L}} \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{O}L)^{\mathrm{op}})\text{-gr} \to (G \times \overline{L}/\delta(\overline{L}), R \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{O}L)^{\mathrm{op}})\text{-gr}$$

este o echivalenţă de categorii. Rezultă astfel bijecţia între mulţimile (3) şi (4). $\square$

Observaţia 1.2.9. Observăm că dacă A este o G-algebră, algebra graduată corespunzătoare $R = A \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}G$ este chiar $A * G$, algebra grupală strâmbă a lui A cu G. În acest caz,

$$\Delta = \Delta(R \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{O}G)^{\mathrm{op}}) = \bigoplus_{g \in G} (R_g \otimes g) \simeq R,$$

şi dacă $L \leq G$,

$$\Delta_L = \bigoplus_{g \in L} (R_g \otimes g) \simeq R_L;$$

în particular, avem $\Delta_1 \simeq A$. Remarcăm că în acest caz particular, bijecţia dintre mulţimile (1) şi (2) dată de Teorema 1.2.8, este chiar cea prezentată în Observaţia 1.2.3.

1.3 Proiectivitate relativă

Corespondenţa stabilită în Teorema 1.2.8 permite interpretarea grupurilor punctate ale unei G-algebre ca şi clase de izomorfism de anumite module. În acest paragraf vom caracteriza relaţia de proiectivitate relativă între grupuri punctate în aceşti termeni.

În acest paragraf A este o G-algebră şi $R = A * G$ algebra strâmbă G-graduată a lui A şi G. Nu considerăm ipoteza de interioritate ca şi în paragraful anterior, pentru a evita dificultatea menţionată în 1.2.7.

1.3.1. Relaţia de incluziune între grupuri punctate. Una dintre ideile fundamentale ale teoriei G-algebrelor este de a privi grupurile punctate ca şi generalizări ale subgrupurilor, de exemplu introducând o relaţie de incluziune între grupuri punctate care generalizează relaţia de incluziune între subgrupuri. Pentru definirea acestei relaţii se foloseşte aplicaţia de restricţie. Definim pentru început această relaţie.

Fie L_α şi $L'_{\alpha'}$ grupuri punctate ale lui A. Se spune că L_α *este inclus în* $L'_{\alpha'}$ şi se notează $L_\alpha \leq L'_{\alpha'}$, dacă $L \leq L'$ şi pentru orice $i' \in \alpha'$ există $i \in \alpha$ astfel încât i apare într-o descompunere a lui $\mathrm{res}^{L'}_L(i')$. Relaţia de incluziune între grupuri punctate este o relaţie de ordine (vezi [43]).

Relaţia de incluziune între grupuri punctate este uşor de interpretat în termeni de module.

Observaţia 1.3.2. Fie L_α şi $L'_{\alpha'}$ grupuri punctate ale lui A. Fie $i' \in \alpha'$ şi presupunem $L \leq L'$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) $L_\alpha \leq L'_{\alpha'}$;

(ii) există $i \in \alpha$ astfel încât Ai este un $R_{L'}$-sumand direct al lui $\mathrm{Res}^{L}_{L'} Ai'$, unde Ai şi Ai' sunt modulele indecompozabile corespunzătoare lui L_α şi respectiv $L'_{\alpha'}$.

1.3.3. Proiectivitate relativă. Vom defini acum o altă relaţie între grupuri punctate, numită relaţia de proiectivitate relativă, folosind aplicaţia urmă. Se spune că $L'_{\alpha'}$ *este proiectiv relativ la* L_α dacă $L \leq L'$ şi $\alpha' \subseteq \mathrm{Tr}^{L}_{L}(A^L \alpha A^L)$.

În [43, Lema 14.1] este dată o condiţie echivalentă pentru proiectivitatea relativă:

Lema 1.3.4. *Fie A o G-algebră, L_α şi $L'_{\alpha'}$ două grupuri punctate pe A, $i \in \alpha$ şi $i' \in \alpha'$ şi presupunem că $L \leq L'$. Atunci $L'_{\alpha'}$ este proiectiv relativ la L_α dacă şi numai dacă există $a, b \in A^L$ astfel încât $i' = \mathrm{Tr}^{L'}_{L}(aib)$.*

Următoarea teoremă dă o caracterizare a relaţiei de proiectivitate relativă între grupurile punctate ale unei G-algebre în termeni de module. Folosim notaţiile din Teorema 1.2.8. Amintim că, conform Observaţiei 1.2.9, în acest caz $\Delta \simeq R$, unde $R = A * G$.

Teorema 1.3.5. *Fie L_α şi $L'_{\alpha'}$ grupuri punctate pe A. Următoarele condiţii sunt echivalente:*

(i) *$L'_{\alpha'}$ este proiectiv relativ la L_α;*

(ii) *Ai' este un $\Delta_{L'}$-sumand direct al lui $\Delta_{L'} \otimes_{\Delta_L} Ai$;*

(iii) *Ri' este un sumand direct al lui $Ri \otimes_{\mathcal{O}L} \mathcal{O}L'$ ca şi $(R, \mathcal{O}L')$-bimodule G-graduate.*

Pentru demonstraţia teoremei vom folosi două leme mai generale. Prima este o generalizare de la algebre grupale la algebre tare G-graduate a Propoziţiei 17.11 din [43].

Lema 1.3.6. *Fie R o $\mathcal{O}$-algebră tare G-graduată, M un R-modul şi considerăm G-algebra $A = \mathrm{End}_{R_1}(M)$. Fie H_α şi K_β grupuri punctate pe A, şi fixăm $i \in \alpha$, $j \in \beta$. Atunci H_α este proiectiv relativ la K_β dacă şi numai dacă $i(M)$ este izomorf cu un sumand direct al lui $R_H \otimes_{R_K} j(M)$.*

Demonstraţie. Este binecunoscut faptul că $A^H = \mathrm{End}_{R_H}(M)$ şi $A^K = \mathrm{End}_{R_K}(M)$, deci $i(M)$ este un R_H-sumand direct indecompozabil al lui M, şi $j(M)$ R_K-sumand direct indecompozabil al lui M. Presupunem că H_α este proiectiv relativ la K_β. Conform Lemei 1.3.4 există $a, b \in A^K$ astfel încât $i = \mathrm{Tr}_K^H(a \circ j \circ b)$. R_H-endomorfismul $i \circ a$ se restricţionează la R_K-morfismul $j(M) \to i(M)$, $v \mapsto (i \circ a)(v)$, care induce R_H-morfismul

$$\pi : R_H \otimes_{R_K} j(M) \to i(M), \quad \pi(r_h \otimes v) = r_h(i \circ a)(v) = i(r_h(a(v))).$$

Considerăm acum elementul $j \circ b \in A^K$. R_K-morfismul $i(M) \to j(M)$, $v \mapsto (j \circ b)(v)$ induce R_H-morfismul

$$\sigma : i(M) \to R_H \otimes_{R_K} j(M), \quad \sigma(v) = \sum_{h \in [H/K]} \sum_{k=1}^{n} r_{h,k} \otimes (j \circ b)(r'_{h,k} v),$$

unde $[H/K]$ este o mulţime de reprezentanţi de clase la stânga ale lui K în H, şi pentru orice $h \in G$, fie $r_{h,1}, \ldots, r_{h,n} \in R_h$, $r'_{h,1}, \ldots, r'_{h,n} \in R_{h^{-1}}$ astfel încât $\sum_{k=1}^{n} r_{h,k} r'_{h,k} = 1$.

Avem $\pi \circ \sigma : i(M) \to i(M)$ şi pentru orice $v \in i(M)$

$$\begin{aligned}(\pi \circ \sigma)(v) &= \sum_{h \in [H/K]} \sum_{k=1}^{n} r_{h_k}(i \circ a \circ j \circ b)(r'_{h,k} v)\\ &= i\Big(\sum_{h \in [H/K]} {}^{h}(a \circ j \circ b)(v)\Big)\\ &= i(\mathrm{Tr}_K^H(a \circ j \circ b)(v)) = (i \circ i)(v) = v.\end{aligned}$$

Prin urmare σ este o secţiune a lui π, şi deci $i(M)$ este izomorf (via σ) cu un sumand direct al lui $R_H \otimes_{R_K} j(M)$.

Pentru implicaţia inversă, se foloseşte că $j(M)$ este un R_K-sumand direct al lui $R_H \otimes_{R_K} j(M)$, deci aplicaţia identică a lui $R_H \otimes_{R_K} j(M)$ este aplicaţia urmă a proiecţiei pe $j(M)$ (vezi demonstraţia Propoziţiei 17.11 [43]). $\square$

Lema 1.3.7. *Fie R şi S algebre G-graduate, $\Delta = \Delta(R \otimes_{\mathcal{O}} S^{\mathrm{op}})$, K un subgrup al lui H şi M_1 un Δ_K-modul. Dacă $M = R \otimes_{R_1} M_1$, atunci*

(1) $R_H \otimes_{R_1} (\Delta_H \otimes_{\Delta_K} M_1) \simeq M_H \otimes_{S_K} S_H$ ca şi (R_H, S_H)-bimodule H-graduate.

(2) $R \otimes_{R_1} (\Delta_H \otimes_{\Delta_K} M_1) \simeq M \otimes_{S_K} S_H$ ca şi (R, S_H)-bimodule G-graduate.

Demonstraţie. (1) Conform [30, Lema 1.6.3], avem următorul izomorfism de (R_H, S_H)-bimodule H-graduate:

$$\begin{aligned} R_H \otimes_{R_1} (\Delta_H \otimes_{\Delta_K} M_1) &\simeq (R_H \otimes_{\mathcal{O}} S_H^{\mathrm{op}}) \otimes_{\Delta_H} (\Delta_H \otimes_{\Delta_K} M_1) \\ &\simeq (R_H \otimes_{\mathcal{O}} S_H^{\mathrm{op}}) \otimes_{\Delta_K} M_1 \\ &\simeq (R_H \otimes_{\mathcal{O}} S_H^{\mathrm{op}}) \otimes_{R_K \otimes_{\mathcal{O}} S_K^{\mathrm{op}}} (R_K \otimes_{\mathcal{O}} S_K^{\mathrm{op}}) \otimes_{\Delta_K} M_1 \\ &\simeq (R_H \otimes_O S_H^{\mathrm{op}}) \otimes_{R_K \otimes_O R_K^{\mathrm{op}}} M_K \\ &\simeq R_H \otimes_{R_K} M_K \otimes_{S_K} S_H \simeq M_H \otimes_{S_K} S_H. \end{aligned}$$

(2) este o consecinţă imediată a lui (1). $\square$

Demonstraţie. (pentru Teorema 1.3.5) Folosim Lema 1.3.6 cu Δ în loc de R, A în loc de M, $L'_{\alpha'}$ în loc de H_α, L_α în loc de K_β, şi se observă că

$$\mathrm{End}_{\Delta_1}(A)^{\mathrm{op}} \simeq \mathrm{End}_A(A)^{\mathrm{op}} \simeq A.$$

Echivalenţa dintre (i) şi (ii) este astfel demonstrată.

Folosind Lema 1.3.7 avem

$$\begin{aligned} Ai' \mid \Delta_{L'} \otimes_{\Delta_L} Ai &\Longleftrightarrow R_{L'}i' \mid R_{L'} \otimes_{R_1} (\Delta_{L'} \otimes_{\Delta_L} Ai) \\ &\Longleftrightarrow R_{L'}i' \mid R_{L'}i \otimes_{\mathcal{O}L} \mathcal{O}L' \\ &\Longleftrightarrow Ri' \mid Ri \otimes_{\mathcal{O}L} \mathcal{O}L', \end{aligned}$$

ceea ce implică echivalenţa dintre (ii) şi (iii). $\square$

1.3.8. Fie L şi L' subgrupuri ale lui G astfel încât $L \le L'$ şi $i \in A^L$. În general, dacă i este un idempotent al lui A^L, $Tr_L^{L'}(i)$ nu este un idempotent. Totuşi dacă se presupune că pentru orice $x \in L' \setminus L$ avem $ii^x = 0$, atunci $Tr_L^{L'}(i)$ este un idempotent. Dacă i satisface condiţia precedentă se spune că *i are L'/L-urmă ortogonală.* Existenţa L'/L-urmelor ortogonale este necesară pentru a defini inducţie pentru divizori (vezi [39, Propoziţia 5.6]). În paragraful următor vom prezenta definiţia restricţiei şi inducţiei pentru divizorii unei G-algebre.

Propoziţia următoare stabileşte un izomorfism de bimodule graduate.

Propoziţia 1.3.9. *Presupunem că $i \in \alpha$, $\alpha \in \mathcal{P}(A^L)$ are o L'/L-urmă ortogonală. Atunci $R\,\mathrm{Tr}_L^{L'}(i) \simeq Ri \otimes_{\mathcal{O}L} \mathcal{O}L'$ privite ca $(R, \mathcal{O}L')$-bimodule G-graduate.*

Demonstraţie. Definim funcţia

$$\varphi : Ri \otimes_{\mathcal{O}L} \mathcal{O}L' \to R \sum_{h \in [L \setminus L']} i^h, \quad ri \otimes x \mapsto rx^{-1}i^x,$$

pentru orice $r \in R$, $x \in L'$, unde $[L \setminus L']$ este o mulţime de reprezentanţi de clase la dreapta ale lui L în L'.

Se verifică uşor că φ este un izomorfism. Observăm de asemenea că

$$Ri \otimes_{\mathcal{O}L} \mathcal{O}L' = \bigoplus_{x \in [L \setminus L']} Ri \otimes_{\mathcal{O}} x,$$

şi φ asociază sumandului $Ri \otimes x$ sumandul Ri^x. $\square$

În cazul proiectivităţii relative între două grupuri punctate, există o echivalenţă Morita indusă de nişte bimodule G-graduate.

Propoziţia 1.3.10. *Fie L_α şi $L'_{\alpha'}$ grupuri punctate pe A astfel încât $L_\alpha \leq L'_{\alpha'}$ şi $L'_{\alpha'}$ este proiectiv relativ la L_α. Fie $i \in \alpha$ şi $i' \in \alpha'$ astfel încât $i = i'ii'$. Atunci bimodulele G-graduate iRi' şi $i'Ri$ induc o echivalenţă Morita între algebrele G-graduate iRi şi $i'Ri'$.*

Demonstraţie. Conform unei caracterizări a echivalenţei Morita dată în [43, Propoziţia 9.9], trebuie să arătăm că $i'Ri'ii'Ri' = i'Ri'$, sau echivalent, că $i'RiRi' = i'Ri'$. Dar aceasta are loc pentru că, conform Lemei 1.3.4, $i' = \mathrm{Tr}_L^{L'}(aib)$, unde $a, b \in A^L$. $\square$

1.4 Libertate relativă

Fie A o G-algebră. În acest paragraf vom defini o altă relaţie pe mulţimea grupurilor punctate ale lui A, relaţia de libertate relativă, şi vom caracteriza această relaţie în termeni de module. Vom aminti, urmând [39], definirea restricţiei şi inducţiei pentru divizorii unei G-algebre, noţiuni care vor fi folosite şi în capitolul al treilea.

1.4.1. Inducţia şi restricţia divizorilor. Definim pentru început noţiunea de divizor al unei $\mathcal{O}$-algebre A. Notăm cu $\mathcal{P}(A)$ mulţimea punctelor lui A. Se numeşte *divizor* al lui A orice funcţie $m : \mathcal{P}(A) \to \mathbb{N}$. De fapt, mulţimea divizorilor lui A se poate identifica cu partea pozitivă $\mathcal{G}^+(A)$ a grupului Grothendieck $\mathcal{G}(A)$ al lui A, care este grupul abelian liber generat de clasele de izomorfism de A-module proiective indecompozabile, şi $\mathcal{P}(A)$ se identifică cu baza lui canonică. Astfel $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{D}(A)$, adică putem identifica un punct α cu divizorul determinat de α.

Orice idempotent i al lui A determină un divizor μ_A^i al lui A definit astfel $\mu_A^i(\alpha) = m_\alpha^i$, unde m_α^i este multiplicitatea lui α într-o descompunere a lui i ca sumă de idempotenţi primitivi şi ortogonali.

Dacă A este o G-algebră şi $H \leq G$, vom nota cu $\mathcal{D}(A^H)$ mulţimea divizorilor lui A^H. Fie H şi K două subgrupuri ale lui G astfel încât $K \leq H$. Noţiunile uzuale de restricţie şi inducţie între $\mathcal{O}H$ şi $\mathcal{O}K$-module pot fi extinse la restricţie şi inducţie de divizori ai lui H şi K pe A.

În primul rând, deoarece $A^H \subseteq A^K$, există o unică aplicaţie liniară

$$\mathrm{res}_K^H : \mathcal{D}(A^H) \to \mathcal{D}(A^K),$$

astfel încât, pentru orice idempotent $j \in A^H$, $\mathrm{res}_K^H(\mu_{A^H}^j) = \mu_{A^K}^j$, numită *aplicaţia de restricţie pentru divizori.*

Pentru a defini inducţie pentru divizori se foloseşte noţiunea de urmă ortogonală. Am văzut în paragraful anterior că un idempotent $j \in A^K$ are H/K-urmă ortogonală dacă pentru orice $g \in H \setminus K$ avem $jj^g = 0$. O G-algebră A se numeşte *inductiv completă* dacă pentru orice grup punctat H_β al lui A, există $j \in \beta$ astfel încât j are G/H-urmă ortogonală. Următoarele rezultate îi aparţin lui Puig [39, Capitolul 5].

Teorema 1.4.2. *Fie A o G-algebră inductiv completă. Atunci, pentru orice subgrupuri H şi K ale lui G astfel încât $K \leq H$ există o unică aplicaţie liniară*

$$\mathrm{ind}_H^G : \mathcal{D}(A^K) \to \mathcal{D}(A^H),$$

astfel încât, pentru orice idempotent $i \in A^K$ care are urmă H/K-ortogonală, avem

$$\mathrm{ind}_K^H(\mu_{A^K}^i) = \mu_{A^H}^{\mathrm{Tr}_K^H(i)}.$$

Teorema 1.4.3. *Pentru orice G-algebră A, există o algebră inductiv completă B şi un divizor $\omega \in \mathcal{D}(B^G)$ astfel încât $A \simeq B_\omega$ (deci în particular, A şi B sunt Morita echivalente).*

1.4.4. Libertate relativă. Definim acum relaţia de libertate relativă între grupuri punctate. Fie G_α şi H_β grupuri punctate ale lui A. Spunem că G_α *este liber relativ la H_θ* dacă există $i \in \alpha$ şi $j \in \beta$ astfel încât $i = \mathrm{Tr}_H^G(j)$ şi $jj^g = 0$ pentru orice $g \in G \setminus H$.

Presupunem că G_α este liber relativ la H_β. Atunci este evident că G_α este relativ proiectiv la H_β. Mai mult, avem că $H_\beta \leq G_\alpha$, pentru că $ij = j = ji$ conform definiţiei.

Am văzut că, folosind bijecţia stabilită în Teorema 1.2.8 putem interpreta un grup punctat H_β al lui A ca şi o clasă de izomorfism de R_H-sumanzi direcţi indecompozabili ai lui A, unde $R = A * G$ este algebra grupală strâmbă a lui A cu G. Această interpretare ne permite să considerăm inducţie de grupuri punctate fără a mai trebui să trecem la o algebră inductiv completă ca mai sus.

Relaţia de libertate relativă este uşor de interpretat în termeni de module. Fie G_α şi H_β două grupuri punctate pe A şi fie Ai, $i \in \alpha$ şi Aj, $j \in \beta$, R respectiv R_H-modulele indecompozabile corespunzătoare. Avem că G_α este liber relativ la H_β dacă şi numai dacă $Ai \simeq R \otimes_{R_H} Aj$. În paragraful 2.2 vom da o demonstraţie modul-teoretică a unei teoreme a lui Zhou ([44]), care dă o caracterizare a libertăţii relative folosind noţiunile de restricţie şi inducţie de divizori.

1.5 Defect grupuri punctate

În continuare prezentăm pe scurt noţiunile şi rezultatele de bază din teoria defectului grupurilor punctate, care este o reducere la cazul p-grupurilor şi al punctelor locale. Vom interpreta noţiunea de defect grup punctat în termeni de module. Teoria clasică a a defectului i se datorează lui Brauer în cazul algebrelor grupale şi lui Green în cazul $\mathcal{O}G$-modulelor. Tratarea comună folosind G-algebre a fost iniţiată de Green ([26]) şi extinsă de Puig în [41].

1.5.1. Amintim că un grup punctat P_γ al unei G-algebre A se numeşte *grup punctat local* dacă P_γ este minimal în raport cu relaţia de proiectivitate relativă între grupuri punctate. Spunem că un grup punctat P_γ este *defect grupul punctat* al lui G_α dacă $P_\gamma \leq G_\alpha$, G_α este relativ proiectiv la P_γ şi P_γ este local. Este binecunoscut faptul că un astfel de defect grup există şi că defect grupurile punctate ale lui G_α formează o unică clasă de G-conjugare. Enunţăm acum un rezultat important din teoria defectului (Teorema 18.3, [43]). Facem observaţia că, cuvântul minimal şi maximal se referă la relaţia de incluziune între grupuri punctate.

Teorema 1.5.2. *Fie H_α grup punctat al unei G-algebre A. Următoarele condiţii asupra unui grup punctat P_γ sunt echivalente:*

(1) *P_γ este defectul lui H_α;*

(2) *P_γ este grup punctat minimal cu proprietatea că H_α este relativ proiectiv la P_γ;*

(3) *P_γ este grup punctat maximal astfel încât P_γ este local şi $H_\alpha \geq P_\gamma$.*

1.5.3. Fie A o G-algebră şi $R = A * G$ algebra grupală strâmbă corespunzătoare. Grupurilor punctate G_α şi P_γ le corespund modulele indecompozabile ${}_{R_G}Ai$ $(i \in \alpha)$, şi respectiv ${}_{R_P}Ae$ $(e \in \gamma)$. Conform Observaţiei 1.3.2, relaţia $P_\gamma \leq G_\alpha$ este echivalentă cu proprietatea că Ae este izomorf cu un sumand direct al lui $\mathrm{Res}^G_P(Ai)$. De asemenea, conform Teoremei 1.3.5, relaţia G_α este proiectiv relativ la P_γ este echivalentă cu proprietatea că Ai este izomorf cu un sumand direct al lui $\mathrm{Ind}^G_P(Ae)$. Pentru a caracteriza defect grupul mai trebuie să interpretăm cuvântul "local". Deducem astfel uşor următoarea teoremă.

Teorema 1.5.4. *Fie A o G-algebră şi $R = A * G$ algebra grupală strâmbă a lui A şi G. Fie G_α şi P_γ grupuri punctate pe A şi Ai, $i \in \alpha$ şi Ae, $e \in \gamma$, R respectiv R_P-modulele indecompozabile corespunzătoare.*

(1) *P_γ este local dacă şi numai dacă Ae nu este proiectiv relativ la un subgrup propriu al lui P. Altfel spus, P_γ este local dacă şi numai dacă P este vârful lui Ae.*

(2) *P_γ este defectul lui G_α (adică P este vârful lui Ai şi Ae este sursa lui Ai) dacă şi numai dacă următoarele trei condiţii sunt îndeplinite:*

- (i) *Ae nu este proiectiv relativ la un subgrup propriu al lui P (altfel spus, Ae are vârf P);*
- (ii) *Ae este izomorf cu un sumand direct al lui $\mathrm{Res}^G_P(Ai)$;*
- (iii) *Ai este izomorf cu un sumand direct al lui $\mathrm{Ind}^G_P(Ae)$.*

1.5.5. Corespondenţa Green pentru grupuri punctate. Folosind caracterizarea defect grupurilor punctate dată de teorema anterioară, versiunea corespondenţei Green pentru grupuri punctate [43, Teorema 20.1] poate fi uşor dedusă din versiunea pentru algebre graduate ([30, Teorema 1.4.23]).

Teorema 1.5.6. *Fie A o G-algebră, P_γ un grup punctat local pe A şi H un subgrup al lui G care conţine $N_G(P_\gamma)$.*

(1) *Dacă α este un punct al lui A^G astfel încât P_γ este defectul lui G_α, atunci există un unic punct β al lui A^H astfel încât $P_\gamma \leq H_\beta \leq G_\alpha$.*

(2) *Corespondenţa definită în (1) este o bijecţie între mulţimile*

$$\{\alpha \in \mathcal{P}(A^G) \mid P_\gamma \text{ este defect grupul lui } G_\alpha\} \text{ şi}$$

$$\{\beta \in \mathcal{P}(A^H) \mid P_\gamma \text{ este defect grupul lui } H_\beta\}.$$

Bijecţia dată în punctul (2) al teoremei anterioare se numeşte *corespondenţa Green*. Dacă α corespunde lui β prin această bijecţie, atunci β se numeşte *corespondentul Green* al lui α. Spunem de asemenea că grupul punctat H_β este corespondentul Green al lui G_α.

Capitolul 2

Aplicații ale teoriei lui Green

Următoarele două capitole sunt dedicate aplicaţiilor, inspirate de teoria G-algebrelor, ale rezultatelor anterioare. Vom arăta că anumite rezultate ale teoriei lui Puig pot fi deduse din rezultate mai generale din teoria modulelor peste algebre tare graduate. Astfel, în aceste capitole vom formula versiuni graduate ale unor rezultate din teoria grupurilor punctate. Vom da demonstraţii directe, modul-teoretice, folosind metode de teoria modulelor peste algebre graduate, ca de exemplu teoria lui Green a vârfurilor şi surselor (în capitolul al doilea) sau teorie Clifford pentru module indecompozabile (în capitolul al treilea). Proprietăţile referitoare la grupuri punctate se vor deduce uşor, ca şi consecinţe ale rezultatelor noastre.

În acest capitol vom arăta că un rezultat al lui Zhou ([44]) care caracterizează relaţia de libertate relativă între grupuri punctate ale unei G-algebre, rezultă dintr-un rezultat mai general legat de module induse peste algebre graduate. Primul paragraf prezintă pe scurt noţiunile şi rezultatele de bază ale teoriei lui Green pentru algebre graduate care vor fi folosite în continuare. În al doilea paragraf enunţăm şi demonstrăm versiunea graduată a teoremei lui Zhou. Rezultatele conţinute în al doilea paragraf sunt rezultate originale obţinute de autoare şi sunt publicate în lucrarea [15].

2.1 Vârfuri, surse și corespondența Green

Corespondenţa stabilită de J.A. Green în anul 1964 permite reducerea studiului unor proprietăţi ale modulelor indecompozabile peste o algebră grupală kG, unde k este un corp a cărui caracteristică divide ordinul grupului G, la studiul modulelor indecompozabile peste $kN_G(P)$, unde P este un p-subgrup al lui G. Se poate spune că, într-un anumit sens, teoria lui Green a vârfurilor şi surselor reduce studiul kG-modulelor la cazul unui p-grup P. În [11] Dade a afirmat că această corespondenţă are loc şi în cazul algebrelor tare graduate, iar demonstraţii detaliate apar în [8] şi [37]. Prezentăm pe scurt urmând [30], conceptele şi rezultatele generale ale acestei teorii.

2.1.1. Pentru început vom prezenta formula de descompunere a lui Mackey, noţiunea de proiectivitate relativă şi criteriul lui Higman pentru module peste algebre tare G-graduate. Aceste rezultate reprezintă ingredientele de bază ale teoriei lui Green. Menţionăm ca aceste rezultate au loc într-un cadru mai general, când $\mathcal{O}$ este un inel comutativ.

Fixăm un grup G şi o $\mathcal{O}$-algebră tare G-graduată $R = \bigoplus_{x\in G} R_x$. Fie H şi K două subgrupuri ale lui G. Dacă $K \le H$ şi V este un R_K-modul, modulul indus $\mathrm{Ind}_K^H V$ este R_H-modulul $R_H \otimes_{R_K} V$. Dacă U este un R_K-modul, vom nota $\mathrm{Res}_K^H U$, restricţia lui U la R_K.

Formula lui Mackey stabileşte o relaţie între inducţie şi restricţie. Fie H şi K subgrupuri ale lui G. Atunci R este un (R_H, R_K)-bimodul, proiectiv ca şi R_H-modul stâng respectiv R_K-modul drept şi avem:

$$_{R_H}R_{R_K} = \bigoplus_{g\in[H\backslash G/K]} R_{HgK} = \bigoplus_{g\in[H\backslash G/K]} R_H \otimes_{H\cap {}^gK} R_{^gK}$$

unde izomorfismul $R_H \otimes_{H\cap {}^gK} R_{^gK} \simeq R_{HgK}$ este indus de multiplicare.

Propoziţia 2.1.2 (Descompunerea lui Mackey)**.** *Fie H şi K subgrupuri ale lui G şi $[H\backslash G/K]$ o mulţime de reprezentanţi de clase duble (K,H) în G. Atunci pentru orice R_K-modul N:*

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_H^G(R\otimes_{R_K} N) &\simeq \bigoplus_{g\in[H\backslash G/K]} R_H \otimes_{R_{H\cap {}^gK}} (R_{gK}\otimes_{R_H} N)\\ &= \bigoplus_{g\in[H\backslash G/K]} \mathrm{Ind}_{H\cap {}^gK}^H \mathrm{Res}_{H\cap {}^gK}^{^gK}\, {}^gN.\end{aligned}$$

Fie H un subgrup al lui G.

Un R-modul M se numeşte *relativ H-proiectiv* dacă pentru orice $f : N \to N'$ epimorfism de R-module şi $g : M \to N'$ morfism astfel încât există un R_H-morfism $h : M \to N$ cu $f\circ h = g$, atunci există un R-morfism $\overline{h} : M \to N$ astfel încât $f\circ \overline{h} = g$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "\overline{h}"'] \arrow[dr, "g"] & & \\ N \arrow[r, "f"'] & N' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

M se numeşte *relativ H-injectiv* dacă pentru orice $f : N' \to N$ monomorfism de R-module şi $g : N' \to M$ morfism astfel încât există un R_H-morfism $h : N \to M$ cu $h\circ f = g$, atunci există un R-morfism $\overline{h} : N \to M$ astfel încât $\overline{h}\circ f = g$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & N \arrow[d, "\overline{h}"] \\ & & M \end{tikzcd}$$

Şirul exact scurt

$$0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \longrightarrow 0$$

de R-module este *H-scindabil* dacă este scindabil ca şi şir de R_H-module.

Următoarea teoremă stabileşte nişte criterii de proiectivitate relativă pentru module.

Teorema 2.1.3 (Criteriul lui Higman)**.** *Dacă M este un R-modul şi $H \leq G$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) M este relativ H-proiectiv;

(ii) Dacă $N \xrightarrow{\alpha} M \to 0$ este un morfism H-scindabil atunci α este scindabil;

(iii) M este relativ H-injectiv;

(iv) Dacă $0 \to M \xrightarrow{\alpha} N$ este un morfism H-scindabil atunci α este scindabil;

(v) M este sumand direct al lui $\mathrm{Ind}_H^G \mathrm{Res}_H^G M$;

(vi) Există un R_H-modul N astfel încât M este sumand direct al lui $\mathrm{Ind}_H^G N$;

(vii) $1_M \in \mathrm{Tr}_H^G(\mathrm{End}_{R_H} M)$.

2.1.4. Fie M un R-modul indecompozabil. Vom considera subgrupurile H ale lui G, minimale cu proprietatea că M este relativ H-proiectiv.

Un subgrup P al lui G se numeşte *vârf* al lui M dacă este minimal cu proprietatea că M este relativ P-proiectiv. Dacă P este vârf al lui M şi U un R_P-modul indecompozabil astfel încât M este sumand direct al lui $\mathrm{Ind}_P^G U$, atunci U se numeşte *sursa* lui M.

Următorul rezultat arată că vârfurile şi sursele unui modul sunt unic determinate, abstracţie făcând de o conjugare.

Propoziţia 2.1.5. *(1) Vârfurile lui M formează o clasă de conjugare de p-subgrupuri ale lui G;*

(2) Dacă R_P-modulele U şi V sunt surse ale lui M, atunci există $g \in N_G(P)$ astfel încât $V \simeq {}^gU$.

Conceptul de vârf este corespondentul pentru module al conceptului de defect grup al unui bloc.

2.1.6. Fie P este un p-subgrup al lui G şi H un subgrup al lui G care conţine $N_G(P)$. Notăm

$\mathcal{X} = \{X \leq G \mid \exists g \in G \setminus H : X \leq {}^gP \cap P\}$,

$\mathcal{Y} = \{Y \leq G \mid \exists g \in G \setminus H : Y \leq {}^gP \cap H\}$,

şi observăm că $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$ şi $P \notin \mathcal{Y}$.

Următoarea teoremă este versiunea graduată a corespondenţei Green, care reduce anumite probleme legate de R-module la probleme despre R_H-module.

Teorema 2.1.7 (Corespondenţa Green)**.** *Există o corespondenţă bijectivă între R-modulele indecompozabile cu vârf P şi R_H-modulele indecompozabile cu vârf P definită astfel:*

(1) Dacă U este un R-modul indecompozabil cu vârf P atunci $\mathrm{Res}_H^G U$ are un unic sumand direct indecompozabil $f(U)$ cu vârf P şi ceilalţi sumanzi direcţi au vârfuri în $\mathcal{Y}$.

(2) Dacă V este un R_H-modul indecompozabil cu vârf P atunci $\mathrm{Ind}_H^G V$ are un unic sumand direct $g(V)$ cu vârf P şi ceilalţi sumanzi direcţi au vârfuri în $\mathcal{X}$.

(3) $g(f(U)) \simeq U$ şi $f(g(V)) \simeq V$.

Observaţia 2.1.8. Dacă U este un R-modul indecompozabil cu vârf P, atunci R_H-modulul $f(U)$ corespunzător bijecţiei din teorema anterioară se numeşte *corespondentul Green* al lui U.

Următoarea teoremă este cunoscută sub numele de teorema Burry-Carlson-Puig şi este o întărire a corespondenţei Green.

Teorema 2.1.9. *Dacă U este un R-modul indecompozabil şi V un sumand direct al lui $\operatorname{Res}^G_H U$ cu vârf P, atunci $U = g(V)$.*

Demonstraţiile acestor teoreme se bazează în esenţă pe Criteriul lui Higman şi Descompunerea lui Mackey. Ne referim la [30] pentru detalii.

2.2 O caracterizare a libertății relative

În principalul rezultat al lucrării [44], Y. Zhou dă o caracterizare a relaţiei de libertate relativă între grupuri punctate. În acest paragraf vom arăta că acea teoremă rezultă dintr-un rezultat mai general legat de module induse peste algebre graduate. Vom prezenta, urmând lucrarea [15], această versiune graduată şi vom da o demonstraţie modul-teoretică, folosind teoria lui Green prezentată în paragraful 2.1.

Rezultatul central al lucrării lui Zhou îl reprezintă următoarea teoremă ([44, Teorema 1.6]).

Teorema 2.2.1. *Fie G_α şi H_θ grupuri punctate cu defect grup P ale unei G-algebre A, $N_G(P)_{\overline{\alpha}}$ (respectiv $N_H(P)_{\overline{\theta}}$) corespondentul Green al lui G_α (respectiv H_θ) în raport cu P, şi alegem o pereche de inducţie completă (B, f) asociată lui A. Atunci G_α este liber relativ la H_θ dacă şi numai dacă $N_G(P)_{\overline{\alpha}}$ este liber relativ la $N_H(P)_{\overline{\theta}}$, şi pentru orice $Q < P$ şi $t \in [N_G(P)\backslash G/H]$ cu proprietatea că $Q \leq {}^tH$, $\mathrm{ind}_{N_{{}^tH}(Q)}^{N_G(Q)} \mathrm{res}_{N_{{}^tH}(Q)}^{{}^tH}\, {}^t\theta$ nu conţine puncte ale lui $N_G(Q)$ pe B cu defect grup Q, unde θ este privit ca punct al lui H pe B prin f.*

În lucrarea [15] am stabilit următorul rezultat.

Teorema 2.2.2. *Fie R o $\mathcal{O}$-algebră tare G-graduată, P un p-subgrup al lui G şi H un subgrup al lui G care conţine P. Fie U un R-modul indecompozabil cu vârf P şi U' un R_H-modul indecompozabil cu vârf P. Fie $\overline{U} \in R_{N_G(P)}$-mod şi $\overline{U'} \in R_{N_H(P)}$-mod corespondentul Green al lui U şi respectiv U'.*

Atunci $U \simeq \mathrm{Ind}_H^G U'$ dacă şi numai dacă $\overline{U} \simeq \mathrm{Ind}_{N_H(P)}^{N_G(P)} \overline{U'}$, şi pentru orice $Q < P$ şi orice $t \in [N_G(P)\backslash G/H]$ astfel încât $Q \leq {}^tH$, $\mathrm{Ind}_{N_{{}^tH}(Q)}^{N_G(Q)} \mathrm{Res}_{N_{{}^tH}(Q)}^{{}^tH}\, {}^tU'$ nu are $R_{N_G(Q)}$-sumanzi direcţi indecompozabili cu vârf Q.

Pentru demonstraţia acestei teoreme folosim două rezultate preliminare. Prima propoziţie este o generalizare a unei teoreme a lui Burry ([27, Teorema 2.9] la cazul algebrelor tare graduate.

Amintim că, dacă V este un R-modul şi $V_1, ..., V_r$ este o mulţime de sumanzi direcţi indecompozabili neizomorfi ai lui V astfel încât $V \simeq \bigoplus_{i=1}^r n_i V_i$, atunci $n_i \in \mathbb{N}$ se numeşte *multiplicitatea* lui V_i în V. De asemenea, spunem că un R-modul U *divide* R-modulul V şi scriem $U|V$, dacă U este izomorf cu un sumand direct al lui V.

Propoziţia 2.2.3. *Fie R o algebră tare G-graduată, P un p-subgrup al lui G şi H un subgrup al lui G care îl conţine pe P. Fie f_G corespondenţa Green în raport cu $(G, P, N_G(P))$, şi notăm*

$$I_P = \{t \in [N_G(P)\backslash G/H] \mid P \leq {}^tH\}.$$

(a) *Dacă V este un R_H-modul, atunci f_G induce o funcţie bijectivă care păstrează multiplicităţile între sumanzii direcţi indecompozabili neizomorfi cu vârf P ai lui $\mathrm{Ind}_H^G V$ şi sumanzii direcţi indecompozabili neizomorfi cu vârf P ai lui*

$$\bigoplus_{t\in I_P} \mathrm{Ind}_{N_{{}^tH}(P)}^{N_G(P)} \mathrm{Res}_{N_{{}^tH}(P)}^{{}^tH}\, {}^tV.$$

(b) *Dacă V este un R_H-modul indecompozabil cu vârf P, atunci f_G induce o funcţie bijectivă care păstrează multiplicităţile între sumanzii direcţi indecompozabili neizomorfi cu vârf P ai lui $\operatorname{Ind}_H^G V$ şi sumanzii direcţi indecompozabili neizomorfi cu vârf P ai lui $\operatorname{Ind}_{N_H(P)}^{N_G(P)} \operatorname{Res}_{N_H(P)}^H V$.*

Demonstraţie. (a) Fie $V_1, \ldots, V_r$ R-module indecompozabile neizomorfe astfel încât

$$\operatorname{Ind}_H^G V \simeq \bigoplus_{i=1}^r n_i V_i.$$

Putem presupune că pentru un $s \leq r$, toate modulele $V_1, \ldots, V_s$ au vârf P. Atunci, pentru orice $i \in \{1, \ldots, s\}$, $\operatorname{Res}_{N_G(P)}^G V_i$ are un unic sumand direct indecompozabil cu vârf P, şi anume $f_G(V_i)$. Dacă $s < j \leq r$, atunci V_j nu are vârf P, şi deci conform teoremei Burry-Carlson ([27, Teorema 2.6(ii)]), $\operatorname{Res}_{N_G(P)}^G V_j$ nu are sumanzi direcţi indecompozabili cu vârf P. Prin urmare f_G induce o bijecţie care păstrează multiplicităţile între sumanzii direcţi indecompozabili neizomorfi cu vârf P ai lui $\operatorname{Ind}_H^G V$ şi $\operatorname{Res}_{N_G(P)}^G \operatorname{Ind}_H^G V$. Conform descompunerii lui Mackey,

$$\operatorname{Res}_{N_G(P)}^G \operatorname{Ind}_H^G V \simeq \bigoplus_{x \in [N_G(P) \backslash G/H]} \operatorname{Ind}_{{}^xH \cap N_G(P)}^{N_G(P)} \operatorname{Res}_{{}^xH \cap N_G(P)}^{{}^xH} {}^xV.$$

Deci este suficient de a arăta că, dacă M este un $R_{N_G(P)}$-modul indecompozabil cu vârf P şi $M | \operatorname{Ind}_{{}^xH \cap N_G(P)}^{N_G(P)} \operatorname{Res}_{{}^xH \cap N_G(P)}^{{}^xH} {}^xV$, atunci $P \leq {}^xH$. Dar aceasta rezultă din faptul că M este relativ ${}^xH \cap N_G(P)$-proiectiv şi M are vârf P, deci P este $N_G(P)$-conjugat cu un subgrup al lui ${}^xH \cap N_G(P)$. Prin urmare $P \leq {}^xH$ şi deci afirmaţia este demonstrată.

(b) Folosind (a), este suficient să arătăm că, dacă pentru $t \in I_P$, $\operatorname{Ind}_{N_{{}^tH}(P)}^{N_G(P)} \operatorname{Res}_{N_{{}^tH}(P)}^{{}^tH} {}^tV$ are un sumand direct indecompozabil M cu vârf P, atunci $t \in N_G(P)H$. Dar, deoarece

$$M | \operatorname{Ind}_{N_{{}^tH}(P)}^{N_G(P)} \operatorname{Res}_{N_{{}^tH}(P)}^{{}^tH} {}^tV$$

putem alege un $R_{N_{{}^tH}(P)}$-modul indecompozabil W astfel încât să avem $W | \operatorname{Res}_{N_{{}^tH}(P)}^{{}^tH} {}^tV$ şi $M | \operatorname{Ind}_{N_{{}^tH}(P)}^{N_G(P)} W$. Pentru că M este sumand al lui $\operatorname{Ind}_{N_{{}^tH}(P)}^{N_G(P)} W$ şi M are vârf P avem că P este inclus într-un vârf Q al lui W. Dacă U este o sursă a lui ${}^tV$, rezultă că

$$W | \operatorname{Res}_{N_{{}^tH}(P)}^{{}^tH} \operatorname{Ind}_{{}^tP}^{{}^tH} U.$$

Folosind descompunerea lui Mackey se deduce uşor că Q este inclus într-un ${}^tH$-conjugat al lui ${}^tP$. Astfel, P este ${}^tH$-conjugat cu ${}^tP$, deci $th \in N_G(P)$ pentru un $h \in H$, şi teorema este demonstrată. □

Propoziţia 2.2.4. *Cu notaţiile Teoremei 2.2.2, dacă $U \simeq \operatorname{Ind}_H^G U'$ atunci $\overline{U} \simeq \operatorname{Ind}_{N_H(P)}^{N_G(P)} \overline{U'}$.*

Demonstraţie. Observăm că $\operatorname{Ind}_{N_H(P)}^{N_G(P)} \overline{U'}$ este relativ P-proiectiv pentru că $\overline{U'}$ are vârf P. Notăm cu M o sursă a lui $\overline{U'}$. Demonstrăm pentru început că $\operatorname{Ind}_{N_H(P)}^{N_G(P)} \overline{U'}$ nu are sumanzi direcţi indecompozabili cu vârf $Q < P$. Presupunem că $W | \operatorname{Ind}_{N_H(P)}^{N_G(P)} \overline{U'}$ este un sumand direct indecompozabil care este relativ Q-proiectiv, pentru un $Q < P$. Atunci $W | \mathrm{Ind}_Q^{N_G(P)} W'$ pentru un R_Q-modul W', deci avem că $W | \mathrm{Ind}_P^{N_G(P)} \mathrm{Ind}_Q^P W'$. Aplicând din nou descompunerea lui Mackey avem

$$\mathrm{Res}_P^{N_G(P)} W | \bigoplus_{g \in [N_G(P)/P]} {}^g(\mathrm{Ind}_Q^P W'),$$

unde ${}^g(\mathrm{Ind}_Q^P W')$ este un modul relativ Q-proiectiv. Prin urmare orice sumand direct al lui $\mathrm{Res}_P^{N_G(P)} W$ este relativ Q-proiectiv. Acest lucru nu este posibil însă, pentru că dacă $V | \mathrm{Res}_P^{N_G(P)} W$ este un sumand direct indecompozabil, atunci avem că

$$V | \mathrm{Res}_P^{N_G(P)} \mathrm{Ind}_P^{N_G(P)} M,$$

deci V este izomorf cu ${}^g M$ pentru un $g \in [N_G(P)/P]$, şi deci are vârf P.

Aplicăm acum Propoziţia 2.2.3 (b) R_H-modulului indecompozabil U'. Rezultă că

$$f_G(U) = \overline{U}$$

este unicul sumand direct indecompozabil cu vârf P al modulului $\mathrm{Ind}_{N_H(P)}^{N_G(P)} \mathrm{Res}_{N_H(P)}^H U'$. Dar orice sumand direct indecompozabil cu vârf P al lui $\mathrm{Ind}_{N_H(P)}^{N_G(P)} \overline{U'}$ este un sumand direct al lui $\mathrm{Ind}_{N_H(P)}^{N_G(P)} \mathrm{Res}_{N_H(P)}^H U'$, deci este izomorf cu $\overline{U}$ şi $\overline{U}$ este unicul sumand direct al lui $\mathrm{Ind}_{N_H(P)}^{N_G(P)} \overline{U'}$ cu vârf P şi multiplicitate 1. Rezultă deci că

$$\overline{U} \simeq \mathrm{Ind}_{N_H(P)}^{N_G(P)} \overline{U'}.$$

□

Demonstrăm acum teorema principală a acestui paragraf.

Demonstraţia Teoremei 2.2.2. Presupunem că $U \simeq \mathrm{Ind}_H^G U'$. Aceasta implică conform Propoziţiei 2.2.4 că

$$\overline{U} \simeq \mathrm{Ind}_{N_H(P)}^{N_G(P)} \overline{U'}.$$

Pentru orice $Q < P$, aplicând Propoziţia 2.2.3 (a) cu U' în loc de V şi cu Q în loc de P, avem că pentru orice $t \in I_Q$, $\mathrm{Ind}_{N_{{}^tH}(Q)}^{N_G(Q)} \mathrm{Res}_{N_{{}^tH}(Q)}^{{}^tH} {}^tU'$ nu are $R_{N_G(Q)}$-sumanzi direcţi indecompozabili cu vârf Q.

Invers, din corespondenţa Green avem că $\mathrm{Res}_{N_H(P)}^H \overline{U}$ are un unic sumand direct indecompozabil cu vârf P, şi anume $\overline{U'}$. Dar

$$\mathrm{Ind}_{N_H(P)}^{N_G(P)} \overline{U'} \simeq \overline{U}$$

deci $\mathrm{Ind}_{N_H(P)}^{N_G(P)} \mathrm{Res}_{N_H(P)}^H U'$ are un unic sumand direct indecompozabil cu vârf P, şi anume $\overline{U}$. Aplicând Propoziţia 2.2.3 (b), $\mathrm{Ind}_H^G U'$ are un unic sumand direct indecompozabil cu vârf P şi multiplicitate 1, şi anume

$$f_G^{-1}(\overline{U}) = U.$$

Dar conform ipotezei noastre şi Propoziţiei 2.2.3(i) rezultă că $\mathrm{Ind}_H^G U'$ nu are sumanzi direcţi indecompozabili cu vârf Q, pentru orice $Q < P$. Prin urmare $U \simeq \mathrm{Ind}_H^G U'$ şi teorema este demonstrată. □

2.2.5. Fie A o G-algebră. Folosind rezultatele stabilite în capitolul 1 (în principal paragrafele 1.4 şi 1.5), Teorema 2.2.2 aplicată algebrei G-graduate $R = A * G$ implică Teorema 2.2.1.

Capitolul 3

Aplicaţii ale teoriei Clifford

În acest capitol vom aplica rezultate de teorie Clifford pentru module indecompozabile pentru a demonstra două teoreme din teoria G-algebrelor. Vom deduce varianta pentru grupuri punctate a teoremei de indecompozabilitate a lui Green din versiunea graduată a teoremei lui Green şi vom da o demonstraţie modul teoretică unui rezultat al lui Fan *et al.*([22]), care este o extensie a unei teoreme a lui Fong. De asemenea, în paragraful al patrulea dăm versiunea graduată a noţiunii de modul de multiplicitate al unui grup punctat.

Rezultatele de teorie Clifford pe care le folosim sunt sumarizate în paragraful 3.1. Paragrafele 3.2 şi 3.3 conţin rezultate originale obţinute în colaborare cu prof. A. Mărcuş şi au fost publicate în lucrarea [14]. Rezultatele paragrafului 3.4. sunt publicate de autoare în lucrarea [18].

3.1 Teoria Clifford pentru algebre tare graduate

La sfârşitul anilor '60 E. Dade a iniţiat studiul algebrelor tare G-graduate în teoria reprezentărilor modulare ale grupurilor prin lucrările sale de teorie Clifford. Fixând un grup G, un inel G-graduat R şi un R-modul G-graduat finit generat M, inelul de endomorfisme E al lui M admite o G-graduare naturală şi M devine astfel un (R, E)-bimodul G-graduat. Teoria Clifford studiază în detaliu inelul E şi functorii $\mathrm{Hom}_R(M, -)$ şi $M \otimes_E -$. Prin corespondenţă Clifford se înţelege o echivalenţă între diferite subcategorii ale lui R-mod asociate lui M şi E-mod. În cazurile notabile de module gr-simple respectiv gr-indecompozabile, apar categoriile $\sigma[M]$, care este cea mai mică subcategorie abeliană a lui R-mod care conţine M, respectiv $\mathrm{add}[M]$, care este cea mai mică subcategorie aditivă care conţine M. Corespondenţele obţinute sunt compatibile cu inducţia, restricţia, trunchierea şi conjugarea.

Teoria Clifford are numeroase aplicaţii în teoria reprezentărilor modulare ale grupurilor. Faptul că corespondenţa Clifford asociază unui modul peste inelul E un modul peste R face posibilă aplicarea acestei teorii pentru demonstraţii inductive. Această teorie se dovedeşte foarte utilă în teoria reprezentărilor modulare ale grupurilor p-resolubile, aşa cum vom vedea în paragraful 3.3. Prezentăm în acest paragraf principalele rezultate ale teoriei Clifford pentru module gr-indecompozabile prezentate în limbaj categorial în [31].

Fie $\mathcal{O}$ un inel complet de valuare discretă având corpul rezidual k (nu neaparat algebric închis) de caracteristică $p > 0$ şi fie G un grup finit. Fie $R = \bigoplus_{g\in G} R_g$ o $\mathcal{O}$-algebră tare G-graduată.

3.1.1. Conform unui cunoscut rezultat al lui Dade, dacă M este un modul gr-simplu, atunci categoria $\sigma[M]$ a R-modulelor generate de M este echivalentă cu E-mod, echivalenţa fiind dată de functorii $\mathrm{Hom}_R(M, -)$ şi $M \otimes_E -$. În cazul modulelor gr-indecompozabile Teorema 3.1.2 stabileşte o corespondenţă Clifford directă.

Fie M un R_1-modul indecompozabil şi notăm

$$G_M = \{g \in G \mid R_g \otimes_{R_1} M \simeq M, \text{ în } R_1\text{-mod}\},$$

stabilizatorul lui M. Fie

$$E = \mathrm{End}_{R_1}(R \otimes_{R_1} M)^{op}.$$

Se ştie că $\mathcal{O}$-algebra E admite o G-graduare naturală $E = \oplus_{g\in G} E_g$, unde

$$E_g = \{f \in E \mid f(R_x \otimes_{R_1} M) \subseteq R_{xg} \otimes_{R_1} M, \forall x \in G\}.$$

În particular $E_1 \simeq \mathrm{End}_{R_1}(M)^{op}$ şi pentru orice H subgrup al lui G,

$$E_H \simeq \mathrm{End}_{R_H}(R_H \otimes_{R_1} M)^{op}.$$

Fie $J_{gr}(E)$ radicalul Jacobson graduat al lui E, adică $J_{\mathrm{gr}}(E)$ este intersecţia idealelor stângi graduate maximale ale lui E. Atunci

$$D = E/J_{gr}(E)$$

este o k-algebră tare G-graduată cu $D_1 \simeq E_1/J(E_1)$. Din versiunea graduată a Lemei lui Fitting ([31, Lema 3.2]), E_1 este un inel local şi D este produsul încrucişat al lui D_1 cu G_M. Dacă k este corp algebric închis, $D_1 = k$ şi D este o algebră grupală răsucită a lui G_M şi k, adică există $\alpha \in Z^2(G_M, k^*)$ astfel încât $D = k^\alpha G_M$.

Următoarea teoremă este rezultatul central al lucrării [31].

Teorema 3.1.2. *Cu notaţiile de mai sus, au loc următoarele afirmaţii:*

(a) Functorul $\mathcal{H}_G = D \otimes_E \mathrm{Hom}_R(M, -)$ *induce un izomorfism de grupuri Grothendieck*

$$\mathcal{G}(\mathrm{add}[R \otimes_{R_1} M]) \simeq \mathcal{G}(D\text{-proj}),$$

unde D-proj *este categoria* D*-modulelor proiective finit generate.*

(b) Pentru orice H *subgrup al lui* G*, următoarea diagramă este comutativă:*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{add}[R \otimes_{R_1} M] \arrow[r, "\mathcal{H}_G"] & D\text{-proj} \\ \mathrm{add}[R_H \otimes_{R_1} M] \arrow[u, "R\otimes_{R_H}-"] \arrow[r, "\mathcal{H}_H"] & D_H\text{-proj} \arrow[u, "D\otimes_{D_H}-"'] \end{tikzcd}$$

(c) Functorul $R\otimes_{R_{G_M}} - : \mathrm{add}[R_{G_M}\otimes_{R_1} M]\to \mathrm{add}[R\otimes_{R_1} M]$ *induce un izomorfism între grupurile Grothendieck*

$$\mathcal{G}(\mathrm{add}[R_{G_M}\otimes_{R_1} M])\simeq \mathcal{G}(\mathrm{add}[R\otimes_{R_1} M]);$$

inversul acestui izomorfism este indus de functorul de trunchiere

$$(-)_{G_M} : (G/G_M, R)\text{-Gr}\to R_H\text{-mod}.$$

Mai mult, următoarea diagramă este comutativă:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}(\mathrm{add}[R\otimes_{R_1} M]) \arrow[r, "\mathcal{H}_G"] & \mathcal{G}(D_{G_M}\text{-proj}) \\
\mathcal{G}(\mathrm{add}[R_{G_M}\otimes_{R_1} M]) \arrow[u, "R\otimes_{R_{G_M}}-"] \arrow[ur, "\mathcal{H}_{G_M}"'] &
\end{tikzcd}$$

Această teoremă implică că dacă $V\in \mathrm{add}[R\otimes_{R_1} M]$ este indecompozabil, atunci $\mathrm{Res}^R_{R_1} V$ este un R_1-modul izotipic dacă şi numai dacă $G_M=G$.

3.1.3. Amintim că categoriile $(R|R\otimes_{R_1} M)$-mod şi E-proj sunt echivalente şi, dacă U este un E-modul indecompozabil, D-modulul corespunzător este izomorf cu $U/J_{gr}(E)U$.

De asemenea, trecerea de la E la D se bazează pe următoarea observaţie generală referitoare la inelele de endomorfisme ale modulelor proiective, pe care o vom folosi în paragraful 3.4. Fie P un R-modul proiectiv G-graduat. Atunci $P/J_{\mathrm{gr}}(P)$ este un R-modul simplu graduat şi stabilizatorii lui P şi $P/J_{\mathrm{gr}}(P)$ sunt egali. Mai mult,

$$\mathrm{End}_R(P)^{\mathrm{op}}/J_{\mathrm{gr}}(\mathrm{End}_R(P)^{\mathrm{op}})\simeq \mathrm{End}_R(P/J_{\mathrm{gr}}(P))^{\mathrm{op}}$$

ca şi G_P-inele graduate.

Următoarea teoremă ([32]) studiază teoria Clifford pentru module proiective.

Teorema 3.1.4. *Presupunem în plus că* M *este* R_1*-modul proiectiv şi notăm* $S=M/J(R_1)M$ *şi* $R'=R/J_{gr}(R)$*. Atunci* S *este* R'_1*-modul simplu şi are loc izomorfismul de* k*-algebre* G_M*-graduate:*

$$\mathrm{End}_{R'}(R'\otimes_{R'_1} S)^{op}\simeq D.$$

Mai mult, umătoarea diagramă este comutativă:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{add}[R\otimes_{R_1} M] \arrow[r, "\mathrm{Hom}_R(R\otimes_{R_1}M,-)"] \arrow[d, "R'\otimes_R-"'] & E\text{-proj} \arrow[d, "D\otimes_E-"] \\
\mathrm{add}[R'\otimes_{R'_1} S] \arrow[r, "\mathrm{Hom}_{R'}(R'\otimes_{R'_1}S,-)"] & D\text{-proj}
\end{tikzcd}$$

Facem în continuare câteva observaţii care vor fi utile în paragrafele următoare.

3.1.5. Dacă $\alpha \in Z^2(G, k^*)$ atunci notăm prin $k^\alpha G$ algebra grupală răsucită având k-baza $\{\overline{g} \mid g \in G\}$ şi multiplicarea dată de

$$\overline{g}\overline{h} = \alpha(g,h)\overline{gh}.$$

Algebra $k^\alpha G$ este G-graduată. Dacă $\beta \in Z^2(G, k^*)$ atunci $k^\alpha G \simeq k^\beta G$ ca şi k-algebre G-graduate dacă şi numai dacă α şi β sunt în aceeaşi clasă de coomologie.

Dacă G este un p-grup este binecunoscut faptul că $Z^2(G, k^*) = 1$ şi deci $k^\alpha G \simeq kG$. Mai mult, $k^\alpha G$ este un inel local cu $k^\alpha G/J(k^\alpha G) \simeq k$.

Fie H un subgrup al lui G. Vom nota

$$k^\alpha H = k^{\mathrm{res}^G_H \alpha} H,$$

unde $\mathrm{res}^G_H \alpha \in Z^2(H, k^*)$ este restricţia lui α la H. Dacă W este un $k^\alpha H$-modul, atunci

$$\mathrm{Ind}^{k^\alpha G}_{k^\alpha H} W = k^\alpha G \otimes_{k^\alpha H} W$$

este modulul indus şi considerând V un $k^\alpha G$-modul, $\mathrm{Res}^{k^\alpha G}_{k^\alpha H} V$ este $k^\alpha G$-modulul obţinut prin restricţia scalarilor via morfismul de incluziune $k^\alpha H \hookrightarrow k^\alpha G$.

Dacă N este un subgrup normal al lui G, va fi util să privim algebra $k^\alpha G$ ca G/N-graduată, unde pentru orice $x = gN \in G/N$, $(k^\alpha G)_x = \overline{g} k^\alpha N$.

Următoarea observaţie va fi utilă în demonstraţia teoremei principale din paragraful 3.3.

3.1.6. Fie N un p-subgrup normal şi H un p'-subgrup al lui G astfel încât $G = HN$. Fie $\alpha \in Z^2(G, k^*)$ şi privim k-algebra $k^\alpha G$ ca şi G/N-graduată. Notăm cu f compunerea morfismelor

$$k^\alpha H \hookrightarrow k^\alpha G \to k^\alpha G/J_{gr}(K^\alpha G).$$

Observăm că $J_{gr}(k^\alpha G) = J(k^\alpha N)k^\alpha G$ şi G/N fiind un p'-grup, $J_{gr}(K^\alpha G) = J(k^\alpha G)$. Dar f este un morfism de k-algebre G/N-graduate şi $k^\alpha N$ fiind un inel local, avem că $k^\alpha G/J_{gr}(k^\alpha G)$ este o algebră grupală răsucită, adică există $\beta \in Z^2(H, k^*)$ astfel încât

$$k^\alpha G/J_{gr}(k^\alpha G) \simeq k^\beta H.$$

Deducem de aici că f este un izomorfism de k-algebre H-graduate. Astfel există morfismul injectiv $k^\alpha H \to k^\alpha G$ şi morfismul surjectiv $k^\alpha G \to k^\alpha H$ dat de compunerea

$$k^\alpha G \to k^\beta H \to k^\alpha H.$$

3.1.7. Prin definiţie, radicalul Jacobson graduat al lui R este intersecţia tuturor idealelor stângi graduate maximale ale lui R şi coincide cu idealul graduat

$$J_{gr}(R) = J(R_1)R = RJ(R_1).$$

Se ştie că $R/J_{gr}(R)$ este o k-algebră tare G-graduată cu

$$(R/J_{gr}(R))_1 = R_1/J(R_1)$$

şi că $J_{gr}(R) \subseteq J(R)$. Dacă G este un p'-grup, atunci $J_{gr}(R) = J(R)$.

3.1.8. În final, amintim legătura dintre idealele G-invariante ale lui R_1 şi idealele graduate ale lui R. Un ideal I al lui R_1 se numeşte G-*invariant* dacă $R_g I R_{g^{-1}} = I$, pentru orice $g \in G$. Laticea idealelor graduate ale lui R este izomorfă cu laticea idealelor G-invariante ale lui R_1. Dacă I este un ideal G-invariant al lui R, idealul graduat corespunzător este $RI = IR$, şi invers, dacă $J = \bigoplus_{g\in G} J_g$ este un ideal graduat al lui R, atunci idealul G-invariant corespunzător este J_1.

3.2 Teorema de indecompozabilitate a lui Green

Vom arăta în acest paragraf că teorema de indecompozabilitate a lui Green pentru grupuri punctate rezultă din versiunea pentru algebre graduate a teoremei lui Green.

Teorema 3.2.1 (Teorema 7.2 [39]). *Fie A o G-algebră, G un p-grup şi presupunem k algebric închis. Pentru orice grup punctat H_β al lui A, divizorul $\mathrm{ind}_H^G(\beta)$ este un punct al lui G pe A.*

Demonstraţie. Putem presupune $H \trianglelefteq G$ şi $|G/H| = p$. Fie $R = A{*}G$ algebra grupală strâmbă a lui A şi G şi Δ şi Δ_H ca şi în paragraful 1.2. Fie $j \in \beta$ unde $\beta \in \mathcal{P}(A^H)$. Ca şi în Propoziţia 1.2.8, fie Aj un Δ_H-modul indecompozabil asociat lui β. Aplicăm teorema lui Green pentru algebre graduate (vezi de exemplu [30, Corolarul 2.4.3]) algebrei G/H-graduate Δ. Rezultă că $\Delta \otimes_{\Delta_H} Aj$ este un Δ-modul indecompozabil. Prin urmare, folosind din nou Propoziţia 1.2.8, acestuia îi corespunde un punct al lui G pe A. $\square$

3.3 Teorema lui Fong pentru grupuri p-resolubile

În lucrarea [22], teorema lui Fong pentru grupuri p-resolubile şi teorema lui Green pentru p-grupuri, ambele legate de module induse, sunt unificate şi extinse într-un rezultat general. În acest paragraf prezentăm versiunea graduată a acestei teoreme, urmând lucrarea [14]. Acest rezultat completează [33, Teorema 1.1]. Abordarea noastră se bazează ca şi în [33], pe teoria Clifford pentru module indecompozabile peste algebre tare G-graduate, rezultate sumarizate în paragraful 3.1.

Amintim că un grup G se numeşte *p-resolubil* dacă are un şir de subgrupuri normale

$$1 = N_0 < N_1 < \cdots < N_r = G,$$

astfel încât N_i/N_{i-1} este p-grup sau p'-grup, pentru orice $i = 1, ..., r$. Fie H un p'-subgrup Hall al lui G, adică indicele lui H în G este o putere a lui p. Este binecunoscut faptul că un astfel de H există şi orice p'-subgrup al lui G este inclus într-un conjugat al lui H.

3.3.1. Fie $\mathcal{O}$ un domeniu cu ideale principale local şi complet având corpul rezidual k caracteristică $p > 0$ algebric închis. Fie R o $\mathcal{O}$-algebră tare G-graduată şi M un R_1-modul indecompozabil. Fie $\mathrm{add}[R \otimes_{R_1} M]$ subcategoria plină a lui R-mod formată din sumanzi direcţi de sume directe finite de copii de $R \otimes_{R_1} M$ şi notăm cu $\mathcal{G}(\mathrm{add}[R \otimes_{R_1} M])$ grupul lui Grothendieck asociat acestei categorii.

Pentru orice $x \in G$ şi H subgrup al lui G, notăm $H^x = x^{-1}Hx$ şi $H_x = H \cap H^x$, şi considerăm următoarele morfisme de grupuri:

(1) $\iota_H^G : \mathcal{G}(\mathrm{add}[R_H \otimes_{R_1} M]) \to \mathcal{G}(\mathrm{add}[R \otimes_{R_1} M])$, indus de functorul

$$\mathrm{Ind}_H^G : R_H\text{-mod} \to R\text{-mod};$$

(2) $\iota_{H_x}^H : \mathcal{G}(\mathrm{add}[R_{H_x} \otimes_{R_1} M]) \to \mathcal{G}(\mathrm{add}[R_H \otimes_{R_1} M])$, indus de functorul

$$\mathrm{Ind}_{H_x}^H : R_{H_x}\text{-mod} \to R_H\text{-mod},$$

pentru orice $x \in G$, şi notăm

$$\iota : \bigoplus_{x \in G} \mathcal{G}(\mathrm{add}[R_{H_x} \otimes_{R_1} M]) \to \mathcal{G}(\mathrm{add}[R_H \otimes_{R_1} M])$$

suma lor directă;

(3) $\kappa_{H_x}^H : \mathcal{G}(\mathrm{add}[R_{H_x} \otimes_{R_1} M]) \to \mathcal{G}(\mathrm{add}[R_H \otimes_{R_1} M])$, indus de compunerea functorilor $\mathrm{Conj}_x = R_x \otimes_{R_1} - : R_{H_x}\text{-mod} \to R_{H_{x^{-1}}}\text{-mod}$ şi $\mathrm{Ind}_{H_{x^{-1}}}^H : R_{H_{x^{-1}}}\text{-mod} \to R_H\text{-mod}$, şi notăm

$$\kappa : \bigoplus_{x \in G} \mathcal{G}(\mathrm{add}[R_{H_x} \otimes_{R_1} M]) \to \mathcal{G}(\mathrm{add}[R_H \otimes_{R_1} M])$$

suma corespunzătoare.

Următoarea teoremă este rezultatul central al acestui paragraf.

Teorema 3.3.2. *Fie G un grup p-resolubil şi H un p'-subgrup Hall al său. Următorul şir de grupuri abeliene este exact:*

$$\bigoplus_{x\in G}\mathcal{G}(\mathrm{add}[R_{H_x}\otimes_{R_1}M])\xrightarrow{\iota-\kappa}\mathcal{G}(\mathrm{add}[R_H\otimes_{R_1}M])\xrightarrow{\iota_H^G}\mathcal{G}(\mathrm{add}[R\otimes_{R_1}M])\to 0.$$

Utilizând Teorema 3.1.2 şi observaţiile făcute în paragraful 3.1, teorema precedentă este echivalentă cu următoarea teoremă referitoare la algebre grupale răsucite peste k.

Teorema 3.3.3. *Fie G un grup p-resolubil, H un p'-subgrup Hall al lui G şi fie $\alpha\in Z^2(G,k^*)$. Atunci următorul şir de grupuri abeliene este exact:*

$$\bigoplus_{x\in G}\mathcal{G}(k^\alpha H_x\text{-proj})\xrightarrow{\iota-\kappa}\mathcal{G}(k^\alpha H\text{-proj})\xrightarrow{\iota_H^G}\mathcal{G}(k^\alpha G\text{-proj})\to 0$$

Demonstraţie. Surjectivitatea lui ι_H^G a fost demonstrată în [33], Teorema 2.7(a). Prezentăm aici această demonstraţie.

Fie $1=N_0<N_1<\cdots<N_r=G$ un şir de subgrupuri normale ale lui G astfel încât N_i/N_{i-1} este un p-grup sau un p'-grup, pentru orice $i=1,\ldots,r$.

Vom demonstra prin inducţie după r că, dacă $\alpha\in Z^2(G,k^*)$ şi V este un $k^\alpha G$-modul, atunci există un $k^\alpha H$-modul simplu W astfel încât $V\simeq\mathrm{Ind}_{k^\alpha H}^{k^\alpha G}W$.

Presupunem $r=1$. Dacă G este un p'-grup afirmaţia este trivială pentru că în acest caz $H=G$. Dacă G este p-grup, atunci $H=1$ şi $V=k^\alpha G$ este unicul $k^\alpha G$-modul proiectiv indecompozabil (algebra $k^\alpha G$ fiind algebră locală).

Presupunem acum $r>1$. Notăm $N=N_1$ şi presupunem pentru început că $N\neq 1$ este un p'-grup. Dar N este un subgrup normal al lui G, rezultă că $N\subseteq H$. Modulul V este un $k^\alpha G$-modul proiectiv indecompozabil, deci este relativ proiectiv la N. Astfel rezultă că există un $k^\alpha N$-modul proiectiv (şi simplu, căci $k^\alpha G$ este algebră semisimplă) astfel încât $V\in\mathrm{add}[\mathrm{Ind}_{k^\alpha N}^{k^\alpha G}M]$. Privim algebra $k^\alpha G$ ca G/N-graduată şi notăm $I/N=(G/N)_M$ stabilizatorul lui M. Aplicând Teorema 3.1.2 există un $k^\alpha I$-modul proiectiv V_0 astfel încât $V\simeq\mathrm{Ind}_{k^\alpha I}^{k^\alpha G}V_0$ şi mai mult $\mathrm{Res}_{k^\alpha N}^{k^\alpha I}V_0$ este un $k^\alpha N$-modul izotipic. Aplicând din nou Teorema 3.1.2, V_0 corespunde unui $k^\beta(I/N)$-modul proiectiv indecompozabil $\widetilde{V_0}$, unde $\beta\in Z^2(I/N,k^*)$. Notând $H_0=I\cap H$, se ştie că H_0/N este un p'-subgrup Hall al lui I/N. Dar $|I/N|<|G|$ şi din ipoteza inducţiei rezultă că există un $k^\beta H_0/N_0$-modul proiectiv şi simplu $\widetilde{W_0}$ astfel încât $\widetilde{V_0}\simeq\mathrm{Ind}_{k^\beta(H_0/N)}^{k^\beta(I/N)}\widetilde{W_0}$. Tot din Teorema 3.1.2 rezultă că $\widetilde{W_0}$ corespunde unui $k^\alpha H_0$-modul $W_0\in\mathrm{add}[\mathrm{Ind}_{k^\alpha N}^{k^\alpha H_0}M]$ şi deoarece această corespondenţă este compatibilă cu inducţia avem $V_0\simeq\mathrm{Ind}_{k^\alpha H_0}^{k^\alpha I}W_0$. Notând $W=\mathrm{Ind}_{k^\alpha H_0}^{k^\alpha H}$, avem că:

$$V\simeq\mathrm{Ind}_{k^\alpha I}^{k^\alpha G}V_0\simeq\mathrm{Ind}_{k^\alpha I}^{k^\alpha G}\mathrm{Ind}_{k^\alpha H_0}^{k^\alpha I}W_0\simeq\mathrm{Ind}_{k^\alpha H}^{k^\alpha G}\mathrm{Ind}_{k^\alpha H_0}^{k^\alpha H}W_0\simeq\mathrm{Ind}_{k^\alpha H}^{k^\alpha G}W.$$

Presupunem acum că $N\neq 1$ este un p-grup. Ca şi mai sus, $k^\alpha G$-modulul V fiind proiectiv indecompozabil rezultă că există un $k^\alpha N$-modul proiectiv indecompozabil M astfel încât $V\in\mathrm{add}[\mathrm{Ind}_{k^\alpha N}^{k^\alpha G}M]$. Dar N este un p-grup, deci algebra $k^\alpha N$ este locală şi deci $M\simeq k^\alpha N$ este unicul $k^\alpha N$-modul proiectiv indecompozabil şi prin urmare M este G/N-invariant. Atunci conform Teoremei 3.1.2, V corespunde unui $k^\beta(G/N)$-modul proiectiv indecompozabil $\widetilde{V}$, unde $\beta \in Z^2(G/N, k^*)$. Dar $|G/N| < |G|$ şi se ştie că HN/N este un p'-subgrup Hall al lui G/N. Aplicând ipoteza inducţiei există un $k^\beta(HN/N)$-modul $\widetilde{W}$ proiectiv şi simplu astfel încât $\widetilde{V} \simeq \mathrm{Ind}_{k^\beta(HN/N)}^{k^\beta(G/N)} \widetilde{W}$. Dar $\widetilde{W}$ corespunde unui $k^\alpha(HN)$-modul proiectiv indecompozabil $P \in \mathrm{add}[\mathrm{Ind}_{k^\alpha N}^{k^\alpha(HN)} M]$ astfel încât $V \simeq \mathrm{Ind}_{k^\alpha(HN)}^{k^\alpha G} P$.

Modulul $\widetilde{W}$ este un $k^\beta(HN/N)$-modul simplu şi conform Teoremei 3.1.4, îi corespunde un modul simplu W peste $k^\alpha(HN)/J_{gr}(k^\alpha(HN))$, unde privim algebra $k^\alpha(HN)$ ca HN/N-graduată. Conform observaţiilor făcute la sfârşitul primului paragraf, W este un $k^\alpha H$-modul simplu şi $\mathrm{Ind}_{k^\alpha H}^{k^\alpha(HN)} W$ este un $k^\alpha(HN)$-modul proiectiv. Folosind comutativitatea diagramei din Teorema 3.1.4, avem că P este acoperitoarea proiectivă a lui W privit ca şi $k^\alpha(HN)$-modul simplu, deci P este sumand direct al lui $\mathrm{Ind}_{k^\alpha H}^{k^\alpha(HN)} W$. Cum $W \simeq P/J(k^\alpha HN)P$ avem că $dim_k P = |N| dim_k W$. Comparând dimensiunile deducem că $P \simeq \mathrm{Ind}_{k^\alpha H}^{k^\alpha(HN)} W$, deci $V \simeq \mathrm{Ind}_{k^\alpha H}^{k^\alpha G} W$, ceea ce trebuia demonstrat.

Rămâne de verificat exactitatea în $\mathcal{G}(k^\alpha H\text{-proj})$.

Ca şi în prima parte, demonstrăm prin inducţie după r. Afirmaţia este trivială dacă G is a p'-grup (pentru că atunci $H = H_x = G$) sau G este un p-grup (atunci $H = H_x = 1$ şi $\iota - \kappa$ este morfismul nul).

Presupunem acum $r > 1$. Vom demonstra pentru început că $\mathrm{Im}(\iota - \kappa) \subset \mathrm{Ker}(\iota_H^G)$. Notăm $N = N_1$ şi presupunem mai întâi că $N \neq 1$ este un p'-grup. Cum N este un subgrup normal al lui G, avem că $N \leq H$ şi $N \leq H^x$ pentru orice $x \in G$. Fie $x \in G$ şi W un $k^\alpha H_x$-modul proiectiv indecompozabil (deci simplu). Este suficient să arătăm că:

$$\mathrm{Ind}_H^G \mathrm{Ind}_{H_x}^H W \simeq \mathrm{Ind}_H^G \mathrm{Ind}_{H_{x^{-1}}}^H \mathrm{Conj}_x W.$$

Conform teoriei Clifford există un $k^\alpha N$-modul simplu M astfel încât W aparţine categoriei $\mathrm{add}[\mathrm{Ind}_N^{H_x} M])$. Fie $I/N = (G/N)_M$ stabilizatorul lui M în G/N, şi fie

$$\mathrm{End}_{k^\alpha G}(\mathrm{Ind}_N^G M) \simeq k^\beta(I/N),$$

unde $\beta \in Z^2(I/N, k^*)$. Există un $k^\beta(H_x \cap I/N)$-modul proiectiv $\widetilde{W_0}$ astfel încât $W \simeq \mathrm{Ind}_{I \cap H_x}^{H_x} W_0$, unde W_0 este corespondentul Clifford al lui $\widetilde{W_0}$. Înlocuindu-l pe M cu un conjugat al său, putem presupune că $H \cap I$ este un p'-subgrup Hall al lui I şi deci $H \cap I/N$ este un p'-subgrup of I/N. Dar $|I/N| < |G|$, şi deci aplicând ipoteza inducţiei, avem că $\widetilde{V_0} \simeq \widetilde{V_0'}$, unde

$$\widetilde{V_0} := \mathrm{Ind}_{H \cap I/N}^{I/N} \mathrm{Ind}_{H_x \cap I/N}^{H \cap I/N} \widetilde{W_0}$$

şi

$$\widetilde{V_0'} := \mathrm{Ind}_{H \cap I/N}^{I/N} \mathrm{Ind}_{H_{x^{-1}} \cap I/N}^{H \cap I/N} \mathrm{Conj}_{xN} \widetilde{W_0}.$$

Aplicând din nou Teorema Clifford, $\widetilde{V_0}$ corespunde unui $k^\alpha I$-modul proiectiv

$$V_0 = \mathrm{Ind}_{H \cap I}^I \mathrm{Ind}_{H_x \cap I}^{H \cap I} W_0,$$

şi $\widetilde{V_0'}$ unui $k^\alpha I$-modul proiectiv

$$V_0' = \mathrm{Ind}_{H \cap I}^I \mathrm{Ind}_{H_{x^{-1}} \cap I}^{H \cap I} \mathrm{Conj}_x W_0.$$

Avem $V_0 \simeq V_0'$, deci $\mathrm{Ind}_I^G V_0 \simeq \mathrm{Ind}_I^G V_0'$, şi deci incluziunea este demonstrată în acest caz.

Presupunem acum că $N \neq 1$ este un p-grup. Restricţia cociclului α la N este trivială, deci avem $k^\alpha(G/N) \simeq k^\alpha G/J(kN)k^\alpha G$ şi $k^\alpha(HN/N) \simeq k^\alpha H$. Prin inducţie, putem presupune că $G = NH$. Atunci $J(k^\alpha G) = J(kN)k^\alpha G$, şi dacă $V \in k^\alpha H$-mod, atunci

$$\mathrm{Ind}_H^G V/J(k^\alpha G)\mathrm{Ind}_H^G V \simeq V.$$

Aceasta implică că ι_H^{NH} este un izomorfism. Mai mult, $\iota - \kappa$ este morfismul nul. Astfel dacă luăm W un $k^\alpha H_x$-modul, unde putem presupune că $x \in N$, şi fie $V = \mathrm{Ind}_{H_x}^H W$, $V' = \mathrm{Ind}_{H_{x^{-1}}}^H \mathrm{Conj}_x W$. Atunci, deoarece $NH_x = NH_{x^{-1}}$, rezultă că $\mathrm{Ind}_H^{NH} V \simeq \mathrm{Ind}_H^{NH} V'$.

Demonstrăm acum că $\mathrm{Ker}(\iota_H^G) \subset \mathrm{Im}(\iota - \kappa)$. Presupunem pentru început că $N \neq 1$ este un p'-group şi fie $w \in \mathcal{G}(k^\alpha H\text{-proj})$ astfel încât $\iota_H^G(w) = 0$. Atunci $w = [W_1] - [W_2]$, unde W_i, $i = 1, 2$, sunt $k^\alpha H$-module, şi $\mathrm{Ind}_H^G W_1 \simeq \mathrm{Ind}_H^G W_2$. În mod evident putem presupune că există un $k^\alpha N$-modul simplu M astfel încât toţi sumanzii direcţi indecompozabili ai lui W_1 şi W_2 aparţin aceeaşi categorii $\mathrm{add}[\mathrm{Ind}_N^H M]$. Fie $I/N = (G/N)_M$ stabilizatorul lui M. Din teoria Clifford, pentru $i = 1, 2$, W_i corespunde unui $k^\beta(H \cap I/N)$-modul $\widetilde{W_i}$, unde $\beta \in Z^2(G/N, k^*)$, şi avem

$$\mathrm{Ind}_{H\cap I/N}^{G/N} \widetilde{W_1} \simeq \mathrm{Ind}_{H\cap I/N}^{G/N} \widetilde{W_2}.$$

Atunci w corespunde lui $\tilde{w} \in \mathcal{G}(k^\beta(H \cap I/N)\text{-proj})$, şi $\iota_{H\cap I/N}^{G/N} \tilde{w} = 0$. Din ipoteza inducţiei, există $\tilde{z} \in \bigoplus_x \mathcal{G}(k^\beta(H_x \cap I/N)\text{-proj})$ astfel încât $(\iota - \kappa)(\tilde{z}) = \tilde{w}$. Atunci $(\iota - \kappa)(z) = w$, unde z este corespondentul Clifford al lui $\tilde{z}$. Deci incluziunea este demonstrată în acest caz.

În final, presupunem că $N \neq 1$ este un p-grup, şi fie $w \in \mathcal{G}(k^\alpha H\text{-proj})$ astfel încât $\omega \in \mathrm{Ker}\, \iota_H^G$. Putem din nou să reducem demonstraţia la cazul $G = NH$. Astfel, notăm $\bar{G} = G/N$, $\bar{H} = NH/N$, $\bar{x} = xN$. Prin inducţie, şirul

$$\bigoplus_{\bar{x}\in\bar{G}} \mathcal{G}(k^\alpha \bar{H}_{\bar{x}}\text{-proj}) \xrightarrow{\iota_{\bar{G}} - \kappa_{\bar{G}}} \mathcal{G}(k^\alpha \bar{H}\text{-proj}) \xrightarrow{\iota_{\bar{H}}^{\bar{G}}} \mathcal{G}(k^\alpha \bar{G}\text{-proj}) \to 0$$

este exact (unde $\iota_{G/N}$ and $\kappa_{G/N}$ sunt morfismele de grupuri ι and κ corespunzătoare lui $k^\beta(G/N)$), prin urmare există $\tilde{\theta} \in \bigoplus_{x\in G} \mathcal{G}(k^\alpha \bar{H}_{\bar{x}}\text{-proj})$ astfel încât $\omega = (\kappa_{\bar{G}} - \iota_{\bar{G}})(\tilde{\theta})$. Avem $\bar{H}_{\bar{x}} = NH \cap NH^x/N$, deci $\tilde{\theta}$ corespunde lui $\theta \in \bigoplus_{x\in G} \mathcal{G}(k^\alpha(NH \cap NH^x)\text{-proj})$ astfel încât $(\kappa - \iota)(\theta) = \iota_H^{NH}(\omega)$. Conform argumentării date în [22, p. 740], pentru orice $x \in G$, există $y \in \bar{x}$ astfel încât $H \cap H^y$ este un p'-subgrup Hall al lui $NH \cap NH^x$, deci morfismul $\iota_{H\cap H^y}^{NH\cap NH^x}$ este surjectiv. Rezultă deci că există $\zeta \in \bigoplus_{x\in G} \mathcal{G}(k^\alpha H_x\text{-proj})$ astfel încât

$$\iota_H^{NH}((\kappa - \iota)(\zeta)) = (\kappa_{\bar{G}} - \iota_{\bar{G}})(\theta) = \iota_H^{NH}(\omega),$$

adică, $\omega - (\kappa - \iota)(\zeta) \in \mathrm{Ker}\, \iota_H^{NH}$. Putem presupune deci că $G = HN$, dar în acest caz afirmaţia este demonstrată. $\square$

Se deduce imediat următorul corolar.

Corolarul 3.3.4. *Fie $W \in \mathrm{add}[R_H \otimes_{R_1} M]$ un modul indecompozabil. Atunci $R \otimes_{R_H} W$ este indecompozabil dacă şi numai dacă pentru orice $x \in G$ cu proprietatea că $W \simeq R_H \otimes_{R_{H_x}} W'$ pentru un modul $W' \in \mathrm{add}[R_{H_x} \otimes_{R_1} M]$, $R \otimes_{R_{H_{x^{-1}}}} (R_x \otimes_{R_1} W')$ este de asemenea indecompozabil.*

3.3.5. Pentru a deduce [22, Teorema 7] din Teorema 3.3.3, considerăm A o G-algebră peste un corp k algebric închis şi notăm cu $\mathcal{D}(A)$ mulţimea divizorilor lui A. Pentru orice subgrup H al lui G avem morfismul aditiv

$$\iota_H^G : \mathcal{D}(A^H) \to \mathcal{D}(A^G),$$

unde, dacă β este un punct al lui A^H şi $j \in \beta$, $R \otimes_{R_H} Aj$ defineşte un divizor al lui A^G notat $\iota_H^G(\beta)$, unde $R = A * G$. Pentru orice $x \in G$ considerăm următoarele morfisme:

$$\iota_{H_x}^H, \kappa_{H_x}^H = \iota_{H_{x^{-1}}}^H \circ \mathrm{Conj}_x : \mathcal{D}(A^{H_x}) \to \mathcal{D}(A^H),$$

şi fie

$$\iota, \kappa : \bigoplus_{x \in G} \mathcal{D}(A^{H_x}) \to \mathcal{D}(A^H)$$

sumele corespunzătoare. Atunci Teorema 3.3.3 şi consideraţiile precedente implică următorul rezultat.

Corolarul 3.3.6 (Teorema 7 [22])**.** *Fie G un grup p-resolubil şi fie H un p'-subgrup Hall al lui G. Atunci ι_H^G induce un izomorfism între coegalizatorul morfismelor ι şi κ şi $\mathcal{D}(A^G)$.*

3.4 Modulul de multiplicitate al unui grup punctat

Un alt concept important al teoriei lui Puig este acela de modul de multiplicitate al unui grup punctat al unei G-algebre. În acest paragraf dăm versiunea graduată a acestei noţiuni, urmând lucrarea [18]. Vom începe cu o algebră tare G-graduată R, un R-modul $\tilde{M}$ şi U un sumand direct al lui $\mathrm{Res}_H^G(\tilde{M})$. Vom considera aici cazul general, când k nu este neaparat algebric închis. Vom defini noţiunea de modul de multiplicitate al lui U. Vom arăta apoi că această construcţie aplicată algebrei G-graduate $A * G$ implică în cazul algebric închis, noţiunea uzuală de modul de multiplicitate al unui grup punctat.

3.4.1. Modulul de multiplicitate al unui grup punctat. Fie A o G-algebră peste $\mathcal{O}$. Unui grup punctat H_α al lui A i se asociază diverse obiecte matematice pe care le vom descrie pe scurt în continuare, urmând [43, Secţiunea 13]. În primul rând, există un unic ideal maximal m_α al lui A^H astfel încât $\alpha \subsetneq m_\alpha$ şi k-algebra simplă

$$S(\alpha) = A^H/m_\alpha$$

se numeşte *algebra de multiplicitate* a grupului punctat H_α. Fie $N_G(H_\alpha)$ stabilizatorul lui α în $N_G(H)$ şi notăm

$$\bar{N}_G(H_\alpha) = N_G(H_\alpha)/H.$$

Grupul $N_G(H_\alpha)$ acţionează asupra algebrei cât A^H/m_α şi deci $S(\alpha)$ este o $N_G(H_\alpha)$-algebră. Mai mult, deoarece H acţionează trivial asupra lui A^H, este util să privim $S(\alpha)$ ca şi $\bar{N}_G(H_\alpha)$-algebră.

Dacă k este algebric închis, atunci $S(\alpha) = \mathrm{End}_k(V(\alpha))$, unde $V(\alpha)$ este unicul $S(\alpha)$-modul simplu. Acest modul simplu se numeşte modulul de multiplicitate al lui H_α. De fapt, $V(\alpha)$ poate fi înzestrat cu o structură de modul peste o algebră răsucită $k_\sharp\hat{\bar{N}}_G(H_\alpha)$ asociată lui $S(\alpha)$. Prin *modul de multiplicitate* $V(\alpha)$ al unui grup punctat H_α, vom înţelege întotdeauna k-spaţiul vectorial $V(\alpha)$ împreună cu structura sa de $k_\sharp\hat{\bar{N}}_G(H_\alpha)$-modul.

3.4.2. Modulul de multiplicitate al unui modul. Fie R o $\mathcal{O}$-algebră tare G-graduată şi H un subgrup al lui G. Fie $\tilde{M}$ un R-modul şi notăm

$$A = \mathrm{End}_{R_1}(\tilde{M})^{op}.$$

Este binecunoscut faptul că A este o G-algebră şi că

$$A^H = \mathrm{End}_{R_H}(\tilde{M})^{op}.$$

Mai mult, A^H devine o $N_G(H)$-algebră asupra căreia H acţionează trivial şi vom privi A^H ca şi $\bar{N}_G(H)$-algebră, unde $\bar{N}_G(H) := N_G(H)/H$.

Fie U un sumand direct indecompozabil al lui $\mathrm{Res}_H^G \tilde{M}$. Privim $R_{N_G(H)}$ ca şi algebră $\bar{N}_G(H)$-graduată (cu 1-componenta R_H). Atunci

$$M := R_{N_G(H)} \otimes_{R_H} U$$

este un $R_{N_G(H)}$-modul $\bar{N}_G(H)$-graduat. Notăm cu $\bar{N}_G(H)_M$ stabilizatorul lui M, adică

$$\bar{N}_G(H)_M = \bar{N}_G(H)_U = \{gH \in \bar{N}_G(H) \mid R_{gH} \otimes_{R_H} U \simeq U \text{ în } R_H\text{-mod}\}.$$

Deoarece $\tilde{M}$ este un R-modul, deci în particular un $R_{\bar{N}_G(H)}$-modul, există un binecunoscut izomorfism de $\mathcal{O}$-algebre $\bar{N}_G(H)$-graduate

$$\mathrm{End}_{R_{\bar{N}_G(H)}}(R_{\bar{N}_G(H)} \otimes_{R_H} \tilde{M})^{\mathrm{op}} \simeq A^H * \bar{N}_G(H),$$

unde $A^H * \bar{N}_G(H)$ este algebra grupală strâmbă a lui $A^H = \mathrm{End}_{R_H}(\tilde{M})^{\mathrm{op}}$ şi $\bar{N}_G(H)$. Mai târziu vom aplica teorie Clifford algebrei $\bar{N}_G(H)$-graduate $A^H * \bar{N}_G(H)$ şi 1-componentei sale A^H.

R_H-modulul U determină un unic A^H-modul proiectiv indecompozabil X şi X la rândul său, corespunde (aplicând Teorema 3.1.2) unui A^H-modul

$$\bar{X} := X/J(A^H)X,$$

care este simplu ca şi A^H(şi ca $A^H/J(A^H)$)-modul. Mai mult, deoarece aceste corespondenţe sunt compatibile cu acţiunile grupurilor, avem egalitatea între stabilizatorii

$$\bar{N}_G(H)_U = \bar{N}_G(H)_X = \bar{N}_G(H)_{\bar{X}}.$$

Considerăm acum algebrele $\bar{N}_G(H)$-graduate

$$E := \mathrm{End}_{R_{N_G(H)}}(R_{N_G(H)} \otimes_{R_H} U)^{\mathrm{op}},$$

care este produs încrucişat al lui $E_1 \simeq \mathrm{End}_{R_H}(U)^{\mathrm{op}}$ şi $\bar{N}_G(H)_U$, şi

$$D := E/J_{\mathrm{gr}}(E),$$

care este produs încrucişat al lui $D_1 \simeq E_1/J(E_1)$ şi $\bar{N}_G(H)_U$. Deoarece corespondenţa

$$R_{N_G(H)} \otimes_{R_H} U \mapsto (A^H * \bar{N}_G(H)) \otimes_{A^H} X$$

provine dintr-o echivalenţă de categorii, are loc izomorfismul

$$E \simeq \mathrm{End}_{A^H * \bar{N}_G(H)}((A^H * \bar{N}_G(H)) \otimes_{A^H} X)^{\mathrm{op}}$$

de algebre $\bar{N}_G(H)$-graduate. Mai mult, X fiind proiectiv ca şi A^H-modul, are loc izomorfismul de k-algebre $\bar{N}_G(H)$-graduate

$$D \simeq \mathrm{End}_{A^H * \bar{N}_G(H)_X}((A^H * \bar{N}_G(H)) \otimes_{A^H} \bar{X})^{\mathrm{op}}.$$

Se observă că, k-algebra din membrul drept este izomorfă cu un produs încrucişat al lui

$$D_1 \simeq \mathrm{End}_{A^H}(\bar{X})^{\mathrm{op}} \simeq \mathrm{End}_{A^H/J(A^H)}(X)^{\mathrm{op}}$$

cu $\bar{N}_G(H)_X$.

Avem că $\bar{X}$ este un $(A^H, \mathrm{End}_{A^H}(\bar{X})^{\mathrm{op}})$-bimodul şi deoarece $\bar{X}$ este un A^H-modul $\bar{N}_G(H)_X$-invariant, rezultă că

$$(A^H * \bar{N}_G(H)_X) \otimes_{A^H} \bar{X} \simeq \bar{X} \otimes_{\mathrm{End}_{A^H}(\bar{X})^{\mathrm{op}}} \mathrm{End}_{A^H * \bar{N}_G(H)_X}((A^H * \bar{N}_G(H)) \otimes_{A^H} \bar{X})^{\mathrm{op}}$$

este un $(A^H * \bar{N}_G(H)_X, \mathrm{End}_{A^H * \bar{N}_G(H)_X}((A^H * \bar{N}_G(H)) \otimes_{A^H} \bar{X}))$-bimodul $\bar{N}_G(H)_X$-graduat.

Deoarece $\bar{X}$ este un A^H-modul simplu, avem că $J(A^H) \subseteq \mathrm{Ann}_{A^H}(\bar{X})$ şi mai mult, $\mathrm{Ann}_{A^H}(\bar{X})$ este un ideal $\bar{N}_G(H)_X$-invariant al lui A^H. Conform 3.1.8 acest ideal determină un unic ideal graduat al lui $A^H * \bar{N}_G(H)_X$. Atunci $(A^H * \bar{N}_G(H)_X) \otimes_{A^H} \bar{X}$ este simplu graduat ca şi $A^H * \bar{N}_G(H)_X$-modul, şi considerăm k-algebra $\bar{N}_G(H)_X$-graduată

$$\hat{R} := A^H * \bar{N}_G(H)_X / \mathrm{Ann}_{A^H}(\bar{X})(A^H * \bar{N}_G(H)_X).$$

Se observă că

$$\hat{R} \simeq (A^H / \mathrm{Ann}_{A^H}(\bar{X})) * \bar{N}_G(H)_U$$

este o algebră tare $\bar{N}_G(H)_U$-graduată cu 1-componenta

$$\hat{R}_1 \simeq A^H / \mathrm{Ann}_{A^H}(\bar{X}),$$

o k-algebră simplă. Notăm

$$\hat{E} := \mathrm{End}_{\hat{R}}(\hat{R} \otimes_{\hat{R}_1} \bar{X})^{\mathrm{op}}$$

(deci $\hat{E} \simeq D$ ca şi algebre $\bar{N}_G(H)_U$-graduate). Are loc următorul izomorfism de $(\hat{R}, \hat{E})$-bimodule $\bar{N}_G(H)_U$-graduate:

$$\hat{R} \otimes_{\hat{R}_1} \bar{X} \simeq \bar{X} \otimes_{\hat{E}_1} \hat{E}.$$

Prin urmare $\bar{X}$ este un $\Delta(\hat{R} \otimes_k \hat{E}^{\mathrm{op}})$-modul, unde $\Delta(\hat{R} \otimes_k \hat{E}^{\mathrm{op}})$ este subalgebra diagonală a lui $\hat{R} \otimes_k \hat{E}^{\mathrm{op}}$, şi avem

$$\hat{R} \otimes_{\hat{R}_1} \bar{X} \simeq (\hat{R} \otimes_k \hat{E}^{\mathrm{op}}) \otimes_{\Delta(\hat{R} \otimes_k \hat{E}^{\mathrm{op}})} \bar{X},$$

ca şi $(\hat{R}, \hat{E})$-bimodule.

Putem acum să dăm definiţia modulului de multiplicitate al R_H-modulului indecompozabil U.

Definiţia 3.4.3. *$\Delta(\hat{R} \otimes_k \hat{E}^{op})$-modulul $\bar{X}$ se numeşte modulul de multiplicitate al R_H-sumandului indecompozabil U al lui $\tilde{M}$.*

Studiem în continuare un caz particular al acestei construcţii, şi anume cazul când $\hat{E}_1 \simeq k$. Această situaţie are loc de exemplu când k este algebric închis, deoarece $\bar{X}$ este o A^H-algebră simplă şi deci $\hat{E}_1 \simeq \mathrm{End}_{A^H}(\bar{X})$ este izomorf cu k.

Propoziţia 3.4.4. *Presupunem că $\hat{E}_1 \simeq k$ şi deci $\hat{R}_1$ este o k-algebră simplă centrală. Atunci*

$$\Delta(\hat{R} \otimes_k \hat{E}^{op}) \simeq \hat{R}_1 \otimes_k k_\gamma \bar{N}_G(H)_U,$$

unde $\gamma \in Z^2(\bar{N}_G(H)_U, k^*)$.

Demonstraţie. Notăm $\Delta := \Delta(\hat{R} \otimes_k \hat{E}^{\mathrm{op}})$. Algebra tare $\bar{N}_G(H)_U$-graduată Δ este un produs încrucişat al lui $\Delta_1 \simeq \hat{R}_1$ şi $\bar{N}_G(H)_U$. Fixăm elementele inversabile $u_g \in \Delta_g \cap U(\Delta), \forall g \in \bar{N}_G(H)_U$ şi considerăm $\sigma : \bar{N}_G(H)_U \to \mathrm{Aut}(\Delta_1)$, $\sigma(g)(a) = u_g a u_g^{-1}, \forall g \in \bar{N}_G(H)_U, \forall a \in \Delta_1$. Conform teoremei Skolem-Noether ([43, Teorema 7.2]), acţiunea $\sigma(g)$ a unui element $g \in \bar{N}_G(H)_U$ pe Δ_1 este un automorfism interior, deci de forma $\mathrm{Inn}(a_g)$, unde $a_g \in U(\Delta_1)$. Dar aceasta implică că elementul $a_g^{-1} u_g$ aparţine centralizatorului lui Δ_1 în Δ, pentru orice $g \in \bar{N}_G(H)_U$. Prin urmare putem înlocui u_g cu $a_g^{-1} u_g$, unde $g \in \bar{N}_G(H)_U$ şi deoarece $Z(\Delta_1) \simeq k$ rezultă că $\Delta \simeq \Delta_1 \otimes_k k_\gamma \bar{N}_G(H)_U$, pentru $\gamma \in Z^2(\bar{N}_G(H)_U, k^*)$.

□

3.4.5. În următoarea propoziţie arătăm că noţiunea uzuală de modul de multiplicitate al unui grup punctat este un caz particular al noţiunii de modul de multiplicitate al unui modul indecompozabil definită mai sus.

Propoziţia 3.4.6. *Presupunem k algebric închis şi fie A o G-algebră peste $\mathcal{O}$. Notăm cu $R = A * G$ algebra grupală strâmbă a lui A şi G, şi îl privim pe A ca şi R-modul. Fie H_α un grup punctat al lui A şi Ai ($i \in \alpha$) R_H-sumandul direct indecompozabil al lui A corespunzător lui H_α. Atunci modulul de multiplicitate al lui Ai (în sensul Definiţiei 3.4.3) este modulul de multiplicitate al grupului punctat H_α.*

Demonstraţie. Se aplică construcţia de mai sus pentru $A*G$ în loc de R, A în loc de $\tilde{M}$ şi Ai în loc de U. Avem că $A \simeq \mathrm{End}_{R_1}(A)^{\mathrm{op}}$ şi $A^H \simeq \mathrm{End}_{R_H}(A)^{\mathrm{op}}$. Atunci $\bar{N}_G(H)_U$ este $N_G(H_\alpha)$, stabilizatorul lui H_α, k-algebra simplă $\hat{R}_1$ este $S(\alpha)$, algebra de multiplicitate a lui H_α şi $\bar{X}$ este $V(\alpha)$, modulul de multiplicitate al lui H_α. Deoarece suntem în situaţia Propoziţiei 3.4.4, $\Delta(\hat{R} \otimes_k \hat{E}^{\mathrm{op}}) \simeq S(\alpha) \otimes_k k_\gamma \bar{N}_G(H_\gamma)$, unde $\gamma \in Z^2(\bar{N}_G(H_\alpha), k^*)$, şi deci propoziţia este demonstrată. $\square$

Capitolul 4

Blocuri cu defect grup normal

Abordăm în acest capitol unul dintre exemplele de bază de G-algebră, algebra grupală şi blocurile algebrelor grupale. Unul dintre scopurile principale ale teoriei reprezentărilor modulare ale grupurilor finite este înţelegerea structurii blocului $\mathcal{O}Gb$ şi a categoriei de module asociate $\mathcal{O}Gb$-mod. Defect grupul unui bloc este un prim invariant care măsoară complexitatea unui bloc. De asemenea conceptul de algebră sursă joacă un rol important, aceastea conţinând toate informaţiile p-locale relevante despre blocuri. Algebrele sursă au proprietăţi remarcabile şi reprezintă unul dintre obiectele de studiu principale în teoria blocurilor. Un număr mare de rezultate sunt deja cunoscute despre algebrele sursă ale blocurilor.

Peste corpuri mari structura blocurilor cu defect grup normal a fost descrisă în [27] de B. Külshammer şi algebra sursă a fost determinată de L. Puig în [40]. În [4] este dată o abordare în termeni de module a rezultatelor lui Puig şi este introdusă noţiunea de modul sursă iar [35] aduce în discuţie o echivalenţă Morita graduată. Abordarea lui Puig a fost generalizată la corpuri arbitrare în [23, Teorema 1.17].

În acest capitol vom considera de asemenea corpuri arbitrare şi vom descrie algebrele sursă şi modulele sursă ale blocurilor cu defect grup normal. Abordarea noastră va fi modul-teoretică. Vom folosi tehnici din teoria modulelor peste algebre graduate. Primele două paragrafe prezintă pe scurt nişte noţiuni şi rezultate generale din teoria blocurilor algebrelor grupale şi din teoria algebrelor graduate. Paragraful al treilea este dedicat prezentării rezultatelor generale legate de schimbarea algebrei coeficienţilor iar paragraful al patrulea, introducerii notaţiilor şi rezultatelor tehnice necesare formulării rezultatele noastre principale. Ultimul paragraf conţine rezultate originale obţinute în colaborare cu prof. Andrei Mărcuş şi publicate în [17].

4.1 Blocuri ale algebrelor grupale

4.1.1. Blocuri. Am văzut în capitolul 1 că algebra grupală $A = \mathcal{O}G$ este algebră G-interioară în raport cu acţiunea prin conjugare. Deoarece $(\mathcal{O}G)^G = Z(\mathcal{O}G)$ este algebră comutativă, un punct α al lui $(\mathcal{O}G)^G$ conţine un singur idempotent primitiv b. Un idempotent primitiv al lui $(\mathcal{O}G)^G$ se numeşte *bloc* al lui $\mathcal{O}G$. Algebra $\mathcal{O}Gb = b\mathcal{O}Gb$ o vom numi de asemenea bloc. În particular această algebră este o algebră G-interioară. Toţi invarianţii ataşaţi grupului punctat $G_{\{b\}}$ (sau punctului $\{b\}$) vor fi consideraţi ca invarianţi ai blocului b. De exemplu, un defect grup al grupului punctat $G_{\{b\}}$ se va numi *defect grupul blocului b*.

Următoarea propoziţie descrie comportarea blocurilor algebrei $\mathcal{O}G$ prin reducere modulo $J(\mathcal{O})$.

Propoziţia 4.1.2 (Propoziţia 37.4 [43]). *Fie H un subgrup al lui G.*

(a) Mulţimea tuturor sumelor elementelor claselor de H-conjugare formează o bază a lui $(\mathcal{O}G)^H$;

(b) Proiecţia canonică $\mathcal{O}G \to kG$ se restrânge la un morfism surjectiv $(\mathcal{O}G)^H \to (kG)^H$;

(c) Proiecţia canonică $\mathcal{O}G \to kG$ induce un izomorfism între mulţimea grupurilor punctate pe $\mathcal{O}G$ şi respectiv pe kG. În particular orice bloc al lui kG se ridică în mod unic la un bloc al lui $\mathcal{O}G$;

(d) Un grup punctat pe $\mathcal{O}G$ este local (respectiv maximal local) dacă şi numai dacă imaginea sa în kG este local (respectiv maximal local). În particular imaginea defectului unui bloc este defectul imaginii blocului.

Practic, conform rezultatului precedent, a studia blocurile lui $\mathcal{O}G$ este acelaşi lucru cu studiul blocurilor lui kG, deoarece acestea corespund unul altuia prin reducere modulo p.

4.1.3. Morfismul lui Brauer. În cazul algebrelor grupale există o descriere explicită a morfismului lui Brauer pentru G-algebre, prezentat în secţiunea 1.1.2.

Propoziţia 4.1.4 (Propoziţia 37.5 [43]). *Fie P un p-subgrup al lui G.*

(a) Compunerea incluziunii $\mathcal{O}C_G(P) \to (\mathcal{O}G)^P$ cu morfismul $Br_P : (\mathcal{O}G)^P \to \overline{\mathcal{O}G}(P)$ induce un izomorfism de k-algebre
$$kC_G(P) \simeq \overline{\mathcal{O}G}(P);$$

(b) Dacă identificăm $\overline{\mathcal{O}G}(P)$ cu $kC_G(P)$ via izomorfismul de la (a), atunci morfismul lui Brauer este morfismul surjectiv

$$Br_P : (\mathcal{O}G)^P \to kC_G(P),$$

care duce un element din $C_G(P)$ în el însuşi (văzut ca element al bazei lui $kC_G(P)$) şi în zero orice sumă de elemente dintr-o clasă de conjugare care conţine elemente din $G \backslash C_G(P)$.

Vom identifica $\overline{\mathcal{O}G}(P)$ cu $kC_G(P)$ via izomorfismul canonic din propoziţia precedentă şi deci vom considera morfismul lui Brauer ca fiind funcţia descrisă în Propoziţia 4.1.4, (b).

Deoarece un bloc al lui $\mathcal{O}G$ este un idempotent central al lui $(\mathcal{O}G)^P$, $Br_P(b)$ este de asemenea un idempotent central al lui $kC_G(P)$. Astfel, $Br_P(b)$ este sau 0 sau o sumă de blocuri ale lui $kC_G(P)$.

Următoarea teoremă este cunoscută sub numele de Corespondenţa Brauer sau Teorema I a lui Brauer.

Teorema 4.1.5 (Corespondenţa Brauer)**.** *Fie P un p-subgrup al lui G şi H un subgrup al lui G care conţine $N_G(P)$.*

Pentru orice bloc b al lui $\mathcal{O}G$ cu defect grup P există un unic bloc c al lui $\mathcal{O}H$ cu defect grup P astfel încât $Br_P(b) = Br_P(c)$.

Mai mult, corespondenţa $b \mapsto c$ este o bijecţie între mulţimea blocurilor lui $\mathcal{O}G$ şi $\mathcal{O}H$ având defect grup P.

4.1.6. Perechi Brauer. Mulţimea ordonată a grupurilor punctate locale ale lui $\mathcal{O}G$ este o rafinare a unei alte mulţimi ordonate, ale cărei elemente sunt perechile Brauer.

O pereche Brauer a lui $\mathcal{O}G$ este o pereche (P, e), unde P este un p-subgrup al lui G şi e un bloc al lui $kC_G(P)$. Grupul G acţionează prin conjugare pe mulţimea perechilor Brauer: dacă (P, e) este o pereche Brauer şi $g \in G$, atunci ${}^g e$ este un bloc al lui $C_G({}^g P) = {}^g C_G(P)$ şi definim ${}^g(P, e) = ({}^g P, {}^g e)$. Stabilizatorul perechii (P, e)

$$N_G(P, e) = \{g \in N_G(P) \mid {}^g e = e\}$$

se mai numeşte *subgrupul inerţial al blocului b*. Acest subgrup conţine pe $PC_G(P)$.

Fie b un bloc al lui $\mathcal{O}G$. *O b-pereche Brauer* este o pereche (P, e), unde P este un p-subgrup al lui G şi e este un bloc al lui $kC_G(P)$ astfel încât $Br_P(b)e = e$ (sau altfel spus, e apare într-o descompunere a lui $Br_P(b)$).

Se spune că o pereche Brauer (Q, f) *este inclusă* în perechea Brauer (P, e) şi se scrie $(Q, f) \leq (P, e)$ dacă există un idempotent primitiv $i \in (\mathcal{O}G)^P$ astfel încât $Br_P(i)e \neq 0$ şi $Br_Q(i)f \neq 0$.

Considerăm acum perechi Brauer maximale. Dacă (P, e) este o pereche Brauer maximală asociată lui b, blocul e al lui $kC_G(P)$ are defect grup $Z(P)$. Mai mult, există o bijecţie între mulţimea perechilor Brauer maximale asociate lui b şi mulţimea defectelor lui b şi are loc

$$N_G(P_\gamma) = N_G(P, e),$$

unde P_γ este unicul grup punctat local asociat lui (P, e).

4.1.7. Algebra sursă. Fie b un bloc al lui $\mathcal{O}G$ şi P un defect grup al lui b. Dacă P_γ este un defect al lui $G_{\{b\}}$, γ se numeşte *punct sursă* al lui b şi $i \in \gamma$ *idempotent sursă*. Algebra P-interioară $(\mathcal{O}Gb)_\gamma$ se numeşte *algebra sursă a lui b* şi este unică abstracţie făcând de un izomorfism. Practic,

$$(\mathcal{O}Gb)_\gamma = i\mathcal{O}Gi$$

(bi=i deoarece $P_\gamma \leq G_{\{b\}}$). Amintim de asemenea că orice $N_G(P)$-conjugată a lui $(\mathcal{O}Gb)_\gamma$ este algebră sursă a lui b.

Conceptul de algebră sursă i se datorează lui Puig ([40]) care a şi demonstrat proprietăţile sale de bază. S-a dovedit că algebrele sursă conţin toate informaţiile p-locale asupra blocurilor şi au proprietăţi remarcabile, fiind unul dintre obiectele principale de studiu ale teoriei blocurilor.

Primul rezultat de bază este că algebra sursă S a unui bloc b al lui $\mathcal{O}G$ este Morita echivalentă cu $\mathcal{O}Gb$. Asta înseamnă că, categoriile de module $\mathcal{O}Gb$-mod şi S-mod sunt echivalente. Mai mult, echivalenţa este obţinută în felul următor. Fie $(\mathcal{O}Gb)_\gamma = i\mathcal{O}Gi$, unde $i \in \gamma$ şi γ un punct sursă. Folosind o caracterizare a echivalenţei Morita pentru $\mathcal{O}$-algebre (de exemplu [43, Teorema 9.9]), echivalenţa între $i\mathcal{O}Gi$ şi $\mathcal{O}Gb$ este dată de $(\mathcal{O}Gb, i\mathcal{O}Gi)$-bimodulul $\mathcal{O}Gbi = \mathcal{O}Gi$ şi $(i\mathcal{O}Gi, \mathcal{O}Gb)$-bimodulul $i\mathcal{O}Gb = i\mathcal{O}G$. Prin urmare, corespondentul Morita al unui $\mathcal{O}Gb$-modul M este

$$i\mathcal{O}G \otimes_{\mathcal{O}Gb} M \simeq iM,$$

unde iM este un $i\mathcal{O}Gi$-modul în raport cu multiplicarea la stânga.

Determinarea algebrei sursă a unui bloc poate fi considerată una dintre problemele de bază ale teoriei blocurilor. Un număr mare de rezultate sunt deja cunoscute despre algebrele sursă. De asemenea acest domeniu a fost impulsionat de enunţarea multor conjecturi.

4.1.8. Defect grupul unui bloc. Module sursă. Există mai multe abordări ale definiţiei defect grupului unui bloc. Abordarea modul teoretică a fost iniţiată de Green. În această abordare algebra grupală $\mathcal{O}G$ este privită ca un $\mathcal{O}(G \times G)$-modul cu acţiunea

$$(g_1, g_2)g \to g_1 g g_2^{-1}$$

şi blocurile sunt sumanzii săi direcţi indecompozabili. Fie b un bloc al lui $\mathcal{O}G$ şi notăm

$$\Delta(G) = \{(g, g) \mid g \in G\} \subseteq G \times G.$$

Astfel, $\mathcal{O}G \simeq \mathrm{Ind}_{\Delta(G)}^{G\times G} \mathcal{O}$, adică $\mathcal{O}(G \times G)$-modulul $\mathcal{O}G$ este proiectiv relativ la $\Delta(G)$ şi deci vârful unui sumand direct indecompozabil $\mathcal{O}Gb$ este conjugat cu un subgrup de forma $\Delta(P) \subseteq \Delta(G)$, unde P este un p-subgrup al lui G. Grupul P se numeşte *defect grupul blocului* b. Astfel, putem spune că într-un anume sens, grupul P determină cât de complicat este blocul.

Conform [4], un *modul sursă al blocului* b este un sumand direct indecompozabil M al lui $\mathrm{Res}_{G\times P}^{G\times G}(\mathcal{O}Gb)$ cu vârf $\Delta(P)$. Deoarece $G \times P$ conţine vârful $\Delta(P)$ al $\mathcal{O}(G \times G)$-modulului $\mathcal{O}Gb$, blocul b are un modul sursă M. Algebra $\mathrm{End}_{\mathcal{O}(G\times 1)}(M)^{\mathrm{op}}$ este atunci *algebra sursă a blocului* b. Într-adevăr, orice sumand direct al lui $\mathcal{O}Gb$ privit ca $\mathcal{O}G$-modul stâng este de forma $\mathcal{O}Gi$, unde i este un idempotent în $\mathcal{O}Gb$. Deoarece M este un sumand direct al lui $\mathcal{O}Gb$ ca $\mathcal{O}(G \times P)$-modul, avem de fapt $M = \mathcal{O}Gi$, unde i este un idempotent P-stabil în $\mathcal{O}Gb$. Mai mult, deoarece M este indecompozabil, i este primitiv în $(\mathcal{O}Gb)^P$, şi condiţia că $\Delta(P)$ este vârful lui M este echivalentă cu $Br_P(i) \neq 0$. Funcţia care asociază lui $a \in i\mathcal{O}Gi$ multiplicarea la dreapta cu a pe M este un izomorfism de algebre P-interioare

$$i\mathcal{O}Gi \simeq \mathrm{End}_{\mathcal{O}(G\times 1)}(M)^{\mathrm{op}}.$$

Modulul M este proiectiv ca şi $\mathcal{O}Gb$-modul stâng şi ca $\mathcal{O}P$-modul drept.

Blocul b poate avea mai mult de o clasă de izomorfism de module sursă, dar toate sunt conjugate în raport cu acţiunea lui $N_G(P)$, în sensul că, dacă M' este un alt modul sursă al lui b, există un automorfism ϕ al lui P indus de conjugarea cu un element al lui $N_G(P)$ astfel încât $M' \simeq \mathrm{Res}_{Id_G\times\phi}(M)$. Acest fapt rezultă din interpretarea modulelor sursă ca şi surse ale unor anumite module (vezi [4]).

4.2 Produse încrucișate și echivalențe Morita graduate

Vom prezenta pe scurt construcţiile şi rezultatele de teoria algebrelor graduate pe care le vom folosi în paragraful al cincelea.

4.2.1. Produse încrucişate şi algebre grupale răsucite. Fie A o $\mathcal{O}$-algebră G-graduată. Mulţimea

$$hU(A) = \bigcup_{g\in G}(U(A)\cap A_g)$$

a elementelor inversabile omogene ale lui A este un subgrup al lui $U(A)$ şi $\deg : hU(A) \to G$ este un morfism de grupuri cu nucleul $U(A_1)$. Algebra G-graduată A se numeşte *produs încrucişat* al lui A_1 cu G dacă morfismul $\deg : hU(A) \to G$ este surjectiv, adică pentru orice $g \in G$, $U(A) \cap A_g \neq \emptyset$. (Dacă $N \trianglelefteq H$ şi $G = H/N$, atunci $\mathcal{O}H$ este produsul încrucişat al lui $\mathcal{O}N$ cu G).

Fie $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ un produs încrucişat şi fixăm elementele inversabile $u_g \in A_g \cap U(A), \forall g \in G$. Atunci A este A_1-modul liber (stâng) de bază $\{u_g \mid g \in G\}$. Deci

$$A = \{\sum_{g\in G} a_g u_g \mid a_g \in A_1\}$$

şi multiplicarea este definită de

$$(au_g)(bu_h) = a(u_g b u_g^{-1})\alpha(g, h)u_{gh},$$

unde $\alpha(g, h) = u_g u_h u_{gh}^{-1} \in U(A_1)$ şi $\alpha : G \times G \to U(A_1)$ este o mulţime de factori ai lui G cu valori în A_1 (din condiţia de asociativitate). Grupul $hU(A)$ acţionează asupra lui A_1 prin conjugare şi vom nota $\sigma : G \to \mathrm{Aut}(A_1)$, $\sigma(g)(b) = u_g b u_g^{-1}$.

Prezentăm în continuare o construcţie generală care duce la produse încrucişate. Fie A o algebră, G un grup cu unitatea 1 şi $\sigma : G \to \mathrm{Aut}(A)$, $\alpha : G \times G \to U(A)$ două funcţii cu următoarele proprietăţi, oricare ar fi $x, y, z \in G$ şi $a \in A$:

(i) ${}^x({}^y a) = \alpha(x, y){}^{xy}a\alpha(x, y)^{-1}$

(ii) $\alpha(x, y)\alpha(xy, z) = {}^x\alpha(y, z)\alpha(x, yz)$

(iii) $\alpha(x, 1) = \alpha(1, x) = 1$,

unde am notat $\sigma(x)(a)$ prin ${}^x a$, pentru $x \in G, a \in A$.

Funcţia σ se numeşte acţiunea slabă a lui G pe A şi α se numeşte σ-cociclu. Fie $\overline{G} = \{\overline{g} \mid g \in G\}$ o copie a lui G (ca mulţime). Notăm cu $A^\sigma_\alpha G$, A-modulul liber de bază $\overline{G}$ şi definim multiplicarea pe $\overline{G}$ astfel:

$$(a\overline{x})(b\overline{y}) = a^{\overline{x}}b\alpha(\overline{x}, \overline{y})\overline{xy},$$

pentru $a_1, a_2 \in A, x, y \in G$. Atunci $A^\sigma_\alpha G$ este o algebră G-graduată cu $(A^\sigma_\alpha G)_g = A\overline{g}$ şi produs încrucişat al lui A cu G. Mai mult, are loc propoziţia:

Propoziţia 4.2.2 (Propoziţia 1.4.2 [38]). *Orice G-produs încrucişat R este de forma $A^\sigma_\alpha G$, pentru un inel A şi nişte funcţii σ, α.*

Considerăm acum nişte cazuri particulare ale construcţiei de mai sus.

(a) Presupunem că $\alpha : G \times G \to U(A)$ este trivial, adică $\alpha(x, y) = 1$ pentru orice $x, y \in G$. Atunci (ii) şi (iii) au loc şi din (i) rezultă că σ este morfism de grupuri. În acest caz produsul încrucişat se va nota $A *_\sigma G$ (sau $A * G$) şi se numeşte *algebra grupală strâmbă* asociată lui σ. În acest caz multiplicarea este definită de

$$(a\overline{x})(b\overline{y}) = a\sigma(x)(b)\overline{xy},$$

pentru $a, b \in A, s, y \in G$.

(b) Presupunem că $\sigma : G \to \mathrm{Aut}(A)$ este funcţia trivială, adică $\sigma(g) = 1$, pentru orice $g \in G$. În acest caz condiţia (i) implică $\alpha(x, y) \in U(Z(A))$, $\forall x, y \in G$. De asemenea condiţiile (ii) şi (iii) arată că α este 2-cociclu în sensul clasic, adică $\alpha \in Z^2(G, U(Z(A)))$. Produsul încrucişat $A^\sigma_\alpha G$ se notează în această situaţie cu $A_\alpha G$ (sau $A^\alpha G$) şi se numeşte *algebra grupală răsucită* asociată cociclului α. Multiplicarea este dată de

$$(a\overline{x})(b\overline{y}) = ab\alpha(x, y)\overline{xy}.$$

Următoarea teoremă va fi folosită în demonstraţia Teoremei 4.5.3 din paragraful al cincelea.

Fie R produsul încrucişat al inelului R_1 cu grupul finit E. Atunci grupul $\mathrm{hU}(R)$ este o extensie a lui $\mathrm{U}(R_1)$ prin E. Notăm $J_{\mathrm{gr}}(R)$ radicalul Jacobson graduat al lui R. Următorul rezultat este o generalizare a unei teoreme a lui E. Dade, şi este demonstrat în [30, Teorema 3.1.8].

Teorema 4.2.3. *Notăm $R' := R/J_{\mathrm{gr}}(R)$. Facem următoarele presupuneri.*

1. *Idempotenţii se ridică modulo $J_{\mathrm{gr}}(R)$.*
2. *Extensia $\mathrm{hU}(R')$ a lui $\mathrm{U}(R'_1)$ prin E scindează.*
3. *Există $a' \in R'_1$ astfel încât $\mathrm{Tr}^E_1(a') = 1$.*

Atunci există o bijecţie între scindările lui $\mathrm{hU}(R')$ şi clasele de $(1 + J(R))$-conjugare ale scindărilor lui $\mathrm{hU}(R)$.

În continuare abordăm pe scurt noţiunile de echivalenţă Morita şi echivalenţă Morita graduată şi vom enunţa nişte criterii utile de existenţă a acestor echivalenţe, care vor fi folosite în paragraful al cincelea.

4.2.4. Echivalenţe Morita. Fie k un inel comutativ şi fie R şi S două k-algebre. Spunem că R şi S sunt *echivalente Morita* dacă există o echivalenţă de categorii abeliene între R-Mod şi S-Mod. O caracterizare a echivalenţei Morita a fost obţinută de Kiiti Morita în anii 1950.

Teorema 4.2.5. *Pentru algebrele R şi S următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) $R\text{-Mod} \overset{\simeq}{\to} S\text{-Mod}$

(ii) *Există un R-modul proiectiv P astfel încât orice R-modul este imaginea omomorfă a unei sume directe de copii ale lui P şi $S \simeq \mathrm{End}_R(P)^{op}$*

(iii) *Există bimodulele* ${}_RP_S$ *şi* ${}_SQ_R$ *şi morfismele surjective de bimodule* $\phi : P \otimes_S Q \to R$ *şi* $\psi : Q \otimes_R P \to S$*, care satisfac identităţile*

$$x\psi(y \otimes x') = \phi(x \otimes y)x'$$

$$y\phi(x \otimes y') = \psi(y \otimes x)y',$$

pentru orice $x, x' \in P, y, y' \in Q$

(iv) *Functorii* $Q \otimes_R - : R\text{-Mod} \to S\text{-Mod}$ *şi* $P \otimes_S - : S\text{-Mod} \to R\text{-Mod}$ *sunt inverşi unul altuia şi determină o echivalenţă de categorii abeliene între* R-Mod *şi* S-Mod.

4.2.6. Echivalenţe Morita graduate. Fie G un grup finit, k un inel comutativ şi R şi S k-algebre tare G-graduate. Vom privi S^{op} ca şi k-algebră G-graduată cu componenta $S^{\text{op}}_g = S_{g^{-1}}$. Fie $\Delta(G) = \{(g, g) \mid g \in G\}$ subgrupul diagonal al lui $G \times G$ şi fie

$$\Delta(R \otimes_k S^{\text{op}}) = \bigoplus_{g \in G} (R_g \otimes_k S^{\text{op}}_g)$$

subalgebra diagonală care este o k-subalgebră $\Delta(G)$ (sau G)-graduată a lui $R \otimes_k S^{\text{op}}$.

Spunem că R şi S sunt *echivalente Morita graduat* dacă există un (R, S)-bimodul G-graduat M şi un (S, R)-bimodul G-graduat N care induc o echivalenţă Morita între R şi S astfel încât izomorfismele de bimodule $\phi : P \otimes_S Q \to R$ şi $\psi : Q \otimes_R P \to S$ să fie G-graduate.

Următoarea teoremă dă o caracterizare a echivalenţei Morita graduate şi va fi folosită în demonstraţia teoremei principale din paragraful 4.5.

Teorema 4.2.7 (Teorema 5.1.2 [30])**.** *Fie* M_1 *un* (R_1, S_1)*-bimodul,* N_1 *un* (S_1, R_1)*-bimodul, şi notăm* $M = R \otimes_{R_1} M_1$ *şi* $N = N_1 \otimes_{S_1} S$*. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) *Există o structură de* (R, S)*-bimodul* G*-graduat pe* M *şi o structură de* (S, R)*-bimodul* G*-graduat pe* N *(care extind structurile date) astfel încât* M *şi* N *induc o echivalenţă Morita graduată între* R *şi* S*.*

(ii) M_1 *şi* N_1 *induc o echivalenţă Morita între* R_1 *şi* S_1*, şi* M_1 *se extinde la un* $\Delta(R \otimes_k S^{op})$*-modul.*

4.3 Extinderi ale lui $\mathcal{O}$

Aşa cum am menţionat la început, pe tot parcursul acestui capitol vom considera cazul k corp arbitrar. Spre deosebire de cazul k algebric închis, sunt necesare aici nişte noţiuni şi rezultate legate de extinderea algebrei coeficienţilor. Vom prezenta pe scurt aceste rezultate, urmând în principal lucrarea [20]. Vom arăta de asemenea că, în contextul paragrafului 5, vom putea considera k corp perfect.

4.3.1. Corpuri perfecte. Amintim că un corp F se numeşte *perfect* dacă toate extinderile sale algebrice sunt separabile. Există o caracterizare simplă a corpurilor perfecte. Un corp F este perfect dacă şi numai dacă F are caracteristică 0 sau F are caracteristică $p > 0$ şi orice element al lui F are o p-rădăcină în F. A doua condiţie poate fi scrisă în mod echivalent ca, endomorfismul lui Frobenius $x \mapsto x^p$ să fie automorfism. În particular, toate corpurile de caracteristică 0 şi toate corpurile finite sunt perfecte.

4.3.2. Fie p un număr prim, $\mathcal{O}$ un inel de valuare discretă complet având corpul rezidual $k = \mathcal{O}/J(\mathcal{O})$ de caracteristică p şi $\mathcal{K}$ corpul fracţiilor lui $\mathcal{O}$.

Dacă $\mathcal{O}'$ este un inel de valuare discretă complet care-l conţine pe $\mathcal{O}$ şi $J(\mathcal{O}) \subseteq J(\mathcal{O}')$ spunem că $\mathcal{O}'$ este o *extindere* a lui $\mathcal{O}$. În acest caz, corpul fracţiilor $\mathcal{K}'$ şi corpul rezidual k' al lui $\mathcal{O}'$ sunt extinderi ale lui $\mathcal{K}$ şi respectiv k, şi poate fi aplicată astfel teoria lui Galois. Spunem că extinderea $\mathcal{O}'$ este *finită* (*normală* şi respectiv *Galois*) peste $\mathcal{O}$ dacă $\mathcal{K}'$ este finită (normală respectiv Galois) peste $\mathcal{K}$. În acest capitol prin extindere Galois vom înţelege intotdeauna extindere Galois finită.

Fie $\mathcal{O}'$ o extindere Galois peste $\mathcal{O}$ şi $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathcal{K}'/\mathcal{K})$ grupul lui Galois al lui $\mathcal{K}'$ peste $\mathcal{K}$. E clar că Γ stabilizează $\mathcal{O}'$ şi $(\mathcal{O}')^\Gamma = \mathcal{O}$. Astfel, vom numi Γ de asemenea, *grupul lui Galois al lui* $\mathcal{O}'$ *peste* $\mathcal{O}$ şi notăm $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathcal{O}'/\mathcal{O})$.

Are loc următoarea proprietate.

Propoziţia 4.3.3. *([20]) Există o bijecţie între extinderile lui $\mathcal{O}$ conţinute în $\mathcal{O}'$ şi subgrupurile grupului $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathcal{O}'\mathcal{O})$.*

Mai mult, k' este finită şi normală peste k deoarece $\mathcal{O}'$ este finită şi normală peste $\mathcal{O}$, şi există un morfism natural $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathcal{O}'/\mathcal{O}) \to \mathrm{Gal}(k'/k)$. Totuşi acest morfism nu este în general injectiv. Observăm că are loc $J(\mathcal{O}') \cap \mathcal{O} = J(\mathcal{O})$ (pentru că $\mathcal{O}$ este local), ceea ce implică că $J(\mathcal{O})\mathcal{O}' \subseteq J(\mathcal{O}')$. Extinderea $\mathcal{O}'$ se numeşte *neramificată* peste $\mathcal{O}$ dacă $J(\mathcal{O})\mathcal{O}' = J(\mathcal{O}')$ (sau echivalent, $\mathrm{rang}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}') = \dim_k k'$) . Remarcăm de asemenea că k' nu este neaparat o extindere Galois peste k pentru că nu este neaparat separabilă peste k. Se spune că $\mathcal{O}'$ este *separabilă* peste $\mathcal{O}$ dacă k' este separabilă peste k. Mai mult are loc următorul rezultat.

Propoziţia 4.3.4. *Dacă $\mathcal{O}'$ este o extindere Galois neramificată şi separabilă peste $\mathcal{O}$, atunci*

$$\mathrm{Gal}(\mathcal{K}'/\mathcal{K}) = \mathrm{Gal}(\mathcal{O}'/\mathcal{O}) = \mathrm{Gal}(k'/k).$$

Conform unor rezultate de teoria numerelor, are loc următorul rezultat, care reprezintă o situaţie tipică pentru aplicaţiile noastre.

Propoziţia 4.3.5. *Dacă ω este o p-rădăcină a unităţii, atunci $\mathcal{O}[\omega]$ este o extindere ciclică, separabilă şi neramificată a lui $\mathcal{O}$ şi $k(\omega)$ este o extindere ciclică separabilă a lui k.*

De asemenea, are loc şi următorul rezultat.

Propoziţia 4.3.6. *Fie $\mathcal{O}'$ o extindere neramificată peste $\mathcal{O}$ având corpul fracţiilor k'. Dacă $k' = k(\omega)$ pentru o p'-rădăcină ω a unităţii, atunci $\mathcal{O}' = \mathcal{O}[\omega]$. Prin urmare, este o extindere neramificată ciclică şi separabilă peste $\mathcal{O}$.*

4.3.7. În demonstraţia teoremei centrale din paragraful 5 va fi suficient să studiem cazul k corp perfect. Vom prezenta în continuare cum se face această reducere şi care sunt argumentele.

Fie k_a închiderea algebrică în k a corpului prim cu p-elemente adică, k_a este mulţimea tuturor elementelor din k care sunt algebrice peste corpul prim (în mod echivalent, k_a este format din 0 şi din toate rădăcinile unităţii din k). Atunci k_a este un corp perfect. Dacă caracteristica lui $\mathcal{O}$ este 0, notăm cu $\mathcal{O}_a$ extinderea corespunzătoare inclusă în $\mathcal{O}$ peste inelul întregilor p-adici, adică $\mathcal{O}_a$ este extinderea peste $\mathbb{Z}_p$ generată de toate p'-rădăcinile unităţii în $\mathcal{O}$. În particular, $\mathcal{O}_a$ este o extensie neramificată separabilă peste $\mathbb{Z}_p$.

Propoziţia 4.3.8. *Fie R o $\mathcal{O}$-algebră cu $R/J(R) \simeq k$. Dacă k este perfect, atunci, în grupul multiplicativ R^* există un unic subgrup $\widehat{k^*}$ a cărui imagine prin morfismul canonic $R \to k$ este izomorf cu grupul multiplicativ k^*.*

4.3.9. Enunţăm acum două proprietăţi utile care au loc la extinderea coeficienţilor. Fie A o $\mathcal{O}$-algebră.

Lema 4.3.10. *Fie $\mathcal{O}'$ o extindere a lui $\mathcal{O}$. Fie M şi N A-module. Atunci*

$$\mathcal{O}' \otimes_{\mathcal{O}} \mathrm{Hom}_A(M, N) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}' \otimes_{\mathcal{O}} A}(\mathcal{O}' \otimes_{\mathcal{O}} M, \mathcal{O}' \otimes_{\mathcal{O}} N).$$

Lema 4.3.11. *Fie $\mathcal{O}'$ o extindere a lui $\mathcal{O}$, M un A-modul şi N un A-modul drept. Atunci*

$$\mathcal{O}' \otimes_{\mathcal{O}} (N \otimes_A M) \simeq (\mathcal{O}' \otimes_{\mathcal{O}} N) \otimes_{\mathcal{O}' \otimes_{\mathcal{O}} A} (\mathcal{O}' \otimes_{\mathcal{O}} M).$$

4.4 Rezultate generale legate de $\mathcal{O}$-blocuri și teorie Clifford

Amintim în acest paragraf câteva noţiuni şi rezultate tehnice legate de blocuri şi teorie Cliford pentru blocuri, majoritatea conţinute în [23]. Acest paragraf are rolul de a introduce notaţiile necesare formulării rezultatelor noastre din paragraful următor.

4.4.1. Fie $\mathcal{O}$ un domeniu cu ideale principale local şi complet având corpul rezidual k de caracteristică $p > 0$. Fie G un grup finit, $A = \mathcal{O}G$ algebra grupală şi b un bloc cu defect grup D al lui $\mathcal{O}G$.

Fie $i \in A^D$ un idempotent sursă a lui b, şi fie $\gamma \subset A^D$, $U(A^D)$-clasa de conjugare a lui i. $\mathrm{Br}_D^A(\gamma)$ este un punct al lui $kC_G(D)$ şi determină un unic bloc $\bar{b}_\gamma$ al lui $kC_G(D)$ cu defect grup $Z(D)$. Perechea $(D, \bar{b}_\gamma)$ se numeşte o *defect b-pereche Brauer*. Considerăm stabilizatorii

$$N_G(D_\gamma) = \{g \in N_G(D) \mid {}^g\gamma = \gamma\}$$

şi

$$N_G(D, \bar{b}_\gamma) = \{g \in N_G(D) \mid {}^g\bar{b}_\gamma = \bar{b}_\gamma\}.$$

Este binecunoscut faptul că

$$N_G(D, \bar{b}_\gamma) = N_G(D_\gamma)$$

şi că acest grup conţine $DC_G(D)$.

Există un unic bloc b_γ al lui $\mathcal{O}C_G(D)$ astfel încât $\bar{b}_\gamma$ este imaginea lui b_γ prin morfismul $\mathcal{O}G \to kG$. Se observă că b_γ este de asemenea un bloc cu defect D al lui $\mathcal{O}DC_G(D)$ şi al lui $\mathcal{O}N_G(D_\gamma)$, şi în general pentru orice algebră $\mathcal{O}H$ unde $DC_G(D) \leq H \leq N_G(D_\gamma)$. Considerăm funcţia urmă

$$\mathrm{Tr}_{N_G(D_\gamma)}^{N_G(D)} : A^{N_G(D_\gamma)} \to A^{N_G(D)},$$

şi fie

$$c = \mathrm{Tr}_{N_G(D_\gamma)}^{N_G(D)} b_\gamma.$$

Atunci c este corespondentul Brauer al lui b, şi algebra $\mathcal{O}N_G(D_\gamma)b_\gamma$ este Morita echivalentă cu $\mathcal{O}N_G(D)c$.

4.4.2. Fie $A(D_\gamma)$ factorul simplu al lui A^D corespunzător lui γ. De fapt $A(D_\gamma)$ este izomorf cu factorul simplu al lui $kC_G(D)\bar{b}_\gamma/J(kC_G(D)\bar{b}_\gamma)$ corespunzător punctului $\mathrm{Br}_D(\gamma)$. De fapt,

$$A(D_\gamma) \simeq k\bar{C}_G(D)\bar{\bar{b}}_\gamma,$$

unde

$$\bar{C}_G(D) := C_G(D)/Z(D) \simeq DC_G(D)/D.$$

Se ştie că $\bar{\bar{b}}_\gamma$ este un bloc cu defect grup zero al lui $k\bar{C}_G(D)$. Notăm

$$\hat{k} = Z(A(D_\gamma)),$$

centrul lui $A(D_\gamma)$. Din [20, Secţiunea 2.4]

$$A(D_\gamma) \simeq \mathcal{M}_n(\hat{k}),$$

algebra matricilor de tipul $n \times n$ peste $\hat{k}$ (adică, $A(D_\gamma)$ are indice Schur 1). Notăm această algebră cu S. Mai mult $\hat{k}$ este o extindere ciclică separabilă peste k. Blocul $\bar{\bar{b}}_\gamma$ se ridică la un bloc al lui $\mathcal{O}\bar{C}_G(D)$ notat $\widetilde{b}_\gamma$ şi avem

$$\mathcal{O}\bar{C}_G(D)\widetilde{b}_\gamma \simeq \mathcal{M}_n(\hat{\mathcal{O}}),$$

unde $\hat{\mathcal{O}}$ este o extindere ciclică separabilă peste $\mathcal{O}$. Prin urmare $\mathrm{Gal}(\hat{\mathcal{O}}/\mathcal{O}) = \mathrm{Gal}(\hat{k}/k)$ este ciclic şi $\hat{\mathcal{O}} = \mathcal{O}(\hat{\zeta})$, unde $\hat{\zeta}$ este un caracter Brauer absolut ireductibil în $\mathcal{O}C_G(D)b_\gamma$ (a se vedea [20] şi [23, Secţiunea 2] pentru detalii).

4.4.3. Considerăm grupul factor

$$E_G(D_\gamma) = N_G(D_\gamma)/DC_G(D),$$

numit şi *coeficientul inerţial* al blocului b. Grupul $N_G(D_\gamma)/C_G(D)$ acţionează prin conjugare asupra lui $\mathrm{Aut}(D)$ şi deci şi asupra lui $\mathrm{Out}(D) = \mathrm{Aut}(D)/\mathrm{Int}(D)$. Nucleul morfismului $N_G(D_\gamma)/C_G(D) \to \mathrm{Out}(D)$ este $DC_G(D)/C_G(D)$ şi prin urmare

$$(N_G(D_\gamma)/C_G(D))/(DC_G(D)/C_G(D)) \simeq E_G(D_\gamma)$$

este izomorf cu un subgrup al lui $\mathrm{Out}(D)$.

Dacă k este algebric închis, este binecunoscut faptul că $E_G(D_\gamma)$ este un p'-subgrup. Aplicând Teorema lui Schur-Zassenhaus, $E_G(D_\gamma)$ poate fi privit ca un p'-subgrup al lui $\mathrm{Aut}(D)$.

Presupunând k corp arbitrar, rezultă ca şi mai sus că grupul G este izomorf cu un subgrup al grupului factor $\mathrm{Out}(D)$ al automorfismelor exterioare ale lui D. Grupul $E_G(D_\gamma)$ acţionează asupra lui $\hat{\mathcal{O}}$ şi $\hat{k}$ deoarece $N_G(D_\gamma)$ acţionează asupra lui $k\bar{C}_G(D)\bar{\bar{b}}_\gamma$ şi $\mathcal{O}\bar{C}_G(D)\tilde{b}_\gamma$, şi $DC_G(D)$ acţionează trivial asupra lui $\hat{k}$ şi $\hat{\mathcal{O}}$.

Notăm cu K nucleul morfismului de grupuri

$$E_G(D_\gamma) \to \mathrm{Gal}(\hat{\mathcal{O}}/\mathcal{O}) = \mathrm{Gal}(\hat{k}/k).$$

Morfismul $A^D \to A(D_\gamma)$ de $N_G(D_\gamma)$-algebre induce un morfism surjectiv

$$\mathrm{Tr}_D^G(A^D) \to \mathrm{Tr}_1^{\bar{N}_G(D_\gamma)}(A(D_\gamma)).$$

Deoarece $b \in \mathrm{Tr}_D^G(A^D)$, unitatea $\bar{\bar{b}}_\gamma$ a lui $A(D_\gamma)$ aparţine lui $\mathrm{Tr}_1^{\bar{N}_G(D_\gamma)}(A(D_\gamma))$, şi lui $\mathrm{Tr}_1^{E_G(D_\gamma)}(\hat{k})$. În particular, rezultă că K este un p'-grup.

Acţiunea lui $N_G(D_\gamma)$ asupra lui D şi asupra lui $\hat{\mathcal{O}}$ determină un morfism de extensii de grupuri

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & D/Z(D) \arrow[r] \arrow[d] & N_G(D_\gamma)/DC_G(D) \arrow[r] \arrow[d] & E_G(D_\gamma) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathrm{Int}(\hat{\mathcal{O}}D) \arrow[r] & \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}}(\hat{\mathcal{O}}D) \arrow[r] & \mathrm{Out}_{\mathcal{O}}(\hat{\mathcal{O}}D) \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

Conform [23, Propoziţia 1.14], morfismul $E_G(D_\gamma) \to \mathrm{Out}_{\mathcal{O}}(\hat{\mathcal{O}}D)$ se ridică la o unică clasă de $\mathrm{Int}(\hat{\mathcal{O}}D)$-conjugare de morfisme de grupuri

$$\theta : E_G(D_\gamma) \to \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}}(\hat{\mathcal{O}}D).$$

Aceasta înseamnă că pentru orice $x \in N_G(D_\gamma)$ există $a \in 1 + J(\hat{\mathcal{O}}D)$ astfel încât pentru orice $u \in D$ avem

$$\theta(\tilde{x})(u)^a = xux^{-1},$$

unde $\tilde{x}$ este imaginea lui x în $E_G(D_\gamma)$.

4.5 Module sursă ale blocurilor cu defect grup normal

În acest paragraf descriem modulele sursă ale blocurilor cu defect grup normal peste corpuri arbitrare. Vom generaliza [4, Teorema 13] şi [35, Teorema 3.3]. Argumentele noastre vor fi modul-teoretice.

Folosim notaţiile din paragraful anterior. Notăm cu

$$R = \mathcal{O}N_G(D_\gamma)b_\gamma.$$

Deoarece $b_\gamma \in \mathcal{O}C_G(D)$, R poate fi privit ca o algebră $N_G(D_\gamma)/C_G(D)$-graduată, cu 1-componenta

$$R_1 = \mathcal{O}C_G(D)b_\gamma.$$

În acest paragraf descriem algebra sursă şi modulul sursă al lui R. Aşa cum am menţionat la sfârşitul secţiunii 4.3, pentru început presupunem că k este corp perfect. Vom discuta cazul general în 4.5.6.

4.5.1. Am văzut că grupul $N_G(D_\gamma)$ acţionează asupra lui

$$S \simeq k\bar{C}_G(D)\bar{\bar{b}}_\gamma,$$

şi mai mult, S este o algebră $kDC_G(D)$-interioară. Rezultă că putem construi algebra $E_G(D_\gamma)$-graduată $S * E_G(D_\gamma)$ cu 1-componenta S, împreună cu morfismul de k-algebre $E_G(D_\gamma)$-graduate

$$kN_G(D_\gamma) \to S * E_G(D_\gamma).$$

Observăm că

$$S * E_G(D_\gamma) \simeq R/J_{\mathrm{gr}}(R),$$

ca şi algebre $E_G(D_\gamma)$-graduate.

Fie $\bar{V}$ unicul S-modul simplu. Atunci $\bar{V}$ este un $(S, \hat{k})$-bimodul şi un $(\mathcal{O}\bar{C}_G(D)\widetilde{b}_\gamma, \hat{\mathcal{O}})$-bimodul. S-modulul simplu $\bar{V}$ este $E_G(D_\gamma)$-invariant. Conform unui rezultat din teoria algebrelor graduate rezultă că $\mathrm{End}_{S*E_G(D_\gamma)}(S*E_G(D_\gamma)\otimes_S\bar{V})^{\mathrm{op}}$ este produsul încrucişat dintre $\mathrm{End}_S(\bar{V}) \simeq \hat{k}$ şi stabilizatorul lui $\bar{V}$. Prin urmare există un izomorfism

$$\mathrm{End}_{S*E_G(D_\gamma)}(S * E_G(D_\gamma) \otimes_S \bar{V})^{\mathrm{op}} \simeq \hat{k}^\theta_\beta E_G(D_\gamma),$$

unde $\beta \in Z^2(E_G(D_\gamma), \hat{k}^\times)$, şi acţiunea lui $E_G(D_\gamma)$ asupra lui $\hat{k}$ este aceeaşi ca în 4.4.3.

4.5.2. Deoarece corpul k este perfect, $\hat{k}$ este de asemenea perfect, deci extensia

$$1 \to 1 + J(\hat{\mathcal{O}}) \to \hat{\mathcal{O}}^\times \to \hat{k}^\times \to 1$$

scindează în mod unic. Folosind aceasta, obţinem un element al lui $Z^2(E_G(D_\gamma), \hat{\mathcal{O}}^\times)$, pe care-l vom nota tot cu β.

Astfel, putem construi produsul încrucişat

$$R' := \hat{\mathcal{O}}D^\theta_\beta E_G(D_\gamma)$$

al lui $\hat{\mathcal{O}}D$ cu grupul $E_G(D_\gamma)$. Algebra R' poate fi privită ca o algebră $N_G(D_\gamma)/C_G(D)$-graduată, cu 1-componenta

$$R'_1 = \hat{\mathcal{O}}Z(D).$$

Următoarea teoremă este rezultatul central al acestui capitol.

Teorema 4.5.3. *Există o echivalenţă Morita $N_G(D_\gamma)/C_G(D)$-graduată între R şi R'. Mai precis, fie V acoperitoarea proiectivă a lui $\bar{V}$ privit ca $(\mathcal{O}C_G(D)b_\gamma, \hat{\mathcal{O}})$-bimodul, şi fie*

$$U := \mathcal{O}DC_G(D)b_\gamma \otimes_{\mathcal{O}C_G(D)b_\gamma} V.$$

Atunci echivalenţa Morita este indusă de (R, R')-bimodulul $N_G(D_\gamma)/C_G(D)$-graduat

$$W := R \otimes_{\mathcal{O}DC_G(D)b_\gamma} U.$$

Demonstraţie. Vom folosi Teorema 4.2.7.
Pasul 1:

Privim pe $\bar{V}$ ca un $(\mathcal{O}C_G(D)b_\gamma, \hat{\mathcal{O}})$-bimodul via epimorfismul

$$\mathcal{O}C_G(D)b_\gamma \otimes_{\mathcal{O}} \hat{\mathcal{O}} \to k\bar{C}_G(D)\bar{\bar{b}}_\gamma \otimes_k \hat{k},$$

şi considerăm acoperitoarea sa proiectivă V. Deoarece algebra $\hat{\mathcal{O}}Z(D)$ este comutativă, putem privi pe V ca un $(\mathcal{O}C_G(D)b_\gamma, \hat{\mathcal{O}}Z(D))$-bimodul. Morfismul de $\mathcal{O}$-algebre

$$\hat{\mathcal{O}}Z(D) \to \mathrm{End}_{\mathcal{O}C_G(D)b_\gamma}(V)^{\mathrm{op}}$$

dat de multiplicarea la dreapta este injectiv pentru că V este proiectiv ca şi $\mathcal{O}C_G(D)b_\gamma$-modul. Deoarece

$$\mathrm{End}_{\mathcal{O}C_G(D)b_\gamma}(V)/J(\mathrm{End}_{\mathcal{O}C_G(D)b_\gamma}(V)) \simeq \mathrm{End}_S(\bar{V}) \simeq \hat{k},$$

din lema lui Nakayama rezultă că acest morfism este şi surjectiv. Prin urmare, aplicând Teorema 4.2.5, $(\mathcal{O}C_G(D)b_\gamma, \hat{\mathcal{O}}Z(D))$-bimodulul V induce o echivalenţă Morita între $\mathcal{O}$-algebrele $\mathcal{O}C_G(D)b_\gamma$ şi $\hat{\mathcal{O}}Z(D)$, adică între R_1 şi R'_1.

Pasul 2:

Fie

$$\bar{D} = D/Z(D) \simeq DC_G(D)/C_G(D)$$

şi considerăm algebrele $\bar{D}$-graduate $\mathcal{O}DC_G(D)b_\gamma$ şi $\hat{\mathcal{O}}D$. Algebra diagonală a algebrei $\mathcal{O}DC_G(D)b_\gamma \otimes_{\mathcal{O}} \hat{\mathcal{O}}D$ este $(\mathcal{O}C_G(D)b_\gamma \otimes_{\mathcal{O}} 1)\hat{\mathcal{O}}(\delta(D))$, deci avem un morfism surjectiv de $\mathcal{O}$-algebre

$$\Delta(\mathcal{O}DC_G(D)b_\gamma \otimes_{\mathcal{O}} \hat{\mathcal{O}}D) \to \mathcal{O}C_G(D)b_\gamma.$$

Prin urmare V se extinde la un $\Delta(\mathcal{O}DC_G(D)b_\gamma \otimes_{\mathcal{O}} \hat{\mathcal{O}}D)$-modul.

Conform Teoremei 4.2.7, $(\mathcal{O}DC_G(D)b_\gamma, \hat{\mathcal{O}}D)$-bimodulul $\bar{D}$-graduat

$$\begin{aligned} U &:= \mathcal{O}DC_G(D)b_\gamma \otimes_{\mathcal{O}C_G(D)b_\gamma} V \\ &\simeq V \otimes_{\hat{\mathcal{O}}Z(D)} \hat{\mathcal{O}}D \\ &\simeq (\mathcal{O}DC_G(D)b_\gamma \otimes_{\mathcal{O}} \hat{\mathcal{O}}D) \otimes_{\Delta(\mathcal{O}DC_G(D)b_\gamma \otimes_{\mathcal{O}} \hat{\mathcal{O}}D)} V. \end{aligned}$$

induce o echivalenţă Morita $\bar{D}$-graduată între $\mathcal{O}DC_G(D)b_\gamma$ şi $\hat{\mathcal{O}}D$. (Am luat în considerare aici izomorfismul canonic $\mathcal{O}D \simeq (\mathcal{O}D)^{\mathrm{op}}$.)

Pasul 3:

Acum schimbăm puţin punctul nostru de vedere şi vom privi R şi R' ca algebre $E_G(D_\gamma)$-graduate. În acest caz, $R_1 = \mathcal{O}DC_G(D)b_\gamma$ şi $R'_1 = \hat{\mathcal{O}}D$. Considerăm subalgebra diagonală

$$\Delta := \Delta(R \otimes_{\mathcal{O}} R'^{\mathrm{op}}) = \bigoplus_{g\in G} R_g \otimes_{\mathcal{O}} R'^{\mathrm{op}}_g,$$

care este de asemenea $E_G(D_\gamma)$-graduată cu 1-componenta

$$\Delta_1 = \mathcal{O}DC_G(D)b_\gamma \otimes_{\mathcal{O}} \hat{\mathcal{O}}D.$$

Fie

$$W := R \otimes_{R_1} U \simeq R \otimes_{\mathcal{O}C_G(D)b_\gamma} V.$$

Deoarece V este $N_G(D_\gamma)$-invariant, $W_1 = U$ este un R_1-modul $E_G(D_\gamma)$-invariant. Mai mult, W_1 este un Δ_1-modul, şi vom arăta ca acesta se extinde la un Δ-modul. Notăm

$$\bar{R} := R/J_{\mathrm{gr}}(R) \simeq S * E_G(D_\gamma),$$
$$\bar{R}' := R'/J_{\mathrm{gr}}(R') \simeq \hat{k}^\theta_\beta E_G(D_\gamma),$$

şi fie

$$\bar{\Delta} := \Delta/J_{\mathrm{gr}}(\Delta).$$

Avem că $\Delta_1/J(\Delta_1) \simeq S \otimes_k \hat{k}$, şi $\Delta/J_{\mathrm{gr}}(\Delta) \simeq \Delta(\bar{R} \otimes_k \bar{R}')$. În final, notăm

$$\mathcal{E} = \mathrm{End}_\Delta(\Delta \otimes_{\Delta_1} W_1)^{\mathrm{op}}, \quad \bar{\mathcal{E}} = \mathrm{End}_{\bar{\Delta}}(\bar{\Delta} \otimes_{\bar{\Delta}_1} \bar{V})^{\mathrm{op}}.$$

Avem că $W_1/J(\Delta_1)W_1 \simeq \bar{V}$ este un Δ_1-modul simplu. Aceasta implică (a se vedea [35, Lema 2.4]) că $\mathcal{E}/J_{\mathrm{gr}}(\mathcal{E}) \simeq \bar{\mathcal{E}}$ ca şi algebre $E_G(D_\gamma)$-graduate.

Deoarece $\mathrm{End}_{\bar{R}}(\bar{R} \otimes_{\bar{R}_1} \bar{V})^{\mathrm{op}} \simeq \bar{R}'$ ca algebre $E_G(D_\gamma)$-graduate, rezultă că $\bar{V}$ se extinde la un $\bar{\Delta}$-modul. Prin urmare $\mathrm{hU}(\bar{\mathcal{E}})$ este o extensie scindabilă a lui $\hat{k}$ prin $E_G(D_\gamma)$. Aplicând Teorema 4.2.3 şi observaţiile anterioare, extensia $\mathrm{hU}(\bar{E})$ este de asemenea o extensie scindabilă a lui $U(\mathcal{E}_1)$ prin $E_G(D_\gamma)$. Deducem deci că W_1 se extinde la un Δ-modul.

Aplicând din nou Teorema 4.2.7, rezultă că (R, R')-bimodulul

$$W = R \otimes_{R_1} U \simeq (R \otimes_{\mathcal{O}} R') \otimes_\Delta U$$

induce o echivalenţă Morita între R şi R'. Deoarece

$$W \simeq R \otimes_{\mathcal{O}C_G(D)b_\gamma} V,$$

avem că $R \simeq \mathrm{End}_R(W)^{\mathrm{op}}$ şi ca algebre $N_G(D\gamma)/C_G(D)$-graduate, şi W este un (R, R')-bimodul $N_G(D\gamma)/C_G(D)$-graduat. □

Corolarul 4.5.4. *Păstrăm notaţiile din teorema precedentă. Abstracţie făcând de un izomorfism*

1) V *este unicul modul sursă al lui* $\mathcal{O}C_G(D)b_\gamma$.

2) U *este unicul modul sursă al lui* $\mathcal{O}DC_G(D)b_\gamma$.

3) W *este unicul modul sursă al lui* $R = \mathcal{O}N_G(D_\gamma)b_\gamma$.

Demonstraţie. 1) Rezultă direct din teorema anterioară, deoarece V este un $\mathcal{O}C_G(D)b_\gamma$-modul indecompozabil.

2) Deoarece k este corp perfect, conform [7], U este indecompozabil şi ca $\mathcal{O}DC_G(D)b_\gamma$-modul.

3) Arătăm că W este indecompozabil ca şi (R, R'_1)-bimodul. Conform echivalenţei Morita $E_G(D_\gamma)$-graduată de mai sus, lui W îi corespunde (R', R'_1)-bimodulul $R' = \hat{\mathcal{O}}D^\theta_\beta E_G(D_\gamma)$. Avem că

$$R' = \bigoplus_{g\in E_G(D_\gamma)} R'_g \otimes_{R'_1} R'_1$$

este o sumă directă de (R'_1, R'_1)-bimodule indecompozabile. Deoarece morfismul de grupuri $E_G(D_\gamma) \to \mathrm{Out}_{\mathcal{O}}(\hat{\mathcal{O}}D)$ este injectiv, rezultă că pentru orice $g \in E_G(D_\gamma)$, (R'_1, R'_1)-bimodulele $R'_g \otimes_{R'_1} R'_1$ şi R'_1 nu sunt izomorfe. Deci R' este un (R', R'_1)-bimodul indecompozabil. □

Corolarul 4.5.5. $\mathcal{O}$*-algebra* $R = \mathcal{O}N_G(D_\gamma)b_\gamma$ *este izomorfă cu algebra de matrici* $M_n(\hat{\mathcal{O}}D^\theta_\beta E_G(D_\gamma))$, *unde* $n = \dim_{\hat{k}} \bar{V}$.

Demonstraţie. Prin construcţie, V este un $\hat{\mathcal{O}}Z(D)$-modul drept liber de rang n. Afirmaţia rezultă din faptul că

$$W \simeq V \otimes_{\hat{\mathcal{O}}Z(D)} \hat{\mathcal{O}}D^\theta_\beta E_G(D_\gamma),$$

şi $R \simeq \mathrm{End}_{R'}(W)$. □

4.5.6. Renunţăm acum la presupunerea k corp perfect. Folosim rezultatele din paragraful 4.3. Fie k' închiderea algebrică în k a subcorpului prim. Dacă $\mathrm{char}\mathcal{O} = 0$, fie $\mathcal{O}'$ extinderea neramificată corespunzătoare subinelului p-adic al lui $\mathcal{O}$. Atunci $b \in Z(\mathcal{O}'G)$, $b_\gamma \in Z(\mathcal{O}'C_G(D))$, şi D este defect grupul lui b privit ca şi bloc al lui $\mathcal{O}'G$.

Pornind de la un bloc $\mathcal{O}'Gb$, obţinem γ', $\hat{k}'$, $\hat{\mathcal{O}}'$ şi W' ca mai sus. Mai mult, avem

$$N_G(D_{\gamma'}) = N_G(D_\gamma) \text{ şi } E_G(D_{\gamma'}) = E_G(D_\gamma).$$

Considerăm $(\mathcal{O}N_G(D_\gamma)b_\gamma, \hat{\mathcal{O}}D^\theta_\beta E_G(D_\gamma))$-bimodulul

$$W := \mathcal{O} \otimes_{\mathcal{O}'} W'.$$

Conform echivalenţei Morita dată de Teorema 4.5.3 avem următoarele izomorfisme de bimodule

$$W' \otimes_{\hat{\mathcal{O}}D^{\theta'}_{\beta'}E_G(D_\gamma)} W'^\vee \simeq \mathcal{O}'N_G(D_\gamma)b_\gamma$$

şi

$$W'^\vee \otimes_{\mathcal{O}'N_G(D_\gamma)b_\gamma} W' \simeq \hat{\mathcal{O}}D^{\theta'}_{\beta'}E_G(D_\gamma),$$

unde am notat cu $W'^{\vee}$ $\mathcal{O}'$-dualul lui W'. Aplicând Lemele 4.3.10 şi 4.3.11, obţinem astfel izomorfismele de bimodule

$$W \otimes_{\hat{\mathcal{O}}D_{\beta}^{\theta}E_G(D_\gamma)} W^{\vee} \simeq \mathcal{O}N_G(D_\gamma)b_\gamma$$

şi

$$W^{\vee} \otimes_{\mathcal{O}N_G(D_\gamma)b_\gamma} W \simeq \hat{\mathcal{O}}D_{\beta}^{\theta}E_G(D_\gamma).$$

Prin urmare, aplicând din nou teoria Morita, algebrele $\mathcal{O}N_G(D_\gamma)b_\gamma$ şi $\hat{\mathcal{O}}D_{\beta}^{\theta}E_G(D_\gamma)$ sunt Morita echivalente.

Concluzii și perspective

Scopul acestei teze a fost de a dezvolta şi aplica metode de teoria modulelor peste algebre graduate în tratarea unor probleme din teoria G-algebrelor definite peste corpuri mici.

Am stabilit în capitolul 1 o corespondenţă între G-algebre şi algebre graduate şi am interpretat grupurile punctate ca şi clase de izomorfism de anumite module. Rezultatele obţinute permit interpretarea în termeni modul-teoretici a unor rezultate din teoria lui Puig a grupurilor punctate. Am caracterizat diverse relaţii între grupuri punctate în aceşti termeni, ca de exemplu relaţia de proiectivitate relativă, relaţia de libertate relativă, relaţia de incluziune şi defect grupul punctat.

Ca şi aplicaţii, am dedus în capitolele 2 şi 3 anumite rezultate din teoria lui Puig din rezultate mai generale din teoria modulelor peste algebre graduate. Am formulat versiunile graduate ale unor rezultate existente în literatură legate de grupuri punctate pe care le-am demonstrat folosind metode directe, modul-teoretice. În demonstraţiile acestora am folosit rezultate din teoria modulelor peste algebre graduate ca de exemplu, teoria lui Green a vârfurilor şi a surselor sau teorie Clifford pentru module indecompozabile. Proprietăţile legate de grupuri punctate s-au dedus uşor ca şi consecinţe ale teoremelor noastre. Dintre chestiunile abordate amintim o caracterizare a libertăţii relative pentru grupuri punctate, teorema de indecompozabilitate a lui Green, o teoremă a lui Fong pentru grupuri resolubile. Am dat de asemenea definiţia modulului de multiplicitate al unui modul din care a rezultat cea a modulului de multiplicitate al unui grup punctat.

O altă direcţie de cercetare a fost legată de studiul blocurilor cu defect grup normal peste corpuri arbitrare. Folosind tehnici din teoria modulelor peste algebre graduate am descris în capitolul 4 modulele sursă ale acestor blocuri. În cazul în care o defect-pereche Brauer a unui bloc este normalizată, am arătat că există o echivalenţă Morita graduată între bloc şi algebra sa sursă.

Cercetări ulterioare pot fi dezvoltate în mai multe direcţii. În primul rând putem continua studiul modulului de multiplicitate al unui grup punctat iniţiat în această lucrare. Ne propunem o caracterizare modul-teoretică a proiectivităţii relative între grupuri punctate folosind modulul de multiplicitate, pornind de la [43, Propoziţiile 14.7 şi 18.8]. Acest lucru ar putea fi continuat cu enunţarea versiunii graduate a corespondenţei Puig pentru grupuri punctate [43, Teorema 19.1]. Această corespondenţă datorată lui Puig [40], reprezintă un instrument fundamental al teoriei G-algebrelor, putând fi privită ca o reducere la cazul modulelor proiective. O consecinţă importantă a corespondenţei lui Puig o reprezintă corespondenţa Green, subiect deja abordat în această teză. Ne propunem continuarea acestui studiu în principal în a formula în variantă graduată şi a demonstra relaţia dintre algebra de multiplicitate a unui grup punctat şi cea a corespondentului său Green, aşa cum este prezentată în [43, Teorema 20.1 c)].

În articolul [25], H. Fottner demonstrează că corespondenţa Green pentru grupuri punctate comută cu inducţia în sensul teoremei [25, Teorema C]. Mai exact, această teoremă dă o caracterizare a libertăţii relative între două grupuri punctate folosind libertatea relativă între corespondenţii Green ai acestora. Acest rezultat, precum şi corolarele sale D, E şi F din [25] ar putea fi generalizate pentru module graduate, continuând astfel cercetările iniţiate în teză referitoare la libertate relativă şi inducţie de grupuri punctate.

O altă idee ar fi continuarea generalizării unor rezultate din teoria blocurilor algebrelor grupale peste corpuri arbitrare, în principal legate de algebrele sursă şi modulele sursă ale blocurilor.

Bibliografie

[1] J.L. Alperin, *Local representation theory*, Cambridge University Press (1986).

[2] J.L. Alperin, *The Green Correspondence and normal subgroups*, J. Algebra **104** (1988), 74–77.

[3] J.L. Alperin and M. Broué, *Local methods in block theory*, Ann. of Math **110** (1979), 143–157.

[4] J.L. Alperin, M. Linckelmann, R. Rouquier, *Source algebras and source modules*, J. Algebra **239** (2001), 262–271.

[5] D.J. Benson, *Modular representation theory: new trends and methods*, Lecture Notes in Math.1081, Springer (1984).

[6] D.J. Benson, *Representations and cohomology I, II*, Cambridge University Press (1991).

[7] A. Betsch and P. Schmid, *Crossed products of p-groups and Green's indecomposability theorem*, J. Algebra **168** (1994), 868–876.

[8] P. Boisen, *The representation theory of fully graded algebras*, J. Algebra **151** (1992), 160–179.

[9] A.H. Clifford, *Representations induced in an invariant subgroup*, Annals of Math. **38** (1937), 533–550.

[10] E.C. Dade, *Group-graded rings and modules*, Math. Z. **174** (1980), 241–262.

[11] E.C. Dade, *The equivalence of various generalisations of group rings and modules*, Math. Z. **181** (1982), 335–344.

[12] E.C. Dade, *Clifford theory for group-graded rings*, J. Reine Angew. math **369** (1986), 40–86.

[13] E.C. Dade, *Clifford theory for group-graded rings II*, J. Reine Angew. math **387** (1988), 148–181.

[14] **C. Dicu**, A. Mărcuş, *Group-graded algebras and the relative projectivity of pointed groups*, The Quarterly Journal of Mathematics (Oxford), **57** (3) (2006), 309–318.

[15] **C. Dicu**, *Group graded algebras and the relative freeness of pointed groups*, Mathematica, Tome **47** (70), No 2 (2005), 151–155.

[16] **C. Dicu**, *Pointed groups and relative projectivity*, Proceedings of the Algebra Symposium Babeş-Bolyai University Cluj-Napoca (2005), pp. 61–64.

[17] **C. Dicu**, A. Mărcuş, *Source modules of blocks with normal defect groups*, Archiv der Mathematik **88** (2007), 289–296.

[18] **C. Dicu**, *On the multiplicity module of a pointed group*, va apărea în Mathematica, Tome **50** (73) (2008).

[19] Y. Fan, *The source algebras of nilpotent blocks over arbitrary ground-fields*, Journal of Algebra **165** (1994), 606–632.

[20] Y. Fan, *Two questions on blocks with nilpotent coefficient extensions*, Algebra Colloquium **4** (1997), 439–460.

[21] Y. Fan, *On group stable commutative separable semisimple subalgebras*, Math. Z. **243** (2003), 355–389.

[22] Y. Fan, L. Puig and Y. Zhou, *On a theorem of Fong*, J. Algebra **239** (2001), 735–741.

[23] Y. Fan and L. Puig, *On blocks with nilpotent coefficient extensions*, Algebras and Representation Theory **1** (1998), 27–73.

[24] H. Fottner and B. Külshammer, *On indecomposable and imprimitive modules for finite groups – a G-algebra approach*, J. London Math. Soc. (2) **59** (1999), no. 3, 828–844.

[25] H. Fottner, *A remark on the Puig correspondence and Thévenaz's lifting theorem*, Math. Z. **234** (2000), 551–572.

[26] J.A. Green, *Some remarks on defect groups*, Math.Z. **107** (1968), 133–150.

[27] G. Karpilovsky, *Induced modules over group graded algebras*, North-Holland Mathematics Studies (1990).

[28] B. Külshammer, *Crossed products and blocks with normal defect groups*, Comm. Algebra **13** (1985).

[29] B. Külshammer, *Lectures on block theory*, Cambridge University Press, Cambridge (1991).

[30] A. Mărcuş, *Representation Theory of Group Graded Algebras*, Nova Science Publishers, Commack, NY (1999).

[31] A. Mărcuş, *Static modules and Clifford theory for strongly graded rings*, Publ. Math. Debrecen **42**/3-4 (1993), 303–314.

[32] A. Mărcuş, *Clifford theory for projective modules over strongly graded rings*, Comm. Algebra **23** (12) (1995), 4393–4404 .

[33] A. Mărcuş, *Projective modules over twisted group algebras of p-solvable groups*, Publicationes Mathematicae Debrecen **53**/3-4 (1998), 367–374.

[34] A. Mărcuş, *Modular representation theory of finite groups. Recent results and open problems*, EFES, Cluj Napoca (2002).

[35] A. Mărcuş, *Blocks with cyclic defect groups, and Clifford extensions*, J. Algebra **287** (2005), 1–14.

[36] C. Năstăsescu, F. van Oystaeyen, *Graded ring theory*, North Holland (1982).

[37] C. Năstăsescu, *G-sets graded rings and modules*, Preprint Increst (1987).

[38] C. Năstăsescu, F. van Oystaeyen, *Methods of graded rings*, Springer-Verlag Berlin (2004).

[39] L. Puig, *Blocks of finite groups: The hyperfocal subalgebra of a block*, Springer-Verlag, Berlin (2002).

[40] L. Puig, *Pointed groups and construction of modules*, J. Algebra **116** (1988), 7–129.

[41] L. Puig, *Pointed groups and construction of characters*, Math. Z. **1176** (1988), 209–216.

[42] J.P. Serre, *Représentations linéaires des groupes finis*, Hermann Paris (1971).

[43] J. Thévenaz, *G-algebras and Modular Representation Theory*, Oxford Science Publication, The Clarendon Press, Oxford University Press, New-York (1995).

[44] Y. Zhou, *Relative freeness of pointed groups*, Algebra Colloquium **10:3** (2003), 445–450.

Index